
С. С. Марченков

# Импликативно неявные базисы в импликативно замкнутых классах трехзначной логики

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Марченков С. С. Импликативно неявные базисы в импликативно замкнутых классах трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 21. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. — С. 156–167. URL: https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2023-156 DOI: 10.20948/mvk-2023-156

# ИМПЛИКАТИВНО НЕЯВНЫЕ БАЗИСЫ В ИМПЛИКАТИВНО ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

***С. С. МАРЧЕНКОВ***
(МОСКВА)

## Введение

В теории функций многозначной логики существует несколько способов выражения (определения, задания) одних функций через другие. Наиболее известный из них — термальное задание функций (говорят также о задании функций с помощью суперпозиций). Другие способы используют различные функциональные и логические конструкции, однако в них всегда в какой-либо форме используются термы. В конце 1970-х гг. А. В. Кузнецов [6] предложил определения неявной выразимости и параметрической выразимости, основанные на функциональных уравнениях. Как известно, параметрическая выразимость приводит к оператору параметрического замыкания. Оператор параметрического замыкания относится к так называемым сильным операторам замыкания: при любом $k \geqslant 2$ он порождает на множестве $P_k$ функций $k$-значной логики конечное число замкнутых классов [1, 6, 19]. В отличие от параметрической выразимости оператор неявной выразимости (оператор неявного расширения) не является оператором замыкания. В середине 1990-х гг. систематическое изучение оператора неявного расширения начал О. М. Касим-Заде [2, 3], впоследствии в этом направлении стали работать его ученики. Довольно неожиданным оказался результат, что неявное расширение любого множества булевых функций совпадает с его параметрическим замыканием [2]. В дальнейшем был получен целый ряд результатов, касающихся критериев неявной полноты [5, 14–18].

В работе [13] автор предложил рассматривать обобщения неявной выразимости, когда в язык неявной выразимости добавляются новые логические связки. Было установлено, что на этом пути возможны лишь три обобщения, которые по добавляемым связкам названы дизъюнктивно неявной, импликативно неявной и негативно неявной выразимостью. Все эти обобщения различаются уже на множестве булевых функций либо на множестве функций трехзначной логики.

В тезисах [4] отмечено, что при любом $k \geqslant 3$ число неявных расширений в $P_k$ континуально (доказательство этого факта опубликовано не было). С другой стороны, в [13] установлено, что для операторов дизъюнктивно,

DOI: 10.20948/mvk-2023-156 

импликативно и негативно неявных расширений соответствующее число конечно при любом $k \geqslant 2$. Однако дизъюнктивно замкнутых классов в $P_3$ насчитывается около 200 [11] (в [11] дизъюнктивно замкнутые классы названы позитивно замкнутыми). Поэтому, например, подробно изучать структуру неявных расширений в $P_3$ имеет смысл лишь для импликативно неявных и негативно неявных расширений. В качестве «базы» следует, конечно, рассмотреть импликативно замкнутые и негативно замкнутые классы. При этом более интересным представляется случай импликативно замкнутых классов и импликативно неявных расширений. В работе [12] импликативно замкнутые классы охарактеризованы как дизъюнктивно (позитивно) замкнутые классы, содержащие тернарный дискриминатор $p(x, y, z)$. В частности, это описание позволило определить все 17 импликативно замкнутых классов в $P_3$. Таким образом, сложились предпосылки для исследования всех импликативно неявных расширений в $P_3$ (пока, впрочем, точное число таких расширений неизвестно).

В настоящей работе мы начинаем исследование множества импликативно неявных расширений в $P_3$ с уже известной его части — множества из 17 импликативно замкнутых классов. Прежде всего мы хотим развить технику построения неявно импликативных базисов, начав с упомянутых 17 импликативно замкнутых классов (отметим, что в данной работе под базисом мы понимаем конечную, но не обязательно независимую систему функций). В каждом из 17 импликативно замкнутых классов мы определяем импликативно неявный базис, который состоит из одной или двух не более чем двухместных функций (исключение составляет класс $H_3$ однородных функций, который в силу особенностей импликативно неявного расширения порождается из пустого множества). Отметим, что результаты из [13] гарантируют лишь верхнюю оценку 3 для порядка функций, импликативно неявно порождающих указанные классы. Кроме того, мы указываем одноместную функцию, импликативно неявное расширение которой отлично от всех импликативно замкнутых классов в $P_3$. Этот факт подтверждает вполне ожидаемое предположение, что оператор импликативного замыкания сильнее, чем оператор импликативно неявного расширения.

## § 1. Основные понятия

Пусть $k$ — натуральное число, $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и $P_k$ — множество всех функций на $E_k$ (множество функций $k$-значной логики). Пусть далее $g(x)$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функции из $P_k$. Говорят, что функция $g$ есть *эндоморфизм* функции $f$, если выполняется тождество

$$g(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(g(x_1), \ldots, g(x_n)).$$

В определении языка $\mathscr{L}_k$ неявной выразимости мы несколько отступаем от первоначального определения А. В. Кузнецова [6]. Исходными символами языка $\mathscr{L}_k$ являются предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений $E_k$, символы $f_i^{(n)}$ для обозначения всех $n$-местных функций $k$-значной логики, знак равенства $=$, логическая связка конъюнкция &, левая и правая скобки и запятая. Пусть $Q \subseteq P_k$. Введем понятия терма над $Q$. Все символы предметных переменных считаем термами над $Q$. Если $f_i^{(n)}$ — символ

$n$-местной функции из $Q$, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы над $Q$, то $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ также есть терм над $Q$. Если $t_1, t_2$ — термы над $Q$, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем равенством или элементарной формулой над $Q$. Все остальные формулы над $Q$ представляют собой конъюнкции элементарных формул над $Q$.

Всякий терм $t$ языка $\mathscr{L}_k$ определяет некоторую функцию $g$ из $P_k$ (переменная определяет селекторную функцию). Если $f_1, \ldots, f_r$ — все символы функций, входящие в терм $t$, то говорим, что терм $t$ определяет функцию $g$ через функции $f_1, \ldots, f_r$. Всякая формула языка $\mathscr{L}_k$ с $m$ переменными определяет некоторое $m$-местное отношение на $E_k$. Пусть $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула над $Q$ и формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на $E_k$. В этом случае говорим, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ *неявно выражает* отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ через функции множества $Q$. Отношение $\rho$ называем *неявно выразимым* через функции множества $Q$, если существует формула языка $\mathscr{L}_k$, которая неявно выражает отношение $\rho$ через функции множества $Q$.

Понятие неявной выразимости перенесем с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из $P_k$, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка $\mathscr{L}_k$ неявно выражает отношение $y = g(x_1, \ldots, x_m)$ (график функции $g$) через функции множества $Q$, то говорим, что формула $\Phi$ *неявно выражает* функцию $g$ через функции множества $Q$. Совокупность всех функций, неявно выразимых через функции множества $Q$, называем *неявным расширением* множества $Q$ и обозначаем через $I[Q]$.

Понятие неявной выразимости можно обобщить, вводя в язык неявной выразимости дополнительные логические связки. Мы будем рассматривать только одно обобщение, которое получается внесением в язык $\mathscr{L}_k$ логической связки импликации. Полученный язык обозначим $\mathscr{L}_{\rightarrow}$ (для упрощения обозначения индекс $k$ будем опускать; в дальнейшем рассматриваем язык $\mathscr{L}_{\rightarrow}$ только при $k = 3$). Понятие терма в языке $\mathscr{L}_{\rightarrow}$ совпадает с понятием терма в языке $\mathscr{L}_3$. Что касается понятия формулы, то для языка $\mathscr{L}_{\rightarrow}$ добавляется новый индуктивный пункт: если $\Phi_1, \Phi_2$ — формулы языка $\mathscr{L}_{\rightarrow}$, то $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$ — также формула языка $\mathscr{L}_{\rightarrow}$. Неявное расширение, соответствующее языку $\mathscr{L}_{\rightarrow}$, будем называть импликативно неявным расширением и обозначать посредством $I_{\rightarrow}$. Если $R = I_{\rightarrow}[Q]$, то множество $Q$ будем называть *импликативно неявным базисом* класса $R$.

Помимо импликативно неявной выразимости будем рассматривать импликативно параметрическую выразимость, когда в язык $\mathscr{L}_{\rightarrow}$ импликативно неявной выразимости добавляется квантор существования $\exists$ и вводится новый пункт образования формул: $(\exists x_i)\Phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$. Соответствующим образом определяются оператор импликативного замыкания и импликативно замкнутые классы [12].

Отметим один важный факт, которым мы далее неоднократно будем пользоваться. Логическим связкам конъюнкции и импликации отвечают одноименные булевы функции & и $\rightarrow$. Хорошо известно [10], что булевы функции $\&, \rightarrow$ порождают (в смысле операции суперпозиции) замкнутый класс $T_1$ всех функций, сохраняющих 1. Также полезно отметить, что любую функцию из класса $T_1$, отличную от константы 1, можно представить в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), в которой хотя бы одна конъюнкция не содержит отрицаний переменных.

В дальнейшем одноместную функцию $f(x)$ из $P_3$ будем задавать вектором значений $(f(0)f(1)f(2))$, а двухместную $g(x, y)$ — вектором размерности 9, где значения функции $g$ расположены в соответствии с лексикографическим порядком аргументов: $(0,0),(0,1),\ldots,(2,1),(2,2)$.

Согласно [12] в $P_3$ имеется ровно 17 импликативно замкнутых классов. Каждый из них определяется полугруппой эндоморфизмов с единицей — тождественной функцией. Ниже представлены все полугруппы эндоморфизмов, в которых, за исключением последней полугруппы, для сокращения записи удалена тождественная функция (012):

$$\{(021),(102),(120),(201),(210),0,1,2\},\{(120),(201),0,1,2\},$$
$$\{(120),(201)\},\{(021),0,1,2\},\{(021),0\},\{(102),0,1,2\},\{(102),2\},$$
$$\{(210),0,1,2\},\{(210),1\},\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\{(012)\}.$$

Для импликативно замкнутых классов, соответствующих данным полугруппам эндоморфизмов, вводим следующие обозначения:

$$H_3, S^c_{120}, S_{120}, S^c_{021}, S_{021}, S^c_{102}, S_{102}, S^c_{210}, S_{210}, T_{012}, T_{01}, T_{02}, T_{12}, T_0, T_1, T_2, P_3.$$

## § 2. Полученные результаты

Для любого $k \geqslant 2$ обозначим через $H_k$ множество всех функций из $P_k$, у которых группа автоморфизмов (т. е. эндоморфизмов, которые представляют собой перестановки на $E_k$) является полной симметрической группой перестановок на $E_k$. Функции из $H_k$ носят название однородных функций.

Теорема 1. *При любом $k \geqslant 3$ любое импликативно неявное расширение в $P_k$ содержит множество $H_k$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из множества $H_k$. Известно [7, 9], что при $n=1$ функция $f$ является селекторной. Кроме того, если функция $f'(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$ получена из функции $f$ отождествлением переменных, $m \leqslant k$ и $m \neq k-1$, то на всех наборах из $E_k^m$, содержащих ровно $m$ значений, значения функции $f'$ совпадают со значениями некоторой из переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$. Если же $m=k-1$, то функция $f'$ может как удовлетворять указанному свойству, так и принимать (единственное) значение, отличное от значений переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$. Мы используем указанные свойства функций из $H_k$, чтобы строить формулы языка $\mathscr{L}_{\rightarrow}$, определяющие данные функции.

Пусть $n \geqslant 2$ и $\varepsilon$ — отношение эквивалентности на множестве $\{1,\ldots,n\}$, имеющее $m, 2 \leqslant m \leqslant k$, классов эквивалентности. Предположим сначала, что на всех наборах, у которых отношение равенства между компонентами совпадает с отношением $\varepsilon$, значение функции $f$ совпадает со значением переменной $x_l$. Для отношения $\varepsilon$ определяем формулу

$$\left(\mathop{\&}_{(i,j)\in\varepsilon}(x_i=x_j)\right) \mathbin{\&} \left(\mathop{\&}_{(i,j)\notin\varepsilon}(x_i\neq x_j)\right) \rightarrow (y=x_l). \tag{1}$$

Несмотря на то, что формула (1) использует логическую операцию отрицание, нетрудно убедиться, что формулу (1) можно привести к эквивалентному виду, использующему только операции конъюнкции и импликации (соответствующие булевы функции порождают класс $T_1$). Следует также отметить, что формула (1) позволяет правильно определять значения функции $f$

на всех наборах из $E_k^n$, у которых отношение равенства между компонентами совпадает с отношением эквивалентности $\varepsilon$.

Предположим теперь, что $m = k - 1$ и значение функции $f$ на любом наборе, у которого отношение равенства между компонентами совпадает с отношением $\varepsilon$, отлично от значений всех переменных $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае к формулам (1) конъюнктивно добавляем формулу

$$\Big(\mathop{\&}_{(i,j)\in\varepsilon}(x_i = x_j)\Big) \mathbin{\&} \Big(\mathop{\&}_{(i,j)\notin\varepsilon}(x_i \neq x_j)\Big) \to \Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant n}(y \neq x_i)\Big). \tag{2}$$

Формула (2) также приводится к эквивалентному виду, использующему только логические связки конъюнкцию и импликацию.

Если отношение эквивалентности $\varepsilon$ является полным (состоит из одного класса эквивалентности), то соответствующая импликация имеет вид

$$\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant n)}(x_i = x_j)\Big) \to (y = x_1). \tag{3}$$

Конъюнкция формул (1) и (2), взятая по всем отношениям $\varepsilon$ эквивалентности на множестве $\{1, \ldots, n\}$, имеющим не менее двух и не более $k$ классов эквивалентности, с добавленным конъюнктивным сомножителем (3) и будет искомой формулой, определяющей график функции $f$. Теорема доказана.

Все дальнейшие утверждения относятся к трехзначной логике.

Утверждения 1–8 будут доказываться примерно по одной схеме. Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из рассматриваемого класса будет строиться в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, которая неявно определяет график функции $f$. Одно из дизъюнктивных слагаемых формулы $\Phi$ не содержит отрицаний равенств, что позволяет преобразовать формулу $\Phi$ в эквивалентную формулу языка $\mathscr{L}_{\to}$. Эту «положительную» конъюнкцию формулы $\Phi$ будем определять на первых шагах доказательства. Кроме того, в доказательствах утверждений 1–8 мы опускаем довольно несложную проверку принадлежности указанных в утверждениях функций соответствующим импликативно замкнутым классам.

Введем еще два соглашения, которые позволят упростить рассуждения. При рассмотрении наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ из $E_3^n$ нам потребуется выписывать длинные конъюнкции, которые задают равенства/неравенства между компонентами наборов. Чтобы не использовать сложных индексов, договоримся, что в случае наличия в наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ трех различных значений первые $l$ компонент набора будут равны одному значению, следующие $m$ компонент — другому и оставшиеся компоненты — третьему. Аналогично для наборов, состоящих из двух значений: здесь первые $l$ компонент равны между собой и отличны от остальных $n - l$ компонент. Разумеется, в произвольном наборе из $E_3^n$, состоящем из трех или двух значений, отношение равенства между компонентами может быть отлично от определенных выше. Однако указанные «стандартные» отношения позволяют легко строить нужные формулы в общем случае.

Далее, чтобы не выписывать всевозможные равенства/неравенства между компонентами набора, для наборов с тремя значениями используем сокращенную запись вида

$$(x_1 = \ldots = x_l) \mathbin{\&} (x_{l+1} = \ldots = x_m) \mathbin{\&} (x_{m+1} = \ldots = x_n) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} (x_1 \neq x_{l+1}) \mathbin{\&} (x_1 \neq x_{m+1}) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq x_{m+1}). \quad (4)$$

Аналогично для наборов с двумя значениями:

$$(x_1 = \ldots = x_l) \mathbin{\&} (x_{l+1} = \ldots = x_n) \mathbin{\&} (x_1 \neq x_{l+1}). \quad (5)$$

Утверждение 1. *Класс $P_3$ является импликативно неявным расширением любых двух неравных констант.*

Доказательство. Мы рассмотрим только константы 0 и 1, два других случая рассматриваются аналогичным образом.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_3$. Построим в виде ДНФ формулу $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, которая импликативно неявно определяет график функции $f$. Первая «конъюнкция» формулы $\Phi$ есть тождественно ложная формула $0 = 1$, а каждая из остальных конъюнкций истинна ровно на одном наборе $(a_1, \ldots, a_n, b)$, где $f(a_1, \ldots, a_n) = b$.

Предположим сначала, что набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит все три значения. В соответствии с принятым выше соглашением пусть

$$a_1 = \ldots = a_l = 0, \;\; a_{l+1} = \ldots = a_m = 1, \;\; a_{m+1} = \ldots = a_n = 2. \quad (6)$$

Для данного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ и значения $b = f(a_1, \ldots, a_n)$ создаем конъюнкцию

$$(x_1 = \ldots = x_l = 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} = \ldots = x_m = 1) \mathbin{\&} (x_{m+1} = \ldots = x_n) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} (x_{m+1} \neq 0) \mathbin{\&} (x_{m+1} \neq 1) \mathbin{\&} \varphi(x_{m+1}, y), \quad (7)$$

где $\varphi(x_{m+1}, y)$ совпадает с формулой $(y = 0)$, $(y = 1)$ или $(y = x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b = 0$, $b = 1$ или $b = 2$. Нетрудно видеть, что конъюнкция (7) истинна тогда и только тогда, когда набор $(a_1, \ldots, a_n, b)$ принадлежит графику функции $f$.

Рассмотрим далее случай, когда набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит два значения. Пусть $a_1 = \ldots = a_l$, $a_{l+1} = \ldots = a_n$ и $a_1 \neq a_{l+1}$. Предположим сначала, что $a_1 = 0$ и $a_{l+1} = 1$. Тогда соответствующая конъюнкция имеет вид

$$(x_1 = \ldots = x_l = 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} = \ldots = x_n = 1) \mathbin{\&} \varphi(y), \quad (8)$$

где $\varphi(y)$ совпадает с формулой $(y = 0)$, $(y = 1)$ или $(y \neq 0) \mathbin{\&} (y \neq 1)$ в зависимости от равенства $b = 0$, $b = 1$ или $b = 2$.

Если $a_1 = 0$ и $a_{l+1} = 2$, то требуемая формула имеет вид

$$(x_1 = \ldots = x_l = 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} = \ldots = x_n) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq 1) \mathbin{\&} \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ определяется как выше. Случай $a_1 = 1, a_{l+1} = 2$ рассматривается аналогично.

Предположим, наконец, что в наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ все компоненты равны. Тогда при $a_1 = 0$ пользуемся формулой

$$(x_1 = \ldots = x_n = 0) \mathbin{\&} \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ определяется, как в предыдущем пункте. При $a_1 = 1$ формула определяется аналогично. Предположим, что $a_1 = 2$. Тогда искомая формула принимает вид

$$(x_1 = \ldots = x_n)\,\&\,(x_1 \neq 0)\,\&\,(x_1 \neq 1)\,\&\,\varphi(y),$$

где формула $\varphi(y)$ определяется, как в предыдущих случаях. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Класс $T_0$ является импликативно неявным расширением функции $g(x) = (001)$.*

Доказательство. Подстановкой функции (001) в себя получаем константу 0. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $T_0$. В формулу $\Phi(x_1, \ldots \ldots, x_n, y)$, импликативно неявно определяющую график функции $f$, сразу вносим положительное дизъюнктивное слагаемое, которое отвечает нулевому набору:

$$(x_1 = \ldots = x_n = 0)\,\&\,(y = 0). \tag{9}$$

Далее замечаем, что отношения $x = 1$ и $x = 2$ выражаются формулами $(x \neq 0)\,\&\,(g(x) = 0)$ и $g(x) \neq 0$. Поэтому если $(a_1, \ldots, a_n)$ — набор из $E_3^n$, содержащий три значения, и $f(a_1, \ldots, a_n) = b$, то в формулу $\Phi$ включаем дизъюнктивное слагаемое, которое состоит из первых трех сомножителей формулы (4), а также множителя

$$(x_1 = 0)\,\&\,(x_{l+1} = 1)\,\&\,(x_{m+1} = 2)\,\&\,\varphi(x_1, x_{l+1}, x_{m+1}, y),$$

где $\varphi(x_1, x_{l+1}, x_{m+1}, y)$ совпадает с формулой $(y = x_1)$, $(y = x_{l+1})$ или $(y = x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b = 0$, $b = 1$ или $b = 2$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит одно или два значения. Утверждение доказано.

В утверждении 3 и далее арифметические операции рассматриваем по модулю 3.

Утверждение 3. *Класс $S_{120}$ является импликативно неявным расширением функции $x + 1 = (120)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $S_{120}$ тогда и только тогда, когда для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $E_3$ функция $f(x + a_1, \ldots, x + a_n)$ совпадает с одной из функций $x$, $x + 1$, $x + 2$. Отсюда следует, что при $n \geqslant 2$ формула, определяющая график функции $f$, может быть представлена как дизъюнкция конъюнкций вида

$$(x_2 = x_1 + a_2)\,\&\,\ldots\,\&\,(x_n = x_1 + a_n)\,\&\,(y = x_1 + b),$$

где значение $b$ определяется из соотношения $f(x, x + a_2, \ldots, x + a_n) = x + b$. При $n = 1$ функция $f(x_1)$ совпадает с одной из функций $x_1$, $x_1 + 1$, $x_1 + 2$. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Класс $S_{021}$ является импликативно неявным расширением константы 0.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S_{021}$. Легко видеть, что все функции класса $S_{021}$ сохраняют 0. Поэтому в формуле $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, определяющей график функции $f$, будет присутствовать дизъюнктивное слагаемое (9).

Пусть теперь набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит три значения и $f(a_1, \ldots$ $\ldots, a_n) = b$. Определим конъюнкцию, в которой первые три сомножителя берутся из формулы (4) и к ним конъюнктивно добавляется формула

$$(x_1 = 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq 0) \mathbin{\&} (x_{m+1} \neq 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq x_{m+1}) \mathbin{\&} \varphi(x_{l+1}, x_{m+1}, y), \qquad (10)$$

где $\varphi(x_{l+1}, x_{m+1}, y)$ совпадает с равенством $(y = 0)$, $(y = x_{l+1})$ или $(y = x_{m+1})$ в зависимости от соотношения $b = 0$, $b = a_{l+1}$ или $b = a_{m+1}$. Отметим, что конъюнкция (10) (вместе с множителями из (4)) истинна не только на наборе $(a_1, \ldots, a_n, b)$, но и на наборе $(2a_1, \ldots, 2a_n, 2b)$ (напомним, что функция $2x = (021)$ является эндоморфизмом функции $f$). Кроме того, помимо двух отмеченных наборов, конъюнкции (10) не удовлетворяют никакие другие наборы.

Набор $(a_1, \ldots, a_n)$, содержащий ровно два значения, рассматривается сходным образом. Предположим, например, что набор $(a_1, \ldots, a_n)$ состоит только из элементов 1,2. Тогда соответствующая конъюнкция получается из конъюнкции (5) конъюнктивным присоединением формулы

$$(x_1 \neq 0) \mathbin{\&} (x_{l+1} \neq 0) \mathbin{\&} \varphi(x_1, x_{l+1}, y),$$

где $\varphi(x_1, x_{l+1}, y)$ совпадает с формулой $(y = 0)$, $(y = x_1)$ или $(y = x_{l+1})$ в зависимости от равенства $b = 0$, $b = a_1$ или $b = a_{l+1}$.

Если набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит только значения 0,1, то в присоединяемой к конъюнкции (5) формуле множитель $x_1 \neq 0$ заменяется множителем $x_1 = 0$, а формула $\varphi$ будет совпадать соответственно с одной из формул $y = 0$, $y = x_{l+1}$ или $(y \neq 0) \& (y \neq x_{l+1})$.

Случай $a_1 = \ldots = a_n \neq 0$ рассматривается аналогично с очевидными редукциями в построениях. Утверждение доказано.

В утверждении 5 посредством $g(x, y)$ обозначим такую функцию из класса $T_{01}$, что $g(0,0) = g(0,1) = g(1,0) = 0$ и $g(x, y) = 1$ в остальных случаях. Пусть $g_1(x) = g(x, x)$.

Утверждение 5. *Класс $T_{01}$ является импликативно неявным расширением функции $g(x, y)$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_{01}$. Классу $T_{01}$ принадлежат только три одноместные функции: $x, g_1(x)$ и $g_2(x) = (010)$. Поэтому в формулу $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, определяющую график функции $f$, включаем дизъюнктивное слагаемое

$$(x_1 = \ldots = x_n) \mathbin{\&} \varphi(x_1, y),$$

где $\varphi(x_1, y)$ совпадает с формулой $(y = x_1)$, $(y = g_1(x_1))$ или

$$((x_1 = g_1(x_1)) \to (y = x_1)) \mathbin{\&} ((x_1 \neq g_1(x_1)) \to (y \neq x_1) \mathbin{\&} (y \neq g_1(x_1)))$$

в зависимости от равенства $f(x_1, \ldots, x_1) = x_1$, $f(x_1, \ldots, x_1) = g_1(x_1)$ или $f(x_1, \ldots, x_1) = g_2(x_1)$. В последнем случае формула $\varphi(x_1, y)$ легко приводится к ДНФ, в которой одно из дизъюнктивных слагаемых не содержит отрицаний.

Пусть теперь $n \geqslant 2$, $(a_1, \ldots, a_n) \in E_3^n$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = b$. Предположим, что набор $(a_1, \ldots, a_n)$ содержит три значения. Определяем соответствующую формулу, добавляя конъюнктивно к формуле (4) формулу

$$(x_1 = g_1(x_1)) \mathbin{\&} (x_{l+1} = g_1(x_{l+1})) \mathbin{\&} (g(x_1, x_{l+1}) = x_1) \mathbin{\&} \varphi(x_1, x_{l+1}, x_{m+1}, y),$$

где $\varphi(x_1, x_{l+1}, x_{m+1}, y)$ совпадает с равенством $(y = x_1)$, $(y = x_{l+1})$ или $(y = x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b = a_1$, $b = a_{l+1}$ или $b = a_{m+1}$.

Предположим, что набор $(a_1,\ldots,a_n)$ содержит два значения. Пусть $a_1=0$ и $a_{l+1}=1$. Тогда к формуле (5) конъюнктивно добавляем формулу

$$(x_1=g_1(x_1))\ \&\ (x_{l+1}=g_1(x_{l+1}))\ \&\ (g(x_1,x_{l+1})=x_1)\ \&\ \varphi(x_1,x_{l+1},y), \qquad (11)$$

где $\varphi(x_1,x_{l+1},y)$ совпадает с формулой $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y\neq x_1)\ \&\ (y\neq x_{l+1})$ в зависимости от соотношения $b=a_1$, $b=a_{l+1}$ или $(b\neq a_1)\,\&\,(b\neq a_{l+1})$.

В случаях $a_1=0$, $a_{l+1}=2$ и $a_1=1$, $a_{l+1}=2$ вместо первых трех сомножителей формулы (11) берутся соответственно формулы

$$(x_{l+1}\neq g_1(x_{l+1}))\ \&\ (g(x_1,x_{l+1})\neq x_1),$$

$$(x_{l+1}\neq g_1(x_{l+1}))\ \&\ (g(x_1,x_{l+1})=x_1).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Класс $T_{012}$ является импликативно неявным расширением системы функций $\{2x+2y,\max(x,y)\}$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in T_{012}$. Прежде всего в формулу $\Phi(x_1,\ldots,\ x_n,y)$, определяющую график функции $f$, включаем дизъюнктивное слагаемое

$$(x_1=\ldots=x_n)\ \&\ (y=x_1). \qquad (12)$$

Предположим, что $(a_1,\ldots,a_n)\in E_3^n$, набор $(a_1,\ldots,a_n)\in E_3^n$ содержит три значения и $f(a_1,\ldots,a_n)=b$. К формуле (4) конъюнктивно добавляем формулу

$$(\max(x_1,x_{l+1})=x_{l+1})\ \&\ (\max(x_{l+1},x_{m+1})=x_{m+1})\ \&\ \varphi(x_1,x_{l+1},x_{m+1},y), \quad (13)$$

где $\varphi(x_1,x_{l+1},x_{m+1},y)$ совпадает с равенством $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y=x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b=0$, $b=1$ или $b=2$. Заметим, что для попарно различных значений переменных $x_1,x_{l+1},x_{m+1}$ конъюнкция первых двух сомножителей формулы (13) истинна только для значений $x_1=0$, $x_{l+1}=1$, $x_{m+1}=2$.

Пусть теперь набор $(a_1,\ldots,a_n)$ содержит только два значения. Тогда для получения значения, отличного от $a_1,\ldots,a_n$, будем использовать функцию $2x+2y$. Для значений 0 и 1 соответствующая формула получается из формулы (5) конъюнктивным добавлением формулы

$$(\max(x_1,x_{l+1})=x_{l+1})\ \&\ (\max(x_{l+1},2x_1+2x_{l+1})=2x_1+2x_{l+1})\ \&$$
$$\&\ \varphi(x_1,x_{l+1},y), \quad (14)$$

где $\varphi(x_1,x_{l+1},y)$ совпадает с $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y=2x_1+2x_{l+1})$ в зависимости от равенства $b=0$, $b=1$ или $b=2$. Здесь также следует отметить, что для различных значений переменных $x_1,x_{l+1}$ конъюнкция первых двух сомножителей формулы (14) истинна только в случае $x_1=0$, $x_{l+1}=1$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда два значения набора $(a_1,\ldots,a_n)$ суть 0, 2 или 1, 2. Утверждение доказано.

В утверждении 7 посредством $g(x,y)$ обозначим такую функцию из класса $S^c_{021}$, что $g(1,1)=g(1,2)=1$, $g(2,1)=g(2,2)=2$ и $g(x,y)=0$ в остальных случаях.

Утверждение 7. *Класс $S^c_{021}$ является импликативно неявным расширением системы функций* $\{2x+2y, g(x,y)\}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in S^c_{021}$. Как в утверждении 6, в конструируемую формулу включаем дизъюнктивное слагаемое (12). Предположим теперь, что $n\geqslant 2$, $(a_1,\ldots,a_n)\in E_3^n$, $f(a_1,\ldots,a_n)=b$ и набор $(a_1,\ldots,a_n)$ содержит три значения. По аналогии с формулой (13) определяем «добавочную» конъюнкцию вида

$$(g(x_1,x_{l+1})=g(x_1,x_{m+1}))\mathbin{\&}\varphi(x_1,x_{l+1},x_{m+1},y),$$

где $\varphi(x_1,x_{l+1},x_{m+1},y)$ совпадает с равенством $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y=x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b=0$, $b=1$ или $b=2$. Отметим, что для попарно различных значений переменных $x_1,x_{l+1},x_{m+1}$ конъюнкция первых двух сомножителей данной конъюнкции истинна только для двух троек значений переменных $x_1$, $x_{l+1}$, $x_{m+1}$: $(0,1,2)$ и $(0,2,1)$.

Пусть теперь набор $(a_1,\ldots,a_n)$ содержит только значения 0 и 1. Тогда соответствующая конъюнкция помимо множителей (5) будет конъюнктивно включать формулу

$$(g(x_1,x_{l+1})=g_1(x_1,2x_1+2x_{l+1}))\mathbin{\&}\varphi(x_1,x_{l+1},y),$$

где формула $\varphi(x_1,x_{l+1},y)$ совпадает с $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y=2x_1+2x_{l+1})$ в зависимости от равенства $b=0$, $b=1$ или $b=2$. Вновь следует отметить, что первые два множителя этой конъюнкции истинны только на наборах $(0,1)$ и $(0,2)$.

Аналогичным образом рассматриваются наборы, содержащие значения $0,2$ и $1,2$. Утверждение доказано.

В утверждении 8 посредством $g(x,y)$ обозначим такую функцию из класса $S^c_{120}$, что $g(0,1)=g(2,1)=0$, $g(0,2)=g(1,2)=1$ и $g(1,0)=g(2,0)=2$.

Утверждение 8. *Класс $S^c_{120}$ является импликативно неявным расширением системы функций* $\{2x+2y, g(x,y)\}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in S^c_{120}$. Как в предыдущих двух утверждениях, в конструируемую формулу $\Phi(x_1,\ldots,x_n,y)$ включаем дизъюнктивное слагаемое (12). Предположим теперь, что $n\geqslant 2$, $(a_1,\ldots,a_n)\in E_3^n$ и набор $(a_1,\ldots,a_n)$ содержит три значения. Замечаем, что конъюнкция

$$\begin{aligned}(g(x_1,x_{l+1})=g(x_{m+1},x_{l+1})=x_1)\mathbin{\&}(g(x_1,x_{m+1})=g(x_{l+1},x_{m+1})=x_{l+1})\mathbin{\&}\\ \mathbin{\&}(g(x_{l+1},x_1)=g(x_{m+1},x_1)=x_{m+1})\end{aligned}\tag{15}$$

истинна на наборе $(a_1,\ldots,a_n)$ тогда и только тогда, когда

$$(a_1,a_{l+1},a_{m+1})\in\{(0,1,2),\ (1,2,0),\ (2,0,1)\}.$$

Поэтому для набора $(a_1,\ldots,a_n)$ (а также для двух других наборов, полученных из исходного набора покомпонентным применением функций $x+1$ и $x+2$) соответствующая формула $\Phi$ будет включать формулы (4) и (15), а также множитель $\varphi(x_1,x_{l+1},x_{m+1},y)$, который совпадает с $(y=x_1)$, $(y=x_{l+1})$ или $(y=x_{m+1})$ в зависимости от равенства $b=a_1$, $b=a_{l+1}$ или $b=a_{m+1}$.

При рассмотрении наборов $(a_1,\ldots,a_n)$, содержащих ровно два значения, следует воспользоваться функцией $2x+2y$ для получения значения, отличного от значений $a_1,\ldots,a_n$. Утверждение доказано.

Из теоремы 1, утверждений 1–8 и соображений сопряженности вытекает

Теорема 2. *Имеют место следующие соотношения:*

$$P_3=I_{\to}[0,1],\quad T_0=I_{\to}[(001)],\quad T_1=I_{\to}[(211)],\quad T_2=I_{\to}[(202)],$$
$$S_{120}=I_{\to}[(120)],\quad S_{021}=I_{\to}[0],\quad S_{210}=I_{\to}[1],\quad S_{102}=I_{\to}[2],$$
$$T_{01}=I_{\to}[(001011111)],\quad T_{02}=I_{\to}[(020222022)],\quad T_{12}=I_{\to}[(111112122)],$$
$$T_{012}=I_{\to}[2x+2y,\max(x,y)],\quad S^c_{021}=I_{\to}[2x+2y,(000011022)],$$
$$S^c_{210}=I_{\to}[2x+2y,(010111212)],\quad S^c_{102}=I_{\to}[2x+2y,(002112222)],$$
$$S^c_{120}=I_{\to}[2x+2y,(001211202)],\quad H_3=I_{\to}[\varnothing].$$

Теорема 3. *В $P_3$ множество всех импликативно неявных расширений собственным образом включает множество всех импликативно замкнутых классов.*

Доказательство. Мы покажем, что импликативно неявное расширение одноместной функции (100) отлично от всех импликативно замкнутых классов в $P_3$. Заметим прежде всего, что функция (100) не принадлежит ни одному из импликативно предполных (в $P_3$) классов $T_0,T_1,T_2,S_{120}$. Следовательно, функция (100) образует импликативный базис в $P_3$. Если бы множество импликативно неявных расширений совпадало с множеством импликативно замкнутых классов, то импликативно неявное расширение функции (100) также совпадало бы с классом $P_3$. В частности, в это расширение входила бы (одноместная) функция-константа 0. Мы установим далее, что это неверно.

Предположим, напротив, что $0\in I_{\to}[(100)]$. И пусть формула $\Phi(x,y)$ импликативно неявно определяет константу 0 (как функцию от $x$). Тогда формула $\Phi(x,x)$, очевидно, определяет отношение $x=0$. Заметим, что в формулу $\Phi(x,x)$ могут входить лишь термы, реализующие функции (011), (012), (100) (тождественная функция (012) реализуется термом $x$). Следовательно, в ДНФ формулы $\Phi(x,x)$ с функциональной точки зрения могут присутствовать лишь равенства/неравенства между указанными функциями, зависящими от переменной $x$. Исключая из этих равенств тождественно истинные и тождественно ложные равенства, получаем, что любая конъюнкция из ДНФ формулы $\Phi(x,x)$ может содержать лишь одно из двух противоположных равенства $(011)(x)=x$ и неравенства $(011)(x)\neq x$. Первая из этих формул задает отношение $x\in\{0,1\}$, вторая — $(x=2)$. Таким образом, всякая нетривиальная конъюнкция ДНФ формулы $\Phi(x,x)$ одноэлементна и определяет одно из отношений $x\in\{0,1\}$ или $x=2$. Противоречие завершает доказательство теоремы.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика — 1977. — Т. 16, №4. — С. 397–416.
2. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 1995. — №2. — С. 44–49.
3. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. — 1996. — Т. 348, №3. — С. 299–301.
4. Касим-Заде О. М. О неявных формах выразимости в многозначных логиках // Всероссийская конференция «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, июнь 2004 г.). Материалы конференции. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2004. — С. 32–35.
5. Касим-Заде О. М. О неявной полноте в $k$-значной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 2007. — №3. — С. 9–13.
6. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
7. Марченков С. С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.
8. Марченков С. С. Представление функций суперпозициями. — М.: КомКнига, 2010, 189 с.
9. Марченков С. С. Операторы замыкания логико-функционального типа. — М.: МАКС Пресс, 2012. 99 с.
10. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 135 с.
11. Марченков С. С. Позитивно замкнутые классы трехзначной логики. // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, №1. — С. 67–83.
12. Марченков С. С. Расширения оператора позитивного замыкания с помощью логических связок // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. Т. 25, №4. — С. 46–58.
13. Марченков С. С. Неявная выразимость в многозначной логике // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2022. — №3. — С. 41–48.
14. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в $k$-значной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 77–90.
15. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 27–74.
16. Старостин М. В. Неявно предполные классы и критерий полноты в трехзначной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 2018. — №2. — С. 182–184.
17. Старостин М. В. О некоторых неявно предполных классах функций, сохраняющих подмножества // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 2018. — №6. — С. 36–40.
18. Старостин М. В. О некоторых неявно предполных классах монотонных функций в $P_k$ // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, №4. — С. 106–114.
19. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — V. 101, N3. — P. 427–430.


Поступило в редакцию 5 V 2023,
окончательный вариант 20 VIII 2023.