ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 21

С. А. Ложкин

Уточненные оценки функции Шеннона для сложности схем из некоторых классов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ложкин С. А. Уточненные оценки функции Шеннона для сложности схем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 21. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. — С. 168–193. URL: https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2023-168 DOI: 10.20948/mvk-2023-168

УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА ДЛЯ СЛОЖНОСТИ СХЕМ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ*)

С. А. ЛОЖКИН

(МОСКВА)

§ 1. Основные определения и обозначения, формулировки полученных результатов

Пусть $B=\{0,1\}$, B^n (где $n=1,2,\ldots$) — единичный n-мерный куб**), т. е. множество наборов длины n из нулей и единиц, с i-м разрядом которых связана булева переменная x_i, $i=1,\ldots,n$, а $P_2(n)$ — множество функций алгебры логики или, иначе, булевых функций, зависящих от этих переменных и отображающих B^n в B. Везде далее по умолчанию под функцией будем понимать функцию алгебры логики, а под переменной — булеву переменную.

Будем рассматривать формулы и схемы из функциональных элементов над произвольным полным базисом $\text{Б}=\{\mathscr{E}_1,\ldots,\mathscr{E}_b\}$, где элемент $\mathscr{E}_i$, $i=1,\ldots,b$, реализует функцию $\varphi_i(x_1,\ldots,x_{k_i})$, которая в случае $k_i\geqslant 2$ существенно зависит от всех своих переменных, а его сложность характеризуется положительным действительным числом L_i, которое называется *весом* элемента $\mathscr{E}_i$. Для элемента $\mathscr{E}_i$, $i\in[1,b]$, такого, что $k_i\geqslant 2$, определим также его *приведенный вес* ρ_i, равный отношению $\dfrac{L_i}{k_i-1}$, и введем величину $\rho_{\text{Б}}=\min\limits_{k_i\geqslant 2}\rho_i$, которая считается *приведенным весом* базиса Б. Под схемой по умолчанию будем иметь в виду схему из функциональных элементов в базисе Б, а формулы, как обычно, будем считать частным случаем схем. Стандартным образом определим сложность $L(\Sigma)$ схемы (формулы) Σ как сумму весов ее элементов.

Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что в базисе Б есть хотя бы один так называемый *усилительный* элемент $\mathscr{E}_i$, для которого $k_i=1$ и $\varphi_i=x_1$. При этом под *усилительной* схемой будем понимать схему, в которой не ветвятся выходы элементов с приведенным весом $\rho_{\text{Б}}$,

*) Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

**) Те понятия, которые в настоящей работе не определяются, могут быть найдены, например, в [3, 9, 10].

DOI: 10.20948/mvk-2023-168

т.е. в терминологии [1] схему с нулевой глубиной ветвления. Заметим, что формула является усилительной схемой.

Рассмотрим классы $U_{\text{Б}}^{\Phi}$, $U_{\text{Б}}^{\text{С}}$ и $U_{\text{Б}}^{\text{УС}}$, которые состоят соответственно из формул, схем и усилительных схем в базисе Б и являются полными в том смысле, что в каждом из них можно реализовать любую функцию. При этом, очевидно, $U_{\text{Б}}^{\Phi} \subset U_{\text{Б}}^{\text{УС}} \subset U_{\text{Б}}^{\text{С}}$. Для любого из этих классов вида $U_{\text{Б}}^{\text{А}}$ и произвольной функции (или системы функций) f обычным образом определим ее сложность $L_{\text{Б}}^{\text{А}}(f)$ как минимальную сложность схем из $U_{\text{Б}}^{\text{А}}$, реализующих f, а затем для натурального n, $n = 1, 2, \ldots$, введем соответствующую функцию Шеннона

$$L_{\text{Б}}^{\text{А}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L_{\text{Б}}^{\text{А}}(f).$$

Напомним, что асимптотическое поведение функций Шеннона $L_{\text{Б}}^{\Phi}(n)$ и $L_{\text{Б}}^{C}(n)$ было установлено О.Б. Лупановым (см. [7, 8], а также [9]), причем из полученных им результатов следует, что*)

$$L_{\text{Б}}^{\text{С}}(n) \sim L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(n) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \qquad L_{\text{Б}}^{\Phi}(n) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}. \tag{1}$$

При этом оказалось, что относительная погрешность оценок функций Шеннона в (1), равная отношению разности между верхней и нижней оценками функции Шеннона $L_{\text{Б}}^{\text{А}}(n)$ к ней самой, равна $O\left(\frac{L_{\text{Б}}^{\text{А}}(n)}{2^n} \log\left(\frac{2^n}{L_{\text{Б}}^{\text{А}}(n)}\right)\right)$, т.е. равна $O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)$ для класса $U_{\text{Б}}^{\Phi}$ и $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ для классов $U_{\text{Б}}^{\text{С}}$, $U_{\text{Б}}^{\text{УС}}$.

В работе [1] для функций Шеннона $L_{\text{Б}}^{\Phi}(n)$ и $L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(n)$ были впервые получены так называемые асимптотические оценки высокой степени точности, т.е. оценки, имеющие относительную погрешность $O\left(\frac{1}{\log n}\right) = O\left(\frac{L_{\text{Б}}^{\Phi}(n)}{2^n}\right)$ и $O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(n)}{2^n}\right)$ соответственно. Было доказано, что имеют место равенства**)

$$L_{\text{Б}}^{\Phi}(n) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{æ_{\text{Б}} \log\log n \pm O(1)}{\log n}\right), \tag{2}$$

$$L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(n) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{(2 + æ_{\text{Б}}) \log n \pm O(1)}{n}\right), \tag{3}$$

где $æ_{\text{Б}} = 1$, если все так называемые «легкие» элементы базиса Б, т.е. элементы с приведенным весом $\rho_{\text{Б}}$, реализуют либо только дизъюнкции переменных, либо только конъюнкции переменных, либо только линейные функции и $æ_{\text{Б}} = 0$ в остальных случаях.

В работах [1, 2, 4, 5, 11] рассмотрены и другие примеры классов схем, в которых для соответствующих «сложностных» функций Шеннона удалось получить асимптотические оценки высокой степени точности.

---

*) Все логарифмы берутся по основанию 2, а асимптотическое равенство $a(n) \sim d(n)$ двух функций натурального аргумента n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет место тогда и только тогда, когда $a(n) = (1 + o(1))d(n)$.

**) Наличие в правой части равенств (2), (3) слагаемого вида $\pm a(n)$ означает, что для левой части соответствующего равенства имеют место верхняя и нижняя оценки, получаемые из его правой части заменой данного слагаемого слагаемым $|a(n)|$ и $-|a(n)|$ соответственно.

Напомним, что в [1] приведена без доказательства верхняя оценка

$$L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n) \leqslant \rho_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{(1 + æ_{\mathrm{Б}}) \log n + \log\log n + O(1)}{n}\right), \tag{4}$$

которая была доказана в [2, теорема 8]. Заметим, что верхние оценки (4) достигаются на схемах из класса $U^{\mathrm{C},1}_{\mathrm{Б}}$, т. е. схемах с глубиной ветвления 1, которые допускают ветвление выхода у элементов с приведенным весом $\rho_{\mathrm{Б}}$, но не допускают цепочек длины 2 из элементов указанного вида с ветвящимися выходами. При этом оказалось (см. [2, лемма 22]), что оценка (4) является оценкой высокой степени точности функции Шеннона $L^{\mathrm{C},1}_{\mathrm{Б}}(n)$ для сложности схем из класса $U^{\mathrm{C},1}_{\mathrm{Б}}$.

Заметим также, что верхнюю оценку (4) в случае $æ_{\mathrm{Б}} = 0$ и (см., например, [4]) нижнюю оценку

$$L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n) \geqslant \rho_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - O(1)}{n}\right) \tag{5}$$

можно считать оценками функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n)$, близкими к асимптотическим оценкам высокой степени точности с учетом того, что их относительная погрешность равна

$$o\left(\frac{\log n}{n}\right) = o\left(\frac{L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n)}{2^n} \log\left(\frac{2^n}{L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n)}\right)\right), \tag{6}$$

что существенно меньше, чем относительная погрешность соответствующих оценок (1).

В настоящей работе рассматриваются также схемы в стандартном базисе $\mathrm{Б}_0$, который состоит из элементов $\mathscr{E}_{\&}$, $\mathscr{E}_{\vee}$, $\mathscr{E}_{\neg}$, $\mathscr{E}_{\mathrm{УС}}$, имеющих вес 1 и реализующих функции $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$, x_1 соответственно. При этом, очевидно, функционал сложности $L(\Sigma)$ схемы Σ просто равен числу ее элементов. Индекс базиса $\mathrm{Б}_0$ во введенных выше обозначениях классов схем, функционалов сложности функций и соответствующих им функций Шеннона будем опускать.

В работе [6] приведено более простое, по сравнению с [2], доказательство для базиса $\mathrm{Б}_0$ верхней оценки (4). Основным результатом настоящей работы является обобщение указанного варианта доказательства (4) на случай произвольного базиса Б, а также обоснование соответствующей нижней оценки, т. е. доказательство следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. *При всех натуральных n, $n = 1, 2, \ldots$, для функции Шеннона $L^{\mathrm{C},1}_{\mathrm{Б}}(n)$ выполнено равенство*

$$L^{\mathrm{C},1}_{\mathrm{Б}}(n) = \rho_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{(1 + æ_{\mathrm{Б}}) \log n + \log\log n \pm O(1)}{n}\right). \tag{7}$$

Как уже говорилось, верхняя оценка (7) при $æ_{\mathrm{Б}} = 0$ и нижняя оценка (5) имеют относительную погрешность вида (6), т. е. являются оценками функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n)$, близкими к асимптотическим оценкам высокой степени точности.

В §§2–4 устанавливаются необходимые для доказательства соотношений (3) и (7) верхние оценки исследуемых функций Шеннона, а в §5 на основе мощностного подхода получаются соответствующие нижние оценки этих функций.

§ 2. Универсальные множества функций и селекторные разбиения переменных

Напомним основные понятия и некоторые результаты [1,3], связанные с универсальными для заданной функции множествами функций и их построением на основе специальных разбиений переменных этой функции.

Пусть по-прежнему $B=\{0,1\}$, а B^n (где $n=1,2,\ldots$) — n-я декартова степень множества B, т.е. множество наборов вида $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i\in B$ при всех i, $i\in[1,n]$. Напомним также, что $X(n)$ для натурального n — множество переменных x_i, $i\in[1,n]$, а $P_2(n)$ — множество функций от переменных из $X(n)$.

Пусть $U_{\text{Б}}^{\text{A}}$ — один из введенных в §1 классов схем. Тогда под *сложностью* $L(\Sigma)$ схемы Σ, $\Sigma\in U_{\text{Б}}^{\text{A}}$, будем понимать сумму весов всех элементов Σ, а *сложность* $L_{\text{Б}}(\text{F})$ для (системы) функций F определим как минимальную из сложностей реализующих ее схем в классе $U_{\text{Б}}^{\text{A}}$.

Для набора $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ из B^n число $\nu(\sigma)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i 2^{n-i}$ задает его так называемый лексикографический номер. Под *отрезком* куба B^n будем, как обычно, понимать такое множество его наборов, ν-номера которых образуют отрезок целых чисел. Отрезок четной длины (мощности), который начинается с набора, имеющего четный номер, будем называть *четным*.

Пусть $\varphi(y_1,\ldots,y_p)$ — существенная функция, т.е. функция, существенно зависящая от всех своих переменных. Следуя [1, 3], будем говорить, что множество функций G, $G\subseteq P_2(m)$, является *универсальным для функции* $\varphi(y_1,\ldots,y_p)$, или *φ-универсальным множеством порядка* m, если для любой функции g, $g\in P_2(m)$, существуют такие функции $g_1,\ldots,g_p$ из G, что

$$\varphi(g_1,\ldots,g_p)=g. \tag{8}$$

В том случае, когда равенство (8) для произвольной функции g из $P_2(m)$ и некоторых функций $g_1,\ldots,g_p$ из G выполняется на некотором множестве наборов δ, $\delta\subseteq B^m$, будем говорить, что множество G является *φ-универсальным для множества наборов δ множеством (функций) порядка m*.

Заметим, что последнее понятие соответствует понятию φ-универсальной матрицы высоты $|\delta|$ из [1, §4], если строкам этой матрицы взаимно-однозначно сопоставить наборы куба B^m из множества δ, а ее столбцы рассматривать как столбцы значений функций из множества G на множестве наборов из δ.

Заметим также, что в случае $\varphi(y_1,\ldots,y_p)=y_1\vee\ldots\vee y_p$ понятие φ-универсального множества совпадает с понятием дизъюнктивного универсального множества ранга p из [3].

Так же, как и дизъюнктивное универсальное множество (см. [3]), будем строить φ-универсальное множество порядка m на основе разбиения Δ, $\Delta=(\delta_1,\ldots,\delta_p)$, единичного куба B^m. Для каждого i, $i=1,\ldots,p$, в силу существенной зависимости функции φ от переменной y_i найдется набор двоичных констант $\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,p}$ такой, что

$$\varphi(\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1},\ldots,\alpha_{i,p})=y_i\oplus\alpha_{i,i}. \tag{9}$$

Обозначим через $G^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$, множество всех тех функций из $P_2(m)$, которые при любом i, $1\leqslant i\leqslant p$ и $j\neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i,

и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(p)}. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (8) имеет место для любой функции g, $g \in P_2(m)$, если g_i, $i = 1, \ldots, p$, — функция из $G^{(i)}$, совпадающая на δ_i с функцией $g \oplus \alpha_{i,i}$. Действительно, для любого i, $i = 1, \ldots, p$, и любого набора β, $\beta \in \delta_i$, в силу (9), получим

$$\varphi(g_1(\beta), \ldots, g_p(\beta)) = \varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ g(\beta) \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = g(\beta).$$

Следовательно, множество G представляет собой φ-универсальное множество порядка m, которое будем называть *стандартным φ-универсальным множеством, связанным с разбиением* Δ.

О п р е д е л е н и е. Разбиение D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, множества переменных Y, $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$, называется *селекторным разбиением переменных функции* $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ тогда и только тогда, когда для всякого i, $i = 1, \ldots, d$, и для любой переменной y, $y \in Y_i$, найдутся константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ такие, что при подстановке $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_d$ вместо переменных из $Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_d$ соответственно выполняется равенство $\varphi = y \oplus \alpha_i$.

Отметим, что если функция $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ существенно зависит от всех своих переменных, то тривиальное разбиение D множества ее переменных, при котором $Y_i = \{y_i\}$, $i = 1, \ldots, p$, является селекторным. Заметим также, что если функция φ симметрична по переменным y_i, y_j, то они не могут входить в одну и ту же компоненту селекторного разбиения. Отсюда следует, что у функции $\varphi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \ldots \vee y_p$ нет нетривиальных селекторных разбиений булевых переменных. В то же время функция $\varphi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee y_2 y_{t+2} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}$ имеет селекторное разбиение с компонентами $Y_1 = \{y_1\}, \ldots, Y_t = \{y_t\}, Y_{t+1} = \{y_{t+1}, \ldots, y_{2t}\}$.

Л е м м а 1. *Пусть D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, — селекторное разбиение множества переменных $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ функции $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$, где $|Y_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, p$, и пусть $s_1, \ldots, s_d$ — четные числа, удовлетворяющие условию $s_1 p_1 + \ldots + s_d p_d \geqslant 2^m$. Тогда существует φ-универсальное множество G порядка m такое, что*[*])

$$|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_d}, \tag{11}$$

$$L^{\mathrm{C}}(\vec{G}) \leqslant 4|G| + O(d \cdot 2^{m+s/2}). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, множество номеров булевых переменных из Y_j составляет отрезок $I_j = [a_j, a_{j+1})$, где $a_1 = 1$, $a_{d+1} = p + 1$ и $|I_j| = a_{j+1} - a_j = p_j$ при любом j, $j \in [1, d]$. Данное предположение не ограничивает, очевидно, общность проводимых рассуждений. Рассмотрим сначала случай, когда

$$p_1 s_1 + \ldots + p_d s_d = 2^m.$$

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба B^m на последовательные отрезки длины $\underbrace{s_1, \ldots, s_1}_{p_1}, \ \ldots, \ \underbrace{s_d, \ldots, s_d}_{p_d}$ соответственно и пусть i-й отрезок Δ,

[*]) Для множества функций G, $G \subseteq P_2(m)$, через $\vec{G}$ обозначается система (вектор-строка) функций, упорядоченных в соответствии с лексикографическими номерами их столбцов значений.

$i = 1, \ldots, p$, связан с булевой переменной y_i функции φ. При этом для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, отрезки длины s_j с номерами из I_j будут соответствовать булевым переменным из Y_j. Из селекторности разбиения D следует, что для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, и каждого i, $i \in I_j$, существуют константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,j-1}, \alpha_{i,j+1}, \ldots, \alpha_{i,d}$, при подстановке которых вместо булевых переменных из $Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_d$ соответственно функция φ переходит в функцию вида $y_i \oplus \beta_i$, где $\beta_i \in B$.

Определим (см. рис. 1) для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, множество $G^{(j)}$ как множество всех тех функций из $P_2(m)$, которые:

1) принимают на любом отрезке δ_i, $i \in ([1, p] \setminus I_j)$, значение $\alpha_{i,j}$;
2) принимают одинаковые значения на любых двух наборах с одинаковыми «внутренними» номерами из различных отрезков Δ, соответствующих булевым переменным из Y_j.

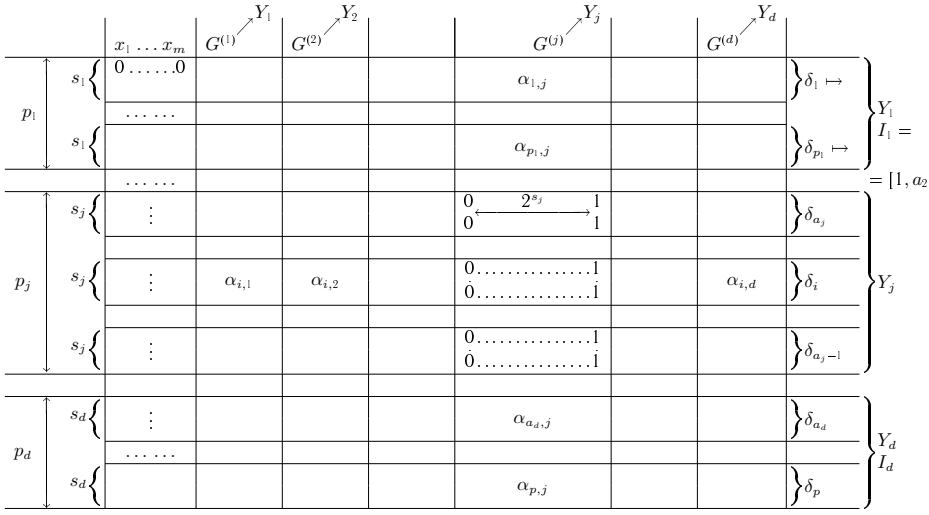

Рис. 1. Таблица функций алгебры логики из φ-универсального множества G

Заметим, что у любой функции из $G^{(i)}$, $i \in [1, d]$, те части столбца ее значений, которые соответствуют отрезкам разбиения Δ с номерами из I_i и рассматриваются как наборы «высоты» s_i, совпадают между собой и что в качестве указанных наборов у различных функций из $G^{(i)}$ встречаются все 2^{s_i} различных наборов. Отсюда следует, что $|G^{(i)}| = 2^{s_i}$, так как на остальных отрезках разбиения Δ все функции из $G^{(i)}$ ведут себя одинаково.

Из построения следует, что множество (ср. с (10))

$$G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(d)}$$

является φ-универсальным множеством порядка m. Действительно, для любой функции g, $g \in P_2(m)$, справедливо представление

$$g = \varphi(g_1, \ldots, g_p),$$

где для каждого i, $i = 1, \ldots, d$, и каждого j, $j \in I_i$, в качестве функции g_j берется та функция из $G^{(i)}$, которая совпадает с функцией $g \oplus \beta_j$ на отрезке δ_j.

Кроме того, множество G удовлетворяет (11), так как

$$|G| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |G^{(i)}| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_d}.$$

Убедимся в том, что множество G удовлетворяет (12), т. е. является искомым φ-универсальным множеством порядка m. Для каждого i, $i = 1, \ldots, d$, и каждого σ, $\sigma \in B$, рассмотрим множество функций $G_\sigma^{(i)}$, $G_\sigma^{(i)} \subseteq P_2(m-1)$, которое состоит из всех различных функций, получающихся из функций множества $G^{(i)}$ в результате подстановки константы σ вместо переменной x_m. При этом из четности чисел $s_1, \ldots, s_i$ вытекает, что $G_0^{(i)} = G_1^{(i)}$ и что $|G_0^{(i)}| = |G_1^{(i)}| \leqslant 2^{s_i/2}$. Следовательно, для каждого i, $i \in [1, d]$, сложность схемы Σ_i из U^{C}, построенной для системы функций $\overrightarrow{G}^{(i)}$ по методу каскадов (см. [3]) с разложением реализуемых функций по переменным $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$, удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_i) \leqslant 4 \cdot |G^{(i)}| + O(2^{m+s_i/2}).$$

Суммируя данные неравенства для всех i, $i = 1, \ldots, d$, получим (12).

Осталось рассмотреть случай, когда

$$h = p_1 s_1 + \ldots + p_d s_d > 2^m.$$

Положим $q = \lceil \log h \rceil$ и рассмотрим в кубе B^q от набора булевых переменных $\widehat{x} = (u_1, \ldots, u_t, x_1, \ldots, x_m)$, где $t = q - m > 0$, отрезок I, состоящий из первых h наборов этого куба. Построим множество функций G, $G \subseteq P_2(\widehat{x})$, так же, как строилось множество G в предыдущем случае, полагая, что все рассматриваемые функции от булевых переменных $\widehat{x}$ равны 0 вне отрезка I. При этом множество G будет обладать свойством φ-универсальности на отрезке I, т. е. любая функция g, $g \in P_2(\widehat{x})$, будет совпадать на I с некоторой функцией вида $\varphi(g_1, \ldots, g_p)$, где $g_j \in G$ при всех j, $j \in [1, p]$. Следовательно, множество G, которое получается из множества $\widehat{G}$ при подстановке константы 0 вместо переменных $u_1, \ldots, u_t$, является φ-универсальным множеством порядка m и удовлетворяет (11), (12).

Лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы 1 допустимо равенство $s_i = 0$, которое означает, что построенное при доказательстве множество I_i пусто, а множество $G^{(i)}$ состоит из одной функции, принимающей на каждой из непустых полос δ_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, постоянные значения.

Замечание 2. Лемма 1 легко обобщается на случай построения φ-универсального множества G вида $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(d)}$, где $G^{(i)} = 2^{s_i}$ для всех i, $i \in [1, d]$, для множества наборов δ, $\delta \subseteq B^m$, и его разбиения Δ, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ на p четных отрезков, имеющих длины $\underbrace{s_1, \ldots, s_1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{s_d, \ldots, s_d}_{p_d}$ и связанных с переменными $y_1, \ldots, y_p$ соответственно.

Описанное в замечании 2 множество G будем называть *стандартным* (φ, D)-универсальным множеством с набором локальных высот $s_1, \ldots, s_d$ для множества δ и его разбиения Δ. При этом отметим, что матрица M, соответствующая множеству G, состоит из d вертикальных «полос» $\pi_1, \ldots, \pi_d$,

имеющих длины $2^{s_1}, \ldots, 2^{s_d}$ и связанных с компонентами $Y_1, \ldots, Y_d$, а также с множествами $G^{(1)}, \ldots, G^{(d)}$ соответственно. С другой стороны, матрица M включает в себя d «больших» горизонтальных полос $\Pi_1, \ldots, \Pi_d$, имеющих высоты $p_1 s_1, \ldots p_d s_d$ и связанных с компонентами $Y_1, \ldots, Y_d$ соответственно. При этом полоса Π_i, $i \in [1, d]$, разбита на p_i основных горизонтальных полос локальной высоты s_i, связанных, как уже было сказано, с различными переменными из Y_i, а также с соответствующими им компонентами разбиения Δ и дающих в пересечении с полосой π_i матрицу, столбцами которой являются все наборы куба B^{s_i}, упорядоченные по возрастанию их ν-номеров в предположении, что старшие разряды ν-номеров расположены «вверху». Каждый из остальных блоков матрицы M, лежащий на пересечении одной из вертикальных и одной из основных горизонтальных полос, заполнен одной и той же константой, связанной с селекторностью разбиения D. Будем считать, что все функции из G вне δ равны нулю. число $s = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} s_i$ будем называть *максимальной локальной высотой* матрицы M и множества G.

Множество функций G' и матрица M', которые получаются из G и M при удалении части наборов из множества δ и вычеркивании соответствующих им строк матрицы M и по-прежнему являются φ-универсальными для множества оставшихся наборов (строк), будем считать результатом применения операции *редукции* к G и M. При этом будем говорить о *четности* матрицы M' (множества G'), если высоты всех основных горизонтальных полос M' являются четными числами (соответственно компоненты связанного с G' разбиения Δ' — четными отрезками).

Определение. *Энтропией* разбиения D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, множества Y называется величина

$$H(D) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{|Y_i|}{|Y|} \log \frac{|Y_i|}{|Y|}.$$

Заметим, что энтропия вырожденного разбиения, при котором $d = 1$, равна нулю, а энтропия тривиального разбиения, при котором $d = p$, равна $\log p$. Можно показать, что $0 \leqslant H(D) \leqslant \log d$ для любого разбиения D множества Y на d компонент.

Теорема 2 (ср. с [1, лемма 5]). *Пусть δ — четный отрезок куба B^m, а D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, — селекторное разбиение булевых переменных функции $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$. Тогда для любого четного s такого, что $s > \log p$ и $p \cdot (s - H(D)) \geqslant |\delta|$, найдется четное стандартное (редуцированное) (φ, D)-универсальное для δ множество G такое, что*

$$|G| \leqslant 2^{s+2} \tag{13}$$

$$L^{\mathrm{C}}(\vec{G}) \leqslant 4 \cdot |G| + O(d \cdot 2^{m+s/2}). \tag{14}$$

Доказательство. Выберем для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d$, четное число s_i такое, что

$$s + \log \frac{p_i}{p} \leqslant s_i < s + \log \frac{p_i}{p} + 2,$$

где $p_i = |Y_i|$, и убедимся в том, что выполнено неравенство $s_1 p_1 + \ldots + s_d p_d \geqslant |\delta|$. Действительно,

$$s_i p_i \geqslant p_i (s + \log \frac{p_i}{p}) = p_i s + p \cdot \frac{p_i}{p} \log \frac{p_i}{p}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{d} s_i p_i \geqslant \sum_{i=1}^{d} p_i s + p \cdot \sum_{i=1}^{d} \frac{p_i}{p} \log \frac{p_i}{p} = p \cdot (s - H(D)) \geqslant |\delta|.$$

Осталось воспользоваться леммой 1 и построить φ-универсальное множество G, удовлетворяющее неравенствам (11) и (12), из которых следует, что

$$|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_p} \leqslant 2^{s+2} \sum_{i=1}^{d} \frac{p_i}{p} = 2^{s+2}$$

и что сложность $L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{G})$ удовлетворяет второму условию теоремы.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Множество G' получается в результате редуцирования исходного множества G, $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(d)}$, для которого в силу выбора четной локальной высоты s_i $i \in [1, d]$, выполняются соотношения

$$p_1 s_1 + \ldots + p_d s_d \leqslant |\delta| + 2p, \qquad p_i \cdot 2^{s+2} \geqslant p \cdot |G^{(i)}| = p \cdot 2^{s_i}.$$

В силу первого из них указанное выше редуцирование сводится к возможному уменьшению части локальных высот на 2 и возможному вычеркиванию по 2 строки из некоторых основных горизонтальных полос матрицы M, связанной с множеством G.

Построенное по теореме 2 множество будем называть *стандартным* (φ, D)*-универсальным множеством с глобальной высотой* s. При этом обозначение тривиального разбиения множества переменных функции φ будем опускать, а глобальной высотой связанного с ним φ-универсального множества будем считать максимальную из его локальных высот, которая по умолчанию совпадает с любой из локальных высот за исключением, возможно, одной из них.

§ 3. Селекторные разбиения переменных некоторых функций и их энтропия

Напомним, что элементы базиса Б, имеющие приведенный вес $\rho_{\text{Б}}$, называются его «легкими» элементами, и обозначим через $\widehat{\text{Б}}$ множество всех таких элементов. Построим из элементов множества $\widehat{\text{Б}}$ формулы, которые имеют максимально возможное при заданных ограничениях на их сложность число входов и при этом реализуют функции, обладающие селекторными разбиениями переменных с ограниченной энтропией.

Будем, как обычно, считать, что переменная, встречающаяся в записи формулы только один раз, является *бесповторной переменной* этой формулы и что формула, все (все существенные) переменные которой бесповторны, — *бесповторная* (соответственно *квазибесповторная*) *формула*.

Напомним также, что функция f', которая получается из функции f подстановкой каких-либо констант вместо части (возможно пустой) ее переменных, называется *подфункцией функции* f.

Л е м м а 2. *В том случае, когда* $æ_{\text{Б}} = 0$, *из легких элементов базиса* Б *можно построить бесповторную формулу* $\widehat{\Phi}(y_1, \ldots, y_r)$,

*где**) $r = c_1 \geqslant 4$, *которая реализует функцию* $\widehat{\varphi}(y_1, \ldots, y_r)$ *имеющую подфункцию* $\psi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_3 \vee y_2 y_4$.

Доказательство. Из условия $æ_Б = 0$ вытекает, что в $\widehat{Б}$ есть элемент $\mathscr{E}'$, реализующий нелинейную функцию $\varphi'(x_1, \ldots, x_{k'})$.

Из доказательства леммы о нелинейной функции (см., например, [10]) следует, что при некоторых $1 \leqslant i \neq j \leqslant k'$ и булевых константах α, β, γ функция $\varphi'(x_1, \ldots, x_{k'})$ имеет подфункцию вида $x_i^{\alpha} x_j^{\beta} \oplus \gamma$.

Пусть, далее, в $\widehat{Б}$ есть элемент $\mathscr{E}''$, реализующий немонотонную функцию $\varphi''(x_1, \ldots, x_{k''})$. При этом по лемме о немонотонной функции (см., например, [10]) для некоторого $t, 1 \leqslant t \leqslant k''$, функция φ'' содержит подфункцию $\overline{x_t}$. Таким образом, используя один элемент $\mathscr{E}'$ и не более трех элементов $\mathscr{E}''$, можно построить бесповторную формулу $\widehat{F}_{\&}$ над $\widehat{Б}$, которая реализует функцию, имеющую подфункцию вида $x_i x_j$

Аналогичным способом, используя построенную формулу $\widehat{F}_{\&}$ и не более трех элементов $\mathscr{E}''$, можно построить бесповторную формулу $\widehat{F}_{\vee}$, которая реализует функцию, имеющую подфункцию вида $x_i \vee x_j$. Таким образом, в рассматриваемом случае искомую формулу $\widehat{\Phi}$ можно построить из двух формул $\widehat{F}_{\&}$ и одной формулы $\widehat{F}_{\vee}$.

Рассмотрим теперь оставшийся случай, когда все элементы из $\widehat{Б}$ реализуют монотонные функции. Из условия $æ_Б = 0$ следует, что в этом случае в $\widehat{Б}$ найдутся элементы $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$, реализующие монотонные функции $\varphi'(x_1, \ldots, x_{k'})$ и $\varphi''(x_1, \ldots, x_{k''})$, отличные от дизъюнкции и конъюнкции своих переменных соответственно.

Найдем в сокращенной ДНФ (КНФ) функции φ' (соответственно φ'') элементарную монотонную конъюнкцию K' (соответственно дизъюнкцию D''), которая содержит не менее двух переменных, и, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что среди них есть переменные x_1, x_2. Тогда, подставив в функции φ' и φ'' вместо всех отличных от x_1, x_2 переменных константы 1 и 0, а вместо всех остальных переменных — константы 0 и 1, получим функции $x_1 x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.

Это означает, что в рассматриваемом случае у функций φ' и φ'' есть подфункции $x_1 x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно. Следовательно, полагая $F_{\&} = \varphi'$ и $F_{\vee} = \varphi''$, мы можем построить искомую формулу $\widehat{\Phi}$ аналогично тому, как это делалось в первом случае.

Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы из элементов множества* $\widehat{Б}$ *можно построить бесповторные формулы* $F_{\&}$ *и* $F_{\vee}$, *реализующие функции, которые имеют подфункции* $x_1 x_2$ *и* $x_1 \vee x_2$ *соответственно, а на их основе — квазибесповторные формулы* $\widetilde{F}_{\&}$ *и* $\widetilde{F}_{\vee}$, *реализующие функции* $x_1 x_2$ *и* $x_1 \vee x_2$ *соответственно.*

Замечание. Из полноты базиса Б следует, что в нем можно построить квазибесповторную формулу $\widetilde{F}_{\neg}$, которая реализует функцию $\overline{x}_1$.

Будем говорить, что разбиение Δ является *подразбиением* разбиения D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, множества Y, если оно получается из D

*) Буквой c с различными индексами обозначаются константы, зависящие от базиса Б.

в результате замены каждой его компоненты Y_i, $i=1,\ldots,d$, ее разбиением $\delta_i=(Y_{i,1},\ldots,Y_{i,t_i})$. При этом

$$H(\Delta)=-\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{t_i}\frac{|Y_{i,j}|}{|Y|}\cdot\log\frac{|Y_{i,j}|}{|Y|}=$$
$$=-\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{t_i}\frac{|Y_i|}{|Y|}\cdot\frac{|Y_{i,j}|}{|Y_i|}\left(\log\frac{|Y_i|}{|Y|}+\log\frac{|Y_{i,j}|}{|Y_i|}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\frac{|Y_i|}{|Y|}\left(\log\frac{|Y_i|}{|Y|}+\sum_{j=1}^{t_i}\frac{|Y_{i,j}|}{|Y_i|}\log\frac{|Y_{i,j}|}{|Y_i|}\right)$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$H(\Delta)=H(D)+\sum_{i=1}^{d}\frac{|Y_i|}{|Y|}H(\delta_i),\tag{15}$$

из которого вытекает неравенство

$$H(\Delta)\leqslant H(D)+\max_{1\leqslant i\leqslant d}H(\delta_i).\tag{16}$$

Пусть для описанных выше разбиений D и δ_i, $i=1,\ldots,d$, выполняются равенства $|Y_1|=\ldots=|Y_d|$, $t_1=\ldots=t_d=t$ и $|Y_{1,j}|=\ldots=|Y_{d,j}|$ при всех $j,j=1,\ldots,t$, а каждое разбиение δ_i изоморфно разбиению δ, т. е. представляет собой результат его применения к множеству Y_i. Пусть, кроме того, на множестве компонент $Y_1,\ldots,Y_d$ или иначе, на множестве их номеров, задано разбиение τ.

Тогда разбиение R, которое получается из разбиения Δ объединением его компонент $Y_{i,j}$ по всем тем значениям i, которые входят в одну и ту же компоненту разбиения τ, считается *суперпозицией* вида $\tau(\delta)$. Нетрудно убедиться в том, что при этом

$$H(R)=H(\tau)+H(\delta).\tag{17}$$

Для формул (функций) $f(y_1,\ldots,y_p)$ и $h(z_1,\ldots,z_m)$ формулу (функцию) вида $F=f(h(z^{(1)}),\ldots,h(z^{(p)}))$, где $z^{(i)}=(y_1^{(i)},\ldots,y_m^{(i)})$, $i=1,\ldots,p$, — непересекающиеся наборы переменных, будем называть *h-надстройкой над f*. Если при этом D и δ — селекторные разбиения переменных функций f и h соответственно, то, как легко проверить, их суперпозиция $D(\delta)$ будет селекторным разбиением функции F.

Для разбиения $D=(Y_1,\ldots,Y_d)$ множества Y его *спектром* будем называть множество (сочетание), состоящее из чисел $|Y_1|,\ldots,|Y_d|$. Заметим, что два разбиения, спектры которых получаются друг из друга умножением на одно и то же число, имеют одинаковую энтропию.

Разбиение, спектр которого имеет вид $1,1,2,4,\ldots,2^{t-1}$, где $t\geqslant 1$, будем называть *двоично-геометрическим разбиением высоты t*.

При $t\geqslant 2$ указанное разбиение является, очевидно, подразбиением разбиения со спектром $2^{t-1},2^{t-1}$ и получается из него заменой одной из компонент двоично-геометрическим разбиением высоты $(t-1)$. В силу (15) отсюда следует, что энтропия данного разбиения задается формулой

$$1+\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\left(\ldots\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\right)\ldots\right),$$

где число вложенных пар скобок равно $(t-2)$, и, таким образом, энтропия двоично-геометрического разбиения высоты t, $t \geqslant 1$, равна

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{t-1}} = 2 - \frac{1}{2^{t-1}}.$$

Т е о р е м а 3. *Для любого нечетного t из t бесповторных формул $\widehat{\Phi}(y_1, \ldots, y_r)$, где $r = c_1$, полученных при доказательстве леммы 2, можно построить бесповторную формулу Φ_t, которая реализует функцию $\varphi_t(y_1, \ldots, y_{p_t})$, где $p = p_t = t(r-1)+1$, имеющую селекторное разбиение D_t множества своих переменных такое, что*

$$H(D_t) \leqslant \log r + 3. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим сначала дерево D_t, задающее базовую структуру формулы Φ_t, составленной из t формул $\widehat{\Phi}$ как из макроэлементов, которые соединены между собой и с «основными» входами формулы Φ_t только по своим первым двум входам. Дерево D_t (см. рис. 2) представляет собой $(l+1)$-ярусное, где $l = \lceil \log(t+1) \rceil$, квазиполное двоичное ориентированное к корню дерево, в котором два ребра, входящие в любую внутреннюю (нелистовую) вершину, помечены числами 1 и 2, ярус с номером i, $i = 1, \ldots, l$, состоит из 2^{i-1} вершин, а число вершин в $(l+1)$-м ярусе равно 2λ, где $\lambda = t - 2^{l-1} + 1$, причем все они являются листьями. Заметим также, что в дереве D_t имеется t внутренних и $t+1$ листовых вершин, что все его листья расположены в $(l+1)$-м и l-м ярусах, а число нелистовых вершин в l-м ярусе четно и равно λ.

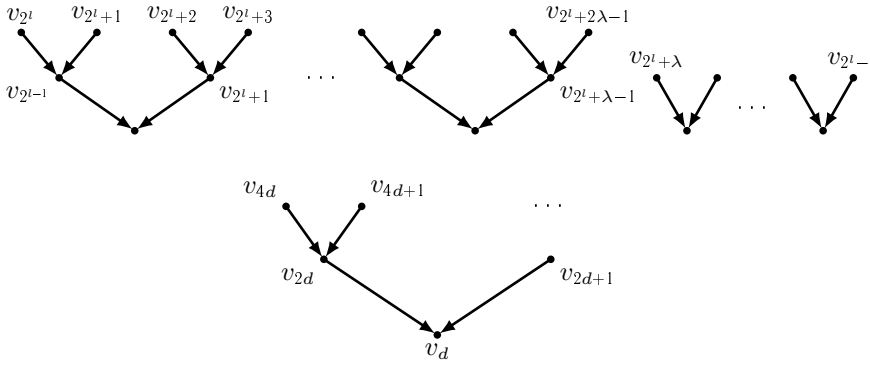

Рис. 2. Дерево D_t

Пронумеруем вершины дерева D_t числами от 1 до $2^l + 2\lambda$, а также двоичными наборами длины не больше, чем l, следующим образом. Сопоставим вершинам его яруса с номером i, $i = 1, \ldots, (l+1)$, при их последовательном просмотре слева направо числа $2^{i-1}, 2^{i-1}+1, \ldots, 2^i - 1$, если $i \leqslant l$, и числа $2^l, 2^l+1, \ldots, 2^l+2\lambda-1$ при $i = l+1$, а также двоичные наборы куба B^{i-1}, расположенные в порядке возрастания их ν-номеров соответственно. Заметим, что при этом последовательность пометок (чисел 1, 2) на ребрах цепи длины $(i-1)$ дерева D_t, которая идет из вершины с номером j, расположенной в ярусе с номером i, имеет вид $(\sigma_{i-1}+1), (\sigma_{i-2}+1), \ldots, (\sigma_1+1)$, где $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}) = \nu(j - 2^i)$.

Формула Φ_t (см. рис. 3), рассматриваемая как схема в базисе $\{\widehat{\varphi}\}$ (см., например, [3]), получается из дерева D_t нанесением пометок $\widehat{\varphi}$ на все его внутренние вершины и введением в каждую из них $(r-2)$ листовых дуг с пометками $3, 4, \ldots, r$, начинающихся в листьях следующего по отношению к тому ярусу, в котором располагается их конечная вершина, яруса. Переменные $y_1, \ldots, y_p$ формулы Φ_t сопоставляются листьям ее дерева, упорядоченным по возрастанию номеров тех нелистовых вершин, с которыми они связаны, а в том случае, когда исходящие из них дуги смежны, — по возрастанию чисел, являющихся пометками этих дуг.

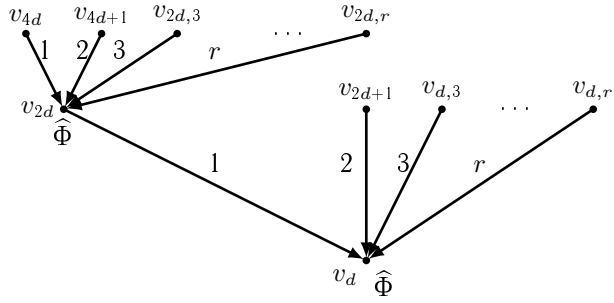

Рис. 3. Дерево формулы Φ_t

Пусть V_i и W_i, где $i \in [1, l+1]$, — множество внутренних и листовых вершин яруса с номером i дерева формулы Φ_t соответственно, а $W_{i,j}$, где $j \in [1, r]$, — подмножество множества W_i, состоящее из тех его листьев, из которых исходит дуга с пометкой j. Для каждого j, $j \in [1, r]$, введем также множество $W'_j = W_{l,j} \cup W_{l+1,j}$, а объединение множеств $W'_1 \cup W'_2$ разобьем на подмножества W^*_1, W^*_2, которые состоят из листьев данного объединения с нечетным и четным числом единиц в приписанных им наборах соответственно.

Из построения дерева D_t и дерева формулы Φ_t, а также описания введенных выше множеств следует, что:

1) $V_{l+1} = W_1 = \varnothing$, $|V_l| = \lambda$ и $|V_i| = 2^{i-1}$ при всех i, $i \in [1, l-1]$;

2) $|W_{i,j}| = |V_{i-1}| = 2^{i-2}$ при всех i, $i \in [1, l-1]$, а также всех j, $j \in [3, r]$, и $W_{i,1} = W_{i,2} = \varnothing$ при всех указанных значениях i;

3) $|W_j| = \dfrac{t+1}{2}$ при всех j, $j \in [1, r]$.

Сопоставим далее каждому множеству вида W_i^A (соответственно $W_{i,j}$) множество Y_i^A (соответственно $Y_{i,j}$), состоящее из приписанных его листьям переменных множества $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Докажем, что система множеств $\widetilde{D}_t$, которая включает в себя множества $Y^*_1, Y^*_2, Y'_3, \ldots, Y'_r$, а также множества $Y_{i+1,j}$ при всех i, $i \in [1, l-2]$, и всех j, $j \in [3, r]$, является селекторным разбиением множества переменных Y функции φ_t, реализуемой формулой Φ_t.

Для того, чтобы в этом убедиться, возьмем любую компоненту $\mathcal{Y}$ указанного разбиения и выберем из нее переменную y. Затем найдем такой набор констант, сопоставленных отличным от $\mathcal{Y}$ компонентам разбиения $\widetilde{D}_t$,

при подстановке которых вместо всех переменных соответствующих компонент функция φ_t будет равна y.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{Y} = Y_{i+1,j}$, где $i \in [1, l-2]$ и $j \in [3, r]$, т.е. лист w переменной y расположен в $(i+1)$-м ярусе дерева формулы Φ_t и эта переменная по дуге с номером j поступает в вершину v, $v \in V_i$, которой, как вершине дерева D_t, сопоставлен набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1})$.

Первая часть искомой подстановки связана с теми переменными из Y, которые расположены в ярусах с номерами $2, 3, \ldots, i$, и обеспечивает прохождение выхода элемента v на выход формулы Φ_t. С этой целью для каждого значения k, $k = 2, \ldots, i$, присвоим всем переменным из множеств $Y_{k,3}, Y_{k,4}, \ldots, Y_{k,r}$ значения $\sigma_{k-1}, \overline{\sigma}_{k-1}, \tau_5, \ldots, \tau_r$ соответственно, где набор констант $\tau_5, \ldots, \tau_r$ обладает тем свойством, что

$$\widehat{\varphi}(z_1, z_2, z_3, z_4, \tau_5, \ldots, \tau_r) = \varphi(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 z_4 \vee z_2 z_3,$$

которое и обеспечивает требуемое прохождение.

В рамках второй части конструируемой подстановки, которая связана с переменными из Y, расположенными в ярусах с номерами $(i+2), \ldots, (l+1)$, присвоим переменным из множеств $Y_{k,3}, \ldots, Y_{k,r}$, где $k \in [i+2, l+1]$, значения $0, 1, \tau_5, \ldots, \tau_r$ соответственно. В результате ее выполнения на входы 1 и 2 элемента v пройдут переменные $\widetilde{y}$ и $\check{y}$, принадлежащие компонентам Y_a^* и Y_{2-a}^*, где $a \in [1, 2]$, соответственно.

Заметим также, что в случае, когда $\widetilde{y} \in Y_l$, подстановка констант вместо переменных из Y_{l+1} никак не влияет на появление y или $\overline{y}$ на выходе формулы Φ_t.

Третья часть искомой подстановки связана с переменными, расположенными в ярусе с номером i, и призвана обеспечить прохождение переменной y на выход элемента v. С этой целью найдем в кубе B^r набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ такой, что

$$\widehat{\varphi}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, z, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_r) = z \oplus \gamma_j, \tag{19}$$

где $j \in [1, r]$, и присвоим переменным из множеств $Y_a^*, Y_{2-a}^*, Y_{i+1,3}, \ldots, Y_{i+1,j-1}$, $Y_{i+1,j+1}, \ldots, Y_{i+1,r}$ значения $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_r$ соответственно.

Описанный выше способ построения требуемой подстановки констант позволяет получать ее и в том случае, когда $y \in \mathcal{Y} = Y_j^A$, где $A \in \{*, '\}$. Особенность данной подстановки состоит в том, что ее вторая часть вырождается, так как искомые переменные $\widetilde{y}$ и $\check{y}$ являются 1 и 2 входами элемента v, а соотношение (19) работает и при $j \in [1, 2]$.

Для завершения доказательства выделим из компонент $Y_3', \ldots, Y_r'$ построенного разбиения $(r-2)$ одноэлементных подмножеств и присоединим каждое из них к одному из семейств $Y_{2,j}, \ldots, Y_{l-1,j}$, где $j \in [3, r]$. В результате мы получим селекторное разбиение D_t множества переменных Y функции φ_t, которое состоит из r отдельных компонент и $(r-2)$ двоично-геометрических семейств компонент. При этом, согласно (15) и (16), с учетом того, что энтропия двоично-геометрического разбиения не больше 2, получим

$$H(D_t) \leqslant \log(2r-2) + 2 \leqslant \log r + 3.$$

Теорема доказана.

Замечание. Число d_t компонент построенного разбиения D_t не больше, чем $r \lceil \log(t+1) \rceil$.

§ 4. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности схем из функциональных элементов из некоторых классов

Используем построенные в §2 φ-универсальные множества для синтеза усилительных схем из функциональных элементов в базисе Б, $\text{Б} = \{\mathscr{E}_i\}_{i=1}^{b}$. Как уже говорилось, в $U_{\text{Б}}^{\Phi}$ существуют квазибесповторные формулы $\widetilde{\mathscr{F}}_{\&}$, $\widetilde{\mathscr{F}}_{\vee}$ и $\widetilde{\mathscr{F}}_{\neg}$, реализующие функции $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять функциональные элементы базиса Б_0 при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Основное представление указанного типа для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_2(n)$ связано с выбором натурального числа m, $1 \leqslant m < n$, и ее разложением по переменным $z = (z_1, \ldots, z_{n-m}) = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ вида

$$f(x, z) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_{m+1},\ldots,\sigma_n)\in B^{n-m}} K_\sigma(z) \cdot f_\sigma(x), \tag{20}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $K_\sigma(x) = x_{m+1}^{\sigma_{m+1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, $f_\sigma(x) = f(x, \sigma)$. Заметим, что разложение (20) равносильно представлению

$$f(x, z) = \mu_{n-m}(z, f_{(0\ldots0)}(x), \ldots, f_\sigma(x), \ldots, f_{(1\ldots1)}(x)), \tag{21}$$

где функция μ_q — так называемая мультиплексорная функция порядка q от адресных переменных $x' = x'_1, \ldots, x'_q$ и информационных переменных $y' = y'_0, \ldots, y'_{2^q-1}$, — задается равенством

$$\mu_q(x', y') = \bigvee_{\sigma\in B^q} K_\sigma(x') \cdot y'_{\nu(\sigma)}.$$

При этом для некоторой функции $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ и подходящего φ-универсального множества G порядка m реализация каждой так называемой остаточной функции $f_\sigma(x)$ функция f, где $\sigma \in B^{n-m}$, осуществляется на основе ее представления вида

$$f_\sigma(x) = \varphi(g_{\sigma,1}, \ldots, g_{\sigma,p}), \tag{22}$$

где функции $g_{\sigma,1}, \ldots, g_{\sigma,p}$ берутся из множества G.

Т е о р е м а 4 (ср. [3]). *Для любой функции f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее схема из функциональных элементов Σ_f, $\Sigma_f \in U_{\text{Б}}^{\text{УС}}$, такая, что*

$$\mathscr{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{(2 + æ_{\text{Б}}) \log n + O(1)}{n}\right). \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $æ_{\text{Б}} = 0$ искомая схема Σ_f строится на основе разложения (21) и представлений (22), где в качестве функции φ берется функция φ_t из теоремы 3.

Напомним, что в теореме 3 была получена бесповторная формула Φ_t, которая состоит из t, где t — нечетное число, формул вида $\widehat{\Phi}$, построенных в лемме 2, и реализует функцию $\varphi = \varphi_t(y_1, \ldots, y_{p_t})$ от $p = p_t = t(r-1)+1$ переменных, имеющую $d = d_t$-компонентное селекторное разбиение $D = D_t$ множества своих переменных такое, что

$$H(D) \leqslant c_2 \quad \text{и} \quad d \leqslant c_3 \log t. \tag{24}$$

При этом для построенного по теореме 2 стандартного (φ, D)-универсального множества G, имеющего порядок m и глобальную высоту s, удовлетворяющие неравенствам

$$s > \log p \quad \text{и} \quad p(s - H(D)) \geqslant 2^m, \tag{25}$$

будут выполнятся соотношения

$$|G| = \lambda \leqslant 2^{s+2}, \qquad L(\Sigma_G) = O(\lambda + d \cdot 2^{m+\frac{s}{2}}), \tag{26}$$

где схема Σ_G — усилительная схема из $U_{\text{Б}}^{\text{C}}$, реализующая систему функций $\overrightarrow{G}$.

Схема Σ_f включает в себя:

1) подсхему Σ_G от переменных x;

2) подсхему $\widehat{\Sigma}$, которая для каждого набора σ, $\sigma \in B^{n-m}$, реализует остаточную функцию f_σ на выходе формулы Φ_t в результате подключения ее входов к выходам Σ_G в соответствии с (22);

3) усилительную подсхему $\check{\Sigma}$, реализующую мультиплексорную функцию μ_{n-m}, на адресные входы которой подаются переменные набора z, а на информационные входы — выходы подсхемы $\widehat{\Sigma}$.

Таким образом, учитывая (26), а также известные (см., например, [3]) оценки сложности функции μ_{n-m}, получим верхнюю оценку

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^{n-m} L(\Phi_t) + O(2^s + d \cdot 2^{m+\frac{s}{2}} + 2^{n-m}),$$

из которой, в силу того, что $L(\Phi_t) = \rho_{\text{Б}}(p-1)$, вытекает неравенство

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^{n-m} \cdot \rho_{\text{Б}}(p-1) + O(2^s + d \cdot 2^{m+\frac{s}{2}} + 2^{n-m}). \tag{27}$$

Тогда при

$$m = \lceil 2 \log n \rceil, \quad s = \lceil n - 2 \log n \rceil, \quad t = 2 \left\lceil \frac{2^{m-1}}{(s - c_2)(r-1)} \right\rceil + 1$$

и при значениях остальных параметров, определенных описанным выше способом, условия (25) будут выполнены, начиная с некоторого $n = n_0$, а значит, в силу (27) будет справедливо неравенство (23).

Случай базиса Б, для которого $æ_{\text{Б}} = 1$, рассматривается аналогично с существенным упрощением ряда конструкций. Так, в данном случае в качестве формулы Φ_t можно взять любую бесповторную формулу из t «легких» элементов базиса Б, имеющих по r входов. При этом стандартное φ-универсальное множество G порядка m и четной высоты s строится для тривиального (селекторного) разбиения переменных функций $\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_p)$, где $p = (r-1)t + 1$, и удовлетворяет условиям

$$|G| = \lambda \leqslant p \cdot 2^s, \qquad L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(G) = O(\lambda + p \cdot 2^{m+\frac{s}{2}}).$$

Сложность построенной таким образом усилительной схемы Σ_f будет удовлетворять неравенству

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^{n-m} \rho_{\text{Б}}(p-1) + O(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+\frac{s}{2}} + 2^{n-m}),$$

из которого при значениях параметров

$$m = \lceil 2\log n \rceil, \quad s = 2\left\lceil \frac{n - 3\log n}{2} \right\rceil, \quad t = \left\lceil \frac{2^m}{s(r-1)} \right\rceil$$

вытекает неравенство (23).

Теорема доказана.

Следствие 1. *С учетом нижних оценок §5 для усилительных схем в базисе* Б, *получим*

$$L_{\text{Б}}^{\text{УС}}(n) = \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{(2 + æ_{\text{Б}})\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, опишем в общих чертах подход к синтезу схем в классе $U_{\text{Б}}^{\text{C}}$, позволяющий получить верхнюю оценку (7) вместо верхней оценки (23).

Данный подход заключается в том, чтобы проводить разложение функций и построение схем Σ_G, $\check{\Sigma}$ аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 4, но не для всех наборов σ из B^{n-m}, а только для тех из них, для которых $\nu(\sigma) < N = O\left(\frac{2^{n-m}}{\log n}\right)$. Цель этой «частичной» реализации функции f состоит в том, чтобы на выходах определенной части элементов, используемых в формулах типа $\mathscr{F} = \mathscr{F}_p$, реализовать функции из нового более «широкого» универсального множества, которое можно будет применять при реализации остаточных функций $f_\sigma(x)$ для случая $\nu(\sigma) \geqslant N$.

Справедливость верхней оценки теоремы 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 5. *Для произвольной функции* f, $f \in P_2(n)$, *существует реализующая ее схема* Σ_f, $\Sigma_f \in U_{\text{Б}}^{\text{C},\,\text{l}}$, *такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{(1 + æ_{\text{Б}})\log n + \log\log n + O(1)}{n}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4 будем строить искомую схему Σ_f с использованием соотношений (20)–(22) и разбиения набора переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ на поднаборы $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $z = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $æ = 0$, и в соответствии со следствием из леммы 2 найдем «легкую» формулу $F_\vee$, которая реализует функцию $h(u_1, \ldots, u_a)$, где $a = c_4$, имеющую подфункцию $u_1 \vee u_2$. Затем, следуя доказательству теоремы 4, построим для любого нечетного t бесповторную формулу $\Phi(y)$, которая состоит из t формул вида $\widetilde{\Phi}$, полученных в лемме 2, и реализует функцию φ от набора переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$, имеющую селекторное разбиение D, $D = (Y_1, \ldots, Y_d)$, множества своих переменных Y, $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$, удовлетворяющее (24).

Определим формулу $\check{\Phi}(u)$ от набора переменных $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{p_a})$ и связанного с ним множества U, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{p_a}\}$ как формулу, которая является $F_\vee$-надстройкой над формулой $\Phi(y)$. При этом будем считать, что набор u разбит на последовательные поднаборы («отрезки») $u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}$, каждый из которых имеет длину a, то есть $\check{\Phi}(u) = \Phi(F_\vee(u^{(1)}), \ldots F_\vee(u^{(p)}))$.

Построим селекторное $\check{d} = d \cdot a$-компонентное разбиение $\check{D}$ множества переменных U функции $\check{\varphi}(u)$, реализуемой формулой $\check{\Phi}$, которое является суперпозицией вида $\check{D} = D(T_a)$, где T_a — тривиальное разбиение отрезка $[1, a]$, и для которого в силу (17), (24) выполняются соотношения

$$H(\check{D}) = H(D) + H(T_a) \leqslant \check{c}_2, \qquad \check{d} \leqslant \check{c}_3 \cdot \log t. \tag{29}$$

Заметим, что при этом разбиение $\check{D}$ можно представить в виде $\check{D} = (D(U_1), \ldots, D(U_a))$, где множество U_i состоит из тех переменных u_j, $j \in [1, p]$, для которых $j = i \pmod a$.

Разобъем куб $B^m(x)$ на четные последовательные отрезки $\delta_1, \ldots, \delta_a$ длины $t_1, \ldots, t_a$ соответственно, где четное число t_i при любом i, $i \in [1, a]$, удовлетворяет неравенствам

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{2^{m-1}}{a} \right\rfloor \leqslant t_i \leqslant 2 \cdot \left\lceil \frac{2^{m-1}}{a} \right\rceil$$

и, следовательно, совпадает с одной из указанных в них границ.

Построим по теореме 2 для каждого отрезка δ_i, $i \in [1, a]$, стандартное (редуцированное) (φ, D)-универсальное множество функций G_i глобальной высоты s_i такой, что

$$s_i > \log p, \qquad p \cdot (s_i - H(D)) \geqslant t_i,$$

и пусть M_i — матрица, связанная с G_i, а $\widetilde{s}_i$ — набор длины p, состоящий из высот всех основных полос матрицы M_i (с учетом редукции).

Построим по лемме 1 стандартное (редуцированное) $(\check{\varphi}, \check{D})$-универсальное множество $\check{G}$ порядка m, у которого набор $\check{s}$ длины $\check{p} = p \cdot a$, состоящий из высот всех основных полос связанной с $\check{G}$ матрицы $\check{M}$ имеет вид $\check{s} = (\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_a)$. При этом будем считать, что в матрице $\check{M}$ имеется «диагональ» из матриц $M_1, \ldots, M_a$ и напомним, что все ее остальные (внедиагональные) «блоки» по построению состоят из константных строк.

Пусть $\check{G}_i$, где $i \in [1, a]$, — множество тех функций из $\check{G}$, которые связаны с отрезком δ_i, и пусть $G' = \check{G}_1$, $G'' = \check{G}_2$, $G^* = \check{G} \setminus (G' \cup G'')$. Положим

$$s_1 = s_3 = s_4 = \ldots = s_a = s', \quad s_2 = s'', \quad t_1 = t', \quad t_2 = t'', \quad \delta_1 = \delta', \quad \delta_2 = \delta''$$

и заметим, что при этом по лемме 1 и теореме 2

$$|G' \cup G^*| \leqslant (a-1) \cdot 2^{s'+2}, \quad L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{G' \cup G^*}) \leqslant 4 \cdot |G' \cup G^*| + O(d \cdot 2^{m+s'/2}),$$
$$|G''| \leqslant 2^{s''+2}, \quad L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{G''}) \leqslant 4 \cdot |G''| + O(d \cdot 2^{m+s''/2}).$$

Аналогично (20)–(22) рассмотрим для функции $f(x, z)$ ее разложение Шеннона по переменным z

$$f(x, z) = \bigvee_{\sigma = (\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_n) \in B^{n-m}} K_\sigma(z) \cdot f_\sigma(x), = \mu_{n-m}(z, f_{(0\ldots0)}(x), \ldots, f_\sigma(x), \ldots, f_{(1\ldots1)}(x)), \quad (30)$$

где $f_\sigma(x) = f(x, \sigma)$. При этом в силу сказанного выше для любой остаточной функции $f_\sigma(x)$ из разложения (30) справедливо представление

$$f_\sigma(x) = \varphi(h(g^{(1)}_{1,\sigma}, \ldots, g^{(1)}_{a,\sigma}), \ldots, h(g^{(i)}_{1,\sigma}, \ldots, g^{(i)}_{a,\sigma}), \ldots, h(g^{(p)}_{1,\sigma}, \ldots, g^{(p)}_{a,\sigma})), \quad (31)$$

где $g^{(i)}_{j,\sigma} \in G_j$ при всех i, $i \in [1, p]$, и всех j, $j \in [1, a]$, т. е., в частности, $g^{(i)}_{1,\sigma} \in G'$, $g^{(i)}_{2,\sigma} \in G''$ и $g^{(i)}_{j,\sigma} \in G^*$, если $j > 2$.

Рассмотрим представление (31) для всех наборов σ из начального отрезка I длины N куба B^{n-m} от переменных z. При этом для любой функции g' из G'' определим ее *кратность* как число вхождений данной функции в представление (31) для $\sigma \in I$ на месте любой из переменных функции $\check{\varphi}$, принадлежащих U_1. Заметим, что среднее значение указанной кратности по всему множеству G' равно $\dfrac{N_p}{|G'|}$ и, согласно теореме 2, не меньше $S' = \dfrac{N_p}{2^{s'+2}}$, а ее среднее значение по множеству функций из G', связанных

с i-й компонентой разбиения D, при любом i, $1 \leqslant i \leqslant d$, согласно второму соотношению из замечания к этой теореме тоже не меньше S'.

Далее введем «вспомогательный» единичный куб B^{m+1} от переменных (x_0, x), состоящий из подкубов $B^{m+1}(0, x)$ и $B^{m+1}(1, x)$ размерности m, первый из которых будем «отождествлять» с кубом $B^m(x)$. Попытаемся на выходах подформул $F_\vee$ формулы $\check{\Phi}$, используемых при реализации представлений (31) для $\sigma \in I$, получить все функции из стандартного (φ, D)-универсального для некоторого начального отрезка δ подкуба $B^{m+1}(1, x)$ введенного выше куба $B^{m+1}(x_0, x)$ множества функций $F = F_1 \cup \ldots \cup F_d$ глобальной высоты s, где $s = l + s'$.

Для этого продолжим функции из $\check{G}_3, \ldots, \check{G}_a$ в куб $B^{m+1}(1, x)$ константными значениями $\alpha_3, \ldots, \alpha_a$, для которых $h(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_a) = x_1 \vee x_2$. Для построения продолжений функции из G' рассмотрим сначала случай, когда введенные выше кратности функций из G' «почти» одинаковы, т. е. не меньше 2^l, где l — четное число и $l = 2 \cdot \left\lfloor \frac{1}{2} \log S' \right\rfloor$. В этом случае продолжим функции из G' в подкуб $B^{m+1}(1, x)$ так, чтобы на начальном отрезке $\widetilde{\delta}'$ длины t' этого подкуба они вели себя также, как на отрезке δ' подкуба $B^{m+1}(0, x)$, а на остальных наборах подкуба $B^{m+1}(1, x)$ были равны нулю.

Для построения продолжений функций из множества G'' увеличим сначала все его локальные высоты на l. Заметим, что из описанных выше особенностей стандартных универсальных множеств функций и связанных с ними матриц следует, что матрица M'', связанная с множеством G'', перейдет при этом в матрицу M''_+ с $\lambda = |G''| \cdot 2^h$ столбцами и $t'' + p \cdot l$ строками. Выделим в каждой из основных горизонтальных полос матрицы M''_+ подполосу, составленную из l ее нижних строк, объединим все эти подполосы в матрицу $\lfloor M''_+ \rfloor$ той же длины λ и высоты pl, а потом свяжем ее строки с отрезком $\widetilde{\delta}''$ длины pl подкуба $B^{m+1}(1, x)$, начинающегося с набора с номером $2^m + t' - 1$ и разбитого на p последовательных отрезков длины l разбиением $\widetilde{\Delta}''$. При этом остальные строки матрицы M''_+, образующие ее подматрицу $\lceil M''_+ \rceil$, оставим на тех же позициях, которые связаны с отрезком δ'' куба $B^m(x)$ и которые занимали строки матрицы M''.

Заметим также, что матрица $\lceil M''_+ \rceil$ получается 2^l-кратным дублированием каждого столбца матрицы M'' и что матрица $\lfloor M''_+ \rfloor$, в свою очередь, тоже является результатом определенного дублирования столбцов в стандартной (φ, D)-универсальной матрице $\widetilde{M}$, с локальными высотами l. При этом все 2^l дубликатов одного и того же столбца подматрицы $\lceil M''_+ \rceil$ матрицы M''_+, расположенного в i-й вертикальной полосе M'', в пересечении с любой основной горизонтальной полосой матрицы $\lfloor M''_+ \rfloor$, которая связана с переменной из Y_i, дает подматрицу, состоящую из всех 2^l столбцов высоты l.

Определим множество G''_+ как множество функций от переменных (x_0, x), поведение которых на отрезках δ_2 и $\widetilde{\delta}_2$ задается матрицами $\lceil M''_+ \rceil$ и $\lfloor M''_+ \rfloor$ соответственно. При этом вне δ_2 в кубе $B^{m+1}(0, x)$ эти функции ведут себя также, как все функции из G'', а вне отрезка $\widetilde{\delta}_2$ в кубе $B^{m+1}(1, x)$ равны нулю.

Рассмотрим построенные таким способом множества функций G'_+ и G''_+ от переменных (x_0, x), а затем положим $x_0 = \chi_I(z)$, где $\chi_I(z)$ — характеристическая функция отрезка I куба B^{n-m}. Убедимся в том, что на выходах

формул $F_\vee$, используемых при реализации представлений (31) для $\sigma \in I$, где функции g''_i берутся из множества G''_+, мы в случае $\sigma \notin I$ получим стандартное (φ, D)-универсальное для отрезка $\delta = [0, t' + pl)$ куба $B^m = B^{m+1}(1, x)$ множество функций G, связанное с разбиением D, а также с разбиением Δ отрезка δ, j-я компонента которого, $j \in [1, p]$, получается в результате объединения j-х компонент разбиений Δ' и $\widetilde{\Delta}''$ отрезков δ' и $\widetilde{\delta}''$ соответственно.

Действительно, пусть $\widetilde{G} = \widetilde{G}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{G}_d$ — множество функций от переменных x, столбцы значений которых соответствуют столбцам матрицы $\widetilde{M}$ в предположении, что ее строки привязаны к отрезку $\widetilde{\delta}''$, и которые равны нулю вне $\widetilde{\delta}''$. Тогда любую функцию g из F можно представить в виде $g = g' \vee \widetilde{g}$, где $g' \in G'_i$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}_i$ и $g \in F_i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant d$. Пусть при этом функция $\widetilde{g}$ соответствует такому столбцу y из i-й вертикальной полосы матрицы $\widetilde{M}$, связанной с Y_i, который в пересечении с любой основной горизонтальной полосой, связанной с переменной из Y_i, дает набор γ из B^l.

Рассмотрим вхождение с номером q, $q \in [1, 2^l]$, функции g' в одно из представлений (31), где $\sigma \in I$, вместо первой переменной одной из функций h и возьмем в том же представлении вхождение функции g'' из G''_i вместо следующей переменной. При реализации этого представления вместо функции g'' возьмем такое ее «продолжение» в куб $B^{m+1}(1, x)$, столбец значений которого в любой из основных полос разбиения $\widetilde{\Delta}''$, связанных с Y_i, равен γ.

Заметим, что указанное представление обеспечит в случае $\sigma \notin I$ реализацию функции $g' \vee \widetilde{g}$ на выходе подформулы $F_\vee$ в формуле $\check{\Phi}$, которая используется для реализации рассматриваемого представления (31).

В том случае, когда кратности функций из G' могут «сильно» отличаться друг от друга, вместо матрицы M', связанной с системой функций G', будем использовать матрицу M'_+, которая получается из M' дублированием столбца, связанного с функцией g', $g' \in G'$, t раз, если кратность g' не меньше $(t-1)\frac{pN}{|G'|}$, но меньше $t\frac{pN}{|G'|}$.

Легко видеть, что число столбцов в матрице M'_+ не превосходит $2 \cdot |G'|$ и что, заменяя подходящим образом кратные вхождения столбцов матрицы M' (точнее, соответствующих им функций из G') в разложения (31) при $\sigma \in I$ вхождениями столбцов матрицы M'_+, можно добиться понижения их максимальной кратности до уровня, не превышающего S'. Отсюда следует, что не менее $\frac{1}{4}$ части столбцов матрицы M'_+ имеет кратность не меньше $\frac{1}{4}S'$. Именно эти столбцы матрицы M'_+ продолжаются в подкуб $B^{m+1}(1, x)$ так, чтобы в строках, связанных с его начальным отрезком $\widetilde{\delta}'$ длины $\widetilde{t}'$, была размещена каноническая (φ, D)-универсальная матрица $\widetilde{M}'_+$ максимальной локальной высоты $\widetilde{s}'$, $\widetilde{s}' = s' - 3$, соответствующая четному стандартному (φ, D)-универсальному для отрезка $\widetilde{\delta}'$ множеству $\widetilde{G}'_+$. Это позволяет с помощью рассуждений, подобных приведенным выше, доказать, что и в рассматриваемом случае имеется возможность реализации функций из множества G максимальной локальной высоты s, $s = \widetilde{s}' + \widetilde{l}$, где $\widetilde{l} = l - 2$, на выходах подформул $F_\vee$ формул $\check{\Phi}$, используемых в (31) при $\sigma \in I$.

Аналогично тому, как это делалось в теореме 4, построим сначала схему $\check{\Sigma}$, реализующую функцию $\check{f} = f(x, z) \cdot \chi_I(z)$ на основе представлений (20)

и (22). При этом вместо функций из G' и G'' будем использовать функции из G'_+ и G''_+ соответственно так, чтобы обеспечить реализацию на выходах некоторых подформул $F_\vee$ формул $\check{\Phi}$ функций, которые при $\chi_I(z)=1$ совпадают с требуемыми функциями из (φ, D)-универсального для отрезка δ множества F.

Рассмотрим двоичный набор τ длины $Q=2^m(2^{n-m}-N)$, который состоит из $(2^{n-m}-N)$ столбцов значений «остаточных» функций $f_\sigma=f(x,\sigma)$, выписанных в порядке возрастания номеров $\nu(\sigma)$, $\sigma\in B^{n-m}\setminus I$, и который разбит на $R=\left\lceil\dfrac{Q}{\lambda}\right\rceil$ последовательных отрезков длины $\lambda=t'+pl$. Построим схему $\widetilde{\Sigma}$ от входных переменных (x,z), вычисляющую по набору их значений (β,σ) набор (γ,θ) значений своих выходных переменных (u,v), где $u=(u_1,\ldots,u_k)$,$v=(v_1,\ldots,v_m)$ и $k=\lceil\log R\rceil$, так, что числа $\nu(\gamma)+1$ и $\nu(\theta)+1$ задают номер того отрезка набора τ, в котором находится значение $f(\beta,\sigma)$, и номер той позиции в нем, в которой оно записано соответственно.

Схема Σ_f содержит схемы $\check{\Sigma}$, $\widetilde{\Sigma}$ в качестве подсхем, реализует подачу на первые m входов подсхемы $\check{\Sigma}$ набора переменных x, если $\chi_I(z)=0$, и набора переменных v подсхемы $\widetilde{\Sigma}$, если $\chi_I(z)=1$. В последнем случае она реализует также функцию $\widehat{f}(x,z)=f(x,z)\cdot\chi_I(z)$ на основе разложения

$$\widehat{f}(x,z)=\bigvee_{i=1}^{R}\chi_i(x,z)\varphi(g_1^{(i)},\ldots,g_p^{(i)}),$$

где $\chi_i(x,z)$ — характеристическая функция i-го отрезка в разбиении набора τ, а функции $g_j^{(i)}$, $j\in[1,p]$, берутся из множества F. При этом для реализации каждой внутренней суперпозиции берется одна формула Ф, входы которой подключаются к тем выходам подформул $F_\vee$ формул Ф схемы $\widehat{\Sigma}$, где реализуются соответствующие функции из F.

Построение схемы Σ_f завершается дизъюнктированием выходов ее подсхем $\widehat{\Sigma}$ и $\check{\Sigma}$, так как $f=\widehat{f}\vee\check{f}$.

Полагая

$$m=\lfloor 2\log n\rfloor,\quad s'=2\left\lceil\frac{n-2\log n}{2}\right\rceil,\quad s''=2\left\lceil\frac{n-3\log n}{2}\right\rceil,\quad N=\left\lceil\frac{2^{n-m}}{\log n}\right\rceil$$

и выбирая значение остальных параметров так, как это было описано выше, получим (28).

Случай базиса Б, для которого $æ_Б=1$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

§ 5. Нижние мощностные оценки исследуемых функций Шеннона

В данном параграфе устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона $L_Б^{УС}(n)$ (ср. с [1]) и $L_Б^{С,1}(n)$, которые доказывают, что соответствующие им верхние оценки данных функций Шеннона из теорем 4 и 5 являются оценками высокой степени точности.

Предположим, что при $æ_Б=1$ элементы из $Б'=\{E_i\in Б:\varphi_i=\rho_Б\}$ реализуют все различные функции от переменных x_1,x_2, принадлежащие замыканию множества $\{\varphi_i: E_i\in Б'\}$ в P_2. Предположим также, что базис Б замкнут

относительно операции отождествления переменных, т. е., наряду с элементом E_i, в Б входят элементы веса p_i, которые реализуют все попарно неконгруэнтные функции, получающиеся из φ_i в результате отождествления переменных. Эти предположения не ограничивают, очевидно, общности рассуждений, связанных с нижними оценками сложности функций.

Пусть Φ' — множество всех попарно неконгруэнтных существенных функций, которые реализуются абсолютными формулами над Б′, содержащими по крайней мере один элемент. Обозначим через $\widetilde{\text{Б}}'$ бесконечный базис, различные элементы которого реализуют все различные функции из Φ', причем элемент E с t входами имеет «вес» $\rho_{\text{Б}}(t-1)$, и пусть $\widetilde{\text{Б}} = \text{Б} \cup \widetilde{\text{Б}}'$. Базис $\widetilde{\text{Б}}$ является расширением базиса Б, а его элементы можно считать «макроэлементами» базиса Б. Следовательно, полагая $U_{\text{Б}}^{\text{УС}} = U_{\text{Б}}^{\text{С},0}$, заметим, что $U_{\text{Б}}^{\text{С},i} \subseteq U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},i}$, $U_{\text{Б}}^{\text{С}} \subseteq U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С}}$, где $i \in [0, 1]$.

Заметим также, что в случае $æ_{\text{Б}} = 1$ любая функция из Φ' симметрична, а любая формула над $\widetilde{\text{Б}}'$ реализует либо функцию, конгруэнтную некоторой функции из Φ', либо функцию, существенно зависящую не более чем от одной переменной.

Схему Σ, $\Sigma \in U_{\text{Б}}^{Q}$, будем называть *минимальной* в классе $U_{\text{Б}}^{Q}$, если для любой эквивалентной ей схемы Σ', $\Sigma' \in U_{\text{Б}}^{Q}$, справедливо неравенство $L(\Sigma') \geqslant L(\Sigma)$, причем в случае $L(\Sigma') = L(\Sigma)$ число ребер Σ' не меньше, чем число ребер Σ, а если, кроме того, число ребер Σ' равно числу ребер Σ, то число вершин Σ' не меньше числа вершин Σ. Обозначим через $\widehat{U}_{\text{Б}}^{Q}$ множество минимальных схем из класса $U_{\text{Б}}^{Q}$, а через $\widehat{U}_{\text{Б}}^{Q}(L, n)$ — множество схем Σ из $\widehat{U}_{\text{Б}}^{Q}$ с набором входных переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и одним выходом, для которых $L(\Sigma) \leqslant L$. Нижняя оценка функции Шеннона $L_{\text{Б}}^{Q}(n)$ выводится из обычного мощностного неравенства

$$|\widehat{U}_{\text{Б}}^{Q}(L_{\text{Б}}^{Q}(n), n)| \geqslant 2^{2^n} \tag{32}$$

и некоторой верхней оценки для величины*) $|\widehat{U}_{\text{Б}}^{Q}(L, n)|$.

Лемма 3. *Если a, m, τ, α — действительные параметры и $a \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $\tau \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, то*

$$\max_{0 \leqslant y < m} \left(\left(\frac{a \cdot y^{\tau}}{m - y} \right)^{m-y} \cdot y^{\alpha m} \right) \leqslant (\beta t m^{\alpha} (\log t)^{-\tau-\alpha})^{m}, \tag{33}$$

где $t = a \cdot m^{\tau-1}$, а β — положительный параметр, зависящий только от τ, α.

Доказательство. Положим

$$F(y) = \left(\frac{a \cdot y^{\tau}}{m - y} \right)^{m-y} \cdot y^{\alpha m} \quad \text{и} \quad f(y) = \ln F(y),$$

а через β_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем обозначать положительные действительные параметры, зависящие только от τ, α. Легко видеть, что

$$f'(y) = \frac{m(\tau + \alpha)}{y} - \ln \left(\frac{a \cdot y^{\tau}}{m - y} \right) - \tau + 1 \tag{34}$$

*) Для конечного множества схем U через $|U|$ будем обозначать число попарно не изоморфных схем в U.

и что $f'(y) < 0$ при $y > \beta_1 \cdot m$, где $\beta_1 < 1$. Таким образом, максимальное значение функции $f(y)$ при $0 \leqslant y < m$ достигается тогда, когда $y = \xi$, где

$$\xi \leqslant \beta_1 m \quad \text{и} \quad f'(\xi) = 0. \tag{35}$$

Из (34), (35) следует, что

$$\beta_2 a^{1/\tau} m^{1-1/\tau} \geqslant \beta_3 \frac{\xi a^{1/\tau}}{(m-\xi)^{1/\tau}} \ln\left(\beta_3 \frac{\xi a^{1/\tau}}{(m-\xi)^{1/\tau}}\right). \tag{36}$$

Легко убедиться в том, что неравенство $w \ln w \leqslant u$ влечет неравенство $w \leqslant e_3(u/\ln u)$, и поэтому из (36) вытекает, что

$$\left(\frac{a\xi^\tau}{m-\xi}\right) \leqslant \beta_4 t(\log t)^{-\tau}, \qquad \xi \leqslant \beta_5 m(\log t)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\max_{0 \leqslant y \leqslant m} F(y) = F(\xi) \leqslant (\beta \cdot m^\alpha t(\log t)^{-\alpha-\tau})^m.$$

Лемма доказана.

Замечание. Аналогично лемме 3, используя (33) и стандартные приемы поиска экстремумов функции действительного переменного, нетрудно показать, что при любом a, $a > 0$, найдется такое b, $b > 0$, для которого

$$\max_{y+z \leqslant m, y \geqslant 0, z \geqslant 0} \left\{\left(\frac{ay(ay+z)}{m+z-y}\right)^{m+z-y} z^{-z}\right\} \leqslant \left(\frac{bm}{\log m \log\log m}\right)^m.$$

Обозначим через $\widetilde{r}(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, число различных элементов базиса $\widetilde{\text{Б}}$ с t входами. Легко видеть, что

$$\widetilde{r}(t) \leqslant (c_4)^t. \tag{37}$$

Вершины схемы Σ, $\Sigma \in U^{\text{С}}_{\widetilde{\text{Б}}}$, отличные от ее входов, считаются *внутренними* вершинами Σ. При задании схемы Σ, $\Sigma \in U^{\text{С}}_{\widetilde{\text{Б}}}$, номера ребер, которые входят в ее внутреннюю вершину v, связанную с элементом E, будем опускать, если базисная функция φ элемента E симметрична. Очевидно, что оставшихся пометок достаточно для однозначного восстановления функционирования схемы Σ. Описанные упрощение в системе пометок ребер схемы будут учитываться при установлении изоморфизма схем как помеченных графов.

Элементы из $\widetilde{\text{Б}}'$ по аналогии с Б′ называются *легкими*, а элементы из Б″, $\text{Б}'' = \text{Б} \setminus \text{Б}'$, — *тяжелыми* элементами базиса $\widetilde{\text{Б}}$. Легкий элемент E называется *открывающим (завершающим) элементом схемы* Σ, если каждый вход E присоединен либо к входу Σ, либо к выходу ее тяжелого элемента (соответственно выход E поступает без разветвления либо на выход Σ, либо на вход ее тяжелого элемента). Из определений и свойств базиса $\widetilde{\text{Б}}$ следует, что если $æ_{\text{Б}} = 1$, то в минимальной схеме Σ, $\Sigma \in U^{\text{С}}_{\widetilde{\text{Б}}}$, отсутствуют параллельные ребра. Из них следует также, что каждая легкая вершина минимальный схемы Σ, $\Sigma \in U^{\text{С},1}_{\widetilde{\text{Б}}}$, является либо открывающей, либо завершающей вершиной Σ, а если $\Sigma \in U^{\text{С},0}_{\widetilde{\text{Б}}}$, то как открывающей, так и завершающей вершиной одновременно.

Через $E(\Gamma)$ и $V(\Gamma)$ обозначается множество ребер и множество вершин графа Γ соответственно. Для схемы Σ, $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{C}}$, через $V'(\Sigma)$ (через $V''(\Sigma)$, $V_{\text{вн}}(\Sigma)$, $V_{\text{вх}}(\Sigma)$, $V_{\text{вых}}(\Sigma)$, $V_1'(\Sigma)$, $V_2'(\Sigma)$) обозначается множество легких (соответственно тяжелых, внутренних, входных, выходных, открывающих, завершающих) вершин Σ, а через $L'(\Sigma)$ и $L''(\Sigma)$ — суммарная сложность по всем вершинам из $V'(\Sigma)$ и $V''(\Sigma)$ соответственно. Легко показать, что

$$|R(\Sigma)| + |V_{\text{вн}}(\Sigma)| \leqslant c_5 L(\Sigma), \tag{38}$$

$$|R(\Sigma)| - |V_{\text{вн}}(\Sigma)| \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} L(\Sigma) - c_6 L''(\Sigma), \tag{39}$$

где

$$c_6 = \min_{E_i \in \text{Б}''} \left\{ \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} - \frac{k_i - 1}{p_i} \right\}$$

и, очевидно, $c_6 > 0$.

Минимальный по включению подграф $\mathscr{D}$ графа схемы Σ называется *остовом* Σ, если

$$V(\mathscr{D}) \supseteq V_{\text{вых}}(\Sigma) \cup V''(\Sigma) \cup V_2'(\Sigma),$$

число слабосвязных компонент $\mathscr{D}$ равно $|V_{\text{вых}}(\Sigma)|$, а вершины и ребра $\mathscr{D}$ имеют те же самые пометки, что и в Σ. Легко видеть, что остов $\mathscr{D}$ схемы Σ представляет собой систему корневых деревьев, корнями которых являются выходы Σ, а каждое ребро $\mathscr{D}$ ориентировано к корню соответствующего дерева. В минимальной схеме Σ, $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{C,1}$, как уже отмечалось,

$$V'(\Sigma) = V_1'(\Sigma) \cup V_2'(\Sigma) \quad \text{и} \quad V'(\check{\Sigma}) = V_2'(\check{\Sigma}) = V_1'(\check{\Sigma}),$$

если $\check{\Sigma}$ — минимальная схема из класса $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{C,0}$. Следовательно, в любом из этих классов число вершин остова $\mathscr{D}$ минимальной схемы Σ удовлетворяет неравенству:

$$|V(\mathscr{D})| \leqslant c_7 L''(\Sigma) + |V_{\text{вых}}(\Sigma)|, \tag{40}$$

где $c_7 = \max\limits_{E_i \in \text{Б}''} \dfrac{k_i + 1}{p_i}$. Плоскую укладку остова $\mathscr{D}$ схемы Σ будем называть *правильной*, если для любой вершины v, $v \in V(\mathscr{D})$, числа, которые являются пометками ребер $\mathscr{D}$, входящих в v, возрастают по часовой стрелке. Пусть $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{C},1}$, а $\mathscr{D}$ — остов Σ. Те ребра и внутренние вершины Σ, которые не принадлежат $\mathscr{D}$, считаются *свободными относительно* $\mathscr{D}$ ребрами и вершинами Σ соответственно, а те входы элементов Σ, в которые входят свободные ребра, — *свободными относительно* $\mathscr{D}$ входами. Из определений следует, что в минимальной схеме Σ любая свободная вершина принадлежит множеству $V_1'(\Sigma) \backslash V_2'(\Sigma)$ и в нее входит не менее двух ребер.

Лемма 4. *Если выполнено условие* $\frac{1}{2} n \leqslant \log L \leqslant 2n$, *то*

$$|\widehat{U}_{\widetilde{\text{Б}}}^{C,i}(L, n)| \leqslant \left(c_{10} L \cdot n^{i - \varkappa_{\text{Б}} - 1} (\log n)^{-i}\right)^{L/\rho_{\text{Б}}}, \tag{41}$$

где $i = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}$ — один из рассматриваемых классов схем. Для $n \in N$ и целых неотрицательных чисел w, u, q через $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}(n; w; u; q)$

обозначим множество попарно неизоморфных минимальных схем Σ, $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}$, с входами x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и выходом z, имеющих остов $\mathscr{D}$, $|V(\mathscr{D})| = w$, относительно которого свободными в схеме Σ являются u вершин и q ребер. Для произвольной схемы Σ, $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}(n; w; u; q)$, в силу (39) справедливо неравенство

$$q \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} L(\Sigma) - c_6 L''(\Sigma) + u + 1, \tag{42}$$

а любая свободная вершина Σ, как уже отмечалось, принадлежит множеству $V_1'(\Sigma) \backslash V_2'(\Sigma)$, и поэтому $u \leqslant |V_1'(\Sigma) \backslash V_2'(\Sigma)|$, причем $V_1'(\Sigma) \backslash V_2'(\Sigma) = \varnothing$ и, следовательно, $u = 0$, если $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q} = U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},0}$.

Для того, чтобы задать с точностью до изоморфизма схему Σ, $\Sigma \in U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}(n; w; u; q)$, достаточно: 1) выбрать плоскую укладку корневого дерева D с w вершинами, которая задает правильную укладку непомеченного остова схемы Σ, и добавить к ней u изолированных вершин, соответствующих свободным вершинам Σ, а также n изолированных вершин, соответствующих входам $x_1, \ldots, x_n$ схемы Σ; 2) выбрать для каждой вершины из $V_{\text{вн}}(\Sigma)$ число свободных входов так, чтобы общее число всех свободных входов элементов Σ было равно q; 3) выбрать для каждой вершины v, $v \in V_{\text{вн}}(\Sigma)$, множество целых чисел, являющихся номерами несвободных входов связанного с v элемента Σ, и нанести, если это необходимо, соответствующие пометки на входящие в v ребра D; 4) выбрать для каждой вершины v, $v \in V_{\text{вн}}(\Sigma)$, пометку из множества $\widetilde{\text{Б}}$ с учетом числа ребер, входящих в v в схеме Σ; 5) каждый свободный вход каждого элемента E схемы Σ, имеющего свободные входы, присоединить с помощью свободного ребра к какой-либо вершине из $V(\Sigma)$ с учетом специфики класса $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q}$, снабдив в случае необходимости это ребро пометкой a, где a — номер присоединяемого входа элемента E.

При этом общее число способов выбора во всех пунктах 1–4 в силу (37) не больше, чем

$$4^w \cdot C_{q+w+u-1}^{w+u} (2c_4)^{q+w} \leqslant (c_8)^{q+u+w},$$

а для произвольного свободного ребра, входящего в вершину v и присоединенного, согласно пункту 5, к своей начальной вершине s, возможны следующие варианты: 1) $s \in V_{\text{вх}}(\Sigma) \cup V''(\Sigma)$, если $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q} = U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},0}$ или если $U_{\widetilde{\text{Б}}}^{Q} = U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},1}$ и $v \in V_1'(\Sigma) \backslash V_2'(\Sigma)$; 2) $s \in V(\Sigma)$ в остальных случаях.

Заметим также, что число свободных ребер, входящих в свободные вершины Σ, не меньше, чем $2u$. Следовательно,

$$|U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},0}(n; w; u; q)| \leqslant (c_8)^{q+w} (n+w)^q, \tag{43}$$

$$|U_{\widetilde{\text{Б}}}^{\text{С},1}(n; w; u; q)| \leqslant \frac{1}{u!} (c_8)^{q+u+w} (n+w)^{2u} (n+w+u)^{q-2w}. \tag{44}$$

В случае симметричности базиса Б присоединение свободных ребер Σ можно рассматривать как бесповторное неупорядоченное распределение множества этих ребер по соответствующим парам вершин с последующей нумерацией тех ребер, которые входят в тяжелые вершины Σ, числа-

ми $1, \ldots, k''_{\text{Б}}$, где $k''_{\text{Б}} = \max\limits_{E_i \in \text{Б}''} k_i$. Таким образом, в случае $æ_{\text{Б}} = 1$ получим

$$|U^{\text{C},0}_{\widetilde{\text{Б}}}(n; w; 0; q)| \leqslant (c_8 k''_{\text{Б}})^{q+w} \cdot C^q_{w(n+w)}, \tag{45}$$

$$|U^{\text{C},1}_{\widetilde{\text{Б}}}(n; w; u; q)| \leqslant (c_8 k''_{\text{Б}})^{q+w+u} \frac{1}{u!} C^q_{(n+w)(n+w+u)}. \tag{46}$$

В силу (42), (40), (38) число $|U^{Q}_{\widetilde{\text{Б}}}(L, n)|$ не превосходит максимального значения величины $c_9 L^3 |U^{Q}_{\widetilde{\text{Б}}}(n; w; u; q)|$ при ограничениях:

$$0 \leqslant L'' \leqslant L, \quad w \leqslant c_7 L'' + 1 \quad q + w + u \leqslant c_5 L, \quad q \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} L - c_6 L'' + u + 1,$$

где $u = 0$, если $U^{Q}_{\widetilde{\text{Б}}} \neq U^{\text{C},1}_{\widetilde{\text{Б}}}$. Следовательно, с помощью леммы 3 и замечания к ней, полагая

$$y = \frac{c_6}{c_7}(w + n),\ z = u,\ \tau = æ_{\text{Б}'} + (1 - c),\ \alpha = 0,\ m = q - u + y \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} L + c_9 n,$$

выбирая значения параметра a так, что

$$a = \begin{cases} c_{11} m^{2-\tau} & \text{в классе } U^{\text{C},0}_{\widetilde{\text{Б}}}, \\ c_{11} & \text{в классе } U^{\text{C},1}_{\widetilde{\text{Б}}}, \end{cases}$$

учитывая (43)–(46), получим (41). Лемма доказана.

Следствие. *Из* (39) *и* (32) *вытекают требуемые нижние оценки функций Шеннона* $L^{\text{УС}}_{\text{Б}}(n)$ *и* $L^{\text{C},1}_{\text{Б}}(n)$ (*см. следствия к теоремам 4 и 5*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 189–214.
2. Ложкин С. А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем : дис. . . . доктор физ.-мат. наук : 01.01.09 / Ложкин Сергей Андреевич. Москва, 1997.
3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004.
4. Ложкин С. А. О синтезе формул, сложность и глубина которых не превосходят асимптотически наилучших оценок высокой степени точности // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — №. 3. — С. 19–25.
5. Ложкин С. А., Коноводов В. А. О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2012. — №. 2. — С. 28–36.
6. Ложкин С. А. Уточненные оценки для сложности схем из функциональных элементов // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2022. — №. 3. — С. 32–40.
7. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1958. — Вып. 1. — С. 120–140.
8. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
9. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих схем. — М.: Изд-во Мос. ун-та, 1984.
10. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
11. Lozhkin S. A., Shiganov A. E. High accuracy asymptotic bounds on the bdd size and weight of the hardest functions // Fundamenta Informaticae. — 2010. — V. 104, N3. — P. 239–253.

Поступило в редакцию 15 IX 2023