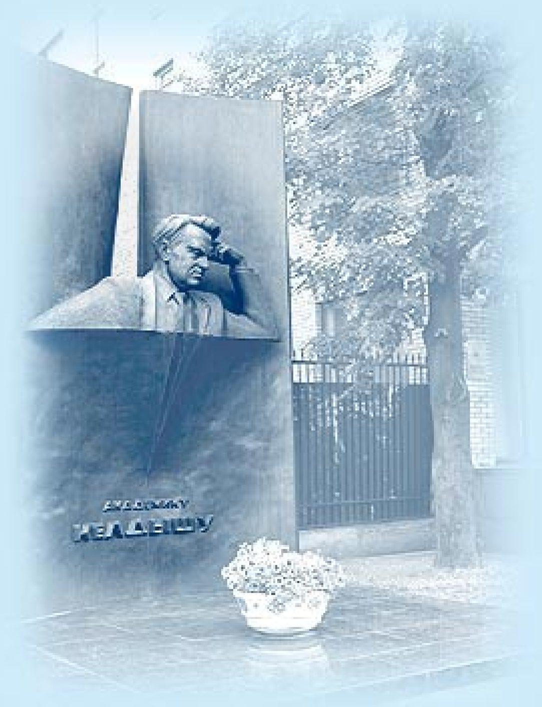
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 1 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов

О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 1. 25 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-1
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-1

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев, В.В. Корянов

О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах

Москва – 2023

УДК 531.38

Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. **О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах**

Представлен метод расчета главной моды колебаний упруго-вязкого бруса, лежащего на двух разновысоких упругих опорах при движении по нему моноколеса с постоянной продольной скоростью. Получены уравнения движения моноколеса, соответствующие главной моде колебаний системы. Предложен метод вычисления усреднённой частоты колебаний моноколеса на брусе. Найдено приближенное усредненное решение, позволяющее аналитически оценить влияние параметров системы на её динамику. Приведены результаты численных экспериментов по оценке точности приближенного решения.

Ключевые слова: моноколесо, упруго-вязкие колебания, препятствие, брус, компьютерное моделирование

Yury Filippovich Golubev, Victor Vladimirovich Koryanov. **On the rolling of a monowheel on a deformable beam lying on two supports**

A method for calculating the main mode of vibrations of an elastic-viscous beam lying on two elastic supports of different heights when a monowheel moves along it with a constant longitudinal velocity is presented. The equations of motion of the monowheel corresponding to the main mode of oscillations of the system are obtained. A method for calculating the average vibration frequency of a monowheel on a beam is proposed. An approximate averaged solution has been found that allows us to analytically assess the influence of system parameters on its dynamics. The results of numerical experiments to estimate the accuracy of the approximate solution are presented.

Key words: monowheel, elastic-viscous vibrations, obstacle, beam computer simulation

Содержание

Введение

В препринте рассматривается вопрос о преодолении широкой и протяженной расщелины роботом посредством перемещения по брусу. Исследуется вопрос о влиянии помех на движение, возникающих из-за основной моды малых упругих колебаний бруса. Для простоты исследуется вариант, когда робот имеет только одну точку контакта. Естественным материальным объектом, для которого это, очевидно, выполнено, является недеформируемое моноколесо. Моноколесо как транспортное средство достаточно удобно в обращении и стало популярным [1], особенно в городах. Поэтому задача представляет интерес не только с теоретической, но также и с практической точки зрения. Управление роботом будет состоять в том, чтобы поддерживать постоянной продольную скорость движения, направленную вдоль первоначально недеформированного бруса, и отслеживать осевую линию бруса. Вопросы путевой устойчивости робота не исследуются. Ранее аналогичная задача о движении материальной точки по упругому брусу анализировалась в связи с необходимостью исследования движения поездов по железнодорожным мостам [2]. В точной постановке изучаемая механическая система относится к разряду гибридных, описываемых совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Решение подобных задач требует сравнительно больших вычислительных ресурсов и мало пригодно для проведения массовых расчетов. В данной работе преследуется цель создать достаточно удобную и малозатратную приближенную модель динамики системы, пригодную для предварительной оценки работоспособности алгоритмов преодоления препятствий. Переправа шагающего робота по недеформируемому брусу уже рассматривалась в [3] для случая, когда края расщелины находятся на одной высоте. Ниже будет рассмотрен вариант, когда по упруго-вязкому брусу катится моноколесо, но края препятствия имеют разную высоту.

В препринте получена упрощенная динамическая модель движения моноколеса по упруго-вязкому брусу, лежащему на разновысоких упругих опорах. Выполнено качественное исследование полученных уравнений движения. Найдено приближенное аналитическое решение, и выполнена оценка его точности. Полученные результаты свидетельствуют о том, что построенная модель пригодна для оценки робастности алгоритмов управления.

1. Уравнение движения колеса по упруго-вязкой балке

Пусть прямая однородная балка длины l висит между двумя упругими разновысокими шарнирно подвижными опорами: A – левая опора и B – правая опора. Ось недеформированной балки составляет с горизонтальной плоскостью угол ϑ: $\sin\vartheta = (H_B - H_A)/l$, где H_A – высота точки A и H_B – высота точки B над опорной горизонтальной плоскостью. В каждой точке опоры может возникать реакция, действующая со стороны опоры на балку, пропорциональная смещению точки опоры. Балка имеет вес $\mathcal{P} = \gamma l$ и обладает свойством упругого сопротивления изгибу с жесткостью EJ поперечного сечения при изгибе, где E – модуль Юнга: $[E] = L^{-1}MT^{-2}$, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси сечения, перпендикулярной к плоскости изгиба. Например, для деревянной балки модуль Юнга можно принять равным $E = 10^{10}$ Па. Если сечение балки прямоугольное со сторонами a и b, то $J = ab^3/12$ при горизонтальной стороне a, расположенной перпендикулярно плоскости изгиба. На балке на расстоянии x от её левого конца расположено колесо массы m и радиуса r. Центр масс колеса совпадает с центром колеса. Момент инерции относительно оси колеса равен I. Колесо катится по брусу без проскальзывания (рис. 1). Проекция точки опоры колеса на ось недеформированной балки движется вдоль балки от точки A к точке B с постоянной скоростью v. Требуется оценить влияние упругих свойств балки на движение колеса.

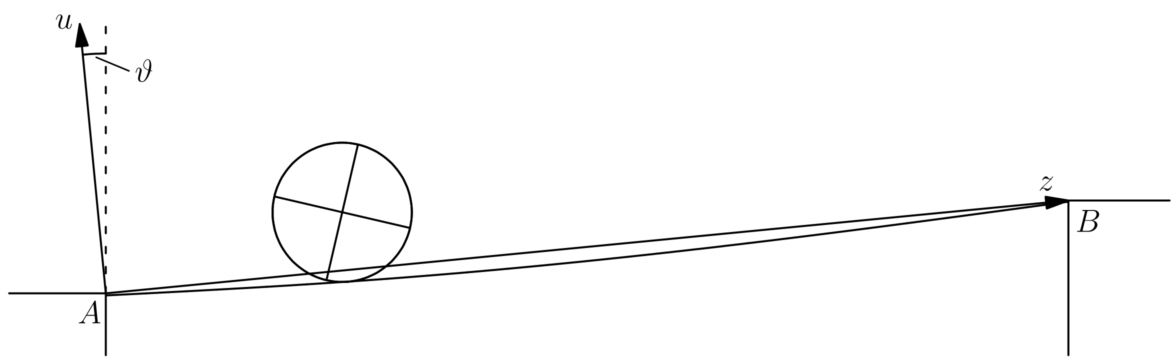


Рис. 1: Общий вид механической системы

Возьмем вертикальную плоскость, содержащую точки A и B. В этой плоскости пустим ось Az из точки A вдоль оси недеформированной балки по направлению к точке B. Ось Au направим вверх перпендикулярно к оси недеформированной балки. Балка взаимодействует с колесом в единственной точке, расположенной на оси балки на расстоянии x от точки A. Колесо действует на балку силой $\mathbf{F}$. А балка действует на колесо силой $-\mathbf{F}$ соответственно. Силовой момент в точке контакта отсутствует. Пусть функция $u(t,z)$ описывает отклонение оси деформированной балки от оси Az. Будем считать деформацию балки вместе с её частной производной по z малыми первого порядка. Тогда с точностью до малых второго порядка единичный вектор $\boldsymbol{\tau} \approx (1, u'_z)$ направлен по касательной к балке в фиксированный момент времени, а единичный вектор нормали к оси балки можно представить в виде $\boldsymbol{\nu} \approx (-u'_z, 1)$. С учетом того, что точка опоры колеса о балку имеет координаты $(x, u(t,x))$, радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра масс колеса можно записать как $\mathbf{r}_c = (x - ru'_z(t,x), u(t,x) + r)$. Найдём проекцию центра масс на ось, параллельную касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ и проходящую через точку A:

$$\mathbf{r}_c \cdot \boldsymbol{\tau} = x + u(t,x)u'_z(t,x) \approx x$$

с точностью до малых второго порядка. Таким образом, можно считать, что точка касания колеса с деформированным брусом отстоит от точки A на расстояние x, и, следовательно, колесо имеет постоянную угловую скорость качения $\omega = \dot{x}/r = v/r$. Пусть M – управляющий момент относительно оси моноколеса. Из уравнения баланса силовых моментов относительно точки касания моноколеса с брусом получим

$$M + mgr[\sin\vartheta + u'_z(t,x)\cos\vartheta] + M_{\text{тр}} = 0.$$

Отсюда видно, что управляющий момент должен преодолевать момент силы тяжести, возникающий из-за наклона деформированной балки, и момент трения качения $M_{\text{тр}}$. Предположим, что следящая по угловой скорости система справляется с этой задачей, и обратимся к анализу составляющей движения вдоль оси Az.

Будем считать, что моноколесо совершает безотрывное движение вдоль балки и касается её в единственной точке, определяемой координатой x на оси недеформированной весомой балки. Тогда колесо воздействует на балку сосредоточенной силой $\mathbf{F} = (0, F)$. Деформация горизонтальной балки описывается уравнением [2]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\gamma\cos\vartheta + \frac{m}{l}\left(g\cos\vartheta - \frac{d^2 u_d}{dt^2}\right)\delta(z-x), \qquad (1.1)$$

где u – отклонение оси балки от оси Az, ρ – погонная плотность балки, g – ускорение силы тяжести, $\delta(z-x)$ – сингулярная δ-функция:

$$\delta(z-x) = \begin{cases} 0, & z \neq x, \\ +\infty, & z = x, \end{cases} \qquad \int\limits_0^z \delta(z-x)dz = \sigma(z-x) = \begin{cases} 0, & z < x, \\ 1, & z \geq x, \end{cases}$$

$\sigma(z-x)$ – сингулярная функция Хевисайда. Полная производная от вертикальной координаты u_d движущейся по балке точки приложения силы вычисляется как

$$\frac{d^2u_d}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 u_d}{\partial t \partial z} + v^2\frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2},$$

когда горизонтальная скорость v перемещения точки x по балке постоянна. В общем случае решение уравнения (1.1) получается численным методом [2] и затруднено из-за наличия δ-функции с переменным положением порога.

Если в уравнении рассматриваемой механической системы учесть внутреннюю диссипацию балки, то уравнение колебаний предстанет в ещё более сложном виде, чем уравнение (1.1). Его мы приводить не будем. Заметим лишь, что наличие диссипации успокаивает собственные высокочастотные колебания балки, приводя в конечном итоге её осевую линию к равновесной форме. Не вдаваясь в подробности процесса успокоения собственных колебаний балки без нагрузки, предположим, что этот процесс происходит достаточно быстро, и можно ограничиться случаем квазистатического подсчёта сил, влияющих со стороны балки на колесо. В этом предположении балка при любом расположении колеса на ней будет отслеживать соответствующую положению колеса и силам инерции, действующим на балку со стороны колеса, форму равновесия. По постановке задачи колесо может совершать движение лишь в связанной с балкой вертикальной плоскости.

Как и ранее, точечное взаимодействие груза с балкой будем описывать контактной силой $\mathbf{F}$ воздействия груза на балку, направленной по оси Au. Тогда сила $\mathbf{F}_p$ воздействия балки на груз будет равна $\mathbf{F}_p = -\mathbf{F}$. Балка оказывает сопротивление движению груза в отрицательном направлении оси Au и не препятствует уходу груза с балки в положительном направлении этой оси. Найдем соотношение между силой $\mathbf{F}$ и статическим прогибом балки.

Пусть в некоторой точке x к балке приложена сила $\mathbf{F}$, перпендикулярная к оси недеформированной балки. Составляющие реакций опор $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$, направленные вдоль оси Au, выражаются формулами

$$N_A = \frac{P}{2} - (1-æ)F, \quad N_B = \frac{P}{2} - æF,$$

где $P = \mathcal{P}\cos\vartheta$, $æ = x/l$, а величина F учитывается со знаком. Если сила $\mathbf{F}$ сонаправлена с осью Au, то $F > 0$, а если нет, то $F < 0$. Пусть функция $u(z)$ задает форму оси балки. Считая деформации и угол ϑ малыми, представим функцию $u(z)$ в виде суммы: $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ – статическое смещение точек оси балки при условии, что опоры не деформируются, а $u_2(z)$ – смещение точек оси балки из-за деформации опор. Тогда производная $u_1'(z) = du_1/dz$ выражается формулой [2]

$$EJu_1'(z) = EJu_1'(0) + \left[\frac{P}{2} - (1-æ)F\right]\frac{z^2}{2} + \frac{(z-x)^2}{2}F\sigma(z-x) - \frac{\gamma\cos\vartheta z^3}{6}, \quad (1.2)$$

Зависимость $u_1(z)$ имеет вид

$$EJu_1(z) = EJu_1'(0)z + \left[\frac{P}{2} - (1-æ)F\right]\frac{z^3}{6} + F\frac{(z-x)^3}{6}\sigma(z-x) - \frac{\gamma\cos\vartheta z^4}{24}. \quad (1.3)$$

При $z = l$ прогиб балки должен равняться нулю: $u_1(l) = 0$. Поэтому

$$EJu_1'(0) = \frac{Fl^2}{6}æ(1-æ)(2-æ) - \frac{Pl^2}{24}. \quad (1.4)$$

Компонента $u_1(x)$ прогиба балки в точке x дается соотношением

$$EJu_1(x) = \frac{Fl^3}{3}æ^2(1-æ)^2 - \frac{Pl^3}{24}æ(1-æ)(1+æ-æ^2). \quad (1.5)$$

Компоненту $u_2(z)$ прогиба балки в точке z можно выразить формулой

$$u_2(z) = -\left[\frac{N_A}{k_A}\left(1-\frac{z}{l}\right) + \frac{N_B}{k_B}\frac{z}{l}\right], \quad (1.6)$$

где k_A, k_B – коэффициенты жёсткости опоры в точках A и B соответственно. Подставив сюда найденные ранее значения N_A и N_B, найдем

$$u_2(x) = F\left[\frac{(1-æ)^2}{k_A} + \frac{æ^2}{k_B}\right] - \frac{P}{2}\left(\frac{1-æ}{k_A} + \frac{æ}{k_B}\right). \quad (1.7)$$

Суммарное смещение балки в точке x принимает вид

$$u(x) = F\delta_F - P\delta_P, \quad (1.8)$$

где коэффициенты влияния δ_F и δ_P даются выражениями

$$\begin{aligned} \delta_F &= \left(\mu æ^2 + \frac{1}{k_A}\right)(1-æ)^2 + \frac{æ^2}{k_B}, \\ \delta_P &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu æ(1+æ-æ^2)}{4} + \frac{1}{k_A}\right)(1-æ) + \frac{æ}{k_B}\right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

причём $\mu = l^3/(3EJ)$. Эти формулы можно представить в более симметричном виде, применив замену $æ = 1/2 + \xi$:

$$\begin{aligned} \delta_F &= \mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)^2 + \frac{1}{k_A}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2 + \frac{1}{k_B}\left(\frac{1}{2} + \xi\right)^2, \\ \delta_P &= \frac{\mu}{8}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\left(\frac{5}{4} - \xi^2\right) + \frac{1}{2k_A}\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \frac{1}{2k_B}\left(\frac{1}{2} + \xi\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au принимает вид

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + fm\dot{u} = -m\hat{g} - F,$$

где $\hat{g} = g\cos\vartheta$, F – сила, с которой колесо действует на балку, $fm > 0$ – коэффициент демпфирования, возникающий из-за внутренней диссипации энергии балки. Приняв, что сила $(-F)$ вызывается упругостью балки, с помощью соотношения (1.8) получим замкнутое уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + fm\dot{u} + \frac{1}{\delta_F}u = -m\hat{g} - P\frac{\delta_P}{\delta_F}, \tag{1.11}$$

причём $æ = vt/l$, $\xi = -1/2 + vt/l$. Поскольку балка представляет собой освобождающую связь, имеем ограничение: $u < 0$. Если оно нарушено, то груз может с балки упасть. Кроме того, должно быть выполнено условие, что колесо касается балки только в одной точке. Поэтому радиус кривизны ρ осевой линии балки должен быть больше, чем радиус колеса r. Следовательно, должно быть выполнено

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|u''(x)|}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} < \frac{1}{r}, \tag{1.12}$$

где штрих, как и прежде, обозначает дифференцирование по z. В соответствии с формулами (1.2), (1.3) и (1.6) получим

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2}æ(1-æ)\left[\frac{P}{2} - F\right] = \frac{3\mu}{l^2}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\left[\frac{P}{2} - F\right],\\
u'(x) &= \frac{\mu}{l}(1-2æ)\left[Fæ(1-æ) - \frac{P}{8}(1 + 2æ - 2æ^2)\right] + u_2'(x),\\
u_2'(x) &= F\left(\frac{æ}{k_B} - \frac{1-æ}{k_A}\right) + \frac{P}{2}\left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B}\right)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\left[\frac{P}{2} - F\right],\\
u'(x) &= -\frac{2\mu}{l}\xi\left[F\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right) - \frac{P}{8}\left(\frac{3}{2} - 2\xi^2\right)\right] + u_2'(x),\\
u_2'(x) &= F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_B} - \frac{1}{k_A}\right) + \left(\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_A}\right)\xi\right] + \frac{P}{2}\left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B}\right).
\end{aligned}$$

Уравнение (1.11) следует интегрировать при начальных условиях

$$u(0) = -\frac{m\hat{g} + P/2}{k_A}, \quad \dot{u}(0) = 0 \tag{1.13}$$

и постоянном значении v.

2. Исследование качения колеса по балке

Если в уравнении (1.11) принять $v = 0$, то оно превращается в линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как видно из первой формулы (1.9), коэффициент δ_F оказывается строго положительным. Тогда при значениях параметра $f < 2/\sqrt{m\delta_F}$ уравнение (1.11) описывает затухающие колебания с частотой

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

относительно равновесного значения

$$u_s(æ) = -m\hat{g}\delta_F - P\delta_P. \tag{2.1}$$

На рис. 2 показана функция $u_s(æ)$ при массе колеса $m = 16$ кг для деревянной балки, имеющей размеры $l = 2.5$ м, $a = 25$ см, $b = 2$ см. Коэффициенты жёсткости при взаимодействии балки с грунтом приняты равными $k_A = k_B = 30000$ Н/м. Функция $u_s(æ)$ симметрична относительно значения $æ = 1/2$. В начальной ($æ = 0$) и конечной ($æ = 1$) точках она выпукла вверх. Видно, что в точках A и B балка вместе с грузом продавливает грунт меньше чем на 1 см. Минимальное значение прогиба балки относительно прямой, соединяющей её концы, достигается, когда груз находится в середине балки, и составляет ~ -5 см.

При $v \neq 0$ и

$$\frac{v}{l} \ll \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

величина $u_s(x)$ представляет собой медленно меняющуюся функцию в зависимости от времени. Смысл ограничения на величину v состоит в том, что в пределах времени каждого колебания значение функции $u_s(x)$ можно считать практически неизменным и равным, например, значению, соответствующему началу колебания. Тем самым получается, что при малых значениях скорости v колебания по координате u в среднем будут происходить в окрестности функции $u_s(x)$. Понятно, что приведенный анализ является интуитивным и носит в основном качественный характер.

При скорости $v = 0.4$ м/с и коэффициенте диссипации $f = 10$ с$^{-1}$ получается решение $u(æ)$ уравнения (1.11), график которого в выбранном на рис. 2 масштабе мало отличается от графика функции $u_s(æ)$. На этом рисунке показан лишь график производной по времени $\dot{u}(æ)$, который свидетельствует о том, что в начале движения балка вместе с грузом колеблется и колебания затухают достаточно быстро.

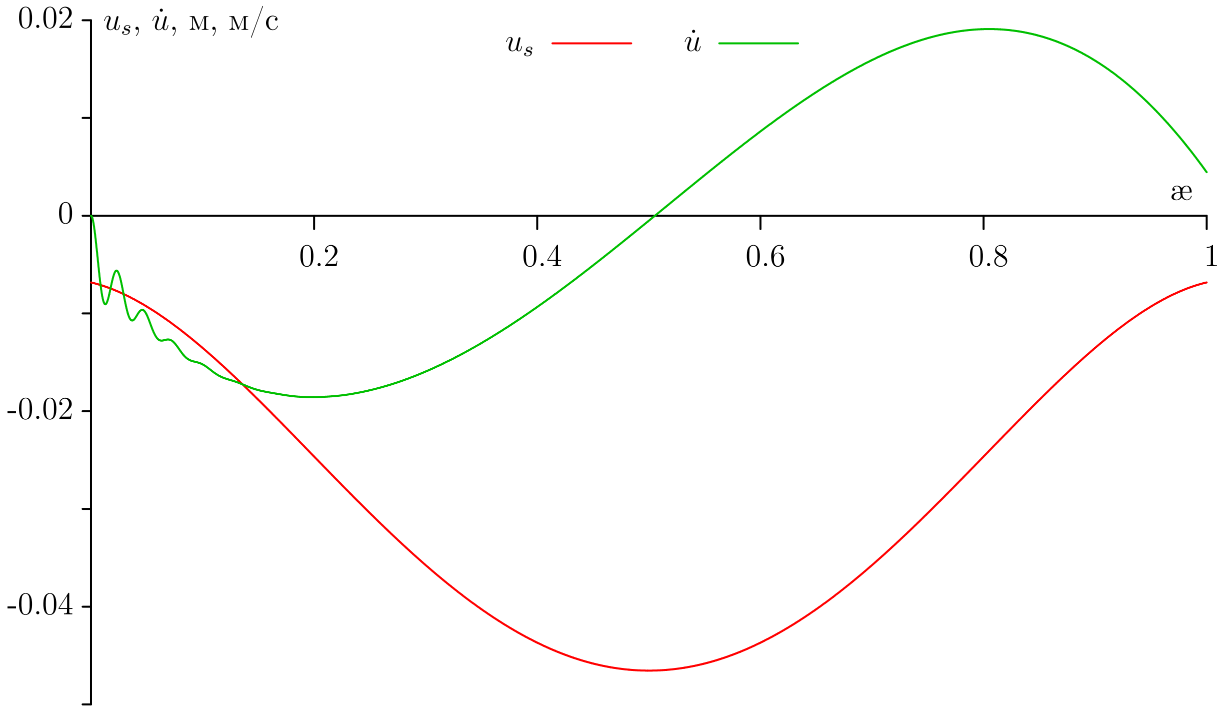


Рис. 2: Функции $u_s(æ)$, $\dot u(æ)$

Чтобы выявить более точную зависимость средних значений деформации бруса от скорости движения точки, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$u = y + u_s(x) \tag{2.2}$$

и учтем, что

$$\dot u_s(x) = -\frac{v}{l}\left[m\hat g\frac{d\delta_F}{dæ} + P\frac{d\delta_P}{dæ}\right], \quad \ddot u_s(x) = -\frac{v^2}{l^2}\left[m\hat g\frac{d^2\delta_F}{dæ^2} + P\frac{d^2\delta_P}{dæ^2}\right], \tag{2.3}$$

где

$$\frac{d\delta_F}{dæ} = 2(1-æ)\left[\mu æ(1-2æ) - \frac{1}{k_A}\right] + \frac{2æ}{k_B},$$

$$\frac{d\delta_P}{dæ} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu(1-2æ)(1+2æ-2æ^2)}{4} - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right],$$

$$\frac{d^2\delta_F}{dæ^2} = 2\left[\mu(1-6æ+6æ^2) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right],$$

$$\frac{d^2\delta_P}{dæ^2} = -\frac{3\mu æ(1-æ)}{2}.$$

Или

$$\dot u_s(x) = -\frac{v}{l}\left[m\hat g\frac{d\delta_F}{d\xi} + P\frac{d\delta_P}{d\xi}\right], \quad \ddot u_s(x) = -\frac{v^2}{l^2}\left[m\hat g\frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P\frac{d^2\delta_P}{d\xi^2}\right], \tag{2.4}$$

где

$$\frac{d\delta_F}{d\xi} = -4\mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\xi - \frac{2}{k_A}\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \frac{2}{k_B}\left(\frac{1}{2} + \xi\right),$$

$$\frac{d\delta_P}{d\xi} = \frac{1}{2}\left[-\mu\xi\left(\frac{3}{4} - \xi^2\right) - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right],$$

$$\frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} = 2\left[-2\mu\left(\frac{1}{4} - 3\xi^2\right) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right],$$

$$\frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = -\frac{3}{2}\mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right).$$

Тогда y должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F}y = f\frac{v}{l}\left[m\hat{g}\frac{d\delta_F}{d\text{æ}} + P\frac{d\delta_P}{d\text{æ}}\right] + \frac{v^2}{l^2}\left[m\hat{g}\frac{d^2\delta_F}{d\text{æ}^2} + P\frac{d^2\delta_P}{d\text{æ}^2}\right] \tag{2.5}$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -\dot{u}_s(0). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.5) показывает, что решение уравнения (1.11) будет отклоняться от функции $u_s(x)$ не только пропорционально квадрату скорости v, но при учёте диссипации оказывается пропорциональным ещё и произведению скорости на коэффициент демпфирования.

Для упрощения дальнейшего анализа примем $k_A = k_B = k$. При этом формулы (1.10) принимают вид:

$$\begin{aligned} \delta_F &= \mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)^2 + \frac{2}{k}\left(\frac{1}{4} + \xi^2\right), \\ \delta_P &= \frac{\mu}{8}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\left(\frac{5}{4} - \xi^2\right) + \frac{1}{2k} \end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$\frac{d\delta_F}{d\xi} = 4\xi\left[-\mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right) + \frac{1}{k}\right],$$

$$\frac{d\delta_P}{d\xi} = -\frac{\mu\xi}{2}\left(\frac{3}{4} - \xi^2\right),$$

$$\frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} = 4\left[-\mu\left(\frac{1}{4} - 3\xi^2\right) + \frac{1}{k}\right],$$

$$\frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = -\frac{3}{2}\mu\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right).$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
C(\xi) &= m\hat{g}\frac{d\delta_F}{d\xi} + P\frac{d\delta_P}{d\xi} = G\xi(\xi^2+\alpha),\\
D(\xi) &= m\hat{g}\frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P\frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = 3G(\xi^2+\beta),
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где

$$
G = \frac{\mu(8m\hat{g}+P)}{2},\ \alpha = \frac{8m\hat{g}(4-k\mu)-3k\mu P}{4k\mu(8m\hat{g}+P)},\ \beta = \frac{8m\hat{g}(4-k\mu)-3k\mu P}{12k\mu(8m\hat{g}+P)}, \tag{2.9}
$$

так что

$$
\beta = \frac{\alpha}{3}, \quad -\frac{3}{4} < \alpha < \frac{4-k\mu}{4k\mu}. \tag{2.10}
$$

Уравнение (2.5) можно переписать следующим образом:

$$
\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F}y = f\frac{v}{l}C(\xi) + \frac{v^2}{l^2}D(\xi). \tag{2.11}
$$

Видно, что если скорость $v = 0$, то уравнение (2.11) описывает при $t \to \infty$ асимптотическое стремление функции $y(t)$ к нулевому среднему значению $y = y_r = 0$, а функция $u(t)$ будет тогда стремиться к значению $u_s(\xi)$, соответствующему фиксированному значению ξ. Если ξ меняется, т.е. $v \neq 0$, то из-за влияния функций $C(\xi)$ и $D(\xi)$ среднее значение $y_r(\xi)$ будет отклоняться от нуля в зависимости от положения точки m на балке.

Для того чтобы качественно исследовать зависимость $y_r(\xi)$, если $v \neq 0$, рассмотрим поведение функции $\delta_F(\xi)$, представленной формулой (2.7). При $k_A = k_B = k$ её можно записать в виде

$$
\delta_F = \mu\left(\xi^4 - \frac{k\mu-4}{2k\mu}\xi^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2k\mu}\right). \tag{2.12}
$$

Эта функция имеет минимум, когда $\xi^2 = \xi_m^2 = (k\mu-4)/(4k\mu)$.

Если $0 < k\mu < 4$, то этот минимум в области $0 \le \xi^2 \le 1/4$ не существует, и тогда функция δ_F меняется в пределах

$$
\frac{\mu}{16} + \frac{1}{2k} \le \delta_F \le \frac{1}{k} \longrightarrow k \le \frac{1}{\delta_F} \le \frac{16k}{k\mu+8},
$$

а локальная круговая частота $\omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_F})$ принадлежит диапазону

$$
\sqrt{\frac{k}{m}} \le \omega(\xi) \le \sqrt{\frac{16k}{m(k\mu+8)}}, \quad k\mu < 4. \tag{2.13}
$$

Пусть теперь $k\mu \ge 4$. Представим аргумент минимума в виде

$$
\xi_m^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{k\mu}.
$$

Следовательно, справедливо неравенство: $0 \le \xi_m^2 < 1/4$. Минимальное значение δ_F имеет вид

$$\delta_F^m = \frac{k\mu - 1}{k^2\mu}.$$

Максимальные значения δ_F достигаются на границах диапазона $0 \le \xi^2 < 1/4$:

$$\delta_F(0) = \frac{k\mu + 8}{16k}, \quad \delta_F\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, функция $\delta_F(\xi)$ изменяется в диапазоне

$$\frac{k\mu - 1}{k^2\mu} \le \delta_F(\xi) \le \max\left[\frac{k\mu + 8}{16k}, \frac{1}{k}\right],$$

а локальная круговая частота ограничена значениями

$$\min\left[\sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \le \omega(\xi) \le \sqrt{\frac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}. \tag{2.14}$$

Объединив формулы (2.13) и (2.14), получим

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{k}{m}} \le \omega(\xi) \le \sqrt{\dfrac{16k}{m(k\mu + 8)}}, & 0 < k\mu < 4, \\ \min\left[\sqrt{\dfrac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right] \le \omega(\xi) \le \sqrt{\dfrac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}, & k\mu \ge 4. \end{cases} \tag{2.15}$$

На рис. 3 показан график зависимости $\omega(æ) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$, которая соответствует указанным выше параметрам движения и характеризует тип локальных деформаций балки при $v = 0$. По графику можно, например, судить, что при выбранном ранее коэффициенте демпфирования $f = 10$ с$^{-1}$ это будут затухающие колебания для любой точки балки. Видно также, что локальная круговая частота колебаний балки меняется в значительном диапазоне и в середине балки колебания происходят с меньшей частотой, чем на её концах.

На рис. 4 показаны графики $y(æ)$ для сравнительно небольших значений коэффициента вязкого трения. Как и следовало ожидать, при $f = 0$ затухания не происходит, а частота колебаний оказывается переменной. При $f = 2$ колебания затухают лишь ближе к концу балки, а для $f = 10$ колебания практически незаметны уже для значений $æ > 0.2$. Значения y оказываются на два порядка меньше, чем соответствующие значения $u_s(æ)$ на рис. 2, так что движение колеса происходит без отскоков от балки. Кроме того, на рис. 4 видно, что асимптотические решения пересекаются приблизительно в одной точке в окрестности значения $æ = 0.5$.

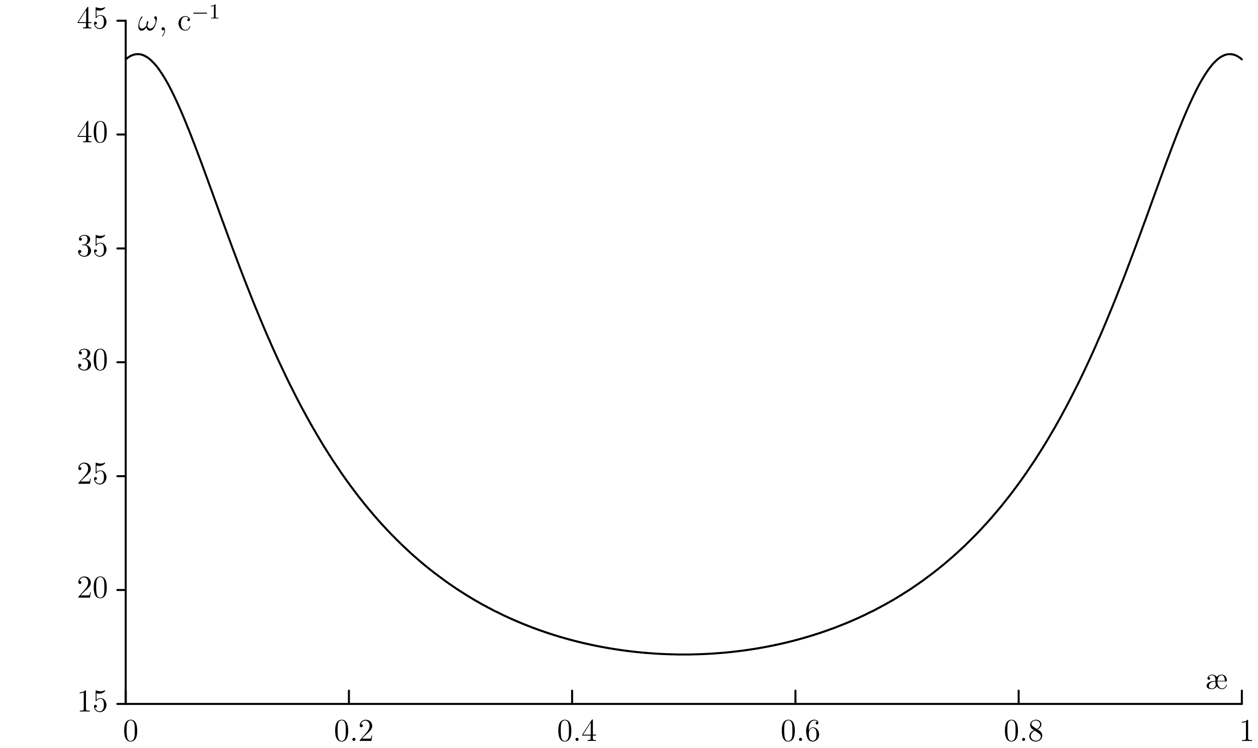


Рис. 3: Зависимость $\omega(æ) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$

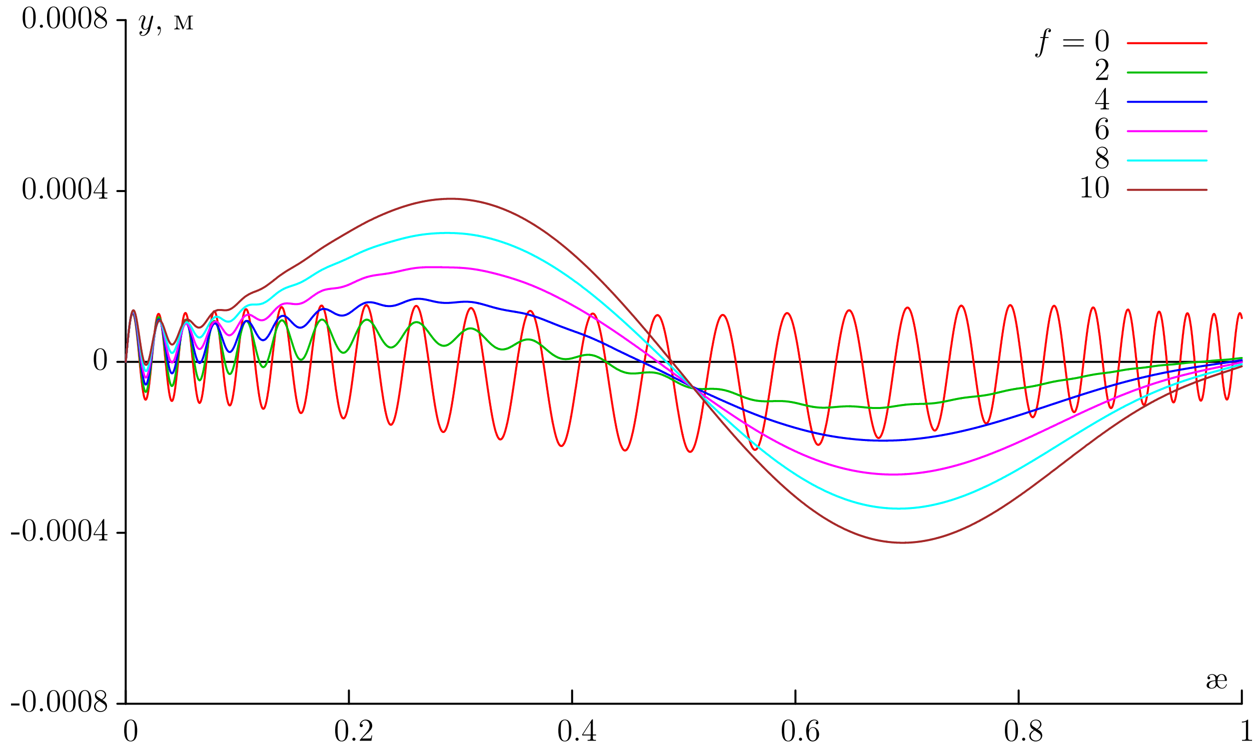


Рис. 4: Зависимости $y(æ)$ для малых значений коэффициента f

На рис. 5 представлены графики $y(æ)$ для значений $f > 10$. Их масштаб не позволяет разглядеть начальные колебания груза, которые, конечно, есть, а видны только асимптотические кривые. Они уже не пересекаются все в одной точке в окрестности значения æ = 0.5. Точки пересечения графиков, соответствующих соседним значениям параметра f, приближаются с ростом f к правому концу балки. Положительные отклонения оказываются более значительными, чем отрицательные, и занимают бóльшую часть балки. Вместе с тем суммарные отклонения балки от оси Az оказываются пока ещё отрицательными на всем протяжении балки, и колесо не отскакивает от балки. Сам по себе факт разгрузки балки на начальном участке движения груза представляет интерес и объясняется, по-видимому, тем, что при больших коэффициентах демпфирования балка как бы не успевает дойти до своего нижнего положения, когда груз по ней перемещается.

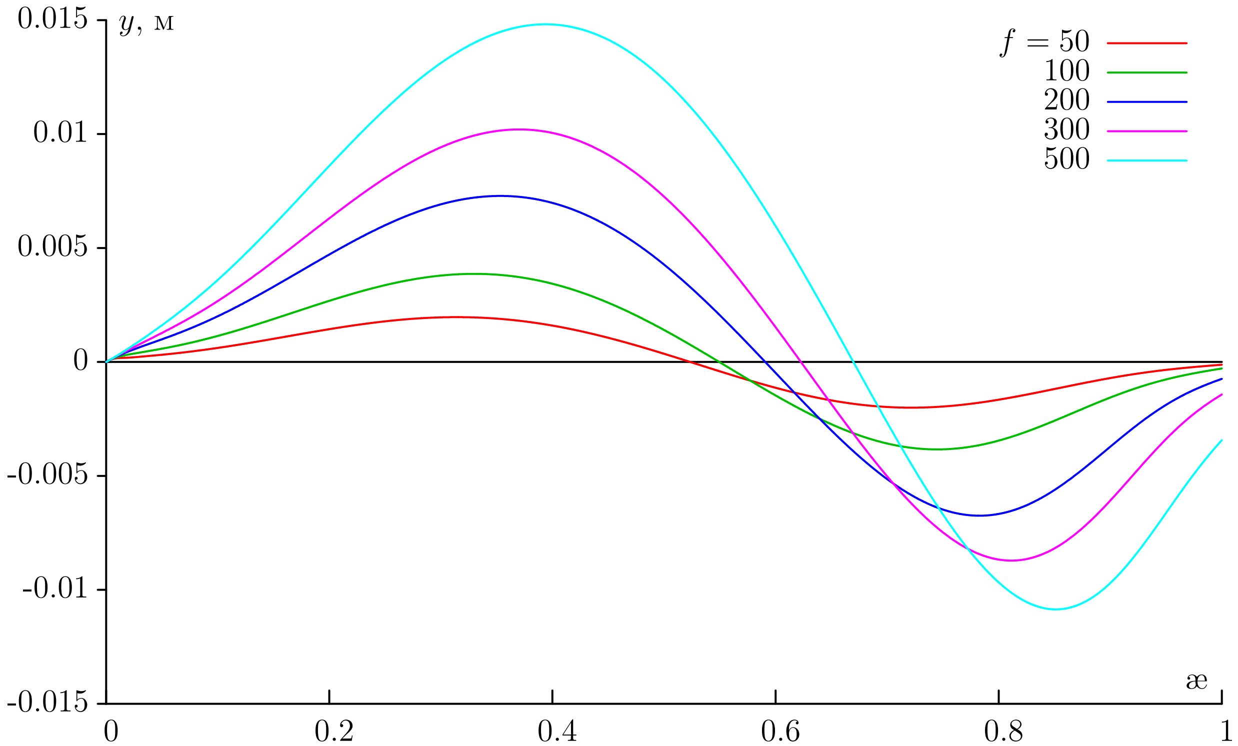


Рис. 5: Зависимости y(æ) для больших значений коэффициента f

Уравнение (2.5) не поддается аналитическому интегрированию, в основном из-за того, что частота колебаний балки оказывается переменной по её длине. Численно полученные зависимости y(æ) представляют свойства движения системы в ограниченной области параметров. Для понимания этих свойств «в большом» применим аналитическое приближение решений уравнения (2.5), приняв, что частота колебаний постоянна.

3. Приближённое решение

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f\frac{v}{l}C(\xi) + \frac{v^2}{l^2}D(\xi). \tag{3.1}$$

Для каждого заданного значения $k\mu$ подберем в указанных диапазонах (2.15) некоторое постоянное число ω_m, так чтобы решение y_m как можно меньше отличалось от соответствующего решения уравнения (2.11). В простейшем случае в качестве некоторого грубого приближения можно выбрать среднее между предельными значениями для $\omega(\xi)$ в формуле (2.15). Более точную настройку подходящего значения ω_m можно осуществить следующим образом. Возьмем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y} + f\dot{y} + \dfrac{1}{m\delta_F}y = f\dfrac{v}{l}C(\xi) + \dfrac{v^2}{l^2}D(\xi), \\ \ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f\dfrac{v}{l}C(\xi) + \dfrac{v^2}{l^2}D(\xi), \\ \dot{w} = p(t)(y - y_m)^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

В этой системе $\xi = -1/2 + vt/l = æ - 1/2$, а $p(t) > 0$ – весовой коэффициент, выбираемый эмпирически в зависимости от того, для какого участка траектории приближение должно быть наилучшим. Пусть $y(0)$ и $y_m(0)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (2.6), а $w(0) = 0$. Интегрирование по времени закачивается, когда $t = T = l/v$. Функция $w(t)$ является монотонно возрастающей. Значение $W(\omega_m) = w(T)$ неотрицательно и зависит от выбранной величины ω_m. Тогда наилучшим выбором для параметра ω_m можно считать

$$\omega_m^* = \arg\min_{\omega_m} W(\omega_m). \tag{3.3}$$

Следует отметить, что при использовании формулы (3.3) возникает зависимость $\omega_m^* = \omega_m^*(f)$, поскольку и первое и второе уравнения системы (3.2) содержат параметр f. На рис. 6 показана типичная зависимость коэффициента $\omega_m(f)$, удовлетворяющая условию (3.3) при $p(t) \equiv 1$. Видно, что при $f = 0$ значения этого коэффициента довольно большие, но с ростом f они резко падают и остаются практически постоянными для значений $f > 10$. Это, возможно, связано с тем, что при наличии демпфирования колебания быстро успокаиваются, и изменение частоты мало влияет на общий характер траектории.

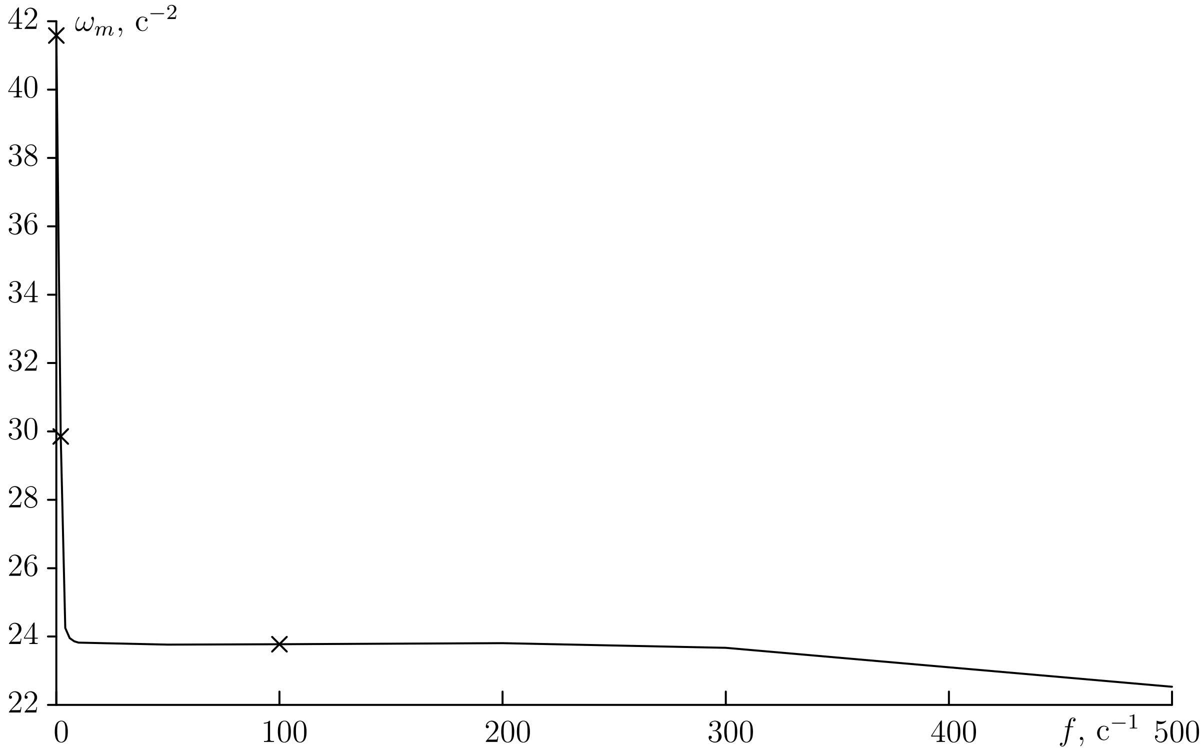


Рис. 6: Зависимость $\omega_m(f)$

Пусть значение ω_m так или иначе выбрано. Тогда корни характеристического уравнения для (3.1) имеют общий вид

$$\lambda_1 = \frac{-f - \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}. \tag{3.4}$$

При $f < 2\omega_m$ они определяют асимптотически затухающий колебательный процесс около частного притягивающего решения y_r уравнения (3.1), а при $f \geq 2\omega_m$ процесс становится апериодически приближающимся к частному решению y_r. Правая часть уравнения (3.1) есть многочлен $L(\xi)$ третьей степени по ξ:

$$L(\xi) = G\frac{v}{l}\left(f\xi^3 + 3\frac{v}{l}\xi^2 + f\alpha\xi + \frac{v}{l}\alpha\right). \tag{3.5}$$

Частное решение $y_r(\xi)$ будем искать в виде:

$$y_r(\xi) = G(a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0), \tag{3.6}$$

где коэффициенты a_i, $i = \overline{0,3}$, постоянны. Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим систему уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} 2\dfrac{v}{l}a_2 + fa_1 + \dfrac{l\omega_m^2}{v}a_0 = \dfrac{v}{l}\alpha, \\ 6\dfrac{v}{l}a_3 + 2fa_2 + \dfrac{l\omega_m^2}{v}a_1 = f\alpha, \\ 3fa_3 + \dfrac{l\omega_m^2}{v}a_2 = 3\dfrac{v}{l}, \\ \omega_m^2 a_3 = f\dfrac{v}{l}. \end{cases}$$

Из этой системы найдем

$$\begin{aligned} &a_0 = \nu(\alpha - 2a_2) - a_1 a_3, \quad a_2 = 3(\nu - a_3^2), \\ &a_1 = a_3(\alpha - 2a_2 - 6\nu), \quad a_3 = \frac{fv}{\omega_m^2 l}, \quad \nu = \frac{v^2}{\omega_m^2 l^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, коэффициент a_3 прямо пропорционален коэффициенту диссипации f. Выразим остальные коэффициенты частного решения явным образом через a_3:

$$\begin{aligned} &a_2 = 3(\nu - a_3^2), \quad a_1 = a_3(\alpha - 12\nu + 6a_3^2), \\ &a_0 = \nu(\alpha - 6\nu) + (18\nu - \alpha)a_3^2 - 6a_3^4. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть диссипация отсутствует ($f = 0$), тогда частное решение имеет вид

$$y_r(\xi) = G\nu[3\xi^2 + (\alpha - 6\nu)].$$

Оно оказывается симметричным относительно точки $\xi = 0$, и на концах балки принимает значения

$$y_r\left(\frac{1}{2}\right) = y_r\left(-\frac{1}{2}\right) = G\nu\left[\frac{3}{4} + (\alpha - 6\nu)\right].$$

Если $\alpha \geq 6\nu$ (скорость качения моноколеса невелика), то $y_r \geq 0$. Другими словами, качение колеса в этом случае в среднем ослабляет стационарную деформацию балки, и тем меньше, чем ближе колесо находится к середине балки. Термин «в среднем» означает, что полное решение уравнения (3.1) включает в себя не только частное решение $y_r(\xi)$, но и незатухающую при $f = 0$ колебательную составляющую.

Если $6\nu > \alpha > 6\nu - 3/4$, то в интервалах

$$-\frac{1}{2} \leq \xi < -\sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}}, \text{ и } \sqrt{\frac{6\nu - \alpha}{3}} < \xi \leq \frac{1}{2}$$

качение колеса в среднем ослабляет стационарную составляющую деформации, а в интервале

$$-\sqrt{\frac{6\nu-\alpha}{3}} < \xi < \sqrt{\frac{6\nu-\alpha}{3}}$$

усиливает.

Наконец, если $\alpha < 6\nu - 3/4$, то качение колеса усиливает стационарную деформацию на всем протяжении балки.

При $f \neq 0$ частное решение усложняется. Оно представляет собой полином 3-й степени вида (3.6). Причем коэффициенты полинома зависят от f не только через коэффициент a_3, но и через параметр ν, который тоже зависит от f в силу метода получения величины ω_m. В таблице 1 представлены значения коэффициентов полинома (3.6) в зависимости от f. Видно, например, что коэффициент a_0 становится положительным при $f > 10$, а коэффициент a_1 остается отрицательным во всём диапазоне выбранных значений параметра f.

Таблица 1: Значения ω_m, ν, a_0, a_1, a_2, a_3 для различных f

f	ω_m	ν	a_0	a_1	a_2	a_3
0	4.158e+01	1.480e−05	−4.080e−06	−0.000e+00	4.441e−05	0.000e+00
1	4.064e+01	1.550e−05	−4.269e−06	−2.671e−05	4.647e−05	9.688e−05
2	2.985e+01	2.873e−05	−7.884e−06	−9.905e−05	8.580e−05	3.591e−04
3	2.443e+01	4.288e−05	−1.164e−05	−2.219e−04	1.267e−04	8.040e−04
4	2.425e+01	4.353e−05	−1.168e−05	−3.003e−04	1.270e−04	1.088e−03
5	2.406e+01	4.422e−05	−1.167e−05	−3.814e−04	1.269e−04	1.382e−03
6	2.396e+01	4.461e−05	−1.153e−05	−4.617e−04	1.254e−04	1.673e−03
7	2.390e+01	4.483e−05	−1.130e−05	−5.413e−04	1.229e−04	1.961e−03
8	2.386e+01	4.496e−05	−1.100e−05	−6.205e−04	1.197e−04	2.248e−03
9	2.384e+01	4.505e−05	−1.065e−05	−6.994e−04	1.159e−04	2.534e−03
10	2.382e+01	4.511e−05	−1.024e−05	−7.781e−04	1.115e−04	2.819e−03
50	2.376e+01	4.534e−05	4.272e−05	−3.894e−03	−4.662e−04	1.417e−02
100	2.377e+01	4.529e−05	2.051e−04	−7.678e−03	−2.268e−03	2.831e−02
200	2.381e+01	4.516e−05	8.072e−04	−1.450e−02	−9.426e−03	5.646e−02
300	2.367e+01	4.569e−05	1.692e−03	−1.987e−02	−2.188e−02	8.567e−02
500	2.253e+01	5.044e−05	3.149e−03	−2.002e−02	−7.437e−02	1.576e−01

Вместе с тем многочлен 3-й степени имеет по крайней мере один действительный корень. Кроме того,

$$\begin{aligned} y_r(0) &= Ga_0 = G[\nu(\alpha-6\nu)+(18\nu-\alpha)a_3^2-6a_3^4], \\ y_r'(0) &= Ga_1 = G[a_3(\alpha-12\nu+6a_3^2)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Следовательно, учитывая общий характер поведения функции $\omega_m(f)$, можно сделать вывод, что для коэффициента трения в диапазоне $0 < f < 10$ значения функции $y_r(æ)$ при $æ = 1/2$ могут существенно различаться из-за изменения $\omega_m(f)$. Затем, при увеличении f, эти различия начнут практически исчезать (см. рис. 6), и на некотором интервале малых значений коэффициента f значение $y_r(1/2)$ будет оставаться почти постоянным из-за того, что в выражение для $y_r(1/2)$ коэффициент a_3 входит со степенями выше первой.

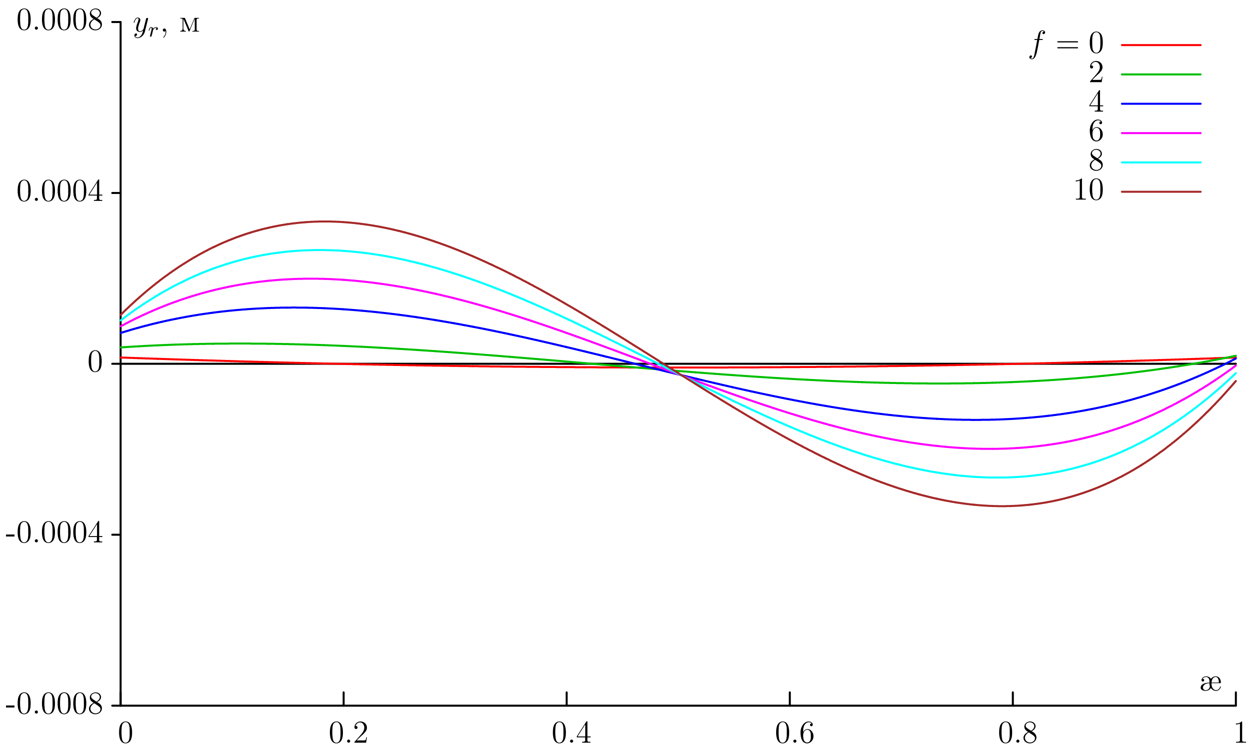


Рис. 7: Зависимости $y_r(æ)$ для малых значений коэффициента f

На рис. 7 показаны графики функции $y_r(æ)$ для малых значений коэффициента демпфирования f, подтверждающие сказанное.

При дальнейшем увеличении коэффициента f значения $y_r(1/2)$ снова начнут увеличиваться (см. рис. 8), а потом, как это следует из первой формулы (3.9), достигнув максимума, станут убывать. Аналогичные эффекты можно обнаружить на рис. 4 и рис. 5, что говорит о том, что частное решение приближенного уравнения (3.1) верно ухватывает основные качественные особенности деформации балки.

Из второй формулы (3.9) видно, что если $\alpha < 6\nu$, то при малых $f \neq 0$ будет выполнено $y_r(0) < 0$, а тогда и подавно будет выполнено $y_r' < 0$. Поскольку $y_r(\xi)$ представляет собой многочлен третьей степени с $a_3 > 0$, можно заключить, что функция $y_r(æ)$ имеет два экстремума, причем максимум соответствует меньшим значениям параметра æ. Этот эффект также виден на рис. 4 и рис. 5.

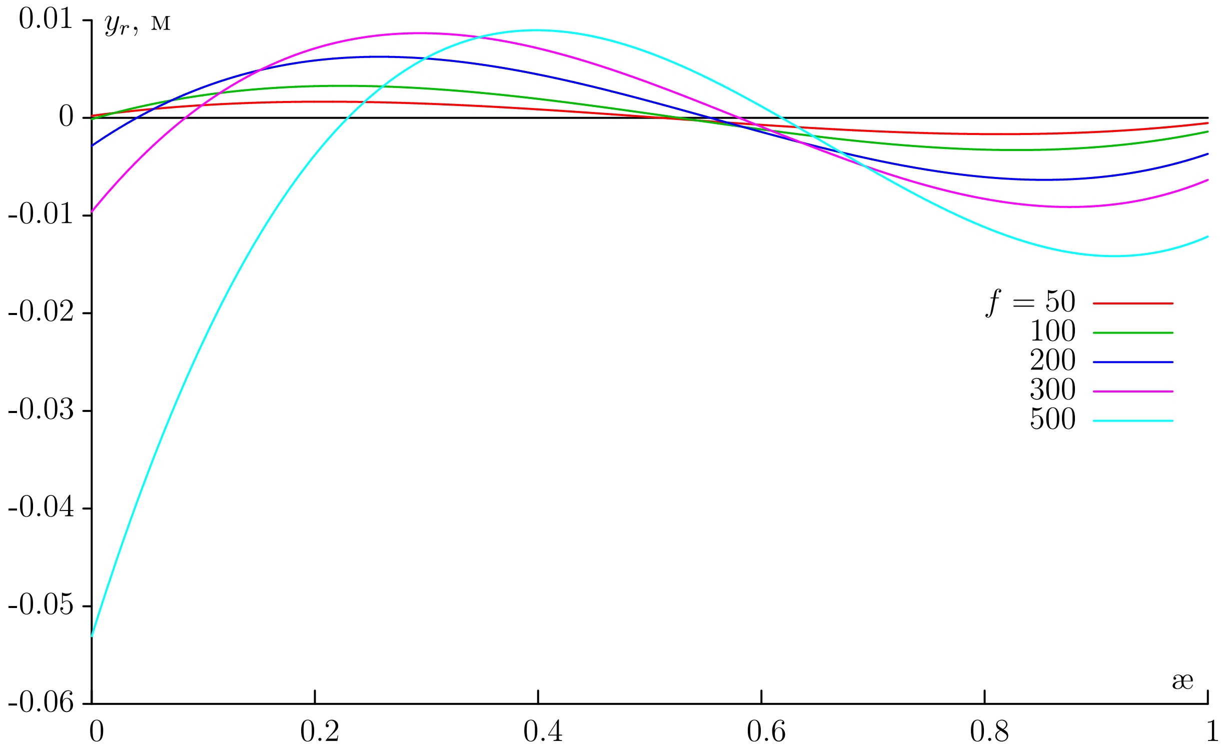


Рис. 8: Зависимости $y_r(æ)$ для больших значений коэффициента f

Вместе с тем если сопоставить графики на рисунках 4 и 7, а также на рисунках 5 и 8, то для соответствующих значений f можно заметить расхождение как по величине экстремумов, так и по их расположению на оси æ. Например, эти расхождения хорошо видны на рис. 9 и в значительной мере связаны с тем, что при расчете зависимости $y_r(æ)$ задавалось постоянное значение ω_m в соответствии с правилом (3.3).

Решение $y_r(\xi)$ можно существенно улучшить, если коэффициенты a_0, a_1, a_2 вычислять по формулам (3.8), а коэффициенты ν и a_3 рассчитывать в соответствии с выражениями

$$a_3 = \frac{fv}{\omega^2 l}, \quad \nu = \frac{v^2}{\omega^2 l^2}, \tag{3.10}$$

где $\omega = \omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_F})$ – «правильное» значение круговой частоты.

Другими словами, все коэффициенты в формуле (3.6) будут теперь зависеть от ξ:

$$y_\omega = G[a_3(\xi)\xi^3 + a_2(\xi)\xi^2 + a_1(\xi)\xi + a_0(\xi)], \tag{3.11}$$

где коэффициенты $a_i(\xi)$, $i = \overline{0,3}$, следует вычислять по формулам (3.8), (3.10). На рис. 10 видно, что функция $y_\omega(æ)$ при отсутствии диссипации лучше отслеживает среднюю линию колебаний балки, чем функция $y_r(æ)$. Рис. 11 свидетельствует, что при наличии диссипации функция y_ω существенно лучше приближает асимптотику точного решения $y(æ)$, чем функция

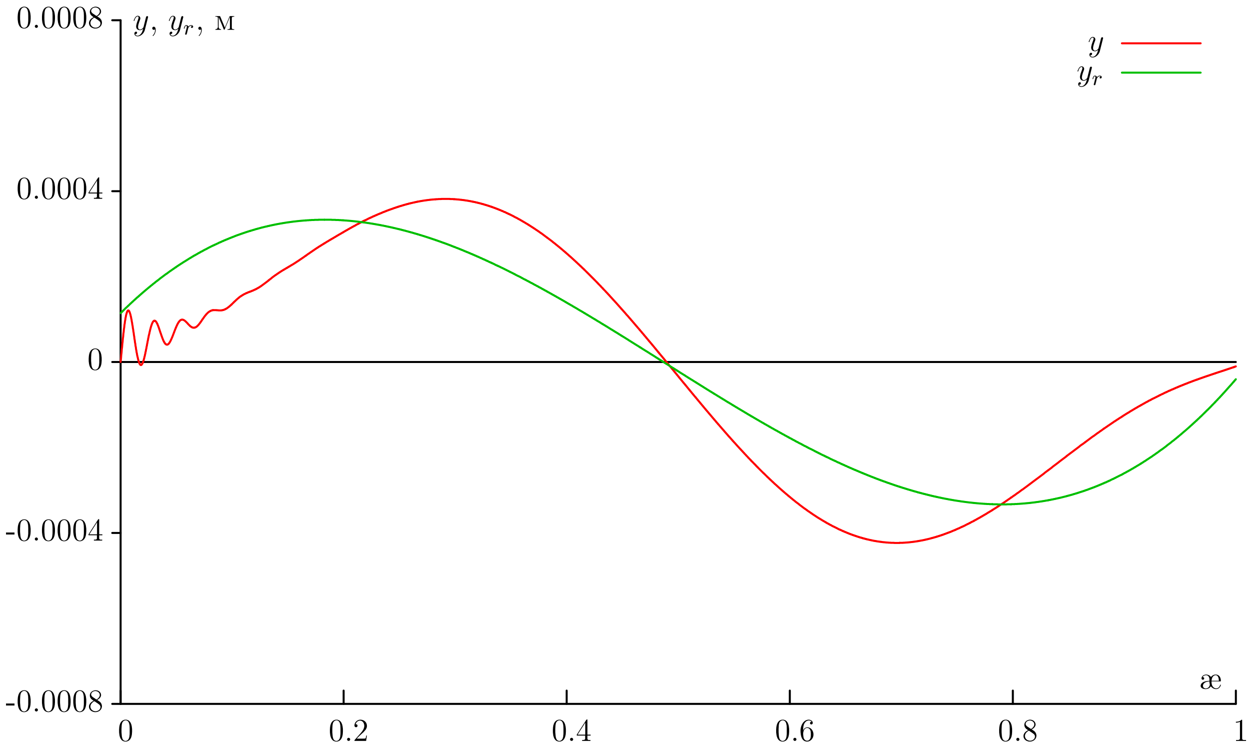


Рис. 9: Зависимости $y(æ)$ и $y_r(æ)$ для $f = 10\,\text{с}^{-1}$

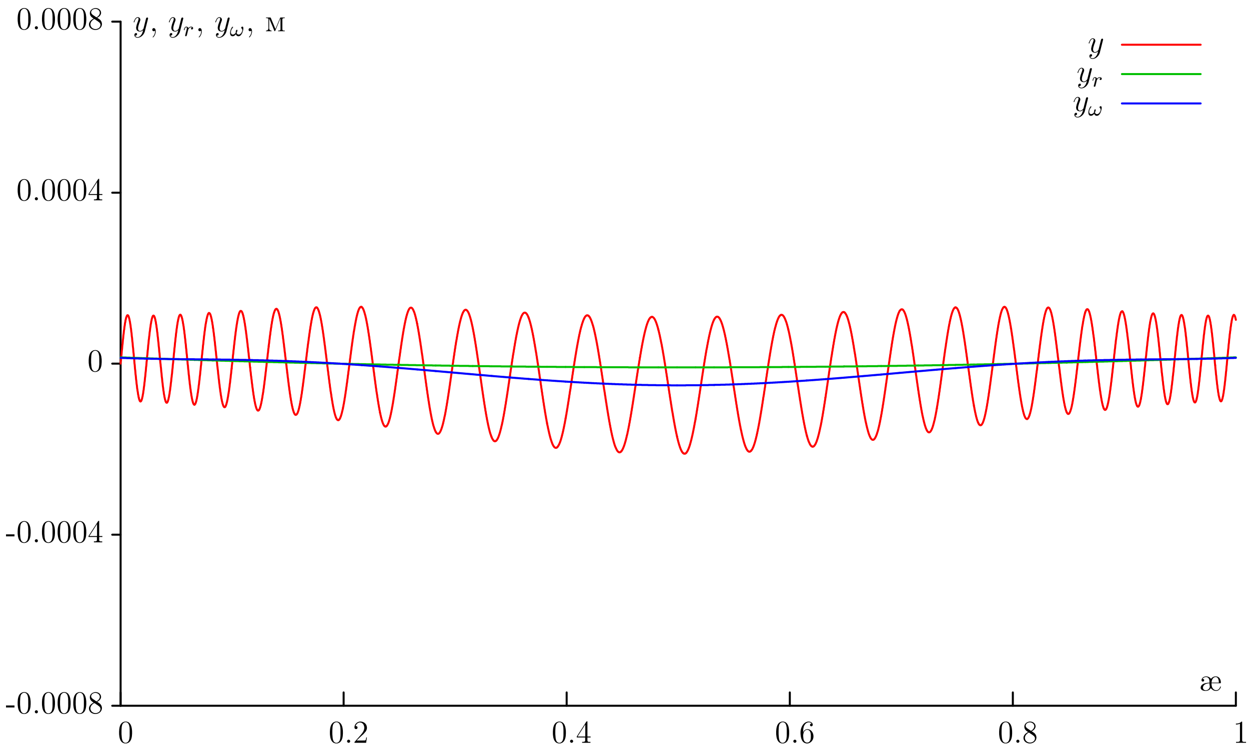


Рис. 10: Зависимости $y(æ)$, $y_r(æ)$ и $y_\omega(æ)$ для $f = 0$

$y_r(æ)$. Это свойство уверенно выполняется для всех значений $f \in [0, 10\,\text{с}^{-1}]$ и достаточно хорошо выполняется для значений $f \in (10\,\text{с}^{-1}, 50\,\text{с}^{-1}]$ (см. рис. 12).

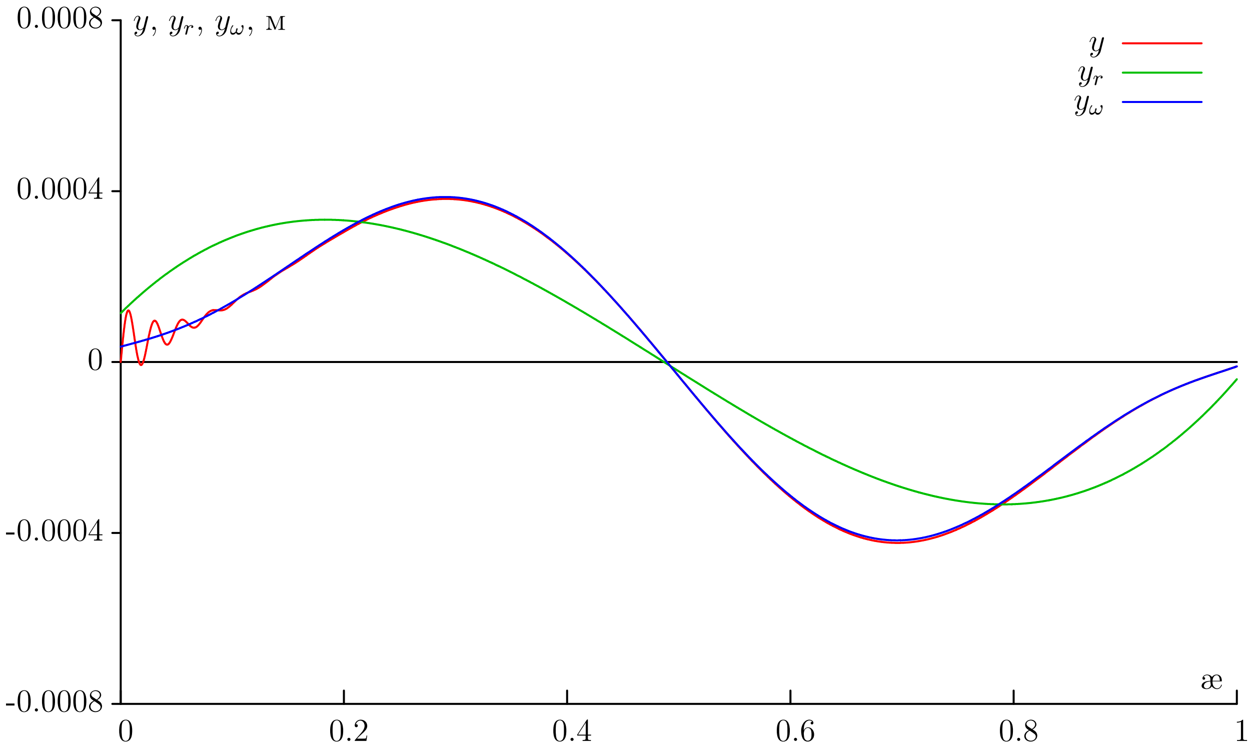


Рис. 11: Зависимости y(æ), y_r(æ) и y_ω(æ) для $f = 10\,\text{с}^{-1}$

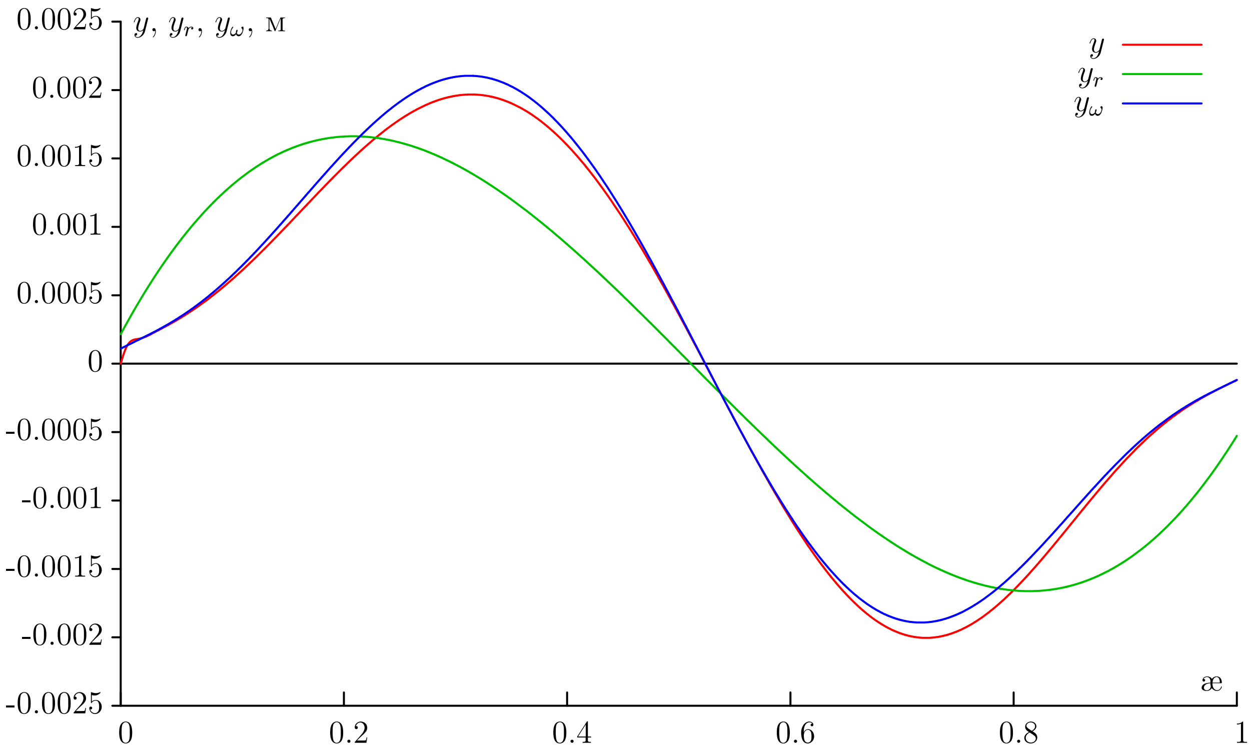


Рис. 12: Зависимости y(æ), y_r(æ) и y_ω(æ) для $f = 50\,\text{с}^{-1}$

Для значений $f > 50\,\text{с}^{-1}$ ошибка аппроксимации для функции y_ω(æ) увеличивается, но всё же остается существенно меньше, чем для функции y_r(æ).

Ролик с анимацией движения моноколеса по упруго-вязкой балке доступен по адресу https://keldysh.ru/e-biblio/golubev/balk-monowheel.mp4. Он соответствует случаю, когда $f = 10$ с$^{-1}$. По ролику можно детально представить себе, как происходит движение системы.

Заключение

Исследована задача о движении моноколеса, равномерно катящегося по упруго-вязкой балке, лежащей на разновысоких опорах. Установлена зависимость коэффициента упругости балки от положения на ней колеса и параметров конструкции системы. В предположениях о точечном контакте колеса и балки и об отсутствии проскальзывания в точке контакта построена приближенная математическая модель движения системы с учетом основной моды колебаний балки и вязкого сопротивления скорости деформации. Найдены квазистатическая траектория точки контакта колеса с балкой и отклонения точки контакта от этой траектории в зависимости от скорости движения и коэффициента вязкого сопротивления. Для возможности аналитического исследования закономерностей движения найдена и верифицирована приближенная конечная формула, верно отражающая основные качественные и с хорошей точностью количественные особенности поведения точки контакта колеса с балкой. Выполнено компьютерное исследование динамики системы для реалистичного набора параметров. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Принятые предположения о точечном контакте колеса с балкой и о безотрывном качении колеса по балке выполняются для диапазона изменения параметров, принятого в данной работе.

2. Установлено, что при квазистатическом перемещении колеса по балке средний прогиб балки под колесом оказывается симметричным относительно середины балки. При увеличении скорости и (или) коэффициента диссипации указанная симметрия нарушается таким образом, что вначале движения средний прогиб балки становится меньше квазистатического, а на завершающих этапах движения – больше. Однако это не приводит к нарушению предположений, принятых в данной работе.

3. Приближенная формула для усредненного прогиба балки под колесом в процессе его движения при наличии диссипации для принятых в работе значений параметров системы и коэффициента вязкого сопротивления в пределах $f = 0 \div 50$ с$^{-1}$ дает относительную погрешность приближения, которая монотонно возрастает от 0 и не превосходит ~ 0.1.

Список литературы

1. Моноколесо. https://ru.wikipedia.org/wiki/Моноколесо (дата обращения: 25.09.2022).

2. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е переработанное. – М.: «Машиностроение» 1970, 736 с.

3. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. – М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. – 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8, https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev