

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 12 за 2023 г.</u>



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

<u>В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова,</u> <u>О.Б. Феодоритова</u>

О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 12. 36 с. <u>https://doi.org/10.20948/prepr-2023-12</u> <u>https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-12</u>

`Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша Российской академии наук

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

О прямом методе решения задачи сопряженного теплообмена газовой смеси и твердого тела

Разработана методология численного моделирования процессов нестационарного сопряженного теплообмена. Она основана на стратегии прямого совместного интегрирования по времени определяющих уравнений в газовой области теле. Трехмерная модель учитывает нестационарное И твердом тепловое взаимодействие вязкого многокомпонентного газа и твердого тела. Газодинамическая модель основана на расширенной системе уравнений Навье-Стокса с добавлением уравнений для учета диффузии компонентов. В твердом теле записывается нестационарное уравнение теплопроводности. Численный метод основан на прямом сопряжении процессов теплообмена в силу сквозного интегрирования по времени уравнения теплопроводности в газовой области и твердом теле с автоматической аппроксимацией условия сопряжения – непрерывности температуры и теплового потока. Предложенный способ обобщен для многоблочных конформных неструктурированных сеток. Этот подход особенно эффективен для нестационарных расчетов, так как не требует использования последовательных итераций по областям на каждом временном шаге. Результаты сравнения с аналитическим решением модельной задачи подтверждают эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнения Навье–Стокса, сопряженный теплообмен, газовая смесь, твердое тело

Victor Timofeevich Zhukov, Nataliya Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova

On direct solving conjugate heat transfer of gas mixture and solid body

A novel methodology of numerical solving is developed for applications of unsteady conjugate heat transfer. It is based on a direct coupled strategy of time integration of governing equations in fluid and solid domains. The 3D numerical model takes into account an unsteady thermal interaction of viscous multicomponent flow and a solid body. The fluid dynamic model is based on an extended system of the compressible Navier-Stokes equations with the multicomponent diffusion. In a solid, the unsteady heat conduction equation is stated. In a fluid-solid system the heat transfer is fully coupled. Normal heat flux and temperature are continuous across an interface. The method is based on direct coupling heat transfer due to the time integration of the heat equation in fluid and in solid with an automatic approximation of the interfacial condition. This approach is especially effective for unsteady computations, since it does not require the use of an iterative method at each time step. The proposed method is generalized for multiblock conformal unstructured grids. This approach is especially effective for non-stationary calculations, since it does not require the use of successive iterations over domains at each time step. The results of comparison with a model problem analytical solution confirm an efficiency of the proposed method.

Keywords: numerical simulation, Navier-Stokes equations, conjugate heat transfer, fluid mixture, solid body

1. Введение

В данной работе рассматривается модель нестационарного взаимодействия вязкого теплопроводного многокомпонентного газового потока с твердым телом. В качестве твердого тела может выступать корпус летательного аппарата (ЛА), непроницаемая оболочка, представляющая собой внешнюю часть корпуса ЛА, стенка проточного тракта или камеры сгорания двигательной установки.

Хорошо известно, что аэрокосмические аппараты могут испытывать значительный аэродинамический нагрев высокоэнтальпийными потоками газа в атмосферном полете. При высоких скоростях полета кинетическая энергия объекта преобразуется в тепло через сжатие и поверхностное трение. Численное моделирование теплового нагрева аэродинамических конструкций становится важным неотъемлемым элементом проектирования систем тепловой защиты ЛА на современном этапе развития авиационной и аэрокосмической техники [1-3]. Интерес К эффектам сопряженного теплообмена не ограничивается аэрокосмической промышленностью. Возникают новые технические приложения, связанные компьютерных с охлаждением процессоров и другие.

При аэродинамическом моделировании на основе осредненных уравнений обтекаемой Навье-Стокса твердой поверхности обычно на ставится адиабатическое краевое условие (т.е. задается нулевой тепловой поток). Встречаются краевые условия с заданием температуры или ненулевого теплового потока, либо их линейной комбинации. Недостатком такого подхода является то. можем определить реальные ЧТО мы не распределения температуры стенок и теплового потока от аэродинамического нагрева. Процессы обтекания аэродинамического И нагрева являются взаимосвязанными: твердая поверхность подвергается аэродинамическому твердая поверхность возвращает нагреву, а нагретая часть тепла аэродинамический поток, что влияет на скорость теплообмена, и так далее. Помимо внешнего нагрева, на поверхность объекта также могут воздействовать внутренние тепловые нагрузки.

численный Таким образом, анализ аэродинамического нагрева представляет собой связанную задачу теплообмена между газовым потоком и твердым телом через границу раздела. В этой задаче возникает новый объект – интерфейсная граница контакта «газ – твердое тело», на которой задаются условия теплообмена в виде равенства значений температуры и теплового потока по разные стороны границы. Другие условия в данной работе не рассматриваются. Эта задача известна как задача сопряженного теплообмена, Conjugate Heat Transfer (CHT) [4–12]. Часто она решается с использованием двух отдельных компьютерных кодов: газодинамического и твердотельного теплового. Первый код обычно основан на уравнениях Навье-Стокса, второй служит для интегрирования нестационарного параболического уравнения, описывающего теплопроводность в твердом теле. Эти коды периодически обмениваются данными с целью достижения равенства значений температуры и теплового потока на интерфейсной границе. При наличии различных стратегий обмена данными, есть возможность, что такого рода процедура сопряжения приведет к численной неустойчивости.

В [12] нами предложен новый метод к решению задач сопряженного теплообмена, предназначенный для нестационарных расчетов. Этот метод основан на прямом сопряжении процессов теплообмена в силу одновременного (сквозного) интегрирования по времени уравнения теплопроводности в газовой области и твердом теле. Этот метод реализован в компьютерном коде NOISEtte–MCFL (MultiComponent FLows) [13], который разрабатывается нами для моделирования реагирующих потоков на базе кода NOISEtte [14] и с наследованием основных функциональных возможностей этого кода.

Целью данной работы является изложение полной расчетной методики и исследование прямого метода с проверкой точности выполнения условий сопряжения: численные результаты сравниваются с аналитическим решением задачи обтекания пластины конечной толщины, внезапно помещенной в высокоскоростной поток газа, а также с результатами других подходов к решению задачи СНТ. Показано, что прямой метод обеспечивает устойчивый надежный счет, высокую точность и консервативность.

Для дискретизации системы уравнений вязкого сжимаемого многокомпонентного газа и уравнения теплового баланса в твердом теле используется метод конечных объемов. В газовой области и в твердом теле интегрирование по времени проводится с помощью явно-итерационной схемы LINS (Local Iterations for Navier-Stokes) [15, 16], см. также [17–19]. Теоретическое обоснование схемы дано в [20] для линейного параболического уравнения, см. также [21, 22].

Проблему сопряженного теплообмена можно исследовать в рамках модели однокомпонентного газа, но в целях развития методики MCFL мы рассматриваем многокомпонентный газ, ограничиваясь в модельных расчетах случаем двухкомпонентного газа с определением диффузионных потоков на основе закона Фика [23].

Структура данной работы следующая. В разделе 2 дана постановка задачи сопряженного теплообмена с формулировкой системы определяющих уравнений. В разделе 3 представлена схема LINS интегрирования по времени расширенной системы уравнений Навье-Стокса. В разделе 4 приведены основные детали алгоритма решения задачи сопряженного теплообмена. В разделе 5 проведен анализ одной нестационарной задачи сопряженного теплообмена и обсуждаются результаты ее численного решения. Некоторые выводы приводятся в последнем разделе.

2. Постановка задачи сопряженного теплообмена

2.1. Общие сведения

Мы рассматриваем нестационарную модель взаимодействия потока сплошной среды с твердой непроницаемой оболочкой, представляющей собой внешнюю часть корпуса ЛА или стенки камеры сгорания двигательной установки. Под сплошной средой понимается многокомпонентная смесь идеальных химически реагирующих газов с учетом вязкости, теплопроводности и диффузии компонентов.

Предполагается, что оболочка представляет собой твердое тело $R_s \subset \mathbb{R}^3$, ограниченное обтекаемой поверхностью Γ_0 , и, возможно, некоторой другой поверхностью Γ_1 . Поверхность Γ_0 – это интерфейсная граница контакта «газ – твердое тело» и на ней заданы условия теплообмена (непрерывность температуры и теплового потока по нормали к границе Γ_0). Границы Γ_0 и Γ_1 вместе составляют границу твердого тела R_s , которое, вообще говоря, не является односвязным, обтекаемых тел может быть несколько.

Для примера на рис. 1 показана схематично постановка задачи о сверхзвуковом течении газа в канале (это осевое сечение цилиндрического канала или сечение двух бесконечных параллельных пластин). Пластины имеют конечную толщину, а их обтекаемые поверхности не являются теплоизолированными, на них ставится условие теплообмена твердого тела с газом. Обтекаемые поверхности составляют границу Γ_0 , показанную на рисунке жирными линиями. Остальные поверхности пластин составляют границу Γ_1 , показанную на рис. 1 тонкими линиями.



Рис. 1. Схема течения в канале с теплопроводными стенками

В общем случае считаем, что граница твердого тела Γ_s состоит из непересекающихся частей. На рис. 1 полная граница твердого тела $\Gamma_s = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$. На границе Γ_1 могут быть заданы внешние краевые условия для уравнения теплопроводности (или температура, или тепловой поток, или их линейная комбинация). Для задач внешнего обтекания односвязной области граница Γ_1 может отсутствовать.

Также введем в рассмотрение газовую область $R_F \subset \mathbb{R}^3$, которая ограничена границей Γ_F . На рис. 1 $\Gamma_F = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_2$, где Γ_2 – граница газовой области, определяемая постановкой задачи. Эта граница может быть внешней границей газовой области, удаленной от канала, или состоять из входного и выходного сечений канала, которые обозначены на рис. 1 пунктиром. Задача в рассматриваемом примере может быть поставлена так: слева в плоский канал постоянного сечения втекает газ с заданными параметрами, справа на выходе из канала газ вытекает в среду с параметрами, обеспечивающими корректную постановку краевых условий в выходном сечении. Интерфейсная граница Γ_0 может изменяться под действием высоких температур и давления (деструкция теплозащитного покрытия, плавление, абляция). В рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением следующих процессов:

1) течение вязкой сжимаемой многокомпонентной сплошной среды;

2) теплопроводность в твердом теле и сопряженный теплообмен на интерфейсной границе.

Газодинамическая модель основана на системе уравнений Навье-Стокса с введением дополнительных членов и уравнений для учета диффузии компонентов. В твердом теле решается нестационарное, вообще говоря, квазилинейное уравнение теплопроводности. На интерфейсной границе «газ – твердое тело» ставятся условия теплообмена (идеального контакта) в виде равенства температур и равенства тепловых потоков.

Химические реакции, турбулентные явления и деформация границы Γ_0 под действием гидродинамических сил будут рассмотрены в отдельных работах.

Наличие граничных условий теплообмена на интерфейсе Γ_0 делает газодинамическую и тепловую задачи связанными. Такую задачу можно решать в итерационной многообластной постановке, см., например, [24]. В этой постановке производится циклически последовательный расчет областей с итерированием краевых условий. Расчет одной области происходит при одном из функциональных параметров, заданном на интерфейсе – температуре или тепловом потоке. После расчета области по полученному сеточному решению находится на интерфейсе другой параметр – тепловой поток или температура. Затем происходит передача этого параметра для расчета соседней области и т.д. Такой подход требует выделения граничных условий сопряжения в отдельную

группу уравнений. Последовательные итерации по областям производятся до тех пор, пока условия сопряжения не выполнятся с заданной точностью.

Устойчивость таких алгоритмов не является очевидной. Например, в [25, 26] для одномерного случая исследованы алгоритмы с обменом краевыми условиями между областями и показано, ЧТО условие устойчивости определяется отношением теплофизических параметров смежных областей и размером пространственных приграничных ячеек. Проверка такого рода условий на трехмерных неструктурированных сетках представляет определенные трудности.

Альтернативой подходу с обменом краевыми условиями служит сквозной расчет, состоящий в одновременном решении уравнения энергии (теплопроводности) в совокупной области. В этом подходе условия сопряжения включены в само дифференциальное уравнение и являются его следствием. Но возникает проблема объединения различных физических областей в единую расчетную область.

Мы решаем эту проблему на основе многоблочного подхода. В основе этого подхода лежат четыре элемента:

1) специальная схема интегрирования определяющей системы уравнений;

2) многоблочная сеточная структура – совокупность неструктурированных в каждой области и конформных на интерфейсах областей сеток;

3) единый компьютерный код, с помощью которого в газовой области решаются уравнения газодинамики, а в твердом теле – уравнение теплопроводности;

4) дополнительная процедура обработки интерфейсов.

Схема интегрирования по времени сочетает классические подходы по физическим процессам, схему С.К. Годунова расчета расщепление потоков точным решением задачи Римана конвективных с лля многокомпонентной смеси, оригинальную явно-итерационную схему LINS интегрирования по времени уравнений параболического этапа. Величина шага т интегрирования всей определяющей системы уравнений ограничена только гиперболическим условием устойчивости $\tau \leq \tau_{conv}$ даже В случае доминирования диффузионных процессов над конвективными, т.е. когда конвективный шаг τ_{conv} превосходит диффузионный шаг τ_{diff} , определяемый вязкими, диффузионными и тепловыми процессами, точнее, самым быстрым из этих диссипативных процессов.

Построенный алгоритм решения задачи сопряженного теплообмена является сквозным алгоритмом на основе параллельного принципа учета многоблочной структуры: на одной элементарной процедуре расчета области независимы и могут быть обработаны в параллельном режиме. Элементарная процедура – это составная часть процедуры интегрирования всей определяющей системы уравнений от момента времени t до $t + \tau$, $\tau \leq \tau_{conv}$. Если $\tau_{conv} \leq \tau_{diff}$, т.е. диссипативные процессы медленнее конвективных, то

элементарная процедура – это расчет каждой области с помощью явной схемы. Если $\tau_{conv} > \tau_{diff}$, т.е. диссипативные процессы быстрее конвективных, то элементарная процедура – это выполнение одной итерации явно-итерационной схемы LINS. По завершении элементарной процедуры расчета областей их взаимовлияние учитывается процедурой обработки интерфейса, которая нескольким наборам значений сеточной функций в узле интерфейса ставит в соответствие единое значение. Процедура коррекции обеспечивает в итоге алгебраическую эквивалентность многоблочного расчета сквозному расчету на единой сетке.

2.2 Математическая модель течения многокомпонентной смеси

Основой математической модели является система уравнений Навье– Стокса, записанная для смеси идеальных газов с учетом диффузии химических компонентов.

Уравнения неразрывности, сохранения импульса и энергии имеют соответственно вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E+p)\vec{u}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot \vec{J}.$$
(1)

В (1) t – время, \vec{u} – вектор скорости с компонентами u_1, u_2, u_3, ρ – плотность смеси, $E = \rho(e+0.5u^2)$ – полная энергия единицы объема, e – удельная внутренняя энергия (единицы массы), p – давление смеси, τ – тензор вязких напряжений, \vec{q} и \vec{J} – векторы плотности теплового и диффузионного потоков соответственно.

Тензор вязких напряжений τ и вектор плотности теплового потока \vec{q} имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \left(\nabla \vec{u} + \left[\nabla \vec{u} \right]^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right), \qquad \vec{q} = -\kappa \nabla T \quad , \tag{2}$$

здесь $\mu = \mu(T)$ и $\kappa = \kappa(T) - \kappa \circ \phi \phi$ ициенты молекулярной вязкости и теплопроводности смеси газов соответственно, I – единичная 3×3 – матрица.

Мы ограничимся рассмотрением только концентрационной диффузии: каждый компонент, т.е. химически однородное вещество смеси, движется в направлении меньшей концентрации. Уравнения переноса компонентов с массовыми долями Y_m , $m = 1, ..., N_{sp}$ имеют вид

$$\frac{\partial (\rho Y_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_m \vec{u}) = \nabla \cdot \vec{J}_m.$$
(3)

В правой части каждого из уравнений (3), вообще говоря, может стоять источник – массовая скорость образования компонента *m* в химических реакциях (он опущен для упрощения изложения).

В уравнениях (3) вектор \vec{J}_m плотности диффузионного потока компонента *m* определяется из закона Фика [23]

$$\vec{J}_m = -\rho D_m \nabla Y_m, \qquad (4)$$

где D_m – коэффициент диффузии компонента *m*. Вместо соотношения (4) могут быть использованы более сложные формулы.

Входящий в правую часть уравнения энергии вектор \vec{J} обусловлен диффузией компонентов смеси и является линейной комбинацией векторов \vec{J}_m :

$$\vec{J} = \sum h_m \vec{J}_m$$

где h_m – энтальпийные функции компонентов, см. [17, 27]. Здесь и ниже суммирование ведется по индексу $m = 1, ..., N_{sp}$.

Для смеси газов коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии вычисляются по некоторым комбинаторным формулам [17, 27]. В общем случае эти коэффициенты могут быть тензорами, но в данной работе мы полагаем, что они являются скалярными функциями температуры (и, вообще говоря, давления).

Мы используем уравнение состояния смеси идеальных несовершенных газов. Для каждого компонента *m* имеем

$$p_m = \rho_m R_m T$$
, $e_m = \int_{T_0}^T c_{V,m} dT$, $R_m = R/W$,

где $\rho_m = \rho Y_m$, R – универсальная газовая постоянная, молярная масса смеси W определяется из соотношения $W^{-1} = \sum Y_m W_m^{-1}$; здесь W_m , $c_{V,m} = c_{V,m}(T)$, e_m – соответственно молярная масса, удельная теплоемкость (единицы массы) при постоянном объеме и внутренняя энергия компонента, T_0 – некоторая референсная температура.

Термическое уравнение состояние смеси может быть записано в виде

$$p = \rho T R_{mix}, \quad R_{mix} = R \sum Y_m / W_m$$
.

Верны соотношения:

$$p = \sum p_m$$
 (закон Дальтона), $c_{V, mix} = \sum c_{V, m} Y_m$, $e = \sum e_m Y_m$.

Калорическое уравнение состояния имеет вид $e = e(\rho, T)$. В общем случае внутренняя энергия e(T) как функция температуры аппроксимируется многочленом 5 степени. Если известна переменная e, то температура Tприближенно находится из решения нелинейного уравнения вида $b_0 + b_1 T + ... + b_5 T^5 = e$. Мы наряду с переменной e используем удельную внутреннюю энергию единицы объема $\varepsilon = \rho e$, записывая для нее уравнение состояния в виде $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$.

Полагаем, что в газе и твердом теле известны прямая и обратная функциональные зависимости

$$\varepsilon = \varepsilon(T), \quad T = T(\varepsilon)$$
 (5)

и тейлоровская линеаризация

$$\varepsilon(T) \approx \varepsilon(T_0) + \varepsilon_T(T_0) \cdot (T - T_0) = B + A \cdot T$$
(6)

при некоторой заданной температуре T_0 с известными коэффициентами

$$A = \varepsilon_T(T_0), \quad B = \varepsilon(T_0) - A \cdot T_0. \tag{7}$$

2.3 Теплопроводность в твердом теле

В твердом теле в декартовой системе координат (x, y, z) записывается уравнение теплопроводности для температуры T

$$c \ \frac{\partial T}{\partial t} = div \left(\kappa \, grad \, T\right) + f , \qquad (8)$$

где c, κ – объемная теплоемкость и теплопроводность твердого тела соответственно, f – правая часть. Входные данные c, κ, f являются, вообще говоря, функциями пространственных координат и температуры T = T(x, y, z, t), а также могут зависеть явно от времени t.

В изотропных материалах в каждой точке коэффициент теплопроводности – это скаляр, в анизотропных материалах – это тензор второго ранга. Функция f учитывает внутренние источники тепла (при их отсутствии $f \equiv 0$, как и в приводимых в разделе 5 расчетах). Теплоемкость $c = c(T) = c_M(T) \cdot \rho$, $\Delta m / (m^3 K)$ определяется плотностью ρ и удельной теплоемкостью $c_M(T)$.

Вместо уравнения (8) можно записать более общее уравнение для внутренней энергии единицы объема $\varepsilon = \rho e$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = div \big(\kappa(T) \operatorname{grad} T\big) + f , \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon = \rho e = \int_{T_0}^T c(T) dT \, .$$

В газовой области в систему определяющих уравнений (1) входит уравнение закона сохранения полной энергии. Мы строим расчетную схему (см. раздел 3) на основе принципа расщепления определяющей системы уравнений на гиперболический и параболический этапы.

Общая схема расчета состоит из гиперболического этапа и двух параболических. На первом параболическом этапе происходит учет вязкости смеси, а также диффузии компонентов смеси. Второй этап является завершающим. На этом этапе решается уравнение для полной энергии с учетом всех уже полученных результатов. Данное уравнение записывается в виде уравнения теплопроводности (9). Оно является единым для газовой среды и твердого тела. Именно на основе этого уравнения мы строим схему сквозного счета.

В газовой области функция f включает источниковые члены $\nabla \cdot (\mathbf{\tau} \cdot \vec{u})$, $\nabla \cdot \vec{J}$. Первый из них определяет заметный эффект в формировании профиля температуры в окрестности интерфейса в движущемся газе, см. раздел 5.

2.4 Условия сопряжения

На интерфейсной границе Γ_0 «твердое тело – газ» ставятся условия теплообмена (идеального контакта) в виде равенства температур и равенства тепловых потоков на твердой стенке:

$$T\Big|_{\Gamma_0^-} = T\Big|_{\Gamma_0^+}, \qquad \kappa \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0^-} = \kappa \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0^+},$$

где через $\partial/\partial n$ обозначена производная по нормали к границе Γ_0 (внешней по отношению к газовой области). Эти условия обычно записываются в виде

$$[T] = 0, \quad [\kappa \partial T / \partial n] = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_0,$$
(10)

где через [] обозначен скачок функции при переходе границы контакта.

В случае анизотропной среды с тензорным коэффициентом теплопроводности κ_{ij} , i, j = x, y, z, условие непрерывности теплового потока имеет вид $[\partial T/\partial v] = 0$, $(x, y, z) \in \Gamma_0$, где поток тепла $\partial T/\partial v$ имеет более сложный вид и отвечает дифференцированию по нормали с направляющими косинусами $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$, см. [28].

В нашей расчетной схеме уравнение энергии для газа и твердого тела интегрируется по времени как единое уравнение (9) с автоматической аппроксимацией условий теплообмена (10). Справедливы следующие утверждения. Первое: при консервативной аппроксимации этого уравнения условия теплообмена выполняются автоматически при стремлении шага сетки к нулю. Второе: отдельная аппроксимация условий (10) может нарушить закон сохранения и привести к негативным последствиям. Оба указанных факта хорошо известны, см. [28].

Говоря более точно, условия (10) аппроксимируются на дискретном уровне в случае консервативной аппроксимации уравнения теплопроводности при Во-первых, следующих допущениях. сетка является согласованной с поверхностью контакта. Во-вторых, входные данные уравнения теплопроводности с, к, f приписаны к узлам сетки, и есть интерполяционная процедура пересчета коэффициента теплопроводности из узлов сетки на грани дуальных объемов.

Для объяснения естественности условия сопряжения на дискретном уровне рассмотрим одномерную схему для уравнения теплопроводности (8) на произвольной неравномерной сетке, согласованной с точками разрыва коэффициентов уравнения. Предположим, что один из узлов сетки совпадает с точкой x=0. Для каждого узла сетки $x=x_i$, i=0,1,... шаги слева и справа от узла x=0 обозначим как h_1 , h_2 соответственно, а коэффициенты теплопроводности как κ^1 , κ^2 . Индекс *i* в обозначении узла опускаем. Запишем в узле *x* конечно-объемную схему, интегрируя уравнение (8) по сеточному отрезку $(x-0.5h_1; x+0.5h_2)$, ассоциированному с узлом сетки x=0:

$$\int_{x-0.5h_1}^{x+05h_2} c \frac{\partial T}{\partial t} dx = \kappa^2 \frac{\partial T}{\partial x} |(x+0.5h_2) - \kappa^1 \frac{\partial T}{\partial x}|(x-0.5h_1) + \int_{x-0.5h_1}^{x+05h_2} f dx.$$

Из этой записи следует, что при $h = \max(h_1, h_2) \rightarrow 0$ условие непрерывности теплового потока выполняется с точностью O(h). Также видно, что величина погрешности зависит от скорости переходного процесса, и от точности дискретизации схемы по времени.

В тематике СНТ есть подходы, основанные на стремлении к точному выполнению условий сопряжения на дискретном уровне. Мы выбираем более простой способ, основанный на соблюдении выполнения закона сохранения. Как известно из [28], нарушение консервативности может привести к расходимости разностной схемы. При расчетах на конкретных сетках мы будем проверять выполнение условий сопряжения, оценивая разность односторонних тепловых потоков на интерфейсе. Заметная относительная величина этой разности может свидетельствовать о плохом качестве сетки в окрестности интерфейса или большом шаге интегрирования по времени.

3. Схема расчета газовой области

Для объяснения схемы расчета сопряженного теплообмена напомним основные этапы решения системы уравнений (1) – (3). Обозначим вектор консервативных переменных как $U \equiv \rho(1, u_1, u_2, u_3, e_{tot}, Y_m, m = 1, ..., N_{sp})$, где $e_{tot} = e + 0.5u^2$ – полная энергия единицы массы. Запишем непрерывную по времени и дискретную по пространству аппроксимацию системы уравнений (1), (3) на неструктурированной трехмерной сетке в операторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{C}_{h} \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}_{h} \boldsymbol{U} \,, \tag{11}$$

где C_h , D_h – конвективный и диффузионный дискретные операторы, h – параметр, характеризующий подробность разбиения расчетной области дискретной сеткой. Вообще говоря, операторы C_h , D_h являются нелинейными, но мы их линеаризуем на решении с нижнего слоя по времени, т.е. самым простым способом. В операторе D_h учитываются все диссипативные процессы, т.е. вязкость, теплопроводность и диффузия компонентов. Дискретизация проводится на сетке, состоящей из ячеек в виде многогранников. На такой сетке записывается конечно-объемная схема с определением консервативных переменных в узлах сетки. Ячейки интегрирования представляют собой дуальные объемы, ассоциированные с узлами геометрической сетки. Такая дискретизация называется часто узловой или вершинно-центрированной.

Для системы (11) можно записать двухслойную по времени явную схему с шагом т:

$$\frac{\boldsymbol{U}_{j+1} - \boldsymbol{U}_j}{\tau} + \boldsymbol{C}_h \boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{D}_h \boldsymbol{U}_j.$$
(12)

Здесь U_j , U_{j+1} – сеточные функции на нижнем слое по времени t_j и верхнем слое t_{j+1} соответственно. Далее, C_h , D_h – это операторы, зависящие от решения U_j на нижнем слое по времени t_j , возникшие в результате линеаризации схемы (11). Мы сохраняем за этими операторами прежние обозначения нелинейных операторов. Для устойчивости явная схема (12) требует ограничения

$$\tau \le \left(\tau_{conv}^{-1} + \tau_{diff}^{-1}\right)^{-1},$$
(13)

где τ_{conv} , τ_{diff} – шаги по времени, диктуемые соответственно гиперболическим (конвективным) и параболическим (диффузионным) ограничениями [28]. С учетом взаимодействия конвекции и диффузии ограничение может быть даже более жестким, чем условие (13).

Для интегрирования по времени уравнения (11) адаптирована схема LINS [15, 16], первоначально созданная для решения уравнений Навье-Стокса с помощью расщепления исходной системы уравнений на гиперболическую и параболическую подзадачи. Наличие в (11) параболической подсистемы, описывающей диффузию компонентов, принципиальных трудностей для расширения возможностей схемы LINS не представляет.

Итак, на каждом шаге по времени уравнение (11) с расширенным набором переменных $U \equiv \rho(1, u_1, u_2, u_3, e_{tot}, Y_m, m = 1, ..., N_{sp})$ интегрируется при помощи расщепления на гиперболический и параболический этапы.

Гиперболический этап использует конвективный шаг $\tau = \tau_{conv}$, а параболический этап интегрируется с этим же временным шагом, включая случай $\tau_{conv} > \tau_{diff}$ доминирования диффузии над конвекцией.

На первом этапе полагаем $D_h \equiv 0$ и находим решение промежуточного разностного гиперболического уравнения по явной схеме

$$\frac{\overline{\boldsymbol{U}}_{j+1} - \boldsymbol{U}_j}{\tau} + C_h \boldsymbol{U}_j = 0.$$
(14)

Для реализации этого этапа применяется метод Годунова с расчетом потоков на основе точного решения задачи Римана для смеси газов [29].

На втором этапе полагаем $C_h \equiv 0$ и формулируем разностную параболическую задачу с новыми начальными данными

$$\frac{\boldsymbol{U}_{j+1} - \boldsymbol{\bar{U}}_j}{\tau} = D_h \boldsymbol{W}_j.$$
(15)

Если в схеме (15) взять в правой части U_j вместо W_j , то в сумме уравнения (14) и (15) дают закон сохранения (12), но такая схема требует ограничить шаг по времени диффузионным условием $\tau \sim h^2$, которое может быть обременительным по объему вычислительных затрат.

Чтобы избежать такого ограничения, мы находим W_j в ходе итераций схемы LINS. Конструкция схемы LINS основана на многочленах Чебышева первого рода. Для построения нужного многочлена необходимо задать только верхнюю границу спектра сеточного оператора D_h . В качестве оценки этой границы сверху можно взять величину $\lambda_{\text{max}} = 2/\tau_{diff}$, что равносильно оценке максимального собственного числа, получаемой по теореме Гершгорина о кругах спектра [30].

Этап вида (15) является заключительной итерацией схемы LINS. Предварительно выполняется фиксированное число промежуточных явных итераций для обеспечения правильной эволюции во времени собственных мод дискретного оператора D_h , чтобы после пересчета (15) для результирующей

схемы выполнялись условия аппроксимации и устойчивости. Это означает, что эти условия присущи схеме LINS в силу построения оператора перехода со слоя t_i на слой t_{i+1} , который является рациональной функцией

$$S(D_h) = \left(I - F_p^2(D_h)\right) \cdot \left(I + \tau D_h\right)^{-1}$$
(16)

сеточного неотрицательно определенного самосопряженного оператора D_h . Оператор (16) основан на специальной конструкции многочлена Чебышева $F_p(\lambda)$ и реализуется явными чебышевскими итерациями [15, 16, 20]. Полное число явных итераций q = 2p - 1 определяется степенью p многочлена Чебышева. Он строится на отрезке [0; λ_{max}] при условиях $F_p(0) = 1$, $|F_p(\lambda)| \le 1$ и обеспечивает условия устойчивости $||S|| \le 1$ и аппроксимации, т.е. близости спектра $S(\lambda)$ к спектру точного оператора послойного перехода $\exp(-\tau\lambda)$ на низкочастотном участке $\lambda \ll \lambda_{max}$ спектра оператора D_h . Заметим, что в (16) выражение $(I + \tau D_h)^{-1}$ – это оператор послойного перехода чисто неявной схемы, запись обратного оператора здесь является формальной. Видим, что оператор перехода неявной схемы мажорирует на отрезке [0; λ_{max}], оператор перехода схемы LINS: $||S|| \le ||(I + \tau D_h)^{-1}||$; это следует из свойств оператора F_p . В [20] приведены строгие формулировки приведенного качественного анализа.

Степень *р* многочлена Чебышева обратно пропорциональна сеточному параметру *h* и определяется без использования эмпирических параметров точной формулой

$$p = \left\lceil 0.25\pi \sqrt{\tau \lambda_{max} + 1} \right\rceil.$$
(17)

Для традиционной явной схемы асимптотическая оценка размера временного шага составляет $O(h^2)$. Для схемы LINS размер шага времени есть O(h). Применение LINS на каждом шаге по времени эквивалентно определенному числу явных шагов, асимптотически равному $O(1/\sqrt{h})$ в соответствии с (17), так как $\tau = \tau_{conv} \simeq h$, $\lambda_{max} \simeq h^{-2}$. Можно сделать вывод, что по сравнению с традиционной явной схемой эффективный (в терминах вычислительных затрат) размер временного шага LINS составляет $O(h^{3/2})$. Но физическая величина шага по времени $\tau \sim const \cdot h$, так как полученный алгоритм сохраняет устойчивость при гиперболическом ограничении за счет выполнения на шаге по времени строго определенного числа промежуточных шагов, пропорционального $1/\sqrt{h}$. Если диффузия не доминирует над конвекцией, то схема LINS автоматически переходит в явную схему.

Заметим, что в практических расчетах по неявным схемам, разрешаемым крыловскими методами, превышение гиперболического числа Куранта обычно не является слишком большим, особенно при расчетах переходных режимов. Конечно, в расчетах на установление, особенно на заключительной стадии, шаг по времени может быть большим. Но в реальных задачах теплового нагрева аэродинамических поверхностей многокомпонентным газом интегрирование с шагом $\tau = \tau_{conv}$ является физически корректным. Учет химических реакций также диктует дополнительные ограничения на шаг по времени, связанные со скоростями реакций и интервалом предсказуемости химических процессов.

4. Алгоритм СНТ

4.1 Уравнения состояния

При реализации расчета одного временного шага явная или явноитерационная схема требует знания температуры Т для вычисления тепловых потоков в уравнении энергии. Эта температура определяется с помощью обращения уравнения состояния вида $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Будем считать прямую и зависимости $\varepsilon = \varepsilon(T)$, $T = T(\varepsilon)$ известными. По известному обратную значению внутренней энергии ε^0 в каждом узле сетки, из решения нелинейного уравнения $\varepsilon(T) = \varepsilon^0$ приближенно находится температура для вычисления тепловых потоков. Для расчета температуры в начале временного шага используется нелинейная зависимость $\varepsilon(T)$. В итерациях схемы LINS мы применяем линеаризацию $\varepsilon(T) \approx \varepsilon(T_0) + \varepsilon_T(T_0) \cdot (T - T_0)$, где T_0 – температура с нижнего слоя в текущем узле сетки, см. (6), (7). Предполагается, что при пересчете температуры по внутренней энергии в итерациях можно пользоваться формулами $T = (\varepsilon(T) - B)/A$, $A = \varepsilon_T(T_0)$, $B = \varepsilon(T_0) - A \times T_0$, где коэффициенты А, В определены по температуре T₀ с нижнего слоя в каждом узле сетки, включая их коррекцию на интерфейсе, и не меняются в итерациях.

Использование нелинейной зависимости $T = T(\varepsilon)$ может приводить к непредсказуемым результатам, так как схема LINS обоснована для линейных параболических уравнений.

4.2 Явная схема сквозного счета

Напомним, что для газовой области основными сеточными переменными являются полная энергия единицы объема $E = \rho(e + 0.5 u^2)$, плотность ρ , компоненты вектора скорости \vec{u} , внутренняя энергия единицы массы e. Удобно работать с внутренней энергией единицы объема $\varepsilon = \rho \cdot e$. Для этой функции записано уравнение теплопроводности (9), обеспечивающее

аппроксимацию условий сопряжения (10). Именно уравнение (9) положено в основу сквозного расчета температуры в газовой среде и твердом теле.

Заметим, что для идеального газа внутренняя энергия единицы массы газа есть $e(T) = c_V \cdot T$, где $c_V = c_V(T)$ – теплоемкость газа при постоянном объеме, и, следовательно, $\varepsilon(\rho, T) = \rho e = \rho c_V \cdot T$. Теплоемкость идеального газа не зависит от температуры. Для реальных газов теплоемкость зависит, вообще говоря, также и от самой температуры.

Запишем сначала для упрощения объяснения явную схему для уравнения (9) с помощью метода контрольных объемов в двумерном случае. Пусть на плоскости Oxy линия x=0 является контактной границей, интерфейсом.

Возьмем дуальную ячейку, ассоциированную с узлом сетки, совпадающим с началом координат и лежащим на интерфейсе. Соответствующая дуальная ячейка показана на рис. 2 пунктиром для случая двумерной прямоугольной сетки. Эта дуальная ячейка состоит из двух половин – левой части 1, лежащей в газовой области (на рисунке она затенена), и правой части 2, лежащей в твердом теле. Обозначим эти части как Ω^1 , Ω^2 , сохраняя обозначения самих ячеек за их объемами. Объем дуальной ячейки является суммой парциальных объемов: $\Omega = \Omega^1 + \Omega^2$. Парциальные ячейки Ω^1 , Ω^2 лежат слева и справа от разрыва, т.е. в полупространствах x < 0 и x > 0 соответственно.



Рис. 2. Дуальная ячейка для случая двумерной прямоугольной сетки

Заметим, что в трехмерном случае для неструктурированной сетки дуальная ячейка – это многогранник, грани которого проходят через середины ребер сетки и им перпендикулярны. Дуальный многогранник складывается из частей, лежащих внутри геометрических сеточных ячеек и содержащих в качестве одной из вершин рассматриваемый узел. На гранях дуальных ячеек производится расчет конвективных и диссипативных потоков. Вернемся к иллюстративному двумерному случаю явной схемы сквозного счета. Интегрируя уравнение (9) по дуальному объему (см. рис. 2), связанному с интерфейсным узлом с номером 0, получаем в этом узле следующую схему:

$$\Omega \, \frac{\varepsilon_0^{n+1} - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = D\left(T^n\right) + f_0, \qquad (18)$$

где Ω – объем дуальной ячейки, ассоциированной с узлом 0 сетки, $D(T^n)$ – поток тепла через границу этой ячейки, ε_0^{n+1} , ε_0^n – новые и старые значения сеточной функции в интерфейсном узле (с индексом 0), T^n – сеточная функция, полученная на предыдущем шаге по времени обращением уравнения состояния. Дискретизация (18) использует сеточные значения функции T^n в узле 0 и связанном с ним шаблоне узлов, показанном на рис. 2. Часть узлов шаблона лежит в газовой области, часть – в твердом теле. Эти узлы показаны на рис. 2 кружками и квадратиками соответственно.

Пусть теплоемкость и правая часть как сеточные функции определены в узлах сетки. На интерфейсе они являются двузначными функциями со значениями c_0^1, c_0^2 и f_0^1, f_0^2 , их однозначная аппроксимация c_0, f_0 в узле на интерфейсе основана на равенстве вида

$$\int_{\Omega} c \, dV = \int_{\Omega^1} c \, dV + \int_{\Omega^2} c \, dV \, .$$

Отсюда

$$c_0 = c_0^1 \cdot \Omega^1 / \Omega + c_0^2 \cdot \Omega^2 / \Omega.$$
⁽¹⁹⁾

Выражение для переменной f_0 записывается аналогично.

После расчета внутренней энергии по явной схеме во всех узлах сетки производим пересчет температуры. В случае уравнения состояния идеального газа имеем $T^{n+1} = \varepsilon^{n+1}/c$ во всех узлах, включая интерфейсные, так как в схеме сквозного счета интерфейс выделен только для расчета коэффициентов теплоемкости и правой части по формуле (19). В случае общего уравнения состояния пересчет температуры производится обращением этого уравнения.

Видим, что при определении сеточных функций c, f в соответствие с формулой (19) сквозной алгоритм, тем не менее, содержит неоднородность – обработку на интерфейсе сеточных функций c, f. Эту неоднородность алгоритма можно исключить, если задавать c, f в центрах ячеек сетки. Тогда формула усреднения будет работать в каждом узле сетки.

Построим явную схему, алгебраически эквивалентную изложенному выше прямому алгоритму. Эта схема является по форме многообластной: после

расчета отдельно каждой области, производится коррекция значений внутренней энергии и температуры на интерфейсе.

4.3 Явная многоблочная схема

Рассмотрим две области (газ при x < 0 и твердое тело при x > 0), разделенные интерфейсом при x=0, см. рис. 2. В каждой области запишем независимо от другой явную схему для уравнения энергии (9). Рассмотрим интерфейсный узел с двойным номером k1, k2. С этим узлом ассоциированы две дуальные ячейки: одна слева (индекс 1), другая справа (индекс 2), рис. 2. Пусть на объединенной сетке двойной узел имеет номер 0.

Заметим, что консервативная переменная $E = \rho(e+0.5u^2)$ равна на интерфейсе переменной $\varepsilon = \rho \cdot e$, так как при краевом условии прилипания на интерфейсе модуль гидродинамической скорости равен 0. На нижнем слое по времени имеем по построению алгоритма $\varepsilon_{k1}^n = \varepsilon_{k2}^n = \varepsilon_0^n$ – это единое значение для двойного узла, имеющее смысл среднего значения по полной дуальной ячейке. Переменная ε_0^n вычисляется по формуле вида (19), т.е. $\varepsilon_0^n = \varepsilon_{k1}^n \cdot \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_{k2}^n \cdot \Omega^2 / \Omega$. Аналогично вычисляется правая часть f_0 по переменным f_{k1}^n , f_{k2}^n .

Выполним интегрирование уравнения энергии отдельно по левой и правой дуальным ячейкам, лежащим в разных подобластях, с объемами Ω^1 и Ω^2 . Граница левой дуальной ячейки состоит из двух частей. Одна часть лежит строго внутри газовой области, вторая – на интерфейсе; обозначим эти границы как S^1 и S^0 . Соответствующие границы дуальной ячейки, лежащей по другую сторону интерфейса Γ_0 , обозначим как S^2 и S^0 . Обозначим поток энергии через площадь S^0 как Q^0 , а потоки через границы S^1 и S^2 как Q^1 и Q^2 соответственно. Нетрудно видеть, что Q^0 – это тепловой поток на общей интерфейсной границе ячеек Ω^1 и Ω^2 , Q^2 – это тепловой поток через твердотельную часть границы ячейки Ω^2 , Q^1 – поток тепловой энергии через границы ячейки Ω^1 . Получаем разностные схемы в часть газовую интерфейсном узле независимо в каждой области. Имеем парциальные разностные соотношения в узле номер 0:

$$\Omega^{1} \frac{\varepsilon_{k1}^{n+1} - \varepsilon_{0}^{n}}{\Delta t} = Q^{0} - Q^{1} + \Omega^{1} f_{0},$$

$$\Omega^{2} \frac{\varepsilon_{k2}^{n+1} - \varepsilon_{0}^{n}}{\Delta t} = Q^{2} - Q^{0} + \Omega^{2} f_{0}.$$
(20)

В этих уравнениях поток Q^0 нам неизвестен, но его знание и не требуется. Для определенности полагаем $Q^0 = 0$, т.е. парциальные уравнения вида (20) в газе и твердом теле записываются при адиабатическом краевом условии на интерфейсе, $\kappa \partial T / \partial n = 0$. На интерфейсе парциальные уравнения не аппроксимируют по отдельности исходное уравнение теплопроводности, но при суммировании уравнений (20) аппроксимация обеспечивается.

Переменные ε_{k1}^{n+1} , ε_{k2}^{n+1} являются сеточными атрибутами первой и второй областей; они представляют внутреннюю энергию единицы объема в парциальных ячейках Ω^1 и Ω^2 .

Суммируя первое и второе уравнения (20), получаем

$$\Omega \frac{\varepsilon_{k1}^{n+1} \cdot \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_{k2}^{n+1} \cdot \Omega^2 / \Omega - \varepsilon_0^n}{\Delta t} = Q^2 - Q^1 + \Omega f_0.$$
(21)

Из сопоставления (21) и (18) с учетом равенства $D(T^n) = Q^2 - Q^1$ получаем, что следует определить новую переменную на верхнем слое в узле на интерфейсе как

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_{k1}^{n+1} \cdot \Omega^1 / \Omega + \varepsilon_{k2}^{n+1} \cdot \Omega^2 / \Omega, \qquad (22)$$

т.е. схема раздельного счета по областям (20) с обработкой интерфейсных значений по формуле (22), тождественна схеме сквозного счета (18).

Если интерфейсный узел является стыком l областей, $l \ge 2$, то формула обработки парциальных значений ε_i^{n+1} (и им аналогичных) принимает вид

$$\varepsilon_{0}^{n+1} = \sum_{i=1}^{i=l} \gamma_{i} \varepsilon_{i}^{n+1}, \qquad \gamma_{i} = \Omega^{i} / \Omega, \quad i = 1, ..., l$$
(23)

4.4 Явно-итерационная схема LINS в многоблочном варианте

Расчет по явной схеме требует обременительного диффузионного ограничения $\tau \sim h^2$ на шаг по времени. Поэтому, как и на предыдущем параболическом этапе расчета в газовой области уравнений импульса и многокомпонентной диффузии, для решения уравнения энергии в газе и твердом теле используется явно-итерационная схема LINS [15, 16]. Единственный входной параметр схемы (помимо шага τ) – это оценка λ_{max} верхней границы сеточного аналога дифференциального оператора

$$L \cdot T = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^{-1} div \left(\kappa \operatorname{grad} T\right).$$
(24)

В отличие от обычной реализации схемы LINS, для задачи сопряженного теплообмена оценку λ_{max} нужно найти на многоблочной сетке в процессе обработки блоков. Сначала эта оценка определяется в каждой теплопроводной

области по теореме Гершгорина о кругах спектра [30], т.е. на основе вычислений сумм модулей шаблонных коэффициентов, отвечающих аппроксимации оператора (24). Результирующая оценка λ_{max} верхней границы сеточного аналога оператора находится как максимум таких областных оценок по связанным теплопроводным областям. В многообластном расчете с раздельным счетом по областям, возможно, придется проводить коррекцию с использованием парциальных сумм модулей шаблонных коэффициентов на интерфейсных границах.

Переход к новой итерации схемы LINS делается после завершения каждой явной итерации по всем связанным областям. Необходимая для проведения итераций температура Т (для расчета тепловых потоков) определяется по внутренней энергии є с помощью линеаризованного уравнения состояния. Явная структура итераций обеспечивает автоматическую аппроксимацию теплообмена элегантную условий И аддитивную форму метода В многообластном случае, когда разностная дискретизация становится в целом нестандартной (так как шаблон дискретизации интерфейсного узла может лежать в нескольких смежных областях).

Детализируем алгоритм СНТ для случая двух областей «газ – твердое тело». Пусть дискретизация построена в каждой области вплоть до сеточных узлов, лежащих на интерфейсе «газ – твердое тело». В газовой области определен шаг интегрирования τ_{conv} из условия устойчивости CFL, проведен конвективного, т.е. гиперболического этапа. Затем выполнен расчет параболический этап – вязкий и диффузионный совместно. Этот этап состоит из явно-итерационной процедуры, примененной к редуцированным (без учета потоков) уравнениям импульса конвективных И уравнениям многокомпонентного переноса (3). По их завершении готовятся источниковые члены $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u})$, $\nabla \cdot \vec{J}$, входящие в правую часть редуцированного (без учета конвективных потоков) уравнения энергии.

На втором параболическом этапе решается редуцированное уравнение энергии сквозным образом по всем теплопроводным областям, как газовым, так и твердотельным.

Заметим, что такое разделение удобно для включения в схему уравнений химических компонентов смеси, так как уравнение энергии является замыкающим законом сохранения с учетом суммарного теплового потока.

Алгоритм расчета сопряженной задачи теплопроводности имеет следующий вид.

1. Проводим инициализацию расчета всей задачи. До начала расчета первого временного шага, проводим обработку интерфейсных границ с определением на этих границах значений l кратности узлов, весовых множителей $\gamma_i = \Omega^i / \Omega$, i = 1, ..., l, внутренней энергии ε по формулам (23) и температуры T по обращенному уравнению состояния (5).

На каждом шаге по времени выполняются пункты 2–7:

2. Расчет в газовой области гиперболического и параболического этапов (вязкого и диффузионного).

3. Расчет по всем областям коэффициентов линеаризации внутренней энергии $A = \partial \varepsilon(T_d) / \partial T$, $B = \varepsilon(T_d) - A \times T_d$ по температуре с нижнего слоя T_d . Пересчет этих коэффициентов на интерфейсе: $A = \sum_{i=1}^{i=l} \gamma_i A_i$, $B = \varepsilon(T_d) - A \cdot T_d$.

4. Оценка λ_{\max}^{loc} во всех областях. Определение глобальной оценки λ_{\max} на основе областных и интерфейсных оценок, числа итераций *p* схемы LINS по λ_{\max} и $\tau = \tau_{conv}$, расчет чебышевских параметров.

5. В цикле по m = 1, ..., 2p - 1 и цикле по областям i = 1, ..., l проводим расчет одной итерации схемы LINS:

$$\varepsilon^{m} = \frac{1}{1 + \tau_{conv} b_{m}} \bigg\{ \varepsilon_{conv} + \tau_{conv} b_{m} \varepsilon^{m-1} + \frac{\tau_{conv}}{\Omega} \big(\Delta(T^{m-1}) + f \cdot \Omega \big) \bigg\}.$$

Здесь $\Delta(T^{m-1})$ – тепловой поток через границу ячейки с объемом Ω . По завершении цикла по областям в каждом узле на интерфейсе получаем набор значений ε_i^m , i = 1, ..., l.

6. На каждой итерации *m* находим в каждом узле на интерфейсе общее единое значение внутренней энергии и температуры по формулам $\varepsilon_f = \sum_{i=1}^{i=l} \gamma_i \varepsilon_i^m(T), \quad \gamma_i = \Omega^i / \Omega, \quad i = 1, ..., l, \quad T^m = (\varepsilon_f - B) / A.$ Заносим полученные значения в областные переменные: $\varepsilon_i^m = \varepsilon_f, \quad T_i^m = T^m, \quad i = 1, ..., l.$ После завершения итераций по найденной на новом слое по времени внутренней энергии $\varepsilon(T)$ из решения нелинейного уравнения типа $b_0 + b_1 T + ... + b_5 T^5 = \varepsilon / \rho$ во всех узлах сетки находим сеточную функцию T.

7. Если шаг по времени не последний, то делается переход к п. 2.

5. Анализ одной нестационарной задачи сопряженного теплообмена

Существует особая потребность в исследованиях нестационарных процессов сопряженного теплообмена. Поэтому рассмотрим модельную задачу [5, 6], она хорошо подходит для оценки работоспособности и точности схем расчета сопряженного теплообмена, протекающего в существенно нестационарных условиях.

Мы рассматриваем пластину толщиной b и длиной l. Газ находится с верхней стороны пластины. В начальный момент t=0 газ покоится. Расположим декартову систему координат, как показано на рис. 3, направив ось Oz перпендикулярно плоскости рисунка. В направлении Oz пластину считаем бесконечной. Границей раздела «газ-твердое тело» служит отрезок оси абсцисс. Расчетная область $\{(x, y): 0 \le x \le l, -b \le y \le b_f\}$ состоит из двух частей: горизонтально расположенной пластины $l \times b$ и расположенной над ней газовой области размера $l \times b_f$. На нижней границе пластины поддерживается постоянная температура T_e (изотермическая граница). Для будущего отметим, что интерес представляет задание на этой границе адиабатического краевого условия, т.е. нулевого теплового потока. На рис. 3 показаны геометрия задачи 1 и наглядная формулировка краевых условий. В газе верхняя граница описывается как изотермическая стенка с постоянной температурой T_b . Нижняя граница газовой области – это интерфейсная граница раздела «газ-твердое тело», в рамках газодинамической задачи на этой границе ставится условия непротекания. На левой и правой сторонах области использовались условия периодичности. Формулируемая задача близка по постановке задачи в работах [5, 6], с аналитическими и численными результатами которых мы будем проводить сравнение. Как и в [5, 6], возьмем в качестве характерного линейного размера L=b.



Изотермическая стенка (горячая, Т=900 К)

Рис. 3. Область расчета

Отличие от [6] состоит в задании на верхней границе газовой области краевого условия «изотермическая стенка» вместо экстраполяционных условий, а также рассмотрение воздуха как двухкомпонентной смеси кислорода и азота в целях методической отладки новой численной модели. В постановке [5, 6] газ при t < 0 покоится, затем мгновенно в момент t = 0 ускоряется от состояния покоя до постоянной скорости U_{∞} (числа Маха $M_{\infty} = 3$).

Начальные условия. При t = 0 температурное поле T(x, y, t) однородно как в газе, так и в твердом теле: $T(x, y, 0) = T_0$. Начальные параметры газа: $p = p_0$, $T = T_0 = T_\infty$, $u = U_\infty$, v = 0.

Исходные данные. Взяты значения $T_0 = T_{\infty} = 300 \ K$, $T_b = 300 \ K$, $T_e = 900 \ K$, $p_{\infty} = 101325 \ \Pi a, \ U_{\infty} = 1041 \ M/c.$ B газе коэффициенты вязкости И теплопроводности задавались формулами: $\mu(T) = \mu_0 \cdot T/T_0$, $\lambda_f(T) = \lambda_f^0 \cdot T/T_0$. В данной задаче для каждого компонента смеси взяты одинаковые константы $\mu_0 = 1.8 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_f^0 = 0.025437$. Коэффициент диффузии каждого компонента смеси задавался как $D = \mu/(\rho Sc)$, здесь число Шмидта Sc = 0.9. Удельная объеме: $c_{\nu} = 725 \ \ \Pi \mathcal{H} / (\kappa \epsilon K)$. теплоемкость воздуха при постоянном Референсное значение скорости звука в газе $c = 347 \, M/c$. Константы: $M_{\infty} = 3$, Pr = 0.72, $Re = 3.4 \cdot 10^6$. При температуре 500 *K* и атмосферном давлении для воздуха температуропроводность $\alpha_f \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Число Пекле, вычисляемое по велико, $Pe = U \cdot L/\alpha_f \approx 10^6$, (L = b), скорости горизонтальной т.е. В горизонтальном направлении конвективный перенос является определяющим. Но пренебречь обычной теплопроводностью, как мы увидим ниже, нельзя.

Для твердого тела плотность и удельная теплоемкость ρ_s , c_s задавались постоянными, так же как и коэффициент теплопроводности $\kappa = \lambda_s$; в уравнении (8) $c = \rho_s c_s = 0.8981 \ \exists m/(m^3 K), \quad \lambda_s = 46.7 \ Bm/(m K),$ что соответствует коэффициентам уравнения из работ [5, 6]. В этом случае коэффициент температуропроводности твердого тела есть $\alpha_s = \lambda_s / \rho_s c_s \approx 50 \ m^2 / c$.

Число Фурье, характеризующее установление температурного поля в пластине как отдельном объекте есть $Fo = t \cdot \alpha_s / b^2$, и, следовательно, оценка времени установления $t >> 5 \cdot 10^{-5}$ сек.

Наряду с численными результатами [6] для анализа точности предложенного нами подхода использовались аналитические результаты [5]. Аналитический подход позволяет оценить главные параметры, определяющие процесс сопряженного теплообмена. Рассматриваемая задача является нестационарной и поэтому часто служит для анализа точности разнообразных численных методов расчета процессов сопряженного теплообмена.

В [5] предложено использовать для характеристики сопряженного теплообмена два безразмерных параметра

$$p = \left(\frac{b}{L}\right) \frac{\sqrt{\operatorname{Re}} \cdot \lambda_f(T_{\infty})}{\lambda_s}, \quad t_{fs} = \frac{\alpha_s}{b U_{\infty}}.$$

Параметр t_{fs} – это отношение характерных времен в газе и твердом теле. Параметр *р* является аналогом числа Брюна $Br = p \cdot \sqrt{\Pr}$, введенного А.В. Лыковым [10].

Следуя [5, 6], введем безразмерную температуру

$$\theta = \left(T - T_{\infty}\right) / T_{\infty},$$

а также новую переменную – характерное безразмерное время в твердом теле $t_s^* = t_{fs} \cdot t_f^*$, где $t_f^* = t U_{\infty}/L$ – характерное безразмерное время в газе. Выберем параметры твердого тела из условия $t_{fs} = \alpha_s/(b U_{\infty}) = 1$. Тогда безразмерное время всей системы есть $t^* = t_s^* = t_f^*$. Для сопоставления с работами [5, 6] будем обозначать безразмерное время t^* как τ ; этот параметр отличается от величины шага интегрирования по времени Δt , обозначенного в других разделах тем же символом τ .

В случае задания на нижней границе твердого тела постоянной температуры $T_e = 900 K$ безразмерная температура на этой границе есть $\theta_e = (T_e - T_\infty)/T_\infty = 2$. При таком выборе параметров T_e , T_∞ речь идет о нагреве набегающего потока горячей пластиной.

Главным параметром, относящимся к явлению сопряженного теплообмена и определяющим безразмерную температуру на интерфейсе «газ-твердое тело», является параметр $\Lambda = p \sqrt{t_{fs}} \sqrt{\Pr}$ (и, очевидно, параметр θ_e в рассматриваемом изотермическом случае). Принятая шкала времени важна, поскольку определяет временной интервал, в котором сопряженные эффекты значимы. Параметр Л характеризует эти эффекты и имеет содержательное физическое значение: $\Lambda = (b/L) \cdot E$, где E – отношение между параметрами $e_f = \sqrt{\rho_{\infty} c_p \lambda_{\infty}}$ и $e_s = \sqrt{\rho_s c_s \lambda_s}$, которые являются соответственно тепловой эффузией в газе и в твердом теле. Тепловая эффузия характеризует способность обмениваться тепловой энергией с окружающей средой. Выбирая L = b, мы получаем, что сопряженные эффекты управляются параметром $\Lambda = E$, т.е. отношением коэффициентов тепловой эффузии.

При заданных параметрах, в набор которых входит число Рейнольдса Re и коэффициенты теплопроводности λ_s и λ_f , в сформулированной выше задаче число Брюна $Br = \Lambda \approx 0.80$. Принято считать, что при Br < 0.1 эффектами теплообмена через интерфейс можно пренебречь, т.е. задача может быть решена как несопряженная [10]. Обычно в качестве такой характеристики используют число Нуссельта $Nu = \chi \cdot L/\lambda_f$, где χ – коэффициент теплообмена газа с твердой средой, для нас величина χ неизвестна. Число Нуссельта в данной задаче найдено с помощью аналитического решения как функция безразмерного времени, см. ниже формулу (27).

Для получения аналитического решения рассматриваемой задачи (при некоторых упрощающих предположениях) используется преобразование Дородницына, введенное впервые в [31]. Это – преобразование координат, позволяющее отделить уравнение энергии от уравнений непрерывности и импульса и придать уравнениям пограничного слоя форму, близкую к форме

уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости. В [5] это преобразование с уточнением Стюартсона распространено на сжимаемый случай. Основное предположение состоит в следующем: $\mu/\mu_{\infty} = \lambda/\lambda_{\infty} = \rho/\rho_{\infty} = \kappa_{\mu}T/T_{\infty}$, здесь ρ - плотность газа. Для сформулированной задачи это предположение выполнено, $\kappa_{\mu} = 1$. Замена переменных имеет вид

$$\eta = \left(\sqrt{\operatorname{Re}}/L\right) \int_0^y \rho/\rho_\infty \, dy, \quad t^* = t U_\infty/L, \quad \operatorname{Re} = \operatorname{Re}_\infty/\kappa_\mu.$$
(25)

Аналитическое решение $\theta_{anal} = \theta(\tau)$ безразмерной температуры $\theta = (T - T_{\infty})/T_{\infty}$ как функции безразмерного времени $\tau = t^* = t U_{\infty}/b$ имеет следующий вид [5]:

$$\theta_{anal}(\tau) = \theta_{w0} \left[1 - \kappa \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \operatorname{erfc}\left(\frac{n+1}{\sqrt{\tau}}\right) \right] + \kappa \theta_e \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (26)$$

где $A = (1 - \Lambda)/(1 + \Lambda)$, $\theta_{w0} = \theta_{aw} \Lambda/(1 + \Lambda)$, $\kappa = 2/(1 + \Lambda)$, и θ_{aw} – температура стенки, получающаяся при установлении процесса обтекания пластины с заменой условия сопряженного теплообмена на адиабатическое условие (т.е. условие теплоизолированной стенки). Температура θ_{aw} , согласно [5], есть $\theta_{aw} = 2E \cdot \arctan(K)/(\pi K)$, где $K^2 = 2/\Pr - 1$. В рассматриваемом случае $\theta_{aw} = 1.6$, т.е. $T_{aw} = 780K$. Ряды в (26) сходятся абсолютно (в силу условия $\Lambda = p\sqrt{t_{fs}}\sqrt{\Pr} > 0$). Следуя [5], на интерфейсе можно найти число Нуссельта $Nu = p \cdot \partial \theta / \partial \eta$, где аргумент η определен в (25). Тогда на интерфейсе (при y = 0) имеем

$$Nu(\tau) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \left[\theta_{aw} - \theta_{w0} + \kappa \theta_{w0} \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \exp\left(-\frac{(n+1)^2}{\tau}\right) - \kappa \theta_e \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4\tau}\right) \right].$$
(27)

Точка $\tau = 0$ является особой, в решении возникает сингулярность. При $\tau \to 0$ решение является конечным: $\theta_{anal}(0) \approx 0.73$, а тепловой поток бесконечен, как это легко видеть из (27).

Сингулярность в аналитическом решении в начальный момент времени означает, что следует ожидать сходимость численных решений к точному на интервале времени вне малой окрестности начала координат.

Аналитическое и численное решение в виде температуры T и безразмерной температуры $\theta = (T - T_{\infty})/T_{\infty}$ на интерфейсе показаны на рис. 4

как функции размерного времени t. Оно связано с безразмерным временем t^* , обозначенным в [5, 6] как τ , зависимостью $t = t^* \cdot L/U_{\infty}$, или при заданных параметрах $t \approx 4.8 \cdot 10^{-5} t^*$. Поэтому значению $t^* = \tau = 5$ из [5] и $t^* = \tau = 0.5$ из [6] соответствует размерное время $t \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$ и $t \approx 2.4 \cdot 10^{-5}$ на приводимых нами ниже рис. 4–6. Эти графики отвечают изотермическому краевому условию $T_e = 900 K$ на нижней границе пластины и данным из [5] с указанными там значениями $E = (\gamma - 1)M^2 = 3.6$, $\Lambda = 0.8367$, причем E = 3.6 эквивалентно безразмерной скорости набегающего потока $M_{\infty} = 3$.

Расчеты проведены на прямоугольных сетках с числом ячеек $N_x \times N_y$. Число шагов N_x по оси Ox оставалось постоянным и небольшим (решение от *x* не зависит, задача является одномерной), $N_x = 5$. По оси Oy сетка измельчалась до достижения практической сходимости с обеспечением разрешения пограничного слоя. В представленных результатах численный анализ задачи проводился на равномерной сетке с числом узлов $N_y = 10^4$ по направлению Oy с шагом $h = 10^{-5}$ в твердом теле и газовой области.

На этой сетке интегрирование велось с шагом по времени $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-9}$ до момента времени $t = 2.4 \cdot 10^{-4}$, что отвечает безразмерному времени $t^* = 5$.

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости конвективной подзадачи с коэффициентом запаса 0.5. Параболический диффузионно-вязкий этап интегрировался по схеме LINS, т.е. редуцированные уравнения импульса и многокомпонентной диффузии решались совместно. Так как на данной сетке верхняя граница совместного диффузионно-вязкого оператора $\lambda_{max} = 1.4 \cdot 10^7$ обеспечивает устойчивость явного счета, то схема LINS автоматически переходит в явную схему. Для дискретного оператора, отвечающего аппроксимации уравнения теплопроводности в системе теплопроводных областей, имеем $\lambda_{max}^{T} = 4 \cdot 10^{12}$. Поэтому сквозной расчет теплопроводного этапа в газовой области и твердом теле в соответствие с (17) требует 160 явных итераций схемы LINS. В этом случае явная схема потребовала бы более 10 тысяч шагов.

На рис. 4 приведен график зависимости от времени безразмерной температуры $\theta = (T - T_{\infty})/T_{\infty}$ на интерфейсе при $t < 2.4 \cdot 10^{-4}$, показано численное (пунктир) и аналитическое решение (26) (сплошная линия). На рис. 5 эти же графики приведены в укрупненном виде при $t < 2.4 \cdot 10^{-5}$. Для наглядности на рис. 6 приведены графики для соответствующих размерных величин.



Рис. 4. Безразмерная температура в на интерфейсе



Рис. 5. Безразмерная температура θ на интерфейсе при $t < 2.4 \cdot 10^{-5}$



Рис. 6. Зависимость от времени температуры на интерфейсе

На интерфейсе в начальный момент времени аналитическое значение безразмерной температуры $\theta = (T - T_{\infty})/T_{\infty}$ есть $\theta_{anal}(0) = 0.73$, тогда как приближенное расчетное значение равно 0, но с ростом *t* расчетная температура достаточно быстро (в масштабе времени переходного процесса) сближается с аналитическим решением.

На рис. 7 приведены численные тепловые потоки на интерфейсе. Односторонние тепловые потоки на интерфейсе F^{\pm} (*Flux – solid*, *Flux – gas*) находятся по значениям температуры $T(t, x, y_0)$ на интерфейсе и соседним значениям $T(t, x, y_1)$, $T(t, x, y_2)$ с одной стороны интерфейса, $F^+ = \lambda^+ \cdot \Delta_y^+$, аналогично с другой стороны: $F^- = \lambda^- \cdot \Delta_y^-$, где λ^{\pm} , Δ_y^{\pm} – коэффициенты теплопроводности и трехточечные аппроксимации точности $O(h^2)$ производной по направлению нормали к интерфейсу по его разные стороны соответственно.

Ясно, что односторонние численные потоки сильно различаются в начальный времени. Тепловая волна от горячей нижней границы достигает интерфейса не мгновенно, а за несколько шагов по времени (в силу свойств схемы LINS). К тому же, в газе в близких к интерфейсу узлах сетки возникает сильный нагрев в результате выделения тепла за счет трения.

Но основная причина различий потоков – проявления сингулярности. Для контроля выполнена имитация одномерного расчета с использованием неявной схемы, реализуемой прогонкой и схемой LINS. Результаты оказались практически одинаковыми.

На рис. 7 при $t \approx 0.0014$ виден небольшой локальный максимум в тепловом потоке на интерфейсе. На рис. 8 в окрестности точки $t \approx 0.0014$ показана относительная ошибка (%) в различии односторонних потоков на интерфейсе, кружками отмечен каждый 8 узел сетки. Как показал анализ расчетных данных, повышение ошибки до 0.4% – это результат влияния возвратной волны, отраженной от холодной верхней границы газовой области. Это подтверждает профиль вертикальной компоненты скорости, см. рис. 9. Кружки расставлены на 10-процентном расстоянии друг от друга. Профили температуры в пограничных слоях газовой области показаны на рис. 10 вблизи интерфейса а) и холодной границы б).



Рис. 7. Численные тепловые потоки на интерфейсе



Рис. 8. Относительная ошибка (%) в потоках на интерфейсе



Рис. 9. Профиль вертикальной компоненты скорости при $t \approx 0.0014$



Рис. 10. Профили температуры вблизи а) интерфейса и б) холодной границы

6. Заключение

Разработана вычислительная методология трехмерного моделирования процессов высокоскоростного обтекания вязким многокомпонентным газом и нестационарного сопряженного теплообмена на неструктурированных сетках. Эта методика и компьютерный код разрабатываются для решения задач в системе взаимодействующих областей, разделенных границами «газ-твердое тело» с условиями идеального теплового контакта.

Предложенный метод основан на прямом сопряжении процессов теплообмена в силу одновременного (сквозного) интегрирования по времени уравнения энергии в газовой области и твердом теле. Тем самым автоматически обеспечивается аппроксимация условий сопряженного теплообмена на интерфейсных границах. Алгоритм оказывается эффективным и логически простым для реализации на конформных многоблочных неструктурированных сетках с параллельным расчетом блоков и последующей обработкой интерфейсов. Для реализации сквозного многообластного расчета предложена элегантная техника, основанная на возможностях явно-итерационной схемы LINS.

Метод может быть обобщен для произвольного расположения и сочетания многоблочных конформных неструктурированных сеток. Граница одного блока может примыкать к нескольким соседним блокам. В каждом блоке может быть построена своя произвольная неструктурированная или структурированная сетка, но так, чтобы полная сетка по границам блоков была состыкована.

Получен надежный, высокоточный, консервативный метод для решения нестационарного сопряженного теплообмена. Консервативность задачи счет использования метода конечных объемов, достигается за явноитерационного метода интегрирования и простой процедуры коррекции интерфейсных значений. Алгоритм решения расширенной системы Навье-Стокса и теплопроводности в твердом теле работает в общей программной среде компьютерного кода NOISEtte-MCFL.

Анализ нестационарной задачи о нагреве высокоскоростного потока горячей пластиной, представленный в данной работе, подтверждает перспективность предлагаемого подхода к решению нестационарных задач сопряженного теплообмена.

В дальнейшем интерес представляет исследование задачи о высокоскоростном обтекании с вариацией краевых условий и входных данных.

Библиографический список

- 1. Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К. Моделирование сопряженных процессов аэрогазодинамики и теплообмена на поверхности теплозащиты перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов // Известия вузов. Сер. Машиностроение. Т. 2014. № 3. С. 23–34.
- 2. Димитриенко Ю.И. и др. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях // Мат. моделир. и числ. методы. 2021. Т.31. № 3. С. 42–61. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-3-4261.
- 3. Dimitrienko Y.I., Zakharov A.A., Koryakov M.N. Coupled problems of highspeed aerodynamics and thermomechanics of heat-shielding structures //J. Phys.: Conf. Ser.2018, Vol. 1141, 012094. DOI: 10.1088/1742 –6596/1141/1/012094.
- 4. Nordström J., Berg J. Conjugate heat transfer for the unsteady compressible Navier–Stokes equations using a multi-block coupling // Computers and Fluids. 2013. Vol. 72. P. 20–29.
- 5. Pozzi A., Tognaccini R. Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena // J. Fluid Mech. 2005. Vol.538. DOI:10.1017/S002211200500529X.
- Radenac E., Gressier J., Millan P. Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer // Computers and Fluids. 2014. Vol. 100. P. 95–107. DOI:ff10.1016/j.compfluid.2014.05.006.
- 7. He L., Fadl M. Multi-scale time integration for transient conjugate heat transfer // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2016. Vol. 83. № 12. P. 887–904.
- 8. Henshaw W., Chand K. A composite grid solver for conjugate heat transfer in fluid–structure systems // J. Comput. Phys. 2009. Vol. 228. № 10. P. 3708–3741. DOI:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.007.
- Meng F., Banks J., Henshaw W., Schwendeman D. A stable and accurate partitioned algorithm for conjugate heat transfer // J. Comput. Phys. 2017. Vol. 344. P. 51–85
- 10. Luikov A.V. Conjugate convective heat transfer problems // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 1974.Vol. 17. P. 1207–1214.
- 11. Luikov A.V, Aleksashenko V.A, Aleksashenko A.A. Analytical methods of solution of conjugate problems in convective heat transfer // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1971. Vol. 14. № 8. P. 1047–1056.
- Feodoritova O.B., Krasnov M.M. and Zhukov V.T. A Numerical Method for Conjugate Heat Transfer Problems in Multicomponent Flows. // J. Phys.: Conf. Ser., 2021. Vol. 2028 012024, DOI:10.1088/1742 –6596/2028/1/012024
- 13. Программный комплекс NOISEtte-MCFL для расчета многокомпонентных реагирующих течений // Борисов В.Е., Жуков В.Т., Краснов М.М.,

Критский Б.В., Новикова Н.Д., Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 6. 23 с. DOI:10.20948/prepr-2023-6.

- 14. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Выч. мет. программирование. 2012. Т. 13. №3. С. 110–125.
- 15. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б, Дубень А.П. Явноитерационная схема для интегрирования по времени системы уравнений Навье–Стокса. // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 57–74.
- 16. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Об одном подходе к интегрированию по времени системы уравнений Навье–Стокса. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 2. С. 267–280.
- Borisov V.E., Feodoritova O.B., Novikova N.D., Rykov Yu.G., Zhukov V.T. Computational Model for High-Speed Multicomponent Flows // Mathematica Montisnigri. 2020. Vol. 48. P. 32–42. DOI: 10.20948/mathmontis-2020-48-4
- Feodoritova O.B., Novikova N.D. and Zhukov V.T. An explicit iterative scheme for 3D multicomponent heat conducting flow simulation // J. Phys.: Conf. Ser., 2021. Vol. 2028. DOI:10.1088/1742-6596/2028/1/012022
- 19. Feodoritova O.B., Novikova N.D., Zhukov V.T. Development of numerical methodology for unsteady fluid-solid thermal interaction in multicomponent flow simulation // Lobachevskii J. of Mathematics, 2023. Vol. 44. № 1, P.33–43.
- 20. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 10. С. 127–158.
- 21. Shvedov A.S., Zhukov V.T. Explicit iterative difference schemes for parabolic equations // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model., 1998. Vol. 13. № 2. P. 133–148.
- 22. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 540 544.
- 23. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987 (3-е изд.); 502 с.
- Galanin M.P., Zhukov V.T., Klyushnev N.V., Lukin V.V., Rodin A.S., Kuzmina K.S., Marchevsky I.K. Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // Computers and Fluids. 2018. T. 172. P. 483–491.
- 25. Загускин В.Л., Кондрашов В.Е. О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям // ДАН, Т. 163. № 5, 1965, с. 1107–1109.

- 26. Giles M.B. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid structure thermal analysis // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1997. Vol. 25. № 4. P. 421–436.
- 27. Жуков В.Т., Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. Математическая модель течения многокомпонентной смеси газов с учетом возможности возникновения жидкой фазы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 183. 36 с. DOI:10.20948/prepr-2018-183
- 28. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М: Едиториал УРСС. 2003. 784 с.
- 29. Борисов В.Е., Рыков Ю.Г. Моделирование течений многокомпонентных газовых смесей с использованием метода двойного потока // Матем. моделирование, 2020, Т.32, № 10. С. 3–20. DOI:https://doi.org/10.20948/mm-2020-10-01
- 30. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1966, 576 с.
- 31. Дородницын А.А. Пограничный слой в сжимаемом газе // Прикл. матем. и механика. 1942. Т. б. №. б. С. 449–486.

Оглавление

1. Введение	3
2. Постановка задачи сопряженного теплообмена	5
2.1. Общие сведения	5
2.2 Математическая модель течения многокомпонентной смеси	8
2.3 Теплопроводность в твердом теле	10
2.4 Условия сопряжения	11
3. Схема расчета газовой области	13
4. Алгоритм СНТ	16
4.1 Уравнения состояния	16
4.2 Явная схема сквозного счета	16
4.3 Явная многоблочная схема	19
4.4 Явно-итерационная схема LINS в многоблочном варианте	20
5. Анализ одной нестационарной задачи сопряженного теплообмена	22
6. Заключение	33
Библиографический список	34