ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 13 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 13. 30 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2023-13**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-13

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц.

Аннотация. В работе обсуждается в релятивистских рамках неэкстенсивная кинетическая теория для аномальных газовых *q*-систем. Путем включения неэкстенсивных эффектов в столкновительный член релятивистского уравнения переноса, а также в модифицированное выражение для 4-вектора потока *q*-энтропии показано, что энтропийный формализм Тсаллиса сохраняет локальную форму релятивистской *H*-теоремы, согласно которой прирост энтропии в любой точке пространства-времени никогда не бывает отрицательным. Показано, что локальное столкновительное равновесие описывается обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера. С помощью этого распределения определены в явном виде плотности числа частиц, энергии и энтропии, а также термическое уравнение состояния для релятивистского *q*-газа одинаковых частиц. Полученные результаты сводятся к стандартным соотношениям в экстенсивном пределе, показывая тем самым, что неэкстенсивный энтропийный подход может быть согласован с концепцией пространства-времени в общей релятивистской теории.

Сконструированное неэкстенсивное кинетическое уравнение предназначено для описания широкого круга явлений в астрофизике, космологии и физике высоких энергий, в частности многочастичных процессов производства при релятивистских столкновениях.

Ключевые слова: неэкстенсивная статистика Тсаллиса, релятивистские столкновения тяжелых ионов; распределение по расширенному степенному закону.

Kolesnichenko Aleksander Vladimirovich

Towards a derivation, within the framework of Tsallis statistics relativistic kinetic equation for a rarefied ideal gas system of high-energy particles.

Abstract. In this work we discuss the nonextensive kinetic theory for anomalous gas q-systems in a general relativistic framework. By including nonextensive effects in the collision term of the relativistic equation (violating Boltzmann molecular chaos hypothesis) and in a modified 4-vector expression for the q-entropy flux it is shown that the entropic Tsallis formalism preserves a local form of the relativistic *H*-theorem according to which the entropy growth in any point of space-time is never negative. It is shown that the local collision equilibrium (the zero-point entropy source term) is described by a generalized version of the Yüttner relativistic distribution. Using this distribution, the particle number, energy and entropy densities and the thermal equation of state for a relativistic *q*-gas of identical particles in the equilibrium state are determined explicitly. The results are reduced to the standard ones in the extensive limit, thus showing that the nonextensive entropic scheme can be consistent with the space-time ideas contained in the general relativistic theory.

The constructed kinetic equation is designed to describe a wide range of phenomena in astrophysics, cosmology and high-energy physics, in particular, multiparticle production processes in relativistic collisions.

Key words: non-extensive Tsallis statistics, relativistic heavy ion collisions; extended power law distribution.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появляется все больше доказательств того, что неэкстенсивная статистическая механика Тсаллиса (Tsallis, 1988), используемая для описания статистического и кинетического поведения аномальных неаддитивных систем различной природы, может рассматриваться как наиболее подходящая основа теоретической базы для моделирования огромного числа физических явлений и процессов. Эти явления включают ситуации, которые характеризуются дальнодействующими гравитационными взаимодействиями, сильными нелокальными корреляциями, дальнодействующей микроскопической памятью, фрактальными ограничениями пространства-времени.

Напомним, что q-обобщение Тсаллиса энтропии Больцмана-Гиббса (БГ) в случае неэкстенсивной газовой системы имеет вид (Tsallis, 1988; Колесниченко, 2019)

$$S_q = -k_B \int f^q(\boldsymbol{r}) \ln_q f(\boldsymbol{r})\, d\Omega = -k_B \left\langle \ln_q f \right\rangle_q ,$$

где k_B − постоянная Больцмана; $f(\boldsymbol{r})$ − функция распределения в фазовом пространстве; $d\Omega$ − элемент объема в фазовом пространстве; q − параметр деформации (неаддитивности энтропии S_q), связанный с некоторыми дополнительными степенями свободы, присущими аномальным системам, и который должен определяться *a posteriori*, $q \in [0, 2]$; $\ln_q X$ − деформированная q − логарифмическая функция, обратная для которой является деформированной q-экспонентой, $\exp_q X$. Обе функции определяются следующим образом:

$$\ln_q X = (1-q)^{-1}(X^{1-q} - 1), \quad (X > 0),$$

$$\exp_q X = [1 + (1-q)X]^{1/(1-q)}, \ \left(X > (q-1)^{-1} \right);$$

при этом $\exp_q(\ln_q f) = \ln_q(\exp_q f) = f$. Из приведенных формул следует, что для системы, состоящей из двух подсистем A и B, суммарная неаддитивная энтропия Тсаллиса определяется соотношением

$$S_q(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = S_q(\mathrm{A}) + S_q(\mathrm{B}) + (1-q) S_q(\mathrm{A}) S_q(\mathrm{B}),$$

из которого следует, что для $q \to 1$ логарифмическая экстенсивная энтропийная мера, связанная с подходом БГ, восстанавливается. При написании второй формы определения энтропии Тсаллиса использовано осреднение

$$\langle \mathrm{A} \rangle_q = \int d\Omega\, f^q(\boldsymbol{r})\, \mathrm{A}(\boldsymbol{r})$$

с ненормированным распределением f^q для любой микроскопической физической величины $\mathrm{A}(\boldsymbol{r})$, свойственное статистике Курадо-Тсаллиса[1)] (см. Колесниченко, 2018).

Энтропия Тсаллиса была широко исследована как в теоретическом, так и в прикладном контексте (см., например, (Gell-Mann, Tsallis, 2004; Tsallis, 2009; Колесниченко, 2019). В частности, неэкстенсивный статистический формализм оказался полезной конструкцией для анализа многих астрофизических и космологических явлений. Например, выполненное нами применение неэкстенсивной статистики Тсаллиса к исследованию большого числа астрофизических проблем показало, что самогравитирующие космологические системы (например, аккреционные протозвездные диски) и физика космологической плазменной среды за пределами Солнечной системы представляют многообещающую область для поиска и моделирования неэкстенсивных эффектов (см. Колесниченко, 2015; Kolesnichenko, 2017, 2020 a, b, 2021; Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016, 2020).

Вместе с этим совсем недавно было найдено еще одно из заманчивых применений неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, связанное с физикой высоких энергий, в частности с изучением высокоэнергетических столкновений тяжелых ионов, в результате которых происходит образование нового адронного состояния материи[2)], кварк-глюонной плазмы (КГП) (см. Wilk, Włodarczy, 2000 a, b). Оказалось, что математическое моделирование процессов

[1)] В неэкстенсивной статистической механике Тсаллиса возможно осреднение микроскопических физических величин по трем распределениям, которые имеют свои преимущества и недостатки, определяя совершенно разные q-термодинамики, соответствующие тем или иным термодинамически аномальным системам. По этой причине использование того или иного способа осреднения в физических приложениях носит принципиальный характер, поскольку различия в определении средних значений могут оказаться существенными при обработке экспериментальных данных. В данной работе мы будем использовать ненормированное осреднение Курадо-Тсаллиса, поскольку это единственное осреднение, которое не приводит к переопределению понятия температуры q-системы. В этой статистике температура T является интенсивным параметром, а не функционалом T_q, как, например, при осреднении с помощью нормированного эскордного распределения $f^q / \int d\Omega\, f^q$ Тсаллиса-Мендеса-Пластино (см. Зарипов, 2010).

[2)] Адроны − *бесцветные* составные частицы (протоны и нейтроны), построенные из кварков и глюонов (безмассовых частиц, являющихся переносчиками сильного *цветового* взаимодействия между кварками).

многочастичного производства вторичных частиц внутри газовых потоков при адронных релятивистских столкновениях приводит к наиболее адекватным результатам лишь при использовании неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, поскольку условия, необходимые для применения обычной статистики БГ или релятивистской кинетической теории (Israel, 1963; de Groot и др., 1968), выполняются в этом случае весьма приближенно. Полученные при ядерных столкновениях с ультрарелятивистскими энергиями спектры частиц для наборов наблюдаемых данных (как в пространстве поперечных импульсов, так и в пространстве скоростей) свидетельствуют о модификации классических гауссовых распределений, подчиняясь при этом распределению по так называемому расширенному степенному закону Тсаллиса-Парето, т.е. неожиданно принимая форму q-экспоненты вместо ожидаемых обычных экспонент.

Эксперименты, проведенные на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (RHIC) и на Большом адронном коллайдере (LHC), также показали, что спектры скорости чистого образования протонов и распределения поперечного импульса вторичных частиц могут быть успешно описаны неэкстенсивными распределениями (характерными для канонических равновесных распределений, связанных с энтропийной мерой Тсаллиса) в широком диапазоне энергий, размеров сталкивающихся потоков и производимых сортов адронов (Beck, 2000; Alberico, Lavagno, 2009; Wilk, Włodarczy, 2000a,b; Bíró и др., 2017).

Указанное неэкстенсивное распределение в физике высоких энергий связано, по-видимому, с тем, что адронизирующие системы характеризуются сильными внутренними флуктуациями и дальними корреляциями, которые могут быть истолкованы как проявление некоторых внутренних динамических, неравновесных эффектов (таких, например, как распад резонансов или температурных флуктуаций). В результате вместо строгого локального теплового равновесия (обычно предполагаемого во всех приложениях статистических моделей) в рассматриваемых аномальных системах возникает некое «стационарное состояние» (так называемое неэкстенсивное равновесие), которое включает в себя внутренние динамические взаимодействия разного рода (Osada, Wilk, 2009; Bíró и др., 2017).

Именно по этой причине стало неизбежным использование моделей, которые основаны на неэкстенсивной статистике (и термодинамике) Тсаллиса или, по крайней мере, согласуются с ней (например, на статистике Реньи). Так, в серии работ (см., например, Lima и др., 2001; Silva, Lima 2005; Santos и др., 2017) было установлено, что подобные явления могут быть эффективно описаны (без привлечения каких-либо соображений относительно динамических источников различных флуктуаций) в рамках формализма неэкстенсивной релятивистской кинетики в виде обобщенной версии распределения Юттнера (Jüttner, 1911) – общего решения нулевого порядка релятивистского уравнения переноса (см. de Groot и др., 1980).

Таким образом, важным шагом на пути успешного решения обсуждаемой проблемы является разработка теории неэкстенсивной релятивистской кинетики, на базе которой возможно построение адекватных моделей для описания широкого круга явлений в многочастичных процессах производства вторичных частиц при высоких энергиях, особенно при ядро-ядерных столкновениях. В цитируемых выше работах зарубежных исследователей релятивистская кинетическая теория уже рассматривалась в *q-неэкстенсивном* контексте Тсаллиса и с учетом включения неэкстенсивных эффектов (путем отказа от гипотезы молекулярного хаоса Больцмана) в столкновительный член релятивистского уравнения переноса. В этих исследованиях была, в частности, предложена новая интерпретация параметра неэкстенсивности q как количественной меры некоторых внутренних флуктуаций, характерных для рассматриваемых адронизирующих систем[3)] (см. Kodama и др., 2005; Urmossy и др., 2012; Bíró и др., 2017).

Вместе с тем следует заметить, что во всех известных автору работах по обсуждаемой проблеме отсутствует систематическое изложение релятивистской молекулярной теории неэкстенсивных разреженных газовых сред и ее кинетическое обоснование. В частности, отсутствует сколько-нибудь подробный эвристический вывод неэкстенсивного релятивистского кинетического уравнения, описывающего эффекты, связанные с ультрарелятивистской скоростью (сопоставимой со скоростью света) микроскопического движения частиц. При этом изложение материала в цитируемых выше статьях дается зачастую фрагментарно, без необходимых пояснений, формулы приводятся, как правило, без надлежащего математического обоснования.

Именно по этой причине автор данной работы в представленном синопсисе предпринял попытку эвристического конструирования неэкстенсивного релятивистского кинетического уравнения, на основе которого возможно построение неэкстенсивной релятивистской гидродинамики и разработка адекватных численных моделей, описывающих широкий круг явлений в процессах производства вторичных частиц при высокоэнергичных ядро-ядерных столкновениях. При этом рассматриваются некоторые элементарные термодинамические понятия, обсуждаются законы сохранения и H-теорема.

[3)] Заметим, что предположение, связывающее параметр q с флуктуациями формализовано в виде новой ветви статистической механики, называемой суперстатистикой Бека-Коэна (см. Beck, 2000; Tsallis, Souza, 2003).

1. ОСНОВНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Некоторые исходные определения. Приведем сначала статистические выражения для основных макроскопических физических величин, записанные на языке неэкстенсивной релятивистской кинетической теории. На их основе далее, исходя из формализма статистической механики Тсаллиса, будет сконструировано q-расширение релятивистского уравнения переноса Больцмана для разреженного идеального релятивистского газа. Это обобщенное уравнение позволяет получить законы сохранения плотности, импульса и энергии для аномальной q-системы, а также найти подтверждение второго закона термодинамики, согласно которому возникновение σ_q энтропии нигде и никогда не бывает отрицательным.

В неоднородной среде релятивистского газа, состоящего из частиц одной массы, макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x := x^{\alpha} := (ct, \mathbf{x})$, где индекс α принимает 4 значения: $\alpha = 0,1,2,3$; t − время, c − скорость света. Далее будем использовать метрику $g^{\alpha\beta}$=diag (1,-1,-1,-1), где $\alpha,\beta = 0,1,2,3$, а оператор ковариантного дифференцирования будем обозначать как[4)]

$$\partial_{\alpha} := \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) =: (\partial_0, \nabla). \tag{1}$$

Термодинамическое состояние неэкстенсивного релятивистского газа одинаковых частиц характеризуется 4-вектором потока частиц $N_q^{\alpha}(x)$, 4-тензором энергии-импульса $T_q^{\alpha\beta}(x)$ и 4-вектором потока энтропии $S_q^{\alpha}(x)$. Эти макроскопические величины определяются в кинетической q-теории как статистические средние с помощью нормированной на единицу скалярной одночастичной функции распределения $f_q(x,p)$ (локальной плотности вероятности), которая зависит от пространственно-временных координат $x := x^{\alpha} = (ct, \mathbf{x})$ и 4-вектора энергии-импульса $p := p^{\alpha} := (p^0, \mathbf{p}) := (c^{-1}E, \mathbf{p})$, где $m, \mathbf{p}, \mathrm{E} = cp^0 = c\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2}$ − соответственно масса покоя, импульс и энергия одной частицы, находящейся в элементе пространственного объема $\Delta^3 x$

[4)] Это определение ковариантного дифференцирования справедливо только при отсутствии гравитационного поля (см. Weinberg, 1972).

в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Функция $f_q(x, p)$ определена таким образом, что произведение $f_q(x, p)\Delta^3 x \Delta^3 p$ дает среднее число частиц, которые в момент времени t находятся в элементе объема $\Delta^3 x$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и имеют импульсы частиц в пределах $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$. С помощью функции $f_q(x, p)$ фундаментальные полевые величины $N^\alpha(x)$, $T^{\alpha\beta}(x)$ и $S^\alpha(x)$ (здесь $\alpha = 0, 1, 2, 3$) записываются в ковариантной форме следующим образом (Колесниченко, 2023):

$$N_q^\alpha(x) := c\int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f(x, p), \tag{2}$$

$$T_q^{\alpha\beta}(x) := c\int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha p^\beta f^q(x, p), \tag{3}$$

$$S_q^\alpha(x) := -k_B c\int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha \left[f^q(x, p) \ln_q f(x, p) - f(x, p \right]. \tag{4}$$

Здесь и далее нижний индекс «q» у функции распределения $f_q(x, p)$ будем опускать.

По поводу формулы (4) следует заметить следующее: в немногочисленной литературе по неэкстенсивной релятивистской кинетической теории существуют различные не эквивалентные друг другу определения 4-вектора потока q-энтропии $S_q^\alpha(x)$, которые приводят к различным термодинамическим соотношениям (см., например, Lima, Silva, 2001; Lima и др., 2001; Lavagno и др., 2009; Osada, Wilk, 2009). В данной работе мы будем использовать определение, предложенное в работе (Osada, Wilk, 2009), поскольку только оно соответствует статистической квантовой q-энтропии, учитывающей поправки, касающиеся термодинамической согласованности в случае релятивистских квантовых распределений частиц высоких энергий (Cleymans, Worku, 2012).

Гидродинамическая 4-скорость. Важным понятием при конструировании релятивистской кинетической теории является гидродинамическая 4-скорость $U^\alpha(x)$, которая используется в определении ряда физических характеристик, играющих важную роль при нахождении макроскопических законов сохранения. 4-скорость $U^\alpha(x)$ обычно задается в виде времениподобного вектора с модулем c в каждой пространственно-временной точке:

$$U^{\alpha}(x)U_{\alpha}(x) = c^2. \tag{5}$$

С помощью вектора гидродинамической скорости можно определить так называемый *тензор-проектор*

$$\Delta^{\alpha\beta}(x) := g^{\alpha\beta} - c^2 U^{\alpha}(x) U^{\beta}(x), \tag{6}$$

который при свертке с произвольным 4-вектором действует как проекционный оператор, уничтожая параллельную скорости $U^{\alpha}(x)$ часть этого вектора, $\Delta^{\alpha\beta}(x)U_{\beta}(x) = 0$.

Поскольку гидродинамическая скорость $U^{\alpha}(x)$ является времениподобным вектором, то возможно в каждой пространственно-временной точке рассматривать локальную систему покоя (называемую также сопутствующей системой координат), обозначаемую индексом LR (local rest). Гидродинамическая скорость в этой системе имеет следующие компоненты: $U^{\alpha}_{LR} = (c, 0, 0, 0)$. Чтобы фиксировать выбор гидродинамической скорости $U^{\alpha}(x)$, далее будем использовать следующее ее определение: $U^{\alpha} := cN^{\alpha}/\sqrt{N^{\beta}N_{\beta}}$, данное Эккартом (Eckart, 1940).

Основные физические характеристики неэкстенсивной релятивистской жидкости. С помощью полевых величин $N^{\alpha}_q(x)$, $T^{\alpha\beta}_q(x)$ и $S^{\alpha}_q(x)$ и гидродинамической скорости $U^{\alpha}(x)$ можно определить следующие макроскопические параметры системы одинаковых релятивистских частиц: плотность частиц $n_q(x)$, плотность энергии $\varepsilon_q(x)$ и давление $P_q(x)$, тепловой поток $J^{\alpha}_q(x)$, тензор давления $P^{\alpha\beta}_q(x)$ и плотность энтропиис $S_q(x) := s_q n_q$. Так,

(i) ***плотность частиц*** $n_q(x)$ задается ковариантным выражением

$$n_q(x) := N^{\alpha}_q U_{\alpha} / c^2; \tag{7}$$

(ii) ***плотность энергии*** $\varepsilon_q(x)$ определяется выражением

$$\varepsilon_q(x) := e n_q := U_{\alpha} T^{\alpha\sigma}_q U_{\sigma} / c^2, \tag{8}$$

где $e_q(x)$ – средняя энергия на одну частицу; $h_q(x) := e_q + P_q / n_q$ – энтальпия (или тепловая функция) на одну частицу, $P_q(x)$ – локальное гидростатическое давление;

(iii) ***поток тепла*** $\mathrm{J}_q^{\alpha}(x)$ задается выражением

$$\mathrm{J}_q^{\alpha}(x) := U^{\nu} T_{q,\nu\sigma} \Delta^{\sigma\alpha}; \tag{9}$$

в ковариантной формулировке имеет место условие ортогональности $\mathrm{J}_q^{\alpha} U_{\alpha} = 0$;

(iv) ***тензор давления*** $P_q^{\alpha\beta}(x)$ определяется формулой

$$P_q^{\alpha\beta}(x) := \Delta_{\sigma}^{\alpha} T_q^{\sigma\tau} \Delta_{\tau}^{\beta}, \tag{10}$$

из которой следует, что этот тензор симметричен, поскольку тензор энергии-импульса симметричен; для дальнейших целей тензор давления удобно разбить на «обратимую» и «необратимую» части: $P_q^{\alpha\beta} = -P_q \Delta^{\alpha\beta} + \Pi_q^{\alpha\beta}$, где величина $\Pi^{\alpha\beta}(x)$ называется тензором вязкого давления;

(v) ***плотность энтропии*** $S_q(x)$ определяется как скаляр

$$S_q(x) := s_q n_q := S_q^{\alpha} U_{\alpha} / c^2, \tag{11}$$

где $S_q^{\alpha}(x)$ − 4-вектор потока энтропии, а $s_q(x)$ − энтропия на одну частицу; с учетом определений плотности энергии (22), потока тепла (24) и тензора давления можно записать следующие соотношения:

$$\varepsilon_q = U_{\alpha} T_q^{\alpha\nu} U_{\nu} / c^2, \ \mathrm{J}_q^{\alpha} = U_{\nu} T_q^{\nu\sigma} \Delta_{\sigma}^{\alpha}, \quad \Pi_q^{\alpha\nu} - P_q \Delta^{\alpha\nu} = \Delta_{\sigma}^{\alpha} T_q^{\sigma\lambda} \Delta_{\lambda}^{\nu}. \tag{12}$$

Разложение тензора энергии-импульса. С помощью определения (6) для проекционного оператора $\Delta^{\alpha\nu}$ можно доказать следующее тождество

$$T_q^{\alpha\nu} = T_q^{(0)\alpha\nu} + T_q^{(1)\alpha\nu}, \tag{13}$$

где $T^{(0)\alpha\nu}$ − обратимая часть: $T_q^{(0)\alpha\nu} := \varepsilon_q c^{-2} U^{\alpha} U^{\nu} - P_q \Delta^{\alpha\nu}$, а $T_q^{(1)\alpha\nu}$ − необратимая часть: $T_q^{(1)\alpha\nu} := c^{-2} \left[\mathrm{J}_q^{\alpha} U^{\nu} + \mathrm{J}_q^{\nu} U^{\alpha} \right] + \Pi_q^{\alpha\nu}$.

Разложение (13) играет важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Обобщенное уравнение переноса описывает поведение скалярной функции распределения $f(x, p)$ в пространстве-времени. Чтобы получить это уравнение в неэкстенсивной релятивистской кинетической теории, наряду с требованиями ковариантности сделаем такие же предположения, как и в чисто релятивистском подходе, а именно:

i) будем учитывать только двухчастичные взаимодействия;

ii) в чисто релятивистском случае используем гипотезу молекулярного хаоса (Boltzmann's Stosszahlansatz), согласно которой предполагается, что число двойных столкновений пропорционально произведению функций распределения некоррелированных сталкивающихся частиц, а также скорости перехода W, которая является мерой вероятности процесса столкновения[5)]; однако в рамках неэкстенсивной релятивистской теории используем q-расширение этой гипотезы, позволяющее учесть влияние статистических корреляций на вид столкновительного члена в обобщенном релятивистском кинетическом уравнении;

iii) будем предполагать, что функция распределения медленно меняется в пространстве-времени, т.е. ее изменения на характерной длине взаимодействия и в течение характерного времени взаимодействия пренебрежимо малы.

Далее при выводе релятивистского кинетического уравнения влияние внешней силы не учитывается.

Релятивистское уравнение переноса при отсутствии столкновений. Сначала рассмотрим случай отсутствия столкновений. С помощью 4-вектора $N_q^{\alpha}(x)$ можно построить следующую скалярную величину:

$$\Delta N_q(x) := c^{-1} \int_{\Delta^3\sigma} N_q^{\alpha}(x)\, d^3\sigma_{\alpha} \,. \tag{14}$$

Здесь времениподобный 4-вектор $d^3\sigma_{\alpha}$ представляет собой ориентированную элементарную площадку пространственноподобной поверхности σ, $\Delta^3\sigma$ – малый сегмент в окрестности точки x. Подставляя формулу (2) в (14), получим следующее выражение[6)]:

[5)] Следует заметить, что гипотеза молекулярного хаоса, т.е. предположения о том, что две сталкивающиеся частицы не коррелированы, не является неизбежным следствием классической механики Больцмана, но вводится в теорию с целью возможности описания необратимых явлений. Конкретное выражение для гипотезы молекулярного хаоса не может быть выведено из первых принципов.

[6)] Это выражение написано с учетом того, что если число частиц в системе сохраняется, то интегралы (14) и (15) должны приводить к одному и тому же числу

$$\Delta N_q(x) := \iint_{\Delta^3\sigma} \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f^q(x,p)\, d^3\sigma_\alpha . \qquad (15)$$

В сопутствующей системе координат вектор $d^3\sigma_\alpha$ является времениподобным и имеет компоненты $(d^3x, 0, 0, 0)$, где d^3x – элементарный объем в трехмерном пространстве, соответствующий сегменту $d^3\sigma_\alpha$ пространственноподобной поверхности. В этой системе координат выражение (15), принимающее вид $\Delta N_q(x) = \iint_{\Delta^3 x} f^q(x,p) d^3x\, d^3p$, представляет собой число частиц в объеме d^3x. Подобно классическому случаю, когда движение частиц изображается мировыми линиями в пространстве Минковского, общее выражение (14) имеет простой геометрический смысл среднего числа мировых линий, пересекающих сегмент $d^3\sigma_\alpha$.

Оставаясь в рамках классической интерпретации функции распределения, определим число мировых линий, пересекающих сегмент $d^3\sigma_\alpha$ и направленных вдоль импульсов p в элементе d^3p в окрестности $\mathbf{p}$, следующим образом:

$$\Delta N_q(x,p) = \int_{\Delta^3\sigma}\int_{\Delta^3 p} \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f^q(x,p)\, d^3\sigma_\alpha . \qquad (16)$$

Поскольку в результате эволюции эти же мировые линии частиц пересекут другой элемент поверхности $d^3\hat{\sigma}$, то можно написать

$$\int_{\Delta^3\hat{\sigma}}\int_{\Delta^3 p} \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f^q(x,p)\, d^3\sigma_\alpha = \int_{\Delta^3\sigma}\int_{\Delta^3 p} \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f^q(x,p)\, d^3\sigma_\alpha . \qquad (17)$$

Рассмотрим теперь элемент $\Delta^4 x$ пространства Минковского, заключенный между элементами $d^3\sigma$ и $d^3\hat{\sigma}$ поверхности σ и поверхностью трубки, образуемой рассматриваемыми мировыми линиями. В бесстолкновительном случае ни одна мировая линия частиц не пересекает поверхность трубки. Отсюда следует, что соотношение (17) выражает равенство нулю общего потока через поверхность $\Delta^3\sigma$ элемента $\Delta^4 x$ пространства Минковского:

частиц на единицу объемы. Это следует из пересмотра некоторых тем q-термостатистики с точки зрения неэкстенсивных оптимальных множителей Лагранжа в формализме (OLM) (см. Martínez и др.,2000; Lavagno и др., 2009).

$$\int_{\Delta^3\sigma}\int_{\Delta^3 p}\frac{d^3p}{p^0}\,p^\alpha f^{\,q}(x,p)\,d^3\sigma_\alpha=0\,. \tag{18}$$

С помощью теоремы Гаусса соотношение (18) может быть преобразовано к виду

$$\int_{\Delta^4 x}\int_{\Delta^3 p}\frac{d^3p}{p^0}\,p^\alpha\partial_\alpha f^{\,q}(x,p)\,d^4x=0\,. \tag{19}$$

Поскольку интервалы $\Delta^4 x$ и $\Delta^3 p$ произвольны, то из (19) следует уравнение

$$p^\alpha\partial_\alpha f^{\,q}(x,p)=0\,, \tag{20}$$

которое и является обобщенным релятивистским уравнением переноса при отсутствии столкновений.

Релятивистское кинетическое уравнение с учетом столкновений. Для того чтобы получить полное кинетическое уравнение, необходимо учесть влияние столкновений, в результате которых число частиц в области ($\Delta^4 x$ и $\Delta^3 p$) изменения переменных меняется на величину, которую можно записать в виде

$$\Delta^4 x\left(\Delta^3 p/p^0\right)C_q(x,p)\,. \tag{21}$$

Здесь величина $C_q(x,p)$ является инвариантной функцией столкновений, которую необходимо определить. С этой целью проанализируем силовое взаимодействие между двумя частицами, которые до столкновения имели 4-импульсы p^α и p_1^α, а после столкновения p'^α и $p_1'^\alpha$.

А) Рассмотрим сначала экстенсивный релятивистский газ $(q=1)$. Согласно гипотезе молекулярного хаоса Больцмана, среднее число таких столкновений в элементе объема $\Delta^4 x$ пространства Минковского вблизи точки *x*, т.е. в интервале Δt времени *t* и в элементе объема $\Delta^3 x$ вблизи точки $\mathbf{x}$, пропорционально следующим величинам:

i) среднему числу частиц на единицу объема с 3-импульсами в интервале $(\mathbf{p},\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})$, а именно $\Delta^3 p\, f(x,p)$;

ii) среднему числу частиц на единицу объема с 3-импульсами в интервале $(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_1)$, а именно $\Delta^3 p_1\, f(x,p_1)$

iii) интервалам $\Delta^3 p'$, $\Delta^3 p_1'$, $\Delta^4 x$.

Введем следующее обозначение для коэффициента пропорциональности (для так называемой скорости перехода):

$$W_{p,p_1\to p',p_1'} / p^0 p_1^0 p'^0 p_1'^0 .$$

Эта величина зависит только от 4-импульсов частиц до и после столкновения и представляет собой лоренцев скаляр. Очевидно, что оба аргумента до и после стрелки могут располагаться в произвольном порядке. В соответствии с условием медленного изменения функции распределения на расстояниях и временах порядка характеристических длин и времен силового взаимодействия предполагается, что разностью пространственно-временных координат сталкивающихся частиц до и после столкновения можно пренебречь. Таким образом, зависимость от пространственно-временных координат x такова, что в функциях распределения $f(x,p)$ и $f(x_1,p_1)$ фигурирует одно и то же значение x, но оно отсутствует в скорости перехода $W_{p,p_1\to p',p_1'}$.

В итоге, согласно гипотезе молекулярного хаоса, можно сформулировать следующее утверждение: среднее число частиц в элементе объема $\Delta^4 x$ пространства Минковского с импульсами в окрестности $(\mathbf{p},\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})$, выбывающих за счет столкновений, определяется посредством интегрирования полученного выше числа столкновений по всем значениям $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}',\mathbf{p}_1'$. Таким образом, число выбывающих частиц равно

$$\frac{1}{2}\Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0}\int \frac{d^3 p_1}{p_1^0}\frac{d^3 p'}{p'^0}\frac{d^3 p_1'}{p_1'^0} f(x,p)\, f(x,p_1) W_{p,p_1\to p',p_1'} . \tag{22}$$

В это выражение добавлен множитель 1/2 для учета того факта, что невозможно различить конечные состояния с импульсами $(\mathbf{p}',\mathbf{p}_1')$ и $(\mathbf{p}_1',\mathbf{p}')$.

Аналогично можно написать следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0}\int \frac{d^3 p_1}{p_1^0}\frac{d^3 p'}{p'^0}\frac{d^3 p_1'}{p_1'^0} f(x,p')\, f(x,p_1') W_{p',p_1'\to p,p_1} \tag{23}$$

для числа частиц, прибывающих за счет «восстанавливающих» столкновений в элемент объема $\Delta^4 x$ вблизи точки x и окрестность $\Delta^3 p$ вблизи точки $\mathbf{p}$ и имеющих начальные импульсы $(\mathbf{p}',\mathbf{p}_1')$ и конечные импульсы $(\mathbf{p},\mathbf{p}_1)$.

В результате истинное изменение числа частиц в элементах $\Delta^4 x$ и $\Delta^3 p$, которое описывается выражением (21), равно разности количества частиц (23) и (24). Следовательно, функция столкновений $C(x, p)$ в рассматриваемом экстенсивном случае выражается через функцию распределения и скорость перехода следующим образом:

$$C(x,p) = \frac{1}{2}\int dP_1 dP' dP_1' \left[f' f_1' W_{p', p_1' \to p, p_1} - f f_1 W_{p, p_1 \to p', p_1'} \right], \qquad (24)$$

т. е. определяется динамикой системы (здесь и далее для удобства записи формул использованы следующие сокращенные обозначения: f, f_1, f', f_1' для функций $f(x,p), f(x,p_1), f(x,p'), f(x,p_1')$ и обозначения dP, dP_1, dP', dP_1' для дифференциалов $d^3 p / p^0,\ d^3 p_1 / p_1^0,\ d^3 p' / p'^0,\ d^3 p' / p_1'^0$).

Скорость перехода. Скорость перехода $W_{p, p_1 \to p', p_1'}$ определена выше как скаляр [см., например, формулы (22) и (23)]. По этой причине она является функцией десяти скалярных инвариантов, которые можно построить из 4-импульсов $p^\alpha, p_1^\alpha, p'_\alpha, p_1'^\alpha$. Четыре из этих скаляров − заданные параметры в силу нормировок $p^2 = mc^2$ и т. д. Кроме этого, должен выполняться закон сохранения энергии-импульса $p^\alpha + p_1^\alpha = p'_\alpha + p_1'^\alpha$. Отсюда следует, что для скорости перехода $W_{p, p_1 \to p', p_1'}$ можно получить некоторые свойства симметрии. В частности, величина W симметрична для обращения во времени процессов столкновения, т.е. замена $p, p_1 \leftrightarrow p', p_1'$ оставляет это выражение неизменным. Таким образом, имеет место принцип детального равновесия

$$W_{p, p_1 \to p', p_1'} = W_{p', p_1' \to p, p_1} = W_{p, p_1 \leftrightarrow p', p_1'}. \qquad (25)$$

Согласно сформулированным предположениям, выражение (24) позволяет записать кинетическое уравнение переноса с учетом эффектов столкновений. Так, вместо уравнения (19) получим

$$\int_{\Delta^4 x}\int_{\Delta^3 p} d^4 x \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha \partial_\alpha f(x,p) = \Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} C(x,p).$$

Поскольку элементы $\Delta^4 x$ и $\Delta^3 p$ произвольны, то для достаточно гладкой функции распределения $f(x,p)$ будем иметь $p^\alpha \partial_\alpha f(x,p) = C(x,p)$. С учетом принципа детального равновесия (25) релятивистское уравнение переноса для экстенсивной релятивистской жидкости принимает следующий окончательный вид:

$$p^{\alpha}\partial_{\alpha} f(x,p)=\frac{1}{2}\int\left[f' f_1' - f f_1\right] W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'} dP_1 dP' dP_1' . \qquad (26)$$

Как и в классической кинетической теории, левую часть уравнения можно назвать потоковым членом (*streaming term*), а правую, которая учитывает влияние взаимодействий частиц, − интегралом столкновений (*collision term*).

В) Обратимся теперь к моделированию столкновительного члена $C_q(x,p)$ для неэкстенсивной релятивистской газовой системы. Величина $R[f' f_1'] = \left[f' f_1' - f f_1\right]$, фигурирующая в уравнении (26) для чисто экстенсивной релятивистской среды, описывает среднее число столкновений не коррелирующих (согласно гипотезе молекулярного хаоса, выдвинутой Больцманом) частиц в элементе объема $\Delta^4 x$ пространства Минковского вблизи точки x. Однако эта гипотеза, как было показано в работе (Silva, Lima, 2005), несправедлива для неэкстенсивной среды, состояние равновесия которой описывается степенным законом Тсаллиса.

Для неэкстенсивной релятивистской системы величина R_q записывается в следующей q-обобщенной форме (Lima и др., 2001; Biro, Kaniadakis, 2006; Lavagno и др., 2009):

$$R_q[f' f_1'] = \exp_q\left[\ln_q f' + \ln_q f_1'\right] - \exp_q\left[\ln_q f + \ln_q f_1\right]. \qquad (27)$$

Когда $q \to 1$, соотношение (27) соответствует стандартной гипотезе Больцмана о молекулярном хаосе: $\lim_{q\to 1} R_q = R = \left[f' f_1' - f f_1\right]$. Именно эта *анзац*-функция[7)] учитывает влияние статистических корреляций на столкновительный член в неэкстенсивном случае, являясь таким образом q-расширением гипотезы молекулярного хаоса «*Boltzmann's Stosszahlansatz*». При этом параметр неэкстенсивности q лежит в интервале [0,2].

Определим теперь следующую корреляционную функцию (положительную и симметричную по аргументам)

$$H_q\left[f, f_1\right] := \exp_q\left[\ln_q f + \ln_q f_1\right] \geq 0 . \qquad (28)$$

[7)] Напомним, что анзац-функция представляет собой не что иное, как основанное на эвристических соображениях существенное предположение, которое может подтвердиться лишь после получения всех следствий из сконструированного уравнения переноса.

Эта формула является постулатом для корреляции между двумя частицами, находящимися в одном пространственно-временном положении x, но с различными 4-векторами энергии-импульса p^{α} и p_1^{α} соответственно. Для $q = 1$ она возвращает знакомый интеграл столкновений, где число бинарных столкновений вокруг пространственновременных координат x пропорционально $H_1[f, f_1] = f\, f_1$. Очевидно, что могут быть сделаны и другие постулаты, которые удовлетворяют H-теореме (см., например, Biro и др., 2009). Однако в данной работе мы не будем подробно обсуждать эту проблему.

С учетом функции (28), неэкстенсивное релятивистское уравнение переноса может быть записано в виде

$$p^{\alpha}\partial_{\alpha} f^{\,q}(x,p) = C_q(x,p), \ (\alpha = 0,1,2,3), \tag{29}$$

где

$$C_q(x,p) = \frac{1}{2}\int\left\{H_q[f', f_1'] - H_q[f, f_1]\right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'} dP_1 dP' dP_1'. \tag{30}$$

По поводу этого уравнения переноса следует заметить следующее: в системе уравнений (29), (30) учтены лишь упругие столкновения между частицами системы. Однако при релятивистских энергиях, возможно, следует учитывать и неупругие столкновения. Неупругое столкновение − это реакция вида $k + l \to i + j + ...;$ в ней рождаются две или более частиц, по крайней мере одна из которых отличается от начальных сталкивающихся частиц. В реакции начальные частицы, имеющие массы m_k и m_l, превращаются в две или более частиц с массами m_i, m_j,... . Если разность масс Δm положительна, то реакция не будет происходить ниже определенной энергии падающих частиц, называемой пороговой энергией реакции. Ниже порога скорость перехода, скажем, для реакции $k + l \to i + j + ...$: $W_{k,i\to i,j} = W_{k,i\to i,j}(p_k, p_l \to p_i p_j)$ равна нулю, но при достаточно высокой энергии она может иметь значение, по порядку величины сравнимое со скоростью перехода для упругого столкновения $k + l \to k + l$: $W_{k,l} = W_{p_k,p_l\to p_k',p_l'}$. Учет неупругих столкновений в членах столкновений уравнений переноса (29)-(30) не представляет особого труда, если допустить, что конечные частицы отличаются от начальных, и провести суммирование по всем возможностям (см., например, de Groot и др., 1980).

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. H−ТЕОРЕМА

Некоторые свойства интеграла столкновений. Покажем теперь, что вследствие того, что при столкновениях частиц должен выполняться микроскопический закон сохранения энергии-импульса $p'_\alpha + p_1'^\alpha = p^\alpha + p_1^\alpha$, интеграл столкновений (30) обладает следующим свойством:

$$F_\psi := \int \frac{d^3 p}{p^0} \psi_q(x,p) C_q(x,p) = 0, \qquad (31)$$

где $\psi_q(x,p^\alpha)$ − линейная комбинация некой константы и 4-вектора p^α:

$$\psi_k \equiv \psi_k(x,p_k^\alpha) := a_k(x) + b_\alpha(x) p_k^\alpha, \quad (p_k^\alpha = p^\alpha, p_1^\alpha, p'^\alpha, p_1'^\alpha)\,. \qquad (32)$$

Пространственно-временные функции $a_k(x)$ и $b_\alpha(x)$ произвольны, с одним лишь ограничением: функции $a_k(x)$ должны аддитивно сохраняться при столкновениях.

Для доказательства леммы (31) подставим явное выражение (30) в (31):

$$F_\psi = \frac{1}{2}\int \psi_p \left\{ H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1] \right\} W_{p,p_1\to p',p_1'} dP dP_1 dP' dP_1'\,. \qquad (33)$$

Этот интеграл очевидно равен интегралу

$$F_\psi = \frac{1}{2}\int \psi_{p'} \left\{ H_q[f,f_1] - H_q[f',f_1'] \right\} W_{p',p_1'\to p,p_1} dP dP_1 dP' dP_1'\,. \qquad (34)$$

Произведя с учетом принципа детального равновесия (25) почленное сложение (33) и (34), получим

$$F_\psi = \frac{1}{4}\int (\psi_p - \psi_{p'}) \left\{ H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1] \right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'} dP dP_1 dP' dP_1'\,. \qquad (35)$$

Интеграл (33) симметричен относительно p и p_1. Поэтому

$$F_\psi = \frac{1}{4}\int (\psi_{p_1} - \psi_{p_1'}) \left\{ H_q[f',f_1'] - H_q[f,f_1] \right\} W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'} dP dP_1 dP' dP_1'\,. \qquad (36)$$

Складывая (35) и (36), получим

$$F_\psi = \frac{1}{8}\int (\psi_p + \psi_{p_1} - \psi_{p'} - \psi_{p_1'}) \times$$

$$\times\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}dPdP_1dP'dP_1'=0. \qquad (37)$$

В силу определения (32) функции ψ_k, выражение $(\psi_p+\psi_{p_1}-\psi_{p'}-\psi_{p_1'})$ обращается в нуль, если учесть ограничение на функции $a_k(x)$ и сохранение энергии-импульса в бинарной реакции: $p^\alpha+p_1^\alpha=p'_\alpha+p_1'^\alpha$. Этим и завершено доказательство леммы (31).

Заметим, что величину ψ_k называют сумматорным инвариантом. Любая аддитивная функция импульсов является линейной комбинацией сумматорных инвариантов (32).

Законы сохранения. Уравнение переноса (36) позволяет вывести справедливые на макроскопическом уровне законы сохранения числа частиц и 4-тензора энергии-импульса.

Используя лемму (31)-(32), положим функцию $b_\alpha(x)$ равной нулю, а все функции $a_k(x)$ равными одной функции $a(x)$. Тогда, поскольку функция $a(x)$ произвольна, будем иметь

$$\int\frac{d^3p}{p^0}C_q(x,p)=0. \qquad (38)$$

С учетом уравнения переноса (29) получим уравнение

$$\int\frac{d^3p}{p^0}\,p^\alpha\partial_\alpha f^{\,q}(x,p)=0, \qquad (39)$$

которое с помощью 4-вектора потока частиц $N_q^\alpha(x)$, определенного формулой (2), можно записать в виде макроскопического закона сохранения числа частиц

$$\partial_\alpha N_q^\alpha(x)=0, \qquad (\alpha=0,1,2,3). \qquad (40)$$

Положив теперь функции $a_k(x)$ в (32) равными нулю, получим $\psi_p=b_\alpha(x)p^\alpha$; тогда из (31) найдем

$$\int\frac{d^3p}{p^0}\,p^\alpha C_q(x,p)=0. \qquad (41)$$

Если снова воспользоваться уравнением переноса (29), то получим макроскопический закон сохранения 4-тензора энергии-импульса

$$\partial_\beta T_q^{\alpha\beta}(x) = 0, \quad (\alpha = 0,1,2,3), \tag{42}$$

где тензор $T_q^{\alpha\beta}(x) := c\int \frac{d^3p}{p^0} p^\alpha p^\beta f^q(x,p)$ определяется формулой (2). В случае $\alpha = 0$ это − закон сохранения энергии, а для $\alpha = 1,2,3$ − закон сохранения импульса.

***Локальная H*-теорема**. В первом разделе формулой (4) был определен 4-вектор потока энтропии

$$S_q^\alpha = -ck_B \int \frac{d^3p}{p^0} p^\alpha \left[f(x,t)^q \ln_q f(x,t) - f(x,t) \right] S_q^\alpha(x),$$

а формулой (11) введена плотность энтропии $S_q(x) := s_q n_q := S_q^\alpha U_\alpha / c^2$, где $s_q(x)$ − энтропия на одну частицу. Получим теперь формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество

$$n_q U^\alpha \partial_\alpha s_q = \partial_\alpha (s_q N_q^\alpha), \tag{43}$$

которое является следствием закона сохранения (40) числа частиц $n(x)$ и определения оператора конвекционной производной ∂_α. Добавляя и вычитая одну и ту же величину $\partial_\alpha S_q^\alpha$, запишем тождество (43) в виде

$$n_q \partial_\alpha s_q = -\partial_\alpha (S_q^\alpha - s_q N_q^\alpha) + \partial_\alpha S_q^\alpha, \tag{44}$$

которое можно трактовать как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде

$$U^\alpha \partial_\alpha s_q = -\partial_\alpha \mathsf{J}_{q,s}^\alpha + \sigma_q, \tag{45}$$

где

$$\mathsf{J}_{q,s}^\alpha(x) := S_q^\alpha(x) - s_q(x) N_q^\alpha(x) \tag{46}$$

− поток энтропии (по определению), а величина $0 \le \sigma_q := \partial_\alpha S_q^\alpha$, являясь постулируемым законом возрастания q-энтропии, описывает здесь интенсивность ее источника. Локальное математическое выражение (45) второго закона релятивистской термодинамики не содержит никаких физических положений, кроме закона сохранения числа частиц, и потому пока носит чисто формальный характер.

Из определения 4-вектора потока энтропии (4) и кинетического уравнения (29) следует, что для неэкстенсивной системы прирост энтропии $\sigma_q = \partial_\alpha S_q^\alpha$ определяется формулой

$$\sigma_q = \partial_\alpha S_q^\alpha = -ck_B \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha \partial_\alpha \left[f^q \ln_q f - f \right] =$$
$$= -ck_B \int \frac{d^3 p}{p^0} [\ln_q f]\, p^\alpha \partial_\alpha f^q = -ck_B \int \frac{d^3 p}{p^0} [\ln_q f]\, C_q. \qquad (47)$$

При написании этого выражения использовано свойство дифференцирования деформированного логарифма $\partial \ln_q X / \partial X = 1 / X^q$ (см. Колесниченко, 2019). Выражение (47) с помощью обозначения (31) можно представить в виде

$$\sigma_q = -ck_B F[\ln_q f(x, p)]. \qquad (48)$$

Тогда с помощью выражения (37) прирост энтропии можно записать в виде

$$\sigma_q = \frac{ck_B}{8} \int \Big\{ \left[\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p_1'} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} \right] \times$$
$$\times \Big(H_q[f', f_1'] - H_q[f, f_1] \Big) \Big\} W_{p, p_1 \leftrightarrow p', p_1'} dP dP_1 dP' dP_1' \geq 0. \qquad (49)$$

Этот результат можно сравнить его с экстенсивным релятивистским выражением, приведенным, например, в работе (de Groot и др., 1980). Как известно, необратимый характер термодинамики, возникающей при молекулярных столкновениях, восстанавливается, если вышеуказанная величина положительно определена, т.е. $\sigma_q \geq 0$. В данном случае это условие справедливо в силу наличия двух причин:

(i) во-первых, положительной определенности величины

$$\Big(\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p_1'} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} \Big) \times \Big(H_q[f', f_1'] - H_q[f, f_1] \Big)$$

для любой пары распределений $(f_{p'}, f_{p_1'})$ и (f_p, f_{p_1}); при этом знак источника четырех энтропий полностью определяется знаком неэкстенсивного параметра q, который, как было показано в работе (Silva, Lima, 2005), лежит в интервале $q \in [0, 2]$);

(ii) во-вторых, удачного выбора выражения (4) для 4-вектора потока q-энтропии.

Неэкстенсивное столкновительное равновесие. Если предположить, что функция распределения $f(x,p)$ с течением времени стремится к определенному пределу, то состояние неэкстенсивной q-системы будет переходить вместо строгого (локального) теплового равновесия (что является прерогативой идеальной газовой среды) в неэкстенсивное стационарное состояние. Это состояние включает, как было отмечено во Введении, некоторые микроскопические динамические взаимодействия и флуктуации, которые обобщенно характеризуются параметром деформации q (Abe, Rajagopal, 2003; Osada, Wilk, 2008). Следует заметить, что в этом установившемся состоянии энтропия q-системы достигает своего максимального значения. Следовательно, необходимым условием подобного состояния является обращение в нуль всюду в пространстве-времени величины прироста энтропии σ_q. Последнее условие вместе с требованием, что равновесная функция распределения должна быть решением уравнения переноса (29)-(30), однозначным образом определяет ее вид.

Получим теперь в качестве следствия неэкстенсивной релятивистской H-теоремы (49) условие неэкстенсивного стационарного состояния, которое является обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера (см. de Groot и др., 1980). Как и в классическом случае, равенство $\sigma_q = 0$ является необходимым и достаточным условием существования как локального, так и глобального равновесия. Поскольку интеграл (49) должен быть положительно определенным, то это возможно лишь тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\ln_q f(x,p) + \ln_q f(x,p_1) = \ln_q f(x,p') - \ln_q f(x,p_1'), \tag{50}$$

где импульсы связаны законом сохранения $p^{\alpha} + p_1^{\alpha} = p'^{\alpha} + p_1'^{\alpha}$ энергии и импульса, справедливым для упругих парных столкновений. Функцию распределения $f(x,p)$, для которой выполняется условие (50), будем обозначать символом $f^{(0)}(x,p)$. Записывая условие (50) в виде

$$\ln_q\left[h^3 f^0(x,p)\right] + \ln_q\left[h^3 f^0(x,p_1)\right] = \ln_q\left[h^3 f^0(x,p')\right] - \ln_q\left[h^3 f^0(x,p_1')\right],$$

приходим к заключению, что величина $\ln_q\left[h^3 f^0\right]$ является сумматорным инвариантом столкновения молекул (здесь введена постоянная Планка h для того, чтобы аргумент q-логарифма был безразмерным, и использована формула $\ln_q(hX) = \ln_q X + \ln_q h + (1-q)\ln_q X \ln_q h$).

В начале этого раздела уже подчеркивалось, что наиболее общий инвариант суммирования − это линейная комбинация некой константы и 4-импульса p^{α}. Другими словами, функция $\ln_q\left[h^3 f^0\right]$ обязательно должна иметь вид $\ln_q[h^3 f^{(0)}(x,p)] = a_q(x) + b_{q,\alpha}(x)p^{\alpha}$. Следовательно, локально-равновесная функция распределения определяется выражением

$$f^{(0)}(x,p) = h^{-3}\left\{1-(1-q)[a_q(x)+b_q(x)p^{\alpha}]\right\}^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= h^{-3}\exp_q\left[a_q(x)+b_q(x)p^{\alpha}\right], \tag{51}$$

где $a_q(x)$ и $b_q(x)$ − произвольные параметры, зависящие от координат пространства-времени.

Следует отметить, что при подстановке функции $f^{(0)}(x,p)$ в релятивистское уравнение переноса (29)-(30) столкновительный член обращается в нуль:

$$C_q(x,p) = \frac{1}{2}\int\left(H_q\left[f'^0, f_1'^0\right] - H_q\left[f^0, f_1^0\right]\right)W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}dP_1 dP' dP_1' = 0. \tag{52}$$

Функция $f^{(0)}(x,p)$ − наиболее общая функция, обладающая этим свойством, поскольку при обращении в нуль члена столкновений прирост энтропии (47) также обращается в нуль. Однако утверждать, что $f^{(0)}(x,p)$ является решением уравнения переноса (29)-(30), в общем случае нельзя. Это утверждение справедливо лишь при условии, что при подстановке функции $f^{(0)}(x,p)$ в уравнение (29) левая часть также обращается в нуль. Для этого необходимо, чтобы параметры $a_q(x)$ и $b_q(x)$ удовлетворяли условию

$$p^{\alpha}\partial_{\alpha}a_q(x) + p^{\alpha}p^{\nu}\partial_{\alpha}b_{q,\nu}(x) = 0. \tag{53}$$

Отсюда вытекают следующие два уравнения:

$$\partial^{\alpha}a_q(x) = 0, \quad \partial^{\alpha}b_q^{\nu}(x) + \partial^{\nu}b_q^{\alpha}(x) = 0. \tag{54}$$

Если предположить теперь, что параметр $b(x)$ можно отождествить с выражением $b_{q,\nu}(x) = -U^{\nu}(x)/k_B T_q(x)$, где $U^{\nu}(x)$ − поле гидродинамической 4-скорости, $T_q(x)$ − температурное поле, то можно видеть, что наиболее общее движение системы в равновесном состоянии представляет собой параллельный перенос, причем U^{α}, а также в силу уравнения (54) и температура T, являются глобальными величинами, т.е. не зависят от x; если же положить величину $a_q(x)$ равной $a_q(x) = -\mu_q(x)/k_B T_q$, то первое уравнение (54) примет вид $\partial^{\alpha}\mu_q(x) = 0$; отсюда следует, что $\mu_q(x) = \mu_q$, где μ_q − постоянная величина (далее $\mu_q = 0$)[8)]. В результате уравнение (51) для равновесной функции может быть записано в виде обобщенной функции распределения (по импульсам) Юттнера (Jüttner, 1911)

$$f_{eq}(p) = h^{-3}\left[1-(1-q)\frac{p^{\alpha}U_{\alpha}}{k_B T_q}\right]^{1/(1-q)} = h^{-3}\exp_q\left[-\frac{p^{\alpha}U_{\alpha}}{k_B T_q}\right]. \tag{55}$$

С помощью этой функции глобального равновесия неэкстенсивной релятивистской системы можно в явном виде определить все термодинамические параметры состояния.

4. ЗАКОНЫ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Сначала определим плотность числа частиц n_q, для которой с учетом формул (2), (7) и (55) находим

$$n_q := c^{-2}N_q^{\alpha}U_{\alpha} = \frac{1}{c}\int\frac{d^3p}{p^0}\,p^{\alpha}U_{\alpha}f_{eq}(p). \tag{56}$$

Поскольку интеграл является скаляром, его можно вычислить в глобальной системе покоя, где скорость имеет компоненты $U_{\mathrm{LR}}^{\alpha} = (c,0,0,0)$. Вводя полярные координаты и безразмерные переменные

$$z = \frac{mc^2}{k_B T_q}, \quad \tau = \frac{cp^0}{k_B T_q}, \tag{57}$$

получим

[8)] В работе (Abe, 2006) было показано, что температура T_q становится идентичной температуре Клаузиуса T, если обратный множитель Лагранжа β, связанный с ограничением на внутреннюю энергию, можно рассматривать как температуру всей системы.

$$n_q = \int d^3p\, f_{eq}(p^0) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar c)^3}(k_B T)^3 \int_\tau^\infty d\tau \sqrt{\tau^2 - z^2}\, \tau \exp_q\left[-\tau\right]. \tag{58}$$

Этот результат можно выразить через специальную функцию с помощью интегрального представления для модифицированной функции Бесселя второго рода:

$$K_{\mathrm{n}}(q,z) = \frac{2^{n-1}(\mathrm{n}-1)!}{(2\mathrm{n}-2)!}\frac{1}{z^{\mathrm{n}}}\int_z^\infty d\tau(\tau^2 - z^2)^{\mathrm{n}-3/2}\left[\exp_q(-\tau)\right]^q. \tag{59}$$

Используя это представление, для плотности частиц окончательно получаем

$$n_q = \frac{4\pi m^2 c}{(2\pi\hbar)^3}(k_B T_q) K_2\left(q, \frac{mc^2}{k_B T_q}\right). \tag{60}$$

Подобным же образом проведем расчет равновесной плотности энергии $\varepsilon_q = n_q e_q$. Согласно формуле (8) имеем

$$\varepsilon_q(x) \coloneqq e_q n_q \coloneqq c^{-2} T_q^{(0)\alpha\sigma} U_\alpha U_\sigma. \tag{61}$$

В соответствии с разложением $T_q^{(0)\alpha\nu} = \varepsilon_q c^{-2} U^\alpha U^\nu - P_q \Delta^{\alpha\nu}$ (см. (13)) для равновесного тензора энергии-импульса, получаем равновесные плотности энергии и давления

$$e_q n_q = \frac{1}{c}\int \frac{d^3p}{p^0}\left(p^\mu U_\mu\right)^2 f_{eq}^q(p), \tag{62}$$

и гидростатического давления

$$P_q = -\frac{1}{3} T_q^{(0)\alpha\sigma} \Delta_{\alpha\sigma} = -\frac{1}{3} c \int \frac{d^3p}{p^0} \Delta_{\alpha\sigma} f_{eq}^q(p). \tag{63}$$

После подстановки выражения (55) последнюю формулу можно представить через модифицированную функцию Бесселя (59):

$$P_q = \frac{4\pi m^2 c}{(2\pi\hbar)^3}(k_B T_q)^2 K_2\left(q, \frac{mc^2}{k_B T_q}\right). \tag{64}$$

Сравнивая (60) и (64), находим термическое уравнение состояния идеального q-газа, если отождествить T_q с температурой системы

$$P_q = n_q k_B T_q. \tag{65}$$

Теперь приступим к вычислению плотности энергии (62), для которой найдем, подставив (55) и учитывая (59), следующее выражение:

$$e_q n_q = \frac{4\pi m^3 c^3}{(2\pi\hbar)^3} k_B T_q \left[3\frac{k_B T}{mc^2} K_2\left(q, mc^2/\, k_B T_q\right) + K_1\left(q, mc^2/\, k_B T_q\right) \right]. \quad (66)$$

С учетом (60) получаем энергию, приходящуюся на одну частицу:

$$e_q = mc^2 \frac{K_1\left(q, mc^2/k_B T_q\right)}{K_2\left(q, mc^2/k_B T_q\right)} + 3k_B T_q. \quad (67)$$

Это выражение представляет собой калорическое уравнение состояния неэкстенсивного релятивистского идеального q-газа. С помощью уравнения состояния (65) найдем энтальпию, приходящуюся на одну частицу:

$$h_q = e_q + P_q n_q^{-1}. \quad (68)$$

Таким образом, как энергия, так и энтальпия, приходящиеся на одну частицу, содержат наряду с термическими вкладами энергию покоя.

С энтальпией и энергией, приходящимися на одну частицу, непосредственно связаны две величины, а именно приходящаяся на одну частицу теплоемкость при постоянном давлении $C_{q,p} := (\partial h_q / \partial T_q)_p$ и теплоемкость при постоянном объеме $C_{q,V} := (\partial e_q / \partial T_q)_V$. Поскольку h_q и e_q, определяемые формулами (68) и (67), зависят только от температуры, имеем

$$C_{q,p} = -k_B \frac{d}{dz^{-1}} \frac{K_1(q,z)}{K_2(q,z)} + 4k_B, \quad C_{q,V} = -\frac{d}{dz^{-1}} \frac{K_1(q,z)}{K_2(q,z)} + 3k_B, \quad (69)$$

$$C_{q,p} - C_{q,V} = k_B. \quad (70)$$

Отсюда следует, что для отношения теплоемкостей $\gamma_q = (k_B / C_{q,V} + 1)$ выполняется соотношение

$$\frac{\gamma_q}{\gamma_q - 1} = 4 - \frac{d}{dz^{-1}} \frac{K_1(q,z)}{K_2(q,z)}. \quad (71)$$

Для завершения описания неэкстенсивной идеальной системы, находящейся в равновесии, рассчитаем плотность энтропии, определяемую формулой [см. (4), (11)]:

$$s_q n_q = c^{-1} k_B \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha U_\alpha \left[f_{eq}^q \frac{p^\alpha U_\alpha}{k_B T_q} - f_{eq}(p) \right] = \frac{1}{T_q} e_q n_q + k_B n_q , \quad (72)$$

или с учетом термическое уравнение состояния (65)

$$0 = e_q + P_q n_q^{-1} - T_q s_q = h_q - T_q s_q . \quad (73)$$

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Современные ускорители высокоэнергетических частиц уже достигли энергетического диапазона, в котором сформировалась материя ранней Вселенной. В частности, при столкновениях тяжелых ионов на коллайдерах RHIC (Relativistic Heavy Ions Collider) и LHC (Large Hadron Collider) образуется ядерная материя, обладающая экстремальной температурой и плотностью. Это так называемая кварк-глюонная плазма (КГП), которая существовала вскоре после Большого взрыва. Ее свойства измеряются в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов, где плотность энергии достаточно высока, чтобы сформировать КГП за короткое время. К сожалению, из-за природы сильного взаимодействия не существует метода прямого наблюдения этой материей.

Как было установлено в экспериментах, характеристика идентифицированных спектров адронов с помощью термодинамического подхода Больцмана-Гиббса недостаточна. Вместо этого спектры частиц, измеренные при столкновениях с высокой энергией, хорошо описываются неэкстенсивными распределениями Тсаллиса-Парето, полученными в рамках неэкстенсивной статистической термодинамики Тсаллиса.

В связи с этим целью представленной работы является конструирование q- модифицированного релятивистского кинетического уравнения Больцмана, на базе которого возможны построение неэкстенсивной релятивистской диссипативной гидродинамики (что предполагается в последующих публикациях автора) и разработка различных адекватных моделей в физике элементарных частиц для описания широкого круга явлений в космосе и в процессах производства высокоэнергетических частиц в эволюционирующей жидкости на современных ускорителях, особенно при ядро-ядерных столкновениях.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с

Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости. 1. Метод релятивистской необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 2. 44 с.

Abe S., Rajagopal A.K. Validity of the Second Law in Nonextensive Quantum Thermodynamics // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 12. P. 120601 (1-3).

Abe S. Temperature of nonextensive systems: Tsallis entropy as Clausius entropy // Physica A. 2006. V. 368 P. 430-434.

Alberico W. M., Lavagno A. Non-extensive statistical effects in high-energy collisions // The European Physical Journal A, 2009. V. 40. № 3. P. 313-323.

Beck C. Non-extensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions // Physica A. 2000. V. 286. P.164-180.

Biro T.S., Kaniadakis G. Two generalizations of the Boltzmann equation // Eur. Phys. J. B. 2006. V. 50. P. 3-6.

Biro T.S., Purcsel G., Urmossy K. Non-extensive approach to quark matter //Eur. Phys. J. A. 2009. V. 40. P. 325-340.

Bíró G., Barnaföldi G. G., Biró T.S., Ürmössy K. Application of the non-extensive statistical approach to high energy particle collisions // AIP Conference Proceedings. 2017. V.1853. №1. P. id. 080001 (1-7).

Cleymansa J., Worku D. Relativistic thermodynamics: Transverse momentum distributions in high-energy physics // Eur. Phys. J. A. 2012. V. 48. P. 160 (1-8).

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T, van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // Physica. 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch. G. Relativistic kinetic theory: principles and applications. North-Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford. 1980. 417 p.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 919-928.

Gell-Mann M., Tsallis C. (Eds.), Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, Oxford University Press, New York, 2004.

Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigke its verteilung in der Relativtheorie // Annalen der Physik 1911. Bd 34. S. 856-882.

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Kodama T., Elze H.-T., Aguiar C.E., Koide T. Dynamical correlations as origin of nonextensive entropy // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 4. P. 439-445.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbody Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System Research, 2020a.V. 54. № 5. P. 420-431.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Circular Disk Taking into Account the Magnetic Field and Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2021. V. 55. № 2. P.132-149

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2020b. V. 54. № 2. P.137-149.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research, 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. Rényi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas-Dust Disk with a Fractal Structure // Solar System Research. 2020. V 53. № 6. P. 443-461.

Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. Modification of the Jeans and Toomre instability criteria for astrophysical fractal objects within nonextensive statistics // Solar System Research, 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. Modification of the Jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P.354-365.

Lavagno A., Quarati P., Scarfone A.M. Nonextensive relativistic nuclear and subnuclear equation of state // Brazilian Journal of Physics. 2009. V. 39. № 2A. P. 457-463.

Lima A.S., Silva R., Plastino A. R. Nonextensive Thermostatistics and the H Theorem //Physical Review Letters. 2001. V.86. №14. P. 2938-2941.

Martínez S., Pennini F., PlastinoA. Equipartition and virial theorems in a nonextensive optimal Lagrange multipliers scenario // Physics Letters A. 2000. V. 278. P. 47-52.

Osada T., WilkG. Nonextensive/Dissipative Correspondence in Relativistic Hydrodynamics // Prog. Theor. Phys. Supp. 2008. V. 174. P. 168-172.

OsadaT., Wilk G. Nonextensive perfect hydrodynamics – a model of dissipative relativistic hydrodynamics? // Cent. Eur. J. Phys. 2009. V.7. № 3. P. 432-443.

Santos A.P., Silva R., Alcaniz J.S., Lima J.A.S. Nonextensive kinetic theory and *H*-theorem in general relativity //Annals of Physics. 2017. V. 386. P. 158-164.

Silva R., Lima J. A. S. Relativity, nonextensivity, and extended power law distributions // Physical Review E. 2005. V. 72. P. 057101 (1-4).

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http: /tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Souza A. M. C. Constructing a statistical mechanics for Beck-Cohen superstatistics // PhysicaL Review E. 2003. V. 67. P. 026106 (1-5).

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Urmossy K., Barnaföldi G.G., Biró T.S. Microcanonical jet-fragmentation in proton–proton collisions at LHC energy // Physics Letters B. 2012. V. 718. № 1. P.125-129.

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология // М.: Мир. 1976].

Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the Nonextensivity Parameter *q* in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions // Physical Review Letters. 2000a. V. 84. № 13. P. 2770-2773.

Wilk G., Włodarczyk Z. Imprints of Nonextensivity in Multiparticle Production // arXiv:hep-ph/0011189. 2000b. V. 2. P. 1-14.

ОГЛАВЛЕНИЕ