



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Конструирование
релятивистской
гидродинамики
многокомпонентной
жидкости. 1. Метод
релятивистской необратимой
термодинамики

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости. 1. Метод релятивистской необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 2. 44 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-2>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-2>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Колесниченко

**Конструирование релятивистской гидродинамики
многокомпонентной жидкости.**

**1. Метод релятивистской необратимой
термодинамики**

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости.

1. Метод релятивистской необратимой термодинамики

В работе разработана релятивистская механика и необратимая термодинамика космологической жидкой смеси, в которой могут происходить теплопроводность, диффузия, вязкое течение и их перекрестные явления. Основные термодинамические поля, которые встречаются в релятивистской необратимой термодинамике, определяются как статистические выражения с помощью релятивистской кинетической теории. Показаны эффекты подхода Экарта для выбора гидродинамической скорости. Уравнения релятивистской многокомпонентной гидродинамики для локальных плотностей импульса, энергии и числа частиц разного сорта получены из фундаментальных законов сохранения релятивистской термодинамики. Сформулирован закон сохранения энергии (первое начало релятивистской термодинамики). С целью получения определяющих соотношений, линейно связывающих потоки с соответствующими термодинамическими силами, выведено ковариантное соотношение Гиббса и локальная форма второго начала термодинамики при наличии источника энтропии. Получены эквивалентные формы релятивистского производства энтропии в виде билинейного выражения в терминах термодинамических сил. Обсуждается новый перекрестный эффект между диффузией и теплопроводностью, возникающий из-за релятивистского члена в термодинамической силе, сопряженной с тепловым потоком. Представленный синопсис представляет интерес для релятивистской механики, астрофизики и космологии.

Ключевые слова: релятивистская термодинамика необратимых процессов, теплопроводность, диффузия, вязкое течение, многокомпонентная смесь.

Aleksander Vladimirovich Kolesnichenko

Construction of relativistic hydrodynamics of a multicomponent fluid. 1. The method of relativistic irreversible thermodynamics.

The paper develops relativistic mechanics and irreversible thermodynamics of a cosmological liquid mixture in which thermal conduction, diffusion, viscous flow and their crossing phenomena can occur. The main thermodynamic fields that occur in relativistic irreversible thermodynamics are defined as statistical expressions using relativistic kinetic theory. The effects of the Eckart approach on the choice of the hydrodynamic velocity are shown. The equations of relativistic multicomponent hydrodynamics for local densities of momentum, energy and number of particles of different sort, are also obtained from the fundamental conservation laws of relativistic thermodynamic. The energy conservation law (the first beginning of relativistic thermodynamics) is formulated. Covariant Gibbs relation and local form of the second principle of thermodynamics in the presence of entropy source were derived in order to obtain determining relations linearly connecting fluxes with corresponding thermodynamic forces. Equivalent forms of relativistic entropy production in the form of a bilinear expression in terms of thermodynamic forces were obtained. A new cross-effect between diffusion and conduction arising from the relativistic term in the thermodynamic force coupled to the heat flux is discussed. The synopsis presented is of interest for relativistic mechanics, astrophysics, and cosmology.

Key words: relativistic thermodynamics of irreversible processes, thermal conductivity, diffusion, viscous flow, multicomponent mixture.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать макроскопическое описание движения многокомпонентной космологической жидкости на основе методов релятивистской необратимой термодинамики (de Groot, Mazur, 1962; Meixner, 1968; Müller, 1968). Необходимость в учете релятивистских эффектов при моделировании любой космологической проблемы связана как с большой (сравнимой со скоростью света) скоростью макроскопического движения жидкости, так и с тем, что в том случае, когда эта скорость не велика, велики скорости микроскопического движения составляющих жидкость частиц (см. Ландау и Лифшиц, 1988).

Моделирование движения релятивистской жидкости основывается на наборе базисных макроскопических величин, которые, описывая систему вне равновесия, удовлетворяют балансовым уравнениям, следующим из законов сохранения числа частиц и энергии-импульса. В чисто макроскопической теории эти законы должны постулироваться. В рамках кинетической теории они выводятся из соответствующих законов сохранения, справедливых на микроскопическом уровне описания (Israel, 1963; de Groot и др., 1968; Weinberg, 1971, 1976).

Для того чтобы объединить в единую и согласованную схему все необратимые явления переноса, происходящие в простой космологической жидкости или в смесях, релятивистская неравновесная термодинамика базируется, как и классическая, на двух фундаментальных идеях. Первая идея связана с гипотезой о существовании локального равновесия в неравновесной системе, математическим выражением которой является равновесное соотношение Гиббса в его локальной форме. Она подразумевает, что вне равновесия основные функции состояния, такие как, например, энтропия, зависят локально от того же самого набора макроскопических переменных (плотности, температуры и гидродинамической 4-скорости), что и в равновесном состоянии. При этом предполагается, что в сопутствующей системе координат изменения температуры, давления и т.п.

должны быть малыми на расстояниях, сравнимых со средним свободным пробегом частиц материи.

Вторая идея заключается в том, что в присутствии необратимых процессов существует локальный рост σ энтропии, который, согласно второму закону термодинамики, нигде и никогда не бывает отрицательным. Математически эта идея принимает форму уравнения баланса энтропии, которое отражает тот факт, что локальная энтропия системы может изменяться как из-за потока энтропии, так и из-за наличия источника энтропии σ , представленного в этом уравнении в виде суммы произведений независимых диссипативных потоков и сопряженных им термодинамических сил. Явная форма уравнения баланса энтропии позволяет сконструировать феноменологические линейные определяющие соотношения для релятивистских потоков тепла, вязкости и диффузии и тем самым получить полное гидродинамическое описание релятивистской системы, находящейся вне равновесия (Jüttner, 1911; van Dantzig, 1939; Kluitenberg и др., 1953; Chandrasekhar, 1965; de Groot и др., 1968, 1969; Israel, 1963; Liu и др., 1986). Обычная теория равновесия, когда все градиенты в жидкости пренебрежимо малы и диссипация отсутствует, легко восстанавливается на асимптотическом пределе исчезающей скорости производства энтропии.

Вместе с тем важно отдавать себе отчет в том, что предположение о локальном равновесии может оказаться слишком грубым допущением для достаточно обширного класса релятивистских систем (например, астрофизических высокоэнергетических систем, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями). Подобный подход применим только к квазистационарным явлениям, медленно изменяющимся в пространстве и во времени (см. de Groot, Mazur, 1962) и, кроме этого, является возможным при условии, что гравитационное поле также медленно изменяется на среднем пути и в течение среднего времени свободного пробега частиц жидкости (Weinberg, 1976). При этом следует отметить, что ограничения, накладываемые принципом локального равновесия на скорости

моделируемых диссипативных процессов, полностью снимаются при использовании *расширенной неравновесной термодинамики*, релятивистскому варианту которой будет посвящена вторая часть настоящего исследования.

Термодинамический анализ космологических моделей диссипативных процессов в релятивистской жидкости неоднократно применялся в специально-релятивистской области (см., например, Eckart, 1940; Kluitenberg и др., 1953; Meixner, 1968; Weinberg, 1971; de Groot и др., 1968, 1969, 1975; Alts, Müller, 1972; Israel, 1963, 1976; Cox и др., 1976; Havas, Swenson, 1979; Liu и др., 1986). Его распространение на общие релятивистские рамки является относительно легким, если для вывода ковариантных гидродинамических уравнений использовать путь простой замены обычных производных на ковариантные и замены метрики Минковского на ее римановый аналог. Однако при этом возникает, как широко известно, некоторая неоднозначность, связанная с возможным выбором гидродинамической 4-скорости. В формулировке Экарта (Eckart, 1940), 4-скорость U^α есть скорость переноса частиц, поэтому в сопутствующей системе координат исчезает величина N^α (4-вектор потока частиц), в то время как у Ландау и Лифшица (Landau, Lifshitz, 1959) U^α связана с потоком энергии; тогда в движущейся системе исчезает поток энергии cT^{0i} (компоненты 4-тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$). В принципе, методика построения релятивистской необратимой термодинамики должна учитывать любой из этих полностью эквивалентных вариантов. Однако далее для простоты мы будем использовать наиболее удобное определение Экарта.

Таким образом, в настоящей работе заново рассматривается с единой ковариантной независимой точки зрения общая релятивистская механика и необратимая релятивистская термодинамика для диссипативной многокомпонентной космологической жидкости. Причем в отличие от многих предыдущих работ мы, при конструировании линейных определяющих соотношений для диссипатив-

ных потоков, следуем той точке зрения, что эти соотношения должны быть сформулированы с помощью явного выражения для локального прироста энтропии. При таком выборе кинетические коэффициенты принимают вид, который в контексте релятивистской неравновесной термодинамики является наиболее естественным. В результате в статье сконструирована релятивистская необратимая термодинамика для изотропной смеси, в которой могут происходить диссипативные процессы теплопроводности, диффузии, вязкого течения, а также их перекрестные эффекты. Для простоты изложения предполагалось, что среда изотропна, материя (масса покоя) не может превращаться в другие формы энергии и не существует внешних сил. При этом был обнаружен новый перекрестный эффект между диффузией и теплопроводностью, возникающий из-за релятивистского члена в силе, сопряженной с тепловым потоком. Оказывается, что благодаря этому перекрестному эффекту на явления диффузии влияет барицентрическое движение.

При написании этой статьи автор существенно опирался на ряд цитируемых выше литературных источников. В этом ряду особое место занимают исследования выдающегося голландского ученого С. де Гроота, внесшего огромный вклад в развитие как релятивистской кинетической теории, так и необратимой многокомпонентной термодинамики. Автор старался следовать тому пути конструирования многокомпонентной термодинамики, который была осуществлен де Гроотом в его давно ставшей классической монографии по термодинамике необратимых процессов простых смесей (см. de Groot, Mazur, 1962).

1. ОСНОВНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Некоторые исходные определения

В данном разделе приведены статистические выражения для основных макроскопических физических величин, которые получены в релятивистской кинети-

ческой теории как средневзвешенные значения микроскопических величин. Исходя из этих определений, далее на основе законов сохранения предполагается сконструировать релятивистскую многокомпонентную гидродинамику идеальной текучей среды. Дополненная законом энтропии, релятивистская гидродинамика приводит к релятивистской неравновесной термодинамике.

В неоднородной системе макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x := x^\alpha := (ct, \mathbf{x})$, где индекс α принимает 4 значения: $\alpha = 0, 1, 2, 3$; t – время, c – скорость света. Далее будем использовать метрику $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, а оператор ковариантного дифференцирования будем обозначать как¹⁾

$$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(c^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) =: (\partial_0, \nabla). \quad (1)$$

Термодинамическое состояние релятивистской простой жидкости характеризуется 4-вектором потока частиц $N^\alpha(x)$, 4-тензором энергии-импульса $T^{\alpha\beta}(x)$ и 4-вектором потока энтропии $S^\alpha(x)$. Эти макроскопические величины определяются в кинетической теории как статистические средние с помощью скалярной функции распределения $f(x, p)$, которая зависит от пространственно-временных координат с $x := x^\alpha = (ct, \mathbf{x})$ и 4-вектора энергии-импульса $p := p^\alpha := (p^0, \mathbf{p}) := (c^{-1}E, \mathbf{p})$, где $m, \mathbf{p}, E = cp^0 = c\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2}$ – соответственно масса, импульс и энергия одной частицы, находящейся в элементе пространственного объема Δ^3x в точке \mathbf{x} в момент времени t . Функция $f(x, p)$ определена таким образом, что произведение $f(x, p)\Delta^3x\Delta^3p$ дает среднее число частиц, которые в момент времени t находятся в элементе объема Δ^3x с центром в точке \mathbf{x} и

¹⁾ Это определение справедливо только при отсутствии гравитации (см. Вайрберг, 2012)

имеют импульсы частиц в пределах $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$. С помощью функции $f(x, p)$ фундаментальные полевые величины $N^\alpha(x)$, $T^{\alpha\beta}(x)$ и $S^\alpha(x)$ записываются следующим образом (см., например, Israel, 1963, 1976; де Гроот и др., 1983;):

$$N^\alpha(x) := c \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f(x, p), \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$T^{\alpha\beta}(x) := c \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha p^\beta f(x, p), \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$S^\alpha(x) := -k_B c \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f(x, p) \left[\ln h^3 f(x, p) - 1 \right], \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (4)$$

где k_B – постоянная Больцмана, h – произвольная постоянная, выбираемая таким образом, чтобы комбинация $h^3 f(x, p)$ была безразмерной величиной (в качестве h обычно используется постоянная Планка).

С помощью 4-вектора потока частиц (2) можно определить:

(i) *макроскопическую плотность числа частиц*

$$n(x) := c^{-1} N^0(x) = \int f(x, p) d^3 p; \quad (5)$$

(ii) *макроскопический вектор потока частиц*

$$\mathbf{J}^i(x) := N^i(x) = c \int \frac{d^3 p}{p^0} p^i f(x, p) = \int u^i f(x, p) d^3 p, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где u^i – декартова компонента 3-вектора скорости $\mathbf{u} = c\mathbf{p} / p^0$ релятивистской частицы.

Таким же образом симметричный 4-тензор энергии-импульса (3) определяет следующие макроскопические характеристики:

(iii) *макроскопическую плотность энергии*

$$T^{00}(x) = c \int p^0 f(x, p) d^3 p = \int E f(x, p) d^3 p; \quad (7)$$

(iv) *макроскопический поток энергии*

$$cT^{0i}(x) = c \int p^0 u^i f(x, p) d^3 p = \int E u^i f(x, p) d^3 p, \quad i = 1, 2, 3; \quad (8)$$

(v) *макроскопическую плотность импульса*

$$c^{-1}T^{i0}(x) = \int p^0 p^i f(x, p) d^3 p, \quad i = 1, 2, 3; \quad (9)$$

(vi) *макроскопический поток импульса (тензор давления)*

$$T^{ij}(x) = \int p^0 p^i u^j f(x, p) d^3 p, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Наконец, 4-вектор потока энтропии (4) объединяет:

(vii) *макроскопическую локальную плотность энтропии*

$$c^{-1}S^0(x) = -k_B \int f(x, p) [\ln h^3 f(x, p) - 1] d^3 p; \quad (11)$$

(viii) *поток энтропии, соответствующий плотности энтропии*

$$\mathbf{S}(x) = -k_B \int \mathbf{u} f(x, p) [\ln h^3 f(x, p) - 1] d^3 p. \quad (12)$$

1.2. Гидродинамическая скорость

Важным понятием при конструировании релятивистской гидродинамики является гидродинамическая 4-скорость $U^\alpha(x)$, которая используется в определении ряда физических величин, играющих важную роль при установлении макроскопических законов сохранения. На этом предварительном этапе понятие гидродинамической скорости будем использовать без излишних уточнений. Далее будет показано, какие упрощения возникают в случае специального выбора скорости в подходе Экарта (Eckart, 1940).

4-скорость $U^\alpha(x)$, задается в виде времениподобного вектора с модулем c в каждой пространственно-временной точке:

$$U^\alpha(x)U_\alpha(x) = c^2. \quad (13)$$

Дифференцирование выражения (13) по пространственно-временным координатам, $\partial_\alpha = (c\partial_t, \nabla)$, приводит к используемому далее вспомогательному соотношению:

$$U^\alpha(x)\partial_\nu U_\alpha(x) = 0. \quad (14)$$

С помощью вектора гидродинамической скорости можно определить так называемый *тензор-проектор*

$$\Delta^{\alpha\beta}(x) := g^{\alpha\beta} - c^2 U^\alpha(x) U^\beta(x). \quad (15)$$

Если тензор-проектор свернуть с произвольным 4-вектором, то он будет действовать как проекционный оператор, поскольку он уничтожает часть 4-вектора, параллельную скорости $U^\alpha(x)$:

$$\Delta^{\alpha\beta}(x) U_\beta(x) = 0, \quad (16)$$

что является следствием соотношений (13) и (15). Проекционный оператор $\Delta^{\alpha\beta}(x)$ характеризуется следующими свойствами:

$$\Delta^{\alpha\beta} = \Delta^{\beta\alpha}, \quad \Delta^{\alpha\beta} \Delta_{\beta\sigma} = \Delta^\alpha_\sigma, \quad \Delta^\alpha_\alpha = 3. \quad (17)$$

Поскольку гидродинамическая скорость $U^\alpha(x)$ является времениподобным вектором, то возможно в каждой пространственно-временной точке рассматривать локальную систему покоя (называемую также сопутствующей системой координат), обозначаемой индексом LR (local rest). Гидродинамическая скорость в этой системе имеет следующие компоненты:

$$U_{\text{LR}}^\alpha = (c, 0, 0, 0), \quad (18)$$

а проекционный оператор (15) имеет вид

$$\Delta_{\text{LR}\alpha\beta} = \Delta_{\text{LR}}^{\alpha\beta} = \text{diag}(0, -1, -1, -1). \quad (19)$$

1. 3. Основные макроскопические параметры состояния релятивистской жидкости и термодинамические потоки

С помощью полевых величин $N^\alpha(x)$, $T^{\alpha\beta}(x)$ и $S^\alpha(x)$ и гидродинамической скорости $U^\alpha(x)$ можно определить следующие макроскопические параметры однокомпонентной системы: плотность частиц $n(x)$, плотность энергии $\varepsilon(x) := en$, тепловой поток $J_q^\alpha(x)$, тензор давления с $P^{\alpha\beta}(x)$ и плотность энтропии $S(x) := sn$. При этом

(i) *плотность частиц* $n(x)$ задается ковариантным выражением

$$n(x) := N^\alpha U_\alpha / c^2; \quad (20)$$

в сопутствующей системе отсчета, заданной (18), эта величина принимает значение

$$n_{\text{LR}}(x) = N_{\text{LR}}^0 / c, \quad (21)$$

что в соответствии с определением (5) показывает, что это действительно плотность частиц;

(ii) *плотность энергии* $\varepsilon(x)$ определяется выражением

$$\varepsilon(x) := en := U_\alpha T^{\alpha\sigma} U_\sigma / c^2, \quad (22)$$

где $e(x)$ – средняя энергия на одну частицу; в локальной системе покоя (18) определение (22) сводится к следующему выражению:

$$\varepsilon_{\text{LR}}(x) = e_{\text{LR}} n_{\text{LR}} = T_{\text{LR}}^{00}, \quad (23)$$

что находится в полном соответствии с формой (7) для плотности энергии;

(iii) *поток тепла* $J_q^\alpha(x)$ задается выражением

$$J_q^\alpha(x) := (U^\nu T_{\nu\sigma} - h N_\sigma) \Delta^{\sigma\alpha}, \quad (24)$$

где

$$h(x) := e + p / n \quad (25)$$

– энтальпия (или тепловая функция) на одну частицу, $p(x)$ – локальное гидростатическое давление; в сопутствующей системе координат (18) тепловой поток $J_q^\alpha(x)$ имеет компоненты

$$\mathbf{J}_{qLR}^0 = 0, \quad \mathbf{J}_{qLR}^i(x) = cT_{LR}^{0i}(x) - h(x)N_{LR}^i(x), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (26)$$

а в ковариантной формулировке имеет место условие ортогональности

$$\mathbf{J}_q^\alpha U_\alpha = 0, \quad (27)$$

как это непосредственно следует из (24) и (16);

(iv) *тензор давления* $P^{\alpha\beta}(x)$ определяется формулой

$$P^{\alpha\beta}(x) := \Delta_\sigma^\alpha T^{\sigma\tau} \Delta_\tau^\beta, \quad (28)$$

из которой следует, что этот тензор симметричен, поскольку тензор энергии-импульса симметричен; для дальнейших целей тензор давления удобно разбить на «обратимую» и «необратимую» части:

$$P^{\alpha\beta} = -p\Delta^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta}, \quad (30)$$

где величина $\Pi^{\alpha\beta}(x)$ называется тензором вязкого давления; в локальной системе покоя тензор давления – чисто пространственная величина:

$$P_{LR}^{00} = 0, \quad P_{LR}^{0i} = P_{LR}^{i0} = 0, \quad P_{LR}^{ij} = T_{LR}^{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (29)$$

(v) *плотность энтропии* $S(x)$ определяется как скаляр

$$S(x) := sn := S^\alpha U_\alpha / c^2, \quad (31)$$

где $S^\alpha(x)$ – 4-вектор потока энтропии, а $s(x)$ – энтропия на одну частицу; в сопутствующей системе это определение принимает вид

$$S(x) = sn = S_{LR}^0 / c, \quad (32)$$

из которого видно, что S представляет собой плотность энтропии в сопутствующей системе отсчета.

С учетом определений плотности энергии (22), потока тепла (24) и тензора давления можно записать следующие соотношения:

$$\varepsilon = U_\alpha T^{\alpha\nu} U_\nu / c^2, \quad \mathbf{J}_q^\alpha + h\Delta^{\alpha\nu} N_\nu = U_\nu T^{\nu\sigma} \Delta_\sigma^\alpha, \quad \Pi^{\alpha\nu} - ph^{\alpha\nu} = \Delta_\sigma^\alpha T^{\sigma\lambda} \Delta_\lambda^\nu. \quad (33)$$

Разложение тензора энергии-импульса.

С помощью определения (15) для проекционного оператора $\Delta^{\alpha\nu}$ можно доказать следующее тождество:

$$T^{\alpha\nu} = T^{(0)\alpha\nu} + T^{(1)\alpha\nu}, \quad (34)$$

где $T^{(0)\alpha\nu}$ – «обратимая» часть:

$$T^{(0)\alpha\nu} := \varepsilon U^\alpha U^\nu / c^2 - p \Delta^{\alpha\nu}, \quad (35)$$

а $T^{(1)\alpha\nu}$ – «необратимая» часть:

$$T^{(1)\alpha\nu} := c^{-2} \left[\left(J_q^\alpha + h \Delta^{\alpha\sigma} N_\sigma \right) U^\nu + \left(J_q^\nu + h \Delta^{\nu\sigma} N_\sigma \right) U^\alpha \right] + P^{\alpha\nu}. \quad (36)$$

Эти две формы будут играть важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

Выбор гидродинамической скорости. Гидродинамическую скорость $U^\alpha(x)$ можно определить разными способами. В космологической литературе используются в основном два специфических способа определения этой скорости. В подходе Ландау и Лифшица (1988) гидродинамическая скорость $U^\alpha(x)$ определяется как скорость переноса энергии; в этом случае величина T^{i0} исчезает в движущейся системе координат. В подходе Экарта (Eckart, 1940) скорость $U^\alpha(x)$ является скоростью переноса частиц, поэтому в сопутствующей системе отсчета исчезает величина N^i . Оба подхода совершенно эквивалентны. Однако в данной работе мы ограничимся более удобным подходом Экарта, в котором скорость $U^\alpha(x)$ выражена непосредственно через 4-вектор потока частиц N^α с помощью следующего определения:

$$U^\alpha(x) := c N^\alpha / \sqrt{N^\nu N_\nu}. \quad (37)$$

Определение скорости (37) нормировано в соответствии с формулой (13). С учетом нормировки и определения тензора проектора (15), выражение (37) соответственно эквивалентно следующим двум формам:

$$U^\alpha := c^2 N^\alpha / N^\nu U_\nu, \quad \Delta^{\alpha\nu} N_\nu = 0. \quad (38)$$

Таким образом, при использовании подхода Экарта пространственные компоненты 4-вектора потока частиц N^α в локальной системе покоя обращаются в нуль:

$$N_{\text{LR}}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (39)$$

Подставляя (38) во второе соотношение (33), приходим к следующему выражению для полного потока тепла в подходе Экарта:

$$\mathbf{J}_q^\alpha(x) := U_\nu T^{\nu\sigma} \Delta_\sigma^\alpha, \quad (40)$$

а при подстановке соотношения (38) в (36) получаем для тензора энергии-импульса представление

$$T^{(1)\alpha\nu}(x) = c^{-2} \left(\mathbf{J}_q^\alpha U^\nu + \mathbf{J}_q^\nu U^\alpha \right) + P^{\alpha\nu}. \quad (41)$$

1.4. Многокомпонентная нереагирующая смесь

Для системы, которая является смесью N компонентов, числовая плотность частиц k -го вида задается формулой

$$n_k(x) := N_k^\alpha(x) U_\alpha(x) / c^2, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (42)$$

Здесь $N_k^\alpha(x)$ – 4-вектор потока частиц вида k , определяемый в релятивистской кинетике (по аналогии с (20)) соотношением

$$N_k^\alpha(x) := c \int \frac{d^3 p_k}{p_k^0} p_k^\alpha f_k(x, p_k), \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (43)$$

Величина $f_k(x, p_k)$ представляет собой функцию распределения для k -го компонента, причем 4-импульс p_k^α имеет модуль $m_k c$: $p_k^2 = p_k^\alpha \cdot p_{\alpha k} = m_k^2 c^2$. При этом 4-вектор полного потока частиц имеет вид

$$N^\alpha(x) := \sum_{k=1}^N N_k^\alpha(x). \quad (44)$$

Массовая плотность (т.е. масса единицы объема) компоненты k определяется соотношением

$$\rho_k(x) := m_k n_k = M_k^\alpha U_\alpha / c^2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (45)$$

где $M_k^\alpha(x) = m_k N_k^\alpha(x)$ – 4-вектор потока массы частиц сорта k с массой частицы m_k .

Полная числовая плотность задается соотношением

$$n(x) := \sum_{k=1}^N n_k(x), \quad (46)$$

как это следует из определений (20), (42) и (43). В случае отсутствия химических реакций в системе для каждого сорта в отдельности выполняются законы сохранения массы и числа частиц.

При описании динамического поведения релятивистских смесей будем использовать также концентрации компонентов k , которые определяются как

$$x_k(x) := n_k / n, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (47)$$

а также диффузионные потоки, задаваемые соотношениями

$$J_k^\alpha(x) := N_k^\alpha - x_k N^\alpha, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (48)$$

При этом из выражений (44) и (46) следует, что сумма всех концентраций (47) равна единице, а сумма всех диффузионных потоков (48) исчезает:

$$\sum_{k=1}^N x_k(x) = 1, \quad \sum_{k=1}^N J_k^\alpha(x) = 0. \quad (49)$$

Кроме этого, диффузионные потоки удовлетворяют условиям ортогональности:

$$J_k^\alpha U_\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (50)$$

что следует из (48) с (20), (42) и (46).

Заметим, что в релятивистской кинетической теории многокомпонентных идеальных газов 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор потока энтропии формулой определяются формулами:

$$T^{\alpha\beta}(x) := c \sum_{k=1}^N \int \frac{d^3 p_k}{p_k} p_k^\alpha p_k^\beta f_k(x, p_k), \quad (51)$$

$$S^\alpha(x) := -k_B c \sum_{k=1}^N \int \frac{d^3 p_k}{p_k} p_k^\alpha f_k(x, p_k) \left[\ln h^3 f_k(x, p_k) - 1 \right]; \quad (52)$$

эти определения являются обобщением формул (3) и (4).

2. БАЛАНСОВЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

В этом разделе получим уравнения баланса для введенных выше макроскопических величин, которые, описывая в общем случае релятивистскую систему вне равновесия, удовлетворяют уравнениям, следующим из законов сохранения числа частиц и энергии-импульса. В рамках релятивистской кинетической теории уравнения переноса для частиц разного сорта выводятся из соответствующих законов сохранения, справедливых на микроскопическом уровне (см., например, de Groot и др., 1968; Кох и др., 1976). В чисто макроскопической теории эти законы сохранения постулируются.

В нереагирующей смеси, в которой сохраняется число частиц каждого компонента по отдельности, макроскопические законы сохранения принимают вид:

$$\partial_{\alpha} N_k^{\alpha}(x) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (53)$$

где $N_k^{\alpha}(x)$ – 4-вектор потока частиц k -го вида. Тогда суммарный 4-вектор потока частиц $N^{\alpha}(x)$ также сохраняется:

$$\partial_{\alpha} N^{\alpha}(x) = 0. \quad (54)$$

Макроскопический закон сохранения энергии-импульса в случае, когда внешнее поле отсутствует, имеет вид:

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0, \quad (55)$$

где тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ определен формулой (51). Для $\alpha = 0$ это – закон сохранения энергии, а для $\alpha = 1, 2, 3$ – закон сохранения импульса системы.

2.1. Производная по времени и градиент

С помощью гидродинамической 4-скорости $U^{\alpha}(x)$ можно производную по пространственно-временным координатам ∂^{α} разложить ковариантным образом на времениподобную и пространственноподобную части. С использованием тензора-проектора (15) запишем тождество

$$\partial^\alpha = c^{-2} U^\alpha U^\nu \partial_\nu + \Delta^{\alpha\nu} \partial_\nu = c^{-2} U^\alpha D_u + \nabla^\alpha, \quad (56)$$

где введены обозначения $D_u := U^\nu \partial_\nu$, $\nabla^\alpha := \Delta^{\alpha\nu} \partial_\nu$. Оператор D_u называется конвекционной производной по времени (в локальной системе покоя [см. (18)] он представляет собой чисто временное дифференцирование, $D_{uLR} = \partial / \partial t$); аналогично оператор градиента ∇^α в сопутствующей системе отсчета является чисто пространственным, поскольку в этом случае он имеет вид

$$\nabla_{LR}^0 = 0, \quad \nabla_{LR}^i = -\nabla_{LRi} = -\partial / \partial x^i, \text{ или } U^\alpha \nabla_\alpha = 0. \quad (57)$$

Важно отметить, что в общем случае гидродинамическая 4-скорость $U^\alpha(x)$ не совпадает со средней скоростью движения частиц, которая здесь определяется формулой (37) через 4-вектор потока частиц N^α . Поэтому помимо понятия конвекционной производной по времени дополнительно вводится еще понятие субстанциональной производной по времени: $D := N^\alpha \partial_\alpha$. Эта производная, имеющая размерность числа частиц в единице объема в единицу времени, описывает изменение параметров среды, которое обнаруживается при перемещении вместе с потоком частиц. С помощью разложения (53) и определения (20) плотности числа частиц n можно найти следующее соотношение:

$$D = n D_u + N^\alpha \nabla_\alpha, \quad (58)$$

выражающее эту производную по времени через конвекционную производную. Вместе с тем при определении гидродинамической скорости U^α по Экарту (которое мы используем в данной работе) эти два оператора отличаются лишь множителем, каковым является плотность числа частиц $n(x)$; далее будет использована субстанциональная производная по времени в следующем виде:

$$D := n D_u = n U^\nu \partial_\nu.$$

2.2. Уравнения непрерывности

Полная числовая плотность смеси задается ковариантным выражением (20). Отсюда следует, что $n U^\alpha := N^\alpha$. Используя закон сохранения (54) и оператор конвекционной производной по времени $D_u := U^\alpha \partial_\alpha$, получим следующее уравнение непрерывности для плотности n :

$$D_u n = U^\alpha \partial_\alpha n = \left[\partial_\alpha (n U^\alpha) - n \partial_\alpha U^\alpha = \partial_\alpha N^\alpha - n \partial_\alpha U^\alpha \right] = -n \partial_\alpha U^\alpha, \quad (59)$$

которое, с учетом тождества (56) и соотношения (14), может быть записано также в виде:

$$\begin{aligned} D_u n &= \left[-n \partial_\alpha U^\alpha = -n \nabla_\alpha U^\alpha + n c^{-2} U_\alpha D_u U^\alpha = \right. \\ &= \left. -n \nabla_\alpha U^\alpha + n c^{-2} U^\sigma (U_\alpha \partial_\sigma U^\alpha) \right] = -n \nabla_\alpha U^\alpha. \end{aligned} \quad (60)$$

Помимо этого уравнения, для адекватного описания релятивистской смеси необходимо иметь балансовые уравнения для концентраций частиц $x_k(x) = n_k / n$ в нереагирующей смеси. Используя для этого соотношения (13), (42), (47) и (60), в результате получим

$$D x_k = -\partial_\alpha J_k^\alpha, \quad (k=1, 2, \dots, N). \quad (61)$$

Это уравнение, при использовании тождества (50) и соотношения ортогональности (56), может быть записано также в виде

$$D x_k = -\nabla_\alpha J_k^\alpha + c^{-2} J_k^\alpha D_u U_\alpha, \quad (k=1, 2, \dots, N). \quad (62)$$

Наконец, при помощи уравнений (60) и (62) можно получить балансовое уравнение для числовой плотности $n_k(x)$ частиц сорта k в нереагирующей смеси. Используя для этого соотношение $D x_k = D_u n_k - x_k D_u n$, получим

$$\begin{aligned} D_u n_k &= -\partial_\alpha J_k^\alpha - n_k \partial_\alpha U^\alpha = \\ &= -n_k \nabla_\alpha U^\alpha - \nabla_\alpha J_k^\alpha + c^{-2} J_k^\alpha D_u U_\alpha, \quad (k=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (63)$$

2.3. Релятивистское уравнение движения

Уравнение движения выводится из закона сохранения энергии-импульса (55) путем свертывания его с проекционным оператором $\Delta^{\alpha\sigma}$ (15):

$$\Delta_\sigma^\alpha \partial_\nu T^{\sigma\nu}(x) = 0. \quad (64)$$

Далее в уравнении (64) используем разложение (34)-(36) тензора энергии-импульса $T^{\sigma\nu}$, которое, в случае подхода Экарта (формула (41)), можно записать в виде

$$T^{\alpha\nu} = c^{-2} \varepsilon U^\alpha U^\nu - p \Delta^{\alpha\nu} + c^{-2} \left(J_q^\alpha U^\nu + J_q^\nu U^\alpha \right) + \Pi^{\alpha\nu}. \quad (65)$$

В результате получим релятивистское уравнение движения в следующем виде:

$$\begin{aligned} c^{-2} h \mathbf{D} U^\alpha = & \nabla^\alpha p - \Delta_\nu^\alpha \nabla_\sigma \Pi^{\nu\sigma} + (hn)^{-1} \Pi^{\alpha\nu} \nabla_\nu p - \\ & - c^{-2} \left(\Delta_\nu^\alpha \mathbf{D}_u J_q^\nu + J_q^\alpha \nabla_\nu U^\nu + J_q^\nu \nabla_\nu U^\alpha \right), \end{aligned} \quad (66)$$

в котором, как и прежде, $h(x)$ – энтальпия на одну частицу. Из этого уравнения видно, что ускорение среды обусловлено градиентами давления и, кроме того, рядом членов чисто релятивистского происхождения. Если пренебречь потоками $\Pi^{\alpha\nu}$ и J_q^α , связанными с явлениями диссипативного переноса, то уравнение движения сведется к уравнению нулевого порядка

$$\mathbf{D} U^\alpha = c^2 h^{-1} \nabla^\alpha p, \quad (67)$$

которое соответствует уравнению Эйлера для идеальных газов в классической гидромеханике. Это соотношение, связывающее ускорение и градиент давления, играет важную роль при выводе релятивистских определяющих соотношений в теории первого порядка, т.е. в тех случаях, когда рассматриваются только линейные по диссипативным потокам переноса определяющие соотношения. Тогда производные по времени \mathbf{D}_u , входящие в правую часть балансового уравнения (62) для концентраций, можно исключить с помощью этого соотношения; в результате получим

$$\mathbf{D} x_k = -\nabla_\alpha J_k^\alpha + J_k^\alpha (hn)^{-1} \nabla^\alpha p. \quad (62^*)$$

2.4. Релятивистское уравнение энергии

Уравнения баланса для удельной энергии $\varepsilon(x) = en$ системы выведем, используя закон сохранения энергии-импульса (55) при учете соотношений (13), (14), (16), (27), (28), а также определений (56) для оператора $\mathbf{D}_u := U^\nu \partial_\nu$ и (65) для 4-тензора энергии-импульса $T^{\alpha\nu}$; в результате получим

$$\mathbf{D}_u \varepsilon = -hn \partial_\alpha U^\alpha + \Pi^{\alpha\nu} \partial_\nu U_\alpha - \partial_\alpha J_q^\alpha + c^{-2} J_q^\alpha \mathbf{D}_u U_\alpha. \quad (68)$$

Далее нам понадобится уравнение для скорости изменения энергии $e(x)$ на одну частицу, для вывода которого вычтем из уравнение (68) уравнение непрерывности (59), умноженное на $e(x)$; в результате будем иметь

$$De = nD_u e = -p\partial_\alpha U^\alpha + P^{\alpha\nu}\partial_\nu U_\alpha - \partial_\alpha J_q^\alpha + 2c^{-2}J_q^\alpha D_u U_\alpha. \quad (69)$$

Если пренебречь диссипативными потоками с $P^{\alpha\beta}(x)$ и $J_q^\alpha(x)$, то два уравнения для энергии (68) и (69) запишутся в виде следующих релятивистских уравнений Эйлера (уравнений нулевого порядка для энергии):

$$D_u \varepsilon = -hn\partial_\alpha U^\alpha, \quad (70)$$

$$De = -p\partial_\alpha U^\alpha. \quad (71)$$

Важно иметь в виду, что полученные выше уравнение непрерывности и уравнения для импульса и энергии имеют чисто формальный смысл, поскольку на данном этапе входящие в них потоки переноса $P^{\alpha\beta}(x)$, $J_q^\alpha(x)$ и $J_k^\alpha(x)$ ($1, 2, \dots, N$) являются неопределенными величинами. Покажем теперь, как эти потоки можно методами релятивистской необратимой термодинамики связать линейным образом с градиентами макроскопических переменных.

2.5. Первый закон термодинамики

Первым законом термодинамики является уравнение, которое связывает производные $D_u e + pD_u(1/n)$ с другими локальными величинами. Для первого слагаемого имеется соответствующее выражение, а именно энергетическое уравнение (69). Из уравнения непрерывности (60) следует, что $nD_u n^{-1} = \nabla_\alpha U_\alpha$. Объединяя это выражение с (69), приходим к уравнению

$$De + pDn^{-1} = P^{\alpha\nu}\partial_\nu U_\alpha - \partial_\alpha J_q^\alpha + c^{-2}J_q^\alpha D_u U_\alpha, \quad (72)$$

которое является первым законом релятивистской термодинамики. Из уравнения (72) видно, что изменение энергии $e(x)$ происходит за счет двух членов, описывающих работу, а именно второго члена в левой части, зависящего от локального гидростатического давления $p(x)$, и первого члена в правой части, зависящего от тензора вязкого давления $P^{\alpha\beta}$, а кроме того, за счет двух тепловых членов:

дивергенции потока тепла J_q^α и чисто релятивистского члена, содержащего, в силу соотношения (67), градиент давления

$$De + pDn^{-1} = P^{\alpha\nu}\nabla_\nu U_\alpha - \nabla_\alpha J_q^\alpha + J_q^\alpha (hn)^{-1}\nabla^\alpha p. \quad (73)$$

В случае отсутствия величин, связанных с диссипативными потоками процессами переноса, этот закон принимает простой вид

$$D_u e + pD_u(1/n) = 0, \quad (74)$$

соответствующий первому закону термодинамики для систем, адиабатически изолированных от окружающей среды.

Перейдем теперь к центральной проблеме данной работы: как связать между собой, используя методы равновесной релятивистской термодинамики, первичные переменные $S^\alpha(x)$, $N_k^\alpha(x)$ и $T^{\alpha\beta}(x)$.

3. ЗАКОН ЭНТРОПИИ И БАЛАНС ЭНТРОПИИ

Содержание понятия второго закона термодинамики может означать одно из двух следующих утверждений или охватывать оба эти утверждения:

(i) **Соотношение Гиббса.** Этот закон утверждает, как изменение энтропии в пространстве и во времени связано с изменениями термодинамических переменных, которые определяют состояние системы в равновесном состоянии. Обобщение соотношения Гиббса на релятивистскую область проведено в работе (de Groot и др., 1968), в которой было показано, что традиционная форма этого соотношения остается справедливой в первом приближении по потокам переноса в равновесной системе.

(ii) **Закон баланса энтропии.** Это уравнение выражает тот факт, что локальная энтропия системы может изменяться как из-за потока энтропии J_s^α , так и из-за наличия интенсивности источника энтропии $\sigma(x)$ (производства энтропии на единицу объема в единицу времени), которая, являясь неотрицательной величиной, выражается через независимые потоки и сопряженные с ними термодинамические силы, непосредственно связанные с измеряемыми физическими величинами.

3.1. Формальное уравнение баланса энтропии

В первом разделе данной работы формулой (4) был определен 4-вектор потока энтропии $S^\alpha(x)$, а формулой (31) введена плотность энтропии $S := sn$ через поток $S^\alpha(x)$:

$$S(x) := sn := S^\alpha U_\alpha / c^2, \quad (75)$$

где $s(x)$ – энтропия на одну частицу. Получим теперь формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество

$$nD_u s = \partial_\alpha (sN^\alpha), \quad (76)$$

которое является следствием закона сохранения (60) числа частиц $n(x)$ и определения (56) оператора конвекционной производной по времени D_u . Добавляя и вычитая одну и ту же величину $\partial_\alpha S^\alpha$, запишем тождество (76) в виде

$$nD_u s = -\partial_\alpha (S^\alpha - sN^\alpha) + \partial_\alpha S^\alpha, \quad (77)$$

которое можно трактовать как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде

$$Ds = -\partial_\alpha J_s^\alpha + \sigma, \quad (78)$$

где

$$J_s^\alpha(x) := S^\alpha(x) - s(x)N^\alpha(x) \quad (79)$$

– поток энтропии (по определению), а величина $0 \leq \sigma := \partial_\alpha S^\alpha$, являясь постулируемым законом возрастания энтропии $S^\alpha(x)$, описывает здесь интенсивность источника энтропии. Локальное математическое выражение (78) второго закона релятивистской термодинамики не содержит никаких физических положений, кроме закона сохранения числа частиц и потому пока носит чисто формальный характер.

3.2. Релятивистское соотношения Гиббса

Получим теперь взаимосвязь между вариациями свойств релятивистской системы, рассмотренными в разд. 2, и скоростью изменения энтропии. Это позволит получить явные выражения для входящих в уравнение (78) потока энтропии $J_s^\alpha(x)$ и интенсивности источника энтропии $\sigma(x)$.

Из классической термодинамики известно, что плотность энтропии для равновесной системы является вполне определенной функцией параметров состояния, необходимых для полного описания макроскопической системы (Müller, 1986). Для релятивистских систем, рассмотренных в разд. 2, такими параметрами являются энергия на одну частицу $e(x)$, удельный объем, приходящийся на одну частицу $n(x)^{-1}$, и концентрации частиц $x_k(x)$ сорта k : $s = s(e, n^{-1}, x_k)$. Это свойство для релятивистских систем (так же как и для классических) выражается тем фактом, что для систем, находящихся в равновесии, полный дифференциал $s(x)$ дается локальной формулой Гиббса (см., например, de Groot и др., 1968; Israel, 1976)

$$T Ds = De + p Dn^{-1} - \sum_{k=1}^N \mu_k D x_k, \quad (80)$$

с помощью которой определяются абсолютная температура T , давление p и химические потенциалы μ_k так же, как это делается в теории равновесной термодинамики,

$$T^{-1} = (\partial s / \partial e)_{n^{-1}, x_k}, \quad T^{-1} p = (\partial s / \partial n^{-1})_{e, x_k}, \quad T^{-1} \mu_k = - (\partial s / \partial x_k)_{e, n^{-1}, x_j \neq x_k}. \quad (81)$$

Покажем теперь в общих чертах, как это соотношение выводится в релятивистской кинетической теории в первом приближении Чепмена-Энскога для любой многокомпонентной смеси, состояние которой ограничено локально-равновесными, или близкими к равновесию условиями. С учетом этого ограничения, в этой теории предполагается, что 4-поток энтропии $S^\alpha(x)$ является функцией только локальных значений величин $N_k^\alpha(x)$ и $T^{\alpha\beta}(x)$ и не зависит от их градиентов (Israel, 1976).

Рассматривая поток энтропии, определенный формулой (52), охарактеризуем входящие в нее неравновесные функции распределения $f_k^\alpha(x, p_k^\alpha)$ их отклонениями $\varphi(x, p_k^\alpha)$ от локального равновесного значения; для этого запишем

$$f_k^\alpha(x, p_k^\alpha) = f_k^{eq}(x, p_k^\alpha) \left[1 + \varphi(x, p_k^\alpha) \right],$$

где

$$f_k^{eq} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(\frac{\mu_k - p_k^\alpha U_\alpha(x)}{k_B T(x)}\right) \quad (82)$$

– равновесная функция распределения Юттнера (Jüttner, 1911). Заметим, что с помощью этой функции можно в явном виде определить все термодинамические переменные и получить таким образом полное макроскопическое описание релятивистской системы, находящейся в локальном равновесии.

При подстановке распределения $f_k(x, p_k^\alpha)$ в формулу (52) можно получить искомую функциональную зависимость 4-вектора потока энтропии от 4-вектора потока частиц N_k^α (43) и 4-тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ (51) в следующем виде (см. de Groot и др., 1968; Кох, 1976):

$$S^\alpha = \frac{1}{T} \left[T^{\alpha\beta} U_\beta - \sum_{k=1}^N \mu_k N_k^\alpha \right] + n U^\alpha. \quad (83)$$

Свертывание соотношения (83) с $U_\alpha(x)$ приводит к равновесному соотношению для энтропии $s(x)$ на одну частицу (так называемое соотношение Эйлера):

$$Ts = e + pn^{-1} - \sum_{k=1}^N x_k \mu_k, \quad (84)$$

в котором T – температура системы, находящейся в равновесии; $p = nk_B T$ – термическое уравнение состояния идеального газа; μ_k – термодинамический потенциал (функция Гиббса), приходящийся на одну частицу и определяемый соотношением $T^{-1} \mu_k := -(\partial s / \partial x_k)_{e, n^{-1}, x_j \neq x_k}$ (см. также Приложение).

Если взять теперь ковариантную производную ∂_ν от выражения (84), то получим выражение

$$\begin{aligned} T \partial_\nu s &= \partial_\nu e + p \partial_\nu n^{-1} - \sum_{k=1}^N \mu_k \partial_\nu x_k + \\ &+ n^{-1} \partial_\nu p - s \partial_\nu T - \sum_{k=1}^N x_k \partial_\nu \mu_k, \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Поскольку три последние члена в этом выражении обращаются в нуль ($n^{-1} \partial_\nu p - s \partial_\nu T - \sum_{k=1}^N x_k \partial_\nu \mu_k = 0$ – релятивистский вариант соотношения Гиббса-Дюгема), то из него следует справедливое для локально-равновесных условий релятивистское соотношение Гиббса:

$$T\partial_{\nu}s = \partial_{\nu}e + p\partial_{\nu}n^{-1} - \sum_{k=1}^N \mu_k \partial_{\nu}x_k, \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (85)$$

Это соотношение связывает изменение (относительно времени t и пространственных координат \mathbf{x}) энтропии $s(x)$ на одну частицу с изменениями энергии $e(\mathbf{x}, t)$, плотности $n(\mathbf{x}, t)$ и концентраций $x_k(\mathbf{x}, t)$ компонентов k . Другими физическими величинами, которые здесь имеют место, являются абсолютная температура $T(\mathbf{x}, t)$, локальное гидростатическое давление $p(\mathbf{x}, t)$ и термодинамический потенциал $\mu_k(\mathbf{x}, t)$ компонентов k .

Соотношение Гиббса (84) с помощью оператора конвекционной производной по времени $\mathbf{D} := n\mathbf{D}_u$ может быть записано также в виде (80). В следующем разделе будет показано, что это соотношение (80) имеет фундаментальное значение для нахождения явного вида интенсивности производства энтропии $\sigma(x)$.

По поводу соотношения Гиббса (80) важно отметить следующее: хотя соотношение (80) строго доказано в релятивистской кинетической теории только в первом приближении Чепмена–Энскога (см. de Groot и др., 1968), оно тем не менее выполняется во всех порядках приближения, когда отклонение от равновесия настолько мало, что допустима линеаризация функций возмущения $\varphi(x, p_k^{\alpha})$. Таким образом, использование этого соотношения для большинства известных явлений переноса в релятивистской термодинамике является вполне оправданным.

3.3. Баланс энтропии, основанный на соотношении Гиббса и законах сохранения

Чтобы найти явную форму уравнения баланса энтропии (79), подставим в соотношение (80) уравнения (61) и (73); в результате (при учете (50)) получим:

$$T\mathbf{D}s = \Pi^{\alpha\nu}\partial_{\nu}U_{\alpha} - \partial_{\alpha}\mathbf{J}_q^{\alpha} + (hn)^{-1}\Delta_{\alpha\nu}\partial^{\nu}p + \sum_{k=1}^N \mu_k \partial_{\alpha}\mathbf{J}_k^{\alpha}. \quad (86)$$

В правую часть этого уравнения входит тепловой поток, определяемый выражением (24), $\mathbf{J}_q^{\alpha}(x) := (U^{\nu}T_{\nu\sigma} - hN_{\sigma})\Delta^{\sigma\alpha}$, т.е. имеет общую справедливость, независимо от того, какой специальный выбор в конечном счете сделан для определения гидродинамической скорости $U^{\alpha}(x)$. Напомним, что при определении скорости U^{α} по Экарту тепловой поток принимает более простой вид

$\mathbf{J}_q^\alpha(x) := U_\nu T^{\nu\sigma} \Delta_\sigma^\alpha$ (см. формулы (38) и (40)). Кроме этого, в этом случае оператор субстанциональной производной \mathbf{D} в (86) сводится к $\mathbf{D} \rightarrow n\mathbf{D}_u = nU^\alpha \partial_\alpha$.

Преобразуя теперь уравнение (62) к форме уравнения баланса (78), в результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}s = & -\partial_\alpha \left(\frac{\mathbf{J}_q^\alpha - \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{J}_k^\alpha}{T} \right) + \\ & + \frac{1}{T} \left\{ \Pi^{\alpha\nu} \partial_\nu U_\alpha - \mathbf{J}_q^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) \right\} - \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k^\alpha \partial_\alpha \left(\frac{\mu_k}{T} \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Сравнивая (87) с уравнением (79), найдем выражения для потока энтропии и производства энтропии:

$$\mathbf{J}_s^\alpha = \frac{1}{T} \left(\mathbf{J}_q^\alpha - \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{J}_k^\alpha \right), \quad (88)$$

$$\sigma = \frac{1}{T} \left\{ \Pi^{\alpha\nu} \partial_\nu U_\alpha - \mathbf{J}_q^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) \right\} - \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k^\alpha \partial_\alpha \left(\frac{\mu_k}{T} \right) \geq 0. \quad (89)$$

Из выражений (88) и (89) видно, что поток энтропии $\mathbf{J}_s^\alpha(x)$ определяется суммой теплового потока $\mathbf{J}_q^\alpha(x)$ и линейной комбинацией диффузионных потоков $\mathbf{J}_k^\alpha(x)$ ($k=1,2,\dots,N$), деленной на температуру; производство энтропии $\sigma(x)$ представляет собой билинейную форму: это сумма произведений термодинамических потоков – тензора вязкости $\Pi^{\alpha\beta}(x)$, потока тепла $\mathbf{J}_q^\alpha(x)$ и диффузионных потоков $\mathbf{J}_k^\alpha(x)$, умноженных на соответствующую сопряженную термодинамическую силу X^a (средство). Последние включают в себя градиенты гидродинамической скорости, температуры и термодинамических потенциалов Гиббса $\mu_k(x)$, а также чисто релятивистский член, содержащий градиент давления и впервые обнаруженный Эккартом (Eckart, 1940). Следовательно, три источника производства энтропии (89) возникают в результате необратимых явлений, связанных с вязкостью, теплопроводностью и диффузией. В случае отсутствия этих диссипативных явлений поток энтропии (88), как и производство энтропии (89), обращается в нуль, так что закон баланса энтропии (79) сводится к

уравнению $Ds = 0$, из которого следует, что энтропия $s(x)$ на одну частицу является постоянной величиной, если в системе без химических реакций имеет место термодинамическое равновесие.

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Линейные законы

Поскольку при термодинамическом равновесии производство энтропии обращается в нуль, то в соответствии с представлением о равновесии можно считать, что все термодинамические силы, входящие в выражение для источника энтропии $\sigma(x)$, также обращаются в нуль вместе с потоками, так как имеют тенденцию сглаживать неоднородности, которые обуславливаются последними. Из классической необратимой термодинамики известно, что для широкого класса необратимых явлений потоки являются линейными функциями термодинамических сил, что выражается феноменологическими законами, которые вводятся ad hoc в макроскопические теории необратимых процессов. Если ограничиться линейной областью, то и в случае релятивистской термодинамики возможно постулировать феноменологические (определяющие) соотношения $J_a = \sum_b l_{ab} X^b$, в которых J_a и X^b – независимые потоки и термодинамические силы, входящие в выражение для производства энтропии σ , а коэффициенты пропорциональности l_{ab} носят название кинетических коэффициентов. Они зависят от вида системы и от локальных параметров состояния, но не зависят от вариаций этих величин. Сразу же отметим, что вполне возможно, что некоторые необратимые процессы с релаксацией должны описываться в релятивистской необратимой термодинамике нелинейными феноменологическими уравнениями (см., например, Weinberg, 1971; Israel, 1976). Такие процессы в данной работе не рассматриваются.

Если ввести феноменологические соотношения в выражение для производства энтропии σ , то получим квадратичное по термодинамическим силам выражение типа $\sigma = \sum_{a,b} l_{ab} X^a X^b$, которое, поскольку $\sigma \geq 0$, должно быть положительно (или по крайней мере неотрицательно) определенным. Достаточное условие для этого состоит в том, чтобы все главные миноры симметричной матрицы с элементами $l_{ab} + l_{ba}$ были положительны (или по крайней мере неотрицательны). Это означает, что все диагональные элементы должны быть положительными $l_{aa} \geq 0$, а недиагональные элементы должны удовлетворять условиям типа $l_{aa}l_{bb} \geq (l_{ab} + l_{ba})^2$. С помощью определяющих соотношений при использовании законов сохранения и уравнения баланса, приведенных в разд. 1 и 2, можно в принципе определить эволюцию во времени всех локальных макроскопических параметров состояния релятивистской жидкости.

4.1. Производство энтропии

В этом разделе приведены явные выражения для определяющих линейных соотношений в случае релятивистских систем, рассмотренных в предыдущих разделах, и исследованы общие свойства матрицы феноменологических коэффициентов.

Диффузионные потоки $J_k^\alpha(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) были определены в (48) и (49) таким образом, что их сумма по компонентам k исчезает. Имея в виду далее использовать только независимые диффузионные потоки, исключим поток $J_N^\alpha(x)$ из выражения (88) для потока энтропии. В результате получим

$$J_s^\alpha = \frac{1}{T} \left\{ J_q^\alpha - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k - \mu_N) J_k^\alpha \right\}. \quad (90)$$

Разложим выражение (89) для производства энтропии $\sigma(x)$ на следующие две части:

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x), \quad (91)$$

где

$$T\sigma_1(x) := P^{\alpha\nu}\partial_\nu U_\alpha, \quad (92)$$

$$T\sigma_2(x) := -J_q^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu}\partial^\nu p}{hn} \right) - T \sum_{k=1}^N J_k^\alpha \partial_\alpha \left(\frac{\mu_k}{T} \right). \quad (93)$$

Преобразование первой части σ_1 производства энтропии. Для удобства выполнения дальнейших операций разобьем тензор вязкого давления $P^{\alpha\nu}(x) := \Delta_\sigma^\alpha T^{\sigma\tau} \Delta_\tau^\nu + p\Delta^{\alpha\nu}$ следующим образом:

$$P^{\alpha\nu}(x) = -P\Delta^{\alpha\nu} + \overset{\circ}{P}{}^{\alpha\nu}. \quad (94)$$

Здесь $\Delta^{\alpha\beta}(x) := g^{\alpha\beta} - c^2 U^\alpha(x)U^\beta(x)$ – тензор-проектор, который обладает рядом используемых далее свойств (17); $\overset{\circ}{P}{}^{\alpha\nu}(x)$ – тензор вязкого давления с нулевым следом;

$$P = -\frac{1}{3} P^{\alpha\nu} \Delta_{\alpha\nu} \quad (95)$$

– вязкое давление, определяемое как взятая со знаком минус одна треть следа тензора вязкого давления, $P(x) := -\frac{1}{3} P^\alpha_\alpha$. Последнее определение следует из соотношения

$$P^{\alpha\nu} \Delta_{\nu\alpha} = P^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha} = P^\alpha_\alpha, \quad (96)$$

где первое равенство является следствием:

- (i) определения тензора-проектора (15);
- (ii) определений (28) и (30) для тензора давления $P^{\alpha\beta} := \Delta_\sigma^\alpha T^{\sigma\tau} \Delta_\tau^\beta$ и тензора вязкого давления

$$P^{\alpha\beta} := P^{\alpha\beta} + p\Delta^{\alpha\beta}; \quad (97)$$

- (iii) соотношения ортогональности (16), $\Delta^{\alpha\beta}(x)U_\beta(x) = 0$. Используя эти же вспомогательные формулы, а также формулы (17) и (94), можно доказать, что справедливо равенство

$$\overset{\circ}{P}{}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{P}{}^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha} = \overset{\circ}{P}{}^{\alpha\nu} \nabla_{\nu\alpha} = 0, \quad (98)$$

т.е. что тензор $\overset{\circ}{P}^{\alpha\nu}$ действительно имеет нулевой след, что, впрочем, было ясно уже из соотношений (94) с (95).

Заметим, что тензоры $P^{\alpha\nu}(x)$, $\overset{\circ}{P}^{\alpha\nu}(x)$ и $\overset{\circ}{\Pi}^{\alpha\nu}(x)$ являются пространственно-подобными; это означает, что в сопутствующей системе координат, где гидродинамическая скорость $U^\alpha(x)$ имеет компоненты $(c, 0, 0, 0)$, они имеют только пространственные компоненты. Эти тензоры также симметричны, что видно из их определения.

Если теперь разложение (94) подставить в соотношение (92) для производства энтропии через вязкие процессы, то получим

$$T\sigma_1 = -P\Delta^{\alpha\nu}\partial_\nu U_\alpha + \overset{\circ}{P}^{\alpha\nu}\overset{\circ}{\partial}_\nu U_\alpha. \quad (99)$$

Из (99) видно, что полный вклад вязких явлений в производство энтропии оказывается разделенным на две части. Из них первый вклад обусловлена наличием вязкого давления (второй вязкостью). Что касается второго члена в разложении (99), то из того факта, что тензор $\overset{\circ}{P}^{\alpha\nu}(x)$ является симметричным и пространственно-подобным, можно заключить, что от ковариантной производной $\overset{\circ}{\partial}_\nu U_\alpha$ остается только ее симметричная, пространственно-подобная и бесследовая часть: эту величину будем далее обозначать кривой полоской со знаком нуля над ней. Таким образом, вместо (99) можно написать

$$T\sigma_1 = -P\nabla^\alpha U_\alpha + \overset{\circ}{P}^{\alpha\nu}\overset{\circ}{\nabla}_\alpha U_\nu, \quad (100)$$

где $\overset{\circ}{\nabla}^\alpha U^\nu = \left[\frac{1}{2}(\Delta_\sigma^\alpha \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\alpha) - \frac{1}{3}\Delta^{\alpha\nu}\Delta_{\sigma\tau} \right] \nabla^\sigma U^\tau$.

Преобразование второй части σ_2 производства энтропии. В соотношении (93) для величины σ_2 фигурируют в качестве термодинамических диффузионных сил градиенты химических потенциалов μ_k , деленные на температуру T .

Эти величины не измеряются экспериментально. По этой причине их удобно преобразовать таким образом, чтобы они выражались в виде линейных комбинаций градиентов концентраций и температуры.

Химический потенциал компоненты сорта k является функцией давления p , температуры T и числа частиц N_k k -ой компоненты (см. Приложение). Определим соотношением

$$\partial_\alpha \left(\frac{\mu_k}{T} \right) = \frac{(\partial_\alpha \mu_k)_T}{T} + \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\mu_k}{T} \right)_{p, \{N_k\}} \partial_\alpha T, \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (101)$$

ковариантную производную $(\partial_\alpha \mu_k)_T$ от μ_k при постоянной температуре. Здесь введено обозначение $\{N_k\}$ для множества N_1, N_2, \dots, N_N . Используя теперь известное термодинамическое соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\mu_k}{T} \right)_{p, \{N_k\}} = -\frac{h_k}{T^2}, \quad (k=1, 2, \dots, N), \quad (102)$$

где h_k – парциальная энтальпия, приходящаяся на одну частицу сорта k , перепишем выражение (101) в виде

$$T \partial_\alpha \left(\frac{\mu_k}{T} \right) = (\partial_\alpha \mu_k)_T - \frac{h_k}{T} \partial_\alpha T, \quad (\alpha=0, 1, 2, 3; k=1, 2, \dots, N), \quad (103)$$

в котором производные $(\partial_\alpha \mu_k)_T$ зависят уже только от градиентов долей числа частиц x_1, x_2, \dots, x_N , определенных соотношением (47), и являются, таким образом, непосредственно измеряемыми величинами.

С помощью (103) вторую часть σ_2 (93) производства энтропии, умноженную на температуру T , можно записать в виде

$$T \sigma_2(x) := -J_q^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) - T \sum_{k=1}^N J_k^\alpha \left[(\partial_\alpha \mu_k)_T - \frac{h_k}{T} \partial_\alpha T \right] \quad (104)$$

или, после некоторой перегруппировки слагаемых, в другом, более удобном для дальнейших преобразований виде

$$T\sigma_2(x) = - \left(\mathbf{J}_q^\alpha - \sum_{k=1}^N h_k \mathbf{J}_k^\alpha \right) \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) - \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k^\alpha \left[(\partial_\alpha \mu_k)_T - \frac{h_k}{hn} \Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p \right]. \quad (105)$$

Если теперь исключить с помощью соотношения (49) диффузионный поток \mathbf{J}_N^α из (105), то в результате будем иметь

$$T\sigma_2(x) = - \left(\mathbf{J}_q^\alpha - \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{J}_k^\alpha (h_k - h_N) \right) \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) - \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{J}_k^\alpha \left\{ [\partial_\alpha (\mu_k - \mu_N)]_T - \frac{h_k - h_N}{hn} \Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p \right\}. \quad (106)$$

Термодинамические силы, стоящие в левой части этого уравнения, являются теперь линейно независимыми величинами.

Наконец, объединяя выражения (99) и (106), получим окончательное выражение для полного производства энтропии

$$T\sigma = -\Pi \partial_\alpha U^\alpha - \tilde{\mathbf{J}}_q^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha T}{T} - \frac{\Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p}{hn} \right) - \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{J}_k^\alpha \left\{ [\partial_\alpha (\mu_k - \mu_N)]_T - \frac{h_k - h_N}{hn} \Delta_{\alpha\nu} \partial^\nu p \right\} + \overset{\circ}{\Pi}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{\partial}_\nu U_\alpha, \quad (107)$$

при написании которого использовано следующее обозначение для так называемого приведенного теплового потока:

$$\tilde{\mathbf{J}}_q^\alpha := \mathbf{J}_q^\alpha - \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{J}_k^\alpha (h_k - h_N), \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \quad (108)$$

Второй член в этом выражении описывает передачу тепла за счет переноса энтропии диффузией (заметим, что для диффундирующих смесей возможны различные определения потока тепла, зависящие от удобства описания процесса передачи тепла, причем каждому определению соответствует своя специальная

форма представления для производства энтропии σ ; важно, что при этом все физические результаты остаются неизменными).

4.2. Феноменологические (определяющие) соотношения

Перепишем теперь выражение (107), представляющее собой сумму произведений необратимых потоков и сопряженных с ними термодинамических сил различных тензорных порядков, в следующем виде:

$$T\sigma = \Pi X_U + \tilde{J}_q^\alpha X_{q\alpha} + \sum_{k=1}^{N-1} J_k^\alpha X_{k\alpha} + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{X}{}_{\nu\alpha}, \quad (109)$$

где

$$X_U := -\nabla^\alpha U_\alpha \quad (110)$$

– термодинамическая сила (4-дивергенция гидродинамической скорости), сопряженная с потоком, обусловленным вязким давлением Π ;

$$\overset{\circ}{X}{}^{\alpha\nu} := \overset{\circ}{\nabla}{}^\alpha U^\nu = \left[\frac{1}{2} (\Delta_\sigma^\alpha \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\alpha) - \frac{1}{3} \Delta^{\alpha\nu} \Delta_{\sigma\tau} \right] \nabla^\sigma U^\tau \quad (111)$$

– термодинамическая сила (тензор сдвига), сопряженная с $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$;

$$X_q^\alpha := -\frac{\nabla^\alpha T}{T} + \frac{\nabla^\alpha p}{hn} = -\nabla^\alpha \ln T + \frac{k_B T}{h} \nabla^\alpha \ln p, \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (112)$$

– связанная с тепловым потоком \tilde{J}_q^α термодинамическая сила, включающая градиент температуры и пропорциональный градиенту давления так называемый член Экарда (чисто релятивистский эффект, обусловленный зависимостью энтропии h от энергии покоя mc^2 (см. Приложение));

$$X_k^\alpha := -\left[\nabla^\alpha (\mu_k - \mu_N) \right]_T + \frac{h_k - h_N}{hn} \nabla^\alpha p, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (113)$$

– диффузионные термодинамические силы, сопряженные с независимыми диффузионными потоками J_k^α (эти силы могут быть записаны следующем виде, непосредственно доступном для эксперимента:

$$X_k^\alpha = k_B T \left[\nabla^\alpha \ln \left(\frac{x_k}{x_N} \right) - \frac{h_k - h_N}{h} \nabla^\alpha \ln p \right], \quad (113^*)$$

при использовании производной $(\partial^\alpha \mu_k)_{p,T} = k_B T \partial^\alpha \ln x_k$ для химического потенциала μ_k).

Для получения определяющих соотношений, линейно связывающих между собой независимые потоки и термодинамические силы, используем выражение (109). В принципе каждая компонента потока в этом выражении может быть функцией компонент всех термодинамических сил. Однако потоки и термодинамические силы в (109), как нетрудно видеть, обладают различными тензорными свойствами: являются скалярами, векторами и тензорами. Это означает, что трансформационные свойства указанных объектов, детерминированные при обычных пространственных вращениях их поведением относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца, являются различными (см. Вайнберг, 2000). В результате может оказаться, что, в силу свойств симметрии рассматриваемой среды, отдельные компоненты какого-либо потока будут зависеть не от всех компонентов термодинамических сил (принцип симметрии Кюри). В частности, для изотропной среды потоки и термодинамические силы различной тензорной размерности не зависят друг от друга (de Groot, Mazur, 1962).

Прежде чем переходить к написанию линейных законов, сделаем еще одно замечание по поводу определения кинетических коэффициентов. В релятивистской кинетической теории используются разнообразные формы этих коэффициентов (см., например, Eckart, 1940; Israel, 1963; Chandrasekhar, 1965; Weinberg, 1976; Кох и др., 1976). В данной работе мы будем придерживаться той точки зрения, что линейные законы должны быть сформулированы с помощью потоков и сил, которые входят в выражение для локального прироста энтропии (109). При таком выборе кинетические коэффициенты принимают вид, который в контексте релятивистской неравновесной термодинамики является наиболее естественным. В случае необходимости связь с другими видами для этих коэффициентов, может быть легко установлена.

В соответствии с общей концепцией конструирования определяющих соотношений в необратимой термодинамике, релятивистские определяющие соотношения для изотропной среды, связанные с вкладом вязкости в производство энтропии, принимают вид

$$P = \eta_U X_U = -\eta_U \nabla^\alpha U_\alpha, \quad (114)$$

$$P^{\alpha\nu} = 2\eta \overline{\nabla^\alpha U^\nu} = \eta \left[\left(\Delta_\sigma^\alpha \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\alpha \right) - \frac{2}{3} \Delta^{\alpha\nu} \Delta_{\sigma\tau} \right] \nabla^\sigma U^\tau \quad (115)$$

– тензорный закон для вязкого потока. Здесь $\eta_U(n, T)$, $\eta(n, T)$ – соответственно скалярный коэффициент объемной вязкости и скалярный коэффициент сдвиговой вязкости.

Линейное соотношение для приведенного теплового потока \tilde{J}_q^α , определяемого выражением (108), принимает вид

$$\tilde{J}_q^\alpha = l_{qq} X_q^\alpha + \sum_{k=1}^{N-1} l_{qk} X_k^\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (116)$$

который связывает поток \tilde{J}_q^α и термодинамические силы (112) и (113). По сравнению с линейным законом для простой системы (см. (117)), в случае смеси имеет место ряд дополнительных членов, представляющих собой тепловой поток, обусловленный градиентами компонентов смеси. Это явление, называемое эффектом Дюфура, или диффузионным термоэффектом, определяется коэффициентами $l_{qk}(n, T)$.

В релятивистской среде существует также обратный перекрестный эффект между диффузией и теплопроводностью, называемый термической диффузией. Этот эффект проявляется в том случае, когда линейный закон для диффузионных потоков используется в виде

$$J_k^\alpha = l_{kq} X_q^\alpha + \sum_{j=1}^{N-1} l_{kj} X_j^\alpha, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (116)$$

Эффект термической диффузии характеризуется тензором коэффициентов термической диффузии $l_{kj}(n, T)$ и др.

Относительно кинетических коэффициентов переноса добавим следующее: информация об этих коэффициентах может быть получена с использованием релятивистской кинетической теории (de Groot и др., 1975; Liu и др., 1986). В частности, в работе (Сох и др. 1976) были получены аналитические и численные результаты для первых трех приближений к коэффициентам переноса газа, состоящего из массивных частиц с постоянным дифференциальным сечением; был изучен полный температурный режим поведения этих коэффициентов как для слаборелятивистского, так и для ультрарелятивистского газа.

4.3. Релятивистская гидродинамика идеальной среды, с учетом вязкости и теплопроводности

Рассмотрим теперь гидродинамические уравнения, которые получаются, если скомбинировать определяющие соотношения (114)-(116) с уравнениями непрерывности, движения и энергии, выведенными в разд. (2). Для простой среды эти соотношения принимают вид

$$J_q^\alpha(x) = \lambda \left(\nabla^\alpha T - T(hn)^{-1} \nabla^\alpha p \right), \quad (117)$$

$$P^{\alpha\nu}(x) = \eta_U \Delta^{\alpha\nu} \partial_\sigma U^\sigma + 2\eta \overline{\nabla^\alpha U^\nu}, \quad (118)$$

где $\lambda(n, T)$, $\eta_U(n, T)$ и $\eta(n, T)$ – соответственно скалярные коэффициенты теплопроводности, объемной вязкости и сдвиговой вязкости.

С помощью этих законов и уравнений состояния

$$p = nk_B T, \quad (119)$$

$$e = mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \dots \quad (120)$$

можно преобразовать уравнения баланса для плотности числа частиц n , гидродинамической скорости U^α и энергии на одну частицу e в систему дифференциальных уравнений в частных производных для переменных n , U^α и T .

Однако, если просто подставить линейные законы (117) и (118) в уравнения баланса, то получится громоздкий результат, не имеющий, по-видимому, какой-либо практической ценности. Поэтому обычно предполагается, что градиенты полевых величин можно считать малыми, что позволяет линеаризовать по этим градиентам балансовые уравнения, т.е. пренебречь членами, содержащими произведения потоков и градиентов. Коэффициенты переноса при этом можно считать постоянными.

Уравнение непрерывности (60), не содержащее каких-либо необратимых величин, сохраняет свою форму

$$D_u n = -n \nabla_\alpha U^\alpha. \quad (121)$$

Уравнение релятивистского движения (66) после подстановки выражения (118) и линеаризации имеет вид

$$c^{-2} h n D_u U^\alpha = \nabla^\alpha p - \eta_U \nabla_\tau U^\tau - 2\eta \nabla_\nu \overline{\nabla^\alpha U^\nu} - c^{-2} D_u J_q^\alpha. \quad (122)$$

Наконец, чтобы выразить временную производную теплового потока через градиенты, необходимо использовать уравнение для энергии (69), которое в силу калорического уравнения (120) и линейных законов (117) и (118) принимает вид

$$n c_v D_u T = -p \nabla_\alpha U^\alpha - \lambda \left(\nabla^2 T - \frac{T}{h n} \nabla^2 p \right). \quad (123)$$

Здесь $\nabla^2 := \nabla^\alpha \nabla_\alpha$, а $c_v := \partial e / \partial T$ – теплоемкость на одну частицу. Используя отношение теплоемкостей на одну частицу $\gamma = c_p / c_v = 1 + k_B / c_v$ (см. Приложение), уравнение для энергии (123) можно записать следующим образом:

$$\frac{D_u T}{T} = (1 - \gamma) \left[\nabla_\alpha U^\alpha + \frac{\lambda}{p} \left(\nabla^2 T - \frac{T}{h n} \nabla^2 p \right) \right]. \quad (124)$$

Выразим теперь последний член уравнения движения (122) через переменные n , U^α и T . Из (119), (121) и (124) вытекает соотношение $D_u p = \gamma p \nabla_\alpha U^\alpha$, используя которое получаем для временной производной теплового потока (117) искомое представление:

$$c^{-2} D_u J_q^\alpha = \xi \nabla^\alpha \nabla_\nu U^\nu, \text{ где } \xi := \frac{\lambda T}{c^2 h} [(1 - \gamma)h + \gamma k_B T]. \quad (125)$$

Уравнения (121), (122), с учетом (125), и (124) образуют самосогласованную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая полностью описывает временную эволюцию релятивистской жидкости при условии, что заданы соответствующие начальные и граничные условия. Эти уравнения представляют собой релятивистское обобщение классических уравнений Навье–Стокса динамики сплошных сред. Они отличаются от уравнений для идеальных сред (ср. разд. 2) наличием членов, которые пропорциональны коэффициентам переноса и которые описывают диссипативные эффекты в системе. Аналогичные уравнения могут быть получены и для многокомпонентной смеси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сконструирована релятивистская термогидродинамика для многокомпонентной диссипативной жидкой среды. Релятивистская термодинамика представлена здесь как теория поля. Уравнения поля основаны на постулируемых законах сохранения таких фундаментальных макроскопических величин, как 4-вектор потока частиц N^α , 4-тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ и 4-вектор потока энтропии S^α . Линейные определяющие соотношения для диссипативных потоков теплопроводности, вязкости и диффузии получены из явного уравнения баланса энтропии, основанного на релятивистском соотношении Гиббса, традиционная форма которого предполагается справедливой (в первом приближении по потокам переноса) для локально равновесной системы. Представленная работа представляет собой более современную версию релятивистской необратимой термодинамики многокомпонентных сред, чем ранние работы Эккарта, Миллера и Израэля. В то же время предложенная здесь версия, обобщающая классический подход де Гроота и Мазура к построению необратимой термодинамики на релятивистские среды, содержит меньшее число неизвестных функций, чем в указанных работах.

Вместе с тем важно иметь в виду, что рассмотренный здесь подход к конструированию релятивистской гидродинамики содержит фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения для теплового потока и вязкости, что противоречит принципу причинности (Israel, 1976; Weinberg, 1976; Hiscock, 1985). Следует заметить, что бесконечные скорости распространения теплового потока и вязкости представляют собой известную трудность уже на классическом уровне, поскольку в реальности нельзя ожидать, что тепловые возмущения будут переноситься быстрее, чем некоторая средняя молекулярная скорость. Таким образом, релятивистская теория, как и классическая, применима только к явлениям, которые являются «квазистационарными», т.е. медленно изменяющимися в пространстве и времени, характеризуемых средним свободным путем и средним временем столкновения (см. de Groot, Mazur, 1962).

Однако все это не подходит для многих явлений в астрофизике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями. Этот эффект объясняется тем, что традиционный термодинамический подход (как классический, так и релятивистский) основан на слишком ограничительной гипотезе относительно взаимосвязи между потоками и термодинамическими силами. В частности, в случае простой жидкости обычные теории постулируют, что поток энтропии просто пропорционален потоку тепла и что плотность энтропии не зависит от потоков тепла и вязкости. Как показала кинетическая теория, этот постулат действительно верен до первого порядка при отклонениях от равновесия; однако для того, чтобы найти эффективные феноменологические законы из выражения для производства энтропии, требуется уже второй порядок. Пренебрежение членами второго порядка в плотности и потоке энтропии приводит к ошибкам того же порядка в производстве энтропии, за исключением случаев, когда пространственно-временные градиенты теплового потока и вязкого напряжения и диффузии пренебрежимо малы, т.е. в квазистационарных условиях.

По этой причине целью второй части данной работы является устранение указанных недостатков путем систематического сохранения членов второго порядка по потокам в 4-векторе потока энтропии и получении на его основе определяющих релаксационных уравнений. Это приводит к необходимости использования методов так называемой расширенной необратимой термодинамики многокомпонентных сред (Jou и др. 1993; Liu, Muller, 1983), которая выходит за пределы гипотезы о локальном равновесии за счет модификации потоков соответствующих физических величин, выступающих в качестве дополнительных независимых переменных.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые термодинамические соотношения, описывающие идеальную релятивистскую жидкость в равновесии

1. Простая система

$p = nk_B T$ – термическое уравнение состояния;

$e = mc^2 \frac{K_3(mc^2 / k_B T)}{K_2(mc^2 / k_B T)} - k_B T$ – энергия на одну частицу;

$h = e + pn^{-1}$ – энтальпия на одну частицу;

Энергия e и энтальпия h при низких температурах:

$$e = mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \dots, \quad h = mc^2 + \frac{5}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \dots;$$

$c_p = (\partial h / \partial T)_p = k_B \frac{d}{dz^{-1}} \frac{K_3(z)}{K_2(z)}$ – теплоемкость при постоянном давлении;

$c_v = (\partial e / \partial T)_v$ – теплоемкость при постоянном объеме; $c_v = c_p - k_B$;

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} \frac{k_B T}{mc^2} + \dots$ – низкотемпературное отношение теплоемкостей;

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + k_B}{c_v} = 1 + k_B / c_v, \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \left(\frac{mc^2}{k_B T} \right)^2 + 5 \frac{h}{k_B T} - \left(\frac{h}{k_B T} \right)^2;$$

$S = sn = \frac{1}{T}(en - \mu n) + k_B n$ – плотность энтропии; $\mu = e + pn^{-1} - Ts = h - Ts$ – функция Гиббса (термодинамический потенциал), приходящаяся на одну частицу.

Модифицированная функция Бесселя второго рода

$$K_n(z) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{1}{z^2} \int_z^\infty (\tau^2 - z^2)^{n-3/2} \tau \exp(-\tau) d\tau; \text{ асимптотическое представ-}$$

ление $K_n(z)$ для больших z (при низких температурах) (см. Abramowitz, Stegun, 1968)

$$K_n(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{1}{e^z} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)^2(4n^2 - 9)}{2(8z)^2} + \dots \right].$$

2. Многокомпонентная смесь

$$e = \sum_k x_k e_k \quad h = \sum_k x_k h_k; \quad e_k = m_k c^2 \frac{K_3(m_k c^2 / k_B T)}{K_2(m_k c^2 / k_B T)} - k_B T - \text{энергия на одну ча}$$

стицу k -го сорта; $e_k = m_k c^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{m_k c^2} + \dots;$

$$h_k = m_k c^2 + \frac{5}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{m_k c^2} + \dots; \quad c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = \sum_k x_k \frac{de_k}{dT},$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_v = \sum_k x_k \frac{dh_k}{dT} - \text{теплоемкости для смеси, приходящиеся на одну ча-}$$

стицу; $\gamma_k = (dh_k / dT) / (de_k / dT)$ – отношения теплоемкостей для частиц k -го сорта

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_k - 1} = \left(\frac{m_k c^2}{k_B T} \right)^2 + 5 \frac{h_k}{k_B T} - \left(\frac{h_k}{k_B T} \right)^2, \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \sum_k x_k \frac{\gamma_k}{\gamma_k - 1};$$

$s = \frac{1}{T} \left(e + pn^{-1} - \sum_k x_k \mu_k \right)$ – энтропия на одну частицу смеси;

$\sum_k x_k \mu_k := \mu \equiv e + pn^{-1} - Ts = h - Ts$ – релятивистское соотношение Эйлера;

$n^{-1} \partial_\nu p - s \partial_\nu T - \sum_{k=1}^N x_k \partial_\nu \mu_k = 0$ – релятивистское соотношение Гиббса-Дюгема;

$T \partial_\nu s = \partial_\nu e + p \partial_\nu n^{-1} - \sum_{k=1}^N \mu_k \partial_\nu x_k$ – релятивистское соотношение Гиббса;

$c \mu_k = k_B T \ln \frac{(2\pi\hbar)^3 n_k}{4\pi m_k^2 c k_B T K_2(m_k c^2 / k_B T)}$ – химический потенциал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. VI // М.: Наука. 1988. 736 с.

Alts T., Müller I. Relativistic thermodynamics of simple heat conducting fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972. V. 48. № 4. P. 245-273.

Abramowitz M, Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. - New York: Dover. 1968. [Имеется перевод: Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979.]

van Dantzig D. On the phenomenological thermodynamics of moving matter // Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 1939, V. 42, 608 p.

Chandrasekhar S. The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity // Astroph. J. 1965. V. 142. P. 1488-1512.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: A review of open problems and current proposals // Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Cox A. Y., de Groot S. R., van Leeuwen W. A. On relativistic kinetic gas theory XVI. The temperature dependence of the transport coefficients for a simple gas of hard spheres // Physica. 1976. V. 84A. P. 155-164.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // *Phys. Rev.* 1940. V. 58. P. 919-928.

de Groot S.R., Mazur P. *Non-Equilibrium Thermodynamics* // North-Holland, Amsterdam. 1962, Chap. II and III

de Groot S. R., van Weert C. G., Hermens W. T., van Leeuwen W. A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // *Physica.* 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S. R., van Weert C. G., Hermens W. T., van Leeuwen W. A. On relativistic gas theory II. Reciprocal relations between transport phenomena // *Physica.* 1969. V. 40. P.581-593.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T., van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory III. The non-relativistic limit and its range of validity // *Physica.* 1969. V. 42. P. 309-319.

de Groot S. R., Mazur. *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam 1962.

de Groot W.A., van Leeuwen W., Meltzeril P. H. Transport Coefficients of a Neutrino Gas // *Nuovo Cimento.* 1975 V. 25A. № 2. P. 229-251.

Havas P., Swenson R.J. Relativistic thermodynamics of fluids. I. // *Annals of Physics.*1979. V. 118. P. 259-306.

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Israel W. Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory // *Ann. Physic.* 1976. V. 100. P. 310-331.

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics* // Springer Berlin. 1993.

Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeit its verteilung in der Relativtheorie // *Annalen der Physik* 1911. Bd 34. S.856-882.

Kluitenberg G. A., de Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; Formal part // *Physica.* 1953. V. 19. P. 689-794.

Kluitenberg G.A., de Groot S.R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes II. Heat conduction and diffusion; Physical part // *Physica* 1953. V.19. P. 1079-1094.

Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics* // Pergamon, Oxford. 1959. 499 p.

Liu I-S., Muller T., Ruggeri B. Relativistic Thermodynamics of Gases // *Annals of Physics*. 1986. V. 169. P. 191-219.

Meixner J. The entropy concept in non-equilibrium thermodynamics // *J. Phys. Soc. Japan*. 1969. V. 26 Suppl., Proc. Int. Conf. Stat. Mech. 1968.

Müller I. Thermodynamics of diffusive and reacting mixtures of fluids // *Physica* 20D. 1968. V. 20. P. 35-66.

Weinberg S. *Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity* (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. *Гравитация и космология* // М. : Мир. 1976].

Weinberg S. Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe // *Astrophysical Journal*. 1971. V. 168. P. 175-194.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Основные макроскопические величины	6
2. Балансовые уравнения механики и термодинамики	15
3. Закон энтропии и баланс энтропии	21
4. Феноменологические уравнения	27
Заключение	38
Приложение. Некоторые термодинамические соотношения	40
Список литературы	42