ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.И. Караваева

Бикомпактные схемы для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Караваева Н.И. Бикомпактные схемы для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 25. 16 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-25
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-25

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Н.И. Караваева

Бикомпактные схемы для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии

Москва — 2023

Караваева Н.И.

Бикомпактные схемы для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии

Предложены и реализованы бикомпактные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для одного из этапов HOLO алгоритма для решения уравнения переноса излучения, представляющего собой решение системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии. Схемы обладают четвертым порядком аппроксимации по пространству на двухточечном шаблоне, интегрирование по времени проводится при помощи диагонально-неявного метода Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации, каждая стадия которого может быть представлена как неявный метод Эйлера. Для нахождения решения предложено организовать итерационный процесс, так как коэффициенты системы являются нелинейными функциями температуры. Схемы применены к ряду аналитических тестов, в которых показана сходимость по времени и пространству с заявленными порядками.

Ключевые слова: уравнение переноса, метод квазидиффузии, HOLO алгоритмы решения уравнения переноса, диагонально-неявные методы Рунге–Кутты.

Nataliia Igorevna Karavaeva

Bicompact schemes for the joint solution of a one-group system of quasi-diffusion equations with the energy equation

High-order bicompact schemes are proposed for one of the stages of the HOLO algorithm for solving the radiative transport equation and implemented. The system of quasi-diffusion equations is solved together with the energy equation. The schemes have a fourth-order approximation in space on a two-point stencil, integration over time is carried out using the diagonal-implicit Runge–Kutta method of the third order of approximation, each stage of the method can be represented as an implicit Euler method. It is proposed to organize an iterative process to find a solution, since the coefficients of the system are non-linear functions of temperature. The schemes are used for a number of analytical tests, the convergence in time and space with the declared orders is shown.

Key words: transport equation, quasi-diffusion method, HOLO algorithms for transport equation solving, diagonally implicit Runge-Kutta method.

1. Введение

Линейное уравнение переноса описывает процесс переноса излучения или незаряженных частиц. К необходимости решения уравнения переноса приводят различные задачи науки и техники от моделирования конструкции и поведения активных зон быстрых реакторов до расчета сложных газодинамических течений, сопровождающихся активным переносом излучения, как, например, в задачах УТС или при входе возвращаемых космических аппаратов в атмосферу Земли.

Система уравнений радиационной газовой динамики сложна. В рамках расщепления по физическим процессам выделяют блок решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением баланса энергии, что позволяет описать процессы взаимодействия излучения с веществом, такие как поглощение, излучение и перенос фотонов [1,2]. В одномерной плоской геометрии задача принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\mu\frac{\partial I_\nu}{\partial x}+\kappa'_\nu I_\nu=\kappa'_\nu I_\nu^{Pl}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\int_0^\infty\int_{-1}^{1}\kappa'_\nu(I_\nu-I_\nu^{Pl})\,d\nu\,d\mu. \tag{2}$$

Уравнение переноса (1) и уравнение энергии (2) дополняются уравнением состояния

$$\varepsilon=\varepsilon(T), \tag{3}$$

а также начальными и граничными условиями

$$\begin{gathered} I_\nu(x,0,\mu,\nu)=\psi(x,\mu,\nu),\\ I_\nu(x,0,\mu,\nu)\big|_{x=0}=\varphi_0(t,\mu,\nu)\quad\text{при}\quad\mu>0,\\ I_\nu(x,0,\mu,\nu)\big|_{x=L}=\varphi_L(t,\mu,\nu)\quad\text{при}\quad\mu<0,\\ T(x,0)=T_{in}(x), \end{gathered} \tag{4}$$

где $I_\nu(x,t,\mu,\nu)$ – спектральная интенсивность излучения, $\varepsilon(T)$ – внутренняя энергия вещества, $T(x,t)$ – температура вещества, $\kappa'_\nu(T,\nu)$ – спектральный коэффициент поглощения излучения с поправкой на вынужденное испускание, $I_\nu^{Pl}(T,\nu)$ – спектральная интенсивность равновесного излучения, c – скорость света, μ – косинус угла направления полета частицы, составляемого с направлением оси x.

Спектральная интенсивность излучения в рассматриваемой задаче зависит от времени, пространственной координаты, направления полета частицы, а также от энергии, так что размерность задачи очень велика. Сложность решения уравнения переноса излучения определяется также тем, что взаимодействие излучения с веществом нелинейно и нелокально.

Задача (1-4) может быть решена в многогрупповом приближении, тогда уравнения (1-2), начальные и граничные условия (4) примут вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I^p}{\partial t}+\mu\frac{\partial I^p}{\partial x}+\kappa_U^p I^p=\kappa_{PI}^p I_{PI}^p, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\int_{-1}^{1}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}(\kappa_U^p I^p-\kappa_{PI}^p I_{PI}^p)d\mu\,. \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &I^p(x,0,\mu)=\psi^p(x,\mu), \quad p=1,...,\mathrm{P},\\ &I^p(x,0,\mu)\big|_{x=0}=\varphi_0^p(t,\mu) \quad \text{при} \quad \mu>0,\\ &I^p(x,0,\mu)\big|_{x=L}=\varphi_L^p(t,\mu) \quad \text{при} \quad \mu<0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$T(x,0)=T_{in}(x), \tag{8}$$

где p – номер группы,

$$I^p(x,t,\mu)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu(x,t,\mu,\nu)d\nu, \qquad I_{PI}^p(T)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{PI}(T,\nu)d\nu,$$

$$\psi^p(x,\mu)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}}\psi(x,\mu,\nu)d\nu, \quad \varphi_0^p(t,\mu)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}}\varphi_0(t,\mu,\nu)d\nu, \quad \varphi_L^p(t,\mu)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}}\varphi_L(t,\mu,\nu)d\nu,$$

$$\kappa_{PI}^p(T)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}}\kappa'_\nu(T,\nu)I_\nu^{PI}(T,\nu)d\nu \Bigg/ \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{PI}(T,\nu)d\nu,$$

$$\kappa_U^p(T,\theta^p)=\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}}\kappa'_\nu(T,\nu)I_\nu^{PI}(\theta^p,\nu)d\nu \Bigg/ \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{PI}(\theta^p,\nu)d\nu,$$

$I^p(x,t,\mu)$ – групповая интенсивность излучения, θ^p – эффективная температура излучения [3,4], κ_U^p, κ_{PI}^p – коэффициенты поглощения в p-й группе.

Одним из подходов для решения задачи является использование HOLO алгоритмов, которые позволяют организовать эффективную связь решения

уравнения переноса с параметрами среды [5-13]. Одним из вариантов HOLO алгоритма является метод квазидиффузии В.Я. Гольдина [5,7].

Применение HOLO алгоритма состоит в совместном решении уравнения высокой размерности (HO – high order) и низкой размерности (LO – low order). При решении уравнения переноса излучения (уравнение HO) совместно с уравнением энергии размерность задачи понижается сначала за счет осреднения по угловым координатам. Вводятся групповые плотность $U^p(x,t)=\int_{-1}^{1} I^p(x,t,\mu)d\mu$ и поток излучения $W^p(x,t)=\int_{-1}^{1}\mu I^p(x,t,\mu)d\mu$, уравнение (5) интегрируют по μ с весом 1 и μ. В результате получается многогрупповая система уравнений квазидиффузии (уравнения LO 1), в которую входит групповой коэффициент квазидиффузии

$$D^p(x,t)=\int_{-1}^{1}\mu^2 I^p(x,t,\mu)d\mu \Big/ \int_{-1}^{1} I^p(x,t,\mu)d\mu,$$

замыкающий систему уравнений [5]. Далее проводят осреднение по энергии и получают одногрупповую систему уравнений квазидиффузии (уравнения LO 2), из которой могут быть найдены одногрупповая плотность и поток излучения. Постановка задачи будет приведена в следующем разделе.

В данной работе предложены бикомпактные схемы третьего порядка по времени и четвертого порядка аппроксимации по пространству для одного из этапов HOLO алгоритма, в котором решается одногрупповая система уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии. Бикомпактные схемы для уравнений HO были предложены Б.В. Роговым [14-20]. Разностные схемы для уравнений LO 1 разработаны авторами [21,22] на основе схем Б.В. Рогова. Объединение решения всех этапов HOLO алгоритма [23] позволит применить предложенные разностные схемы для блока решения уравнения переноса совместно с уравнением баланса энергии в задачах радиационной газовой динамики.

2. Постановка задачи

Эффективная одногрупповая система уравнений квазидиффузии в одномерной плоской геометрии имеет вид [23]

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial W}{\partial x}+\kappa_U U = Q_{PI}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\partial (DU)}{\partial x}+\kappa_R W+\zeta U = Q_W, \end{cases} \tag{9}$$

$$Q_W = 0, \quad U = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} U^p, \quad W = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} W^p, \quad \kappa_U = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} \kappa_U^p U^p \Big/ \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} U^p,$$

$$D = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} D^p U^p \Big/ \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} U^p, \quad \kappa_R = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} \kappa_R^p |W^p| \Big/ \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} |W^p|, \quad \zeta = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} (\kappa_R^p - \kappa_R) W^p \Big/ \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} U^p,$$

где U – плотность излучения, W – поток излучения, D – коэффициент квазидиффузии, κ_R^p – коэффициент поглощения, осредненный по Росселанду, в p-й группе, ζ – функционал, введенный для корректировки осреднения κ_R^p со знакопеременной весовой функцией W^p.

Начальные условия для системы (9), как и величины W^{in}, U^{in}, c_0, c_L, входящие в граничные условия (10), получаются тем же способом, что и сама система – осреднением начальных условий (7) по угловой переменной с весом 1 и μ и последующим суммированием по группам. Классический способ постановки краевых условий в HOLO алгоритмах состоит во введении дробно-линейных функционалов

$$\left.\frac{W - W^{in}}{U - U^{in}}\right|_{x=0} = c_0, \quad \left.\frac{W - W^{in}}{U - U^{in}}\right|_{x=L} = c_L. \tag{10}$$

Система (9) решается совместно с уравнением энергии (6), которое записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \kappa_U U - Q_{Pl} \tag{11}$$

и дополняется начальным условием (8). Для замыкания системы уравнений (9,11) она дополняется уравнением состояния (3) в виде [23]

$$\varepsilon = aT. \tag{12}$$

Коэффициенты поглощения κ_U, κ_R и правая часть Q_{Pl} являются нелинейными функциями температуры. Уравнение состояния (3) также может представлять собой нелинейную функцию температуры.

3. Построение схемы для одногрупповой системы уравнений квазидиффузии

Для численного решения задачи предлагается использовать бикомпактные схемы, обладающие высоким временным и пространственным порядком аппроксимации. Схемы строятся методом прямых аналогично схемам Б.В. Рогова [14-20] для уравнения переноса.

Построение пространственной аппроксимации начинается с расширения списка неизвестных и включения в него интегральных средних по ячейке (13), что позволяет достичь четвертого порядка аппроксимации по пространству на минимальном двухточечном шаблоне. Введем

$$\overline{u}_i = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x,t)\,dx, \qquad \overline{w}_i = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} W(x,t)\,dx. \tag{13}$$

Проинтегрируем каждое уравнение системы (9) по ячейке и получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \dfrac{1}{h}(W_{i+1} - W_i) + \overline{\kappa_U U_i} = \overline{Q}_{Pl\,i}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overline{w}_i}{\partial t} + \dfrac{1}{h}((DU)_{i+1} - (DU)_i) + \overline{\kappa_R W}_i + \overline{\zeta U_i} = \overline{Q}_{W\,i}, \end{cases} \tag{14}$$

где $\overline{Q}_{Pl\,i} = \dfrac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{Pl}\,dx, \quad \overline{Q}_{W\,i} = \dfrac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_W\,dx.$

Для замыкания системы (14) необходимо также проинтегрировать по ячейке дифференциальные следствия уравнений (9). Если исходная система была записана в виде

$$L_1(U,W) \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_U U = Q_{Pl}, \quad L_2(U,W) \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (DU)}{\partial x} + \kappa_R W + \zeta U = Q_W,$$

то первыми дифференциальными следствиями будут уравнения вида

$$\frac{\partial L_1(U,W)}{\partial x} = \frac{\partial Q_{Pl}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial L_2(U,W)}{\partial x} = \frac{\partial Q_W}{\partial x}.$$

Интегрируя по ячейке первые дифференциальные следствия и заменяя разность пространственных производных по формуле Эйлера–Маклорена

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx = \frac{h}{2}(g_{i+1} + g_i) - \frac{h^2}{12}(g'_{i+1} + g'_i) + O(h^5),$$

получим еще два уравнения, замыкающие систему (14):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(U_{i+1}-U_i)}{\partial t}+\dfrac{6}{h}(W_{i+1}-2\overline{w}_i+W_i)+(\kappa_U U)_{i+1}-(\kappa_U U)_i = Q_{Pl\,i+1}-Q_{Pl\,i}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(W_{i+1}-W_i)}{\partial t}+\dfrac{16}{h}((DU)_{i+1}-2\overline{(DU)}_i+(DU)_i)+(\kappa_R W)_{i+1}-(\kappa_R W)_i+ \\ \qquad\qquad +(\zeta U)_{i+1}-(\zeta U)_i = Q_{W\,i+1}-Q_{W\,i}. \end{cases} \qquad (15)$$

В систему (14) входит среднее от произведений $\overline{\kappa_U U_i}$, $\overline{\kappa_R W_i}$, $\overline{\zeta U_i}$. Для завершения построения разностной схемы предложим способ аппроксимировать выражение $\overline{\zeta U_i}$ с четвертым порядком по пространству. Воспользуемся формулой Симпсона для $\overline{\zeta U_i}$ и $\overline{u}_i$, получим

$$\overline{\zeta U_i}=(\zeta_{i+1}U_{i+1}+4\zeta_{i+1/2}U_{i+1/2}+\zeta_i U_i)/6, \qquad \overline{u}_i=(U_{i+1}+4U_{i+1/2}+U_i)/6$$

и далее исключим $U_{i+1/2}$ из формулы для $\overline{\zeta U_i}$:

$$\overline{\zeta U_i}=(\zeta_i-\zeta_{i+1/2})U_i/6+(\zeta_{i+1}-\zeta_{i+1/2})U_{i+1}/6+\zeta_{i+1/2}\overline{u}_i.$$

Аналогично аппроксимируем выражения $\overline{\kappa_U U_i}$, $\overline{\kappa_R W_i}$.

Среднее от произведения $\overline{(DU)}_i$, которое входит в систему (15), при решении модельной задачи аппроксимируем аналогично. Однако при решении задачи (5-8) необходимо будет использовать более простую аппроксимацию $\overline{(DU)}=\overline{D}\cdot\overline{u}$, которая в итоге приведет к схеме четвертого порядка аппроксимации [22] в силу кинетической согласованности разностных схем для НО, LO 1 и LO 2 уравнений.

Полученная система (14, 15) не содержит производных по пространству и может быть проинтегрирована по времени различными методами. В данной работе используется L–устойчивый диагонально-неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 1/3 & 0 & 1/3 & \\ 1 & -1/12 & 3/4 & 1/3 \\ \hline & -1/12 & 3/4 & 1/3 \end{array}. \qquad (16)$$

Преимуществом в реализации метода Рунге-Кутты с такой таблицей Бутчера является то, что каждая стадия этого метода может быть представлена как неявный метод Эйлера [25]. Для решения получаемой системы уравнений на каждом шаге по времени используется эффективный метод потоковой прогонки. Подробности реализации схемы можно найти в [21].

Как было показано в [25], использование граничных условий вида (10) позволяет достичь только второго порядка сходимости по времени вместо третьего для метода (16). В [25] также предлагается способ постановки граничных условий без понижения порядка сходимости метода по времени. Граничные условия задаются в виде

$$\begin{aligned} \mu_0(t)U(0,t)+\tau_0(t)W(0,t)=\eta_0(t),\\ \mu_L(t)U(L,t)+\tau_L(t)W(L,t)=\eta_L(t), \end{aligned} \tag{17}$$

а коэффициенты выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_0=1,\quad \tau_0=0,\quad \eta_0=U(0,t)+\Delta t U'_{ex}(0,t+\Delta t),\\ \mu_L=1,\quad \tau_L=0,\quad \eta_L=U(L,t)+\Delta t U'_{ex}(L,t+\Delta t), \end{aligned} \tag{18}$$

где U'_{ex} – производная точного решения для плотности излучения.

4. Разностная схема для уравнения энергии. Итерационный процесс

Уравнение баланса энергии (11) интегрируется по времени при помощи того же метода Рунге–Кутты (16), что и одногрупповая система уравнений квазидиффузии (9). Для нахождения узловых значений температуры T_i и средних значений температуры по ячейке

$$\overline{T}_i=\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}T(x,t)\,dx$$

на новом слое по времени необходимо организовать итерационный процесс на каждой из стадий метода Рунге–Кутты, которые могут быть сведены к использованию неявного метода Эйлера в виде

$$a\frac{\widehat{T}_i-T_i}{\Delta t}=\widehat{\kappa}_{U_I}\widehat{U}_i-\widehat{Q}_{Pl_I}, \tag{19}$$

$$a\frac{\widehat{\overline{T}}_i-\overline{T}_i}{\Delta t}=\widehat{\overline{\kappa}}_{U_I}\widehat{\overline{U}}_i-\widehat{\overline{Q}}_{Pl_I}, \tag{20}$$

где $\widehat{T}_i=T_i^{n+1}$, $\widehat{\kappa}_{U\,i}=\kappa_U(T_i^{n+1})$, $\widehat{U}_i=U_i^{n+1}$, $\widehat{Q}_{Pl_i}=Q_{Pl}(T_i^{n+1})$ и $\widehat{\overline{T}}_i=\overline{T}_i^{n+1}$, $\widehat{\overline{\kappa}}_{U\,i}=\kappa_U(\overline{T}_i^{n+1})$, $\widehat{\overline{U}}_i=\overline{U}_i^{n+1}$, $\widehat{\overline{Q}}_{Pl_i}=Q_{Pl}(\overline{T}_i^{n+1})$, а также учтено (12).

Рассмотрим способ линеаризации величин, входящих в правую часть уравнений (19, 20), на примере уравнения (19). Будем опускать

пространственный индекс, так как он одинаков для всех величин, входящих в (19, 20). Пусть s – номер итерации, тогда

$$\widehat{\kappa}_U^{(s)} = \widehat{\kappa}_U^{(s-1)} + \left.\frac{\delta\kappa_U}{\delta T}\right|_{T=\widehat{T}^{(s-1)}} \cdot (\widehat{T}^{(s)} - \widehat{T}^{(s-1)}), \quad \widehat{Q}_{Pl}^{(s)} = \widehat{Q}_{Pl}^{(s-1)} + \left.\frac{dQ_{Pl}}{dT}\right|_{T=\widehat{T}^{(s-1)}} \cdot (\widehat{T}^{(s)} - \widehat{T}^{(s-1)}).$$

Уравнение (19) примет вид

$$a\frac{\widehat{T}_i^{(s)} - T_i}{\Delta t} = \left(\widehat{\kappa}_U\widehat{U} - \widehat{Q}_{Pl}\right)_i^{(s-1)} + \left(\frac{\delta\kappa_U}{\delta T}\widehat{U} - \frac{dQ_{Pl}}{dT}\right)_i^{(s-1)} (\widehat{T}_i^{(s)} - \widehat{T}_i^{(s-1)}), \qquad (21)$$

из которого могут быть получены значения температуры на новом слое по времени на новой итерации в каждой точке сетки по пространству при известных значениях $\widehat{U}_i^{(s-1)}$. Полученные значения $\widehat{T}_i^{(s)}$ будут использоваться для нахождения $\widehat{U}_i^{(s)}$, $\widehat{W}_i^{(s)}$ из разностной схемы для одногрупповой системы уравнений квазидиффузии, которая примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U^{(s)}}{\partial t} + \dfrac{\partial W^{(s)}}{\partial x} + \kappa_U^{(s)}U^{(s)} = Q_{Pl}^{(s)}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial W^{(s)}}{\partial t} + \dfrac{\partial (D^{(s)}U^{(s)})}{\partial x} + \kappa_R^{(s)}W^{(s)} + \zeta^{(s)}U^{(s)} = Q_W^{(s)}. \end{cases} \qquad (22)$$

Коэффициенты системы и правые части рассчитываются по $\widehat{T}_i^{(s)}$, $\widehat{\widehat{T}}_i^{(s)}$, найденным из (19, 20). Итерационный процесс, состоящий из поочередного нахождения поля температур $\widehat{T}_i^{(s)}$, $\widehat{\widehat{T}}_i^{(s)}$ из (19, 20) и нахождения плотности $\widehat{U}_i^{(s)}$ и потока излучения $\widehat{W}_i^{(s)}$ из (22), повторяется до сходимости с заданной точностью ε. На каждом слое по времени на нулевой итерации значения температуры $\widehat{T}_i^{(0)}$ и плотности излучения $\widehat{U}_i^{(0)}$ приравняем к значениям с предыдущего слоя по времени.

5. Аналитические тесты

Пусть $x \in [0,1]$, $c = 2$, $a = 1$, $\varepsilon = 10^{-13}$, предложим несколько тестов для демонстрации порядков сходимости по времени и пространству.

Тест 1. Плотность и поток излучения зададим формулами $U(x,t) = A_1t^3 + A_2x^3$ и $W(x,t) = B_1t^3 + B_2x^3$ соответственно, а коэффициент поглощения $\kappa_U = T^2$. Коэффициенты κ_R и ζ в тесте 1 выберем не зависящими от температуры, так как их линеаризация в решении не проводится. Пусть $\kappa_R = 0.3 + 0.1\sin x$, $\zeta = 1 + \sin x$. Зависимость коэффициента квазидиффузии D

от пространственной переменной выберем в виде $D = 1/3 + 0.01(x - 0.5)^2$. Правые части системы уравнений (9) получим по формулам

$$Q_{Pl} = \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_U U, \qquad Q_W = \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (DU)}{\partial x} + \kappa_R W + \zeta U. \tag{23}$$

Граничные условия поставим в соответствии с (18). Табл. I демонстрирует достижение третьего порядка сходимости по времени и четвертого по пространству для решения, полученного для плотности излучения U и потока излучения W. Сходимость третьего порядка по времени полученного решения для температуры T продемонстрируем при помощи процесса Эйткена (см. Табл. II).

Таблица I.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству для теста 1 для плотности U и потока излучения W.

Сходимость по времени при фиксированном $\Delta t/h = 1.04$, $t \in [0,0.12]$, $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = 0$.				Сходимость по пространству при $\Delta t = 7 \cdot 10^{-4}$, $t \in [0,0.035]$, $A_1 = B_1 = 0$, $A_2 = B_2 = 1$.		
N_x	N_t	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p
520	60	$6.25 \cdot 10^{-10}$	2.97	640	$7.86 \cdot 10^{-08}$	4.29
1040	120	$7.97 \cdot 10^{-11}$	2.97	1280	$4.03 \cdot 10^{-09}$	3.98
2080	240	$1.02 \cdot 10^{-11}$		2560	$2.56 \cdot 10^{-10}$	

Таблица II.

Порядок сходимости по времени для теста 1 для температуры T при фиксированном $\Delta t/h = 1.04$, $t \in [0,0.12]$, $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = 0$.

N_x	N_t	$\|\| y_h - y_{h/2} \|\|_C$	p
520	60	$9.31 \cdot 10^{-11}$	3.00
1040	120	$1.16 \cdot 10^{-11}$	

Тест 2. Пусть $U = \exp(x + t)$, $W = \exp(x + t)/3$, $\kappa_U = T^2$, $\kappa_R = T^2$, $D = 1/3$, а $\zeta = 1 + \sin x$, $T_{in} = 1$. Правые части уравнений получим по формулам (23). Зависимость температуры от x и t может быть получена аналитически. Уравнение энергии (11) примет вид

$$a\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c}\exp(x + t) - \frac{1}{3}\exp(x + t) \tag{24}$$

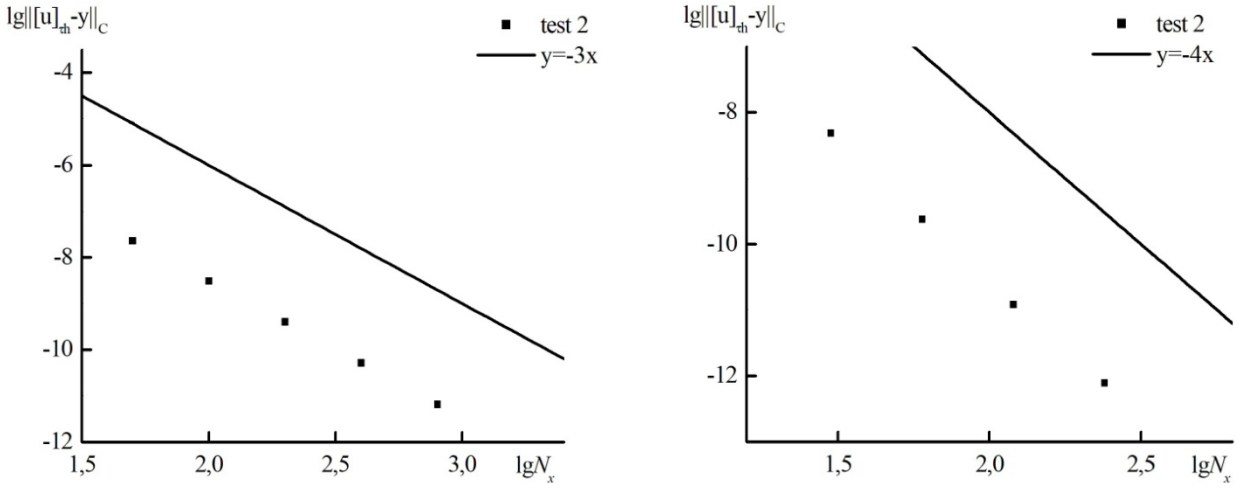
и может быть проинтегрировано. Пусть $\alpha = -\dfrac{c+3}{3ac}$, уравнение (24) можно преобразовать к виду $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \exp(x+t)$. Тогда $T = T_{in} + \alpha \exp(x) \cdot (\exp(t) - 1)$.

Сходимость по времени третьего порядка и сходимость по пространству четвертого порядка при использовании граничных условий (18) показывают Табл. III и Рис. 1.

Таблица III.

Порядок сходимости по времени и по пространству для теста 2.

Сходимость по времени при фиксированном $\Delta t/h = 0.25$, $t \in [0,0.25]$.				Сходимость по пространству при $\Delta t = 8 \cdot 10^{-5}$, $N_t = 10$.		
N_x	N_t	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p
50	50	$6.09 \cdot 10^{-08}$	2.91	30	$8.84 \cdot 10^{-09}$	3.95
100	100	$8.08 \cdot 10^{-09}$	2.95	60	$5.71 \cdot 10^{-10}$	4.15
200	200	$1.05 \cdot 10^{-09}$	2.96	120	$3.22 \cdot 10^{-11}$	3.96
400	400	$1.34 \cdot 10^{-10}$	2.96	240	$2.07 \cdot 10^{-12}$	
800	800	$1.72 \cdot 10^{-11}$				



А) Б)

Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от числа узлов по пространству для теста 2: А) при фиксированном $\Delta t/h = 0.25$, $t \in [0,0.25]$, $N_x = N_t$, для сравнения проведена прямая с наклоном –3 (порядка аппроксимации по времени); Б) при $\Delta t = 8 \cdot 10^{-5}$, $N_t = 10$, для сравнения проведена прямая с наклоном –4 (порядка аппроксимации по пространству).

6. Заключение

Для численного решения уравнения переноса излучения совместно с уравнениями, описывающими состояние среды, могут применяться HOLO алгоритмы. Одним из этапов HOLO алгоритма будет совместное решение одногрупповой системы уравнений квазидиффузии (9) совместно с уравнением энергии (11). Для одногрупповой системы уравнений квазидиффузии (9) были предложены бикомпактные разностные схемы на минимальном двухточечном шаблоне по пространству. За счет расширения списка неизвестных и добавления в него интегральных средних по ячейке достигается четвертый порядок аппроксимации по пространству. Так как схемы строятся методом прямых, то интегрирование по времени можно производить при помощи различных методов. В данной работе используется L–устойчивый диагонально-неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации, каждая стадия которого может быть сведена к использованию неявного метода Эйлера. Уравнение энергии интегрируется по времени при помощи того же метода Рунге–Кутты. Так как коэффициенты системы (9) и правые части нелинейно зависят от температуры, то для решения предлагается организовать итерационный процесс. Производится линеаризация коэффициента поглощения κ_U и правой части Q_{Pl}. Бикомпактные схемы для HOLO алгоритма применены к набору аналитических тестов, в которых продемонстрированы третий порядок сходимости по времени и четвертый по пространству. Предложенные разностные схемы можно будет применить для полного HOLO алгоритма для решения задачи (1-4), являющейся одним из блоков метода расщепления при решении задач радиационной газовой динамики.

Литература

1. *Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер*. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1996.
2. *Д. Михалас*. Звездные атмосферы. – М.: Мир, 1982.
3. *В.Я. Гольдин, Д.А. Гольдина, А.В. Колпаков, А.В. Шильков*. Математическое моделирование газодинамических процессов при высокой плотности энергии излучения // ВАНТ, серия “Методики и программы численного решения задач математической физики”, 1986, вып. 2, с. 59-66.
4. *Д.Ю. Анистратов, В.Я. Гольдин, А.В. Колпаков, О.В. Пастушкова, А.В. Шильков*. Развитие модели ВРГД // Программа и тезисы докладов, 6-ая Всесоюзная конференция “Динамика излучающего газа”, 7–9 декабря, 1987, с. 49.
5. *В.Я. Гольдин*. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1964, т. 4, № 6, с. 1078–1087.
   http://mi.mathnet.ru/zvmmf7676
   V.Ya. Gol'din. A quasi-diffusion method of solving the kinetic equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, V. 4, # 6, 1964, p. 136–149.

https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90085-0
6. *В.Я. Гольдин*, *Б.Н. Четверушкин.* Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 990–1000.
https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf6661
V.Ya. Gol'din, B.N. Chetverushkin. Methods of solving one-dimensional problems of radiation gas dynamics // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, V. 12, № 4, 1972, p. 177-189.
https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90122-X
7. *В.Я. Гольдин*. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Современные проблемы матем. физики и вычисл. матем. – М.: Наука, 1982, с. 13-127.
V.Ya. Gol'din. O matematicheskom modelirovanii zadach sploshnoi sredy s neravnovesnym perenosom // Sovremennye problemy matematicheskoi fiziki i vychislitelnoi matematiki – M., Nauka, 1982, 340p.
8. *M.L. Adams, E.W. Larsen*, Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy, 2002, vol. 40, # 1, pp. 3–159.
https://www.researchgate.net/publication/223921410_Fast_iterative_methods_for_discrete-ordinates_particle_transport_calculations
9. *L. Chacón, G. Chen, D.A. Knoll, C. Newman, H. Park* et al. Multiscale high-order/low-order (HOLO) algorithms and applications // J. Comp. Phys., Feb. 2017, v.330, p. 21–45.
10. *W.A. Wiesequist, D.Y. Anistratov, J.E. Morel,* A cell-local finite difference discretization of the low order of the quasidiffusion equations for neutral particle transport on unstructured quadrilateral meshes // J. Comp. Phys., 273 (2014), 343–357.
11. *E.N. Aristova.* Simulation of radiation transport in channel on the basis of quasi-diffusion method // Transport Theory and Statistical Physics, v.37, (2008), #05-07, p. 483–503.
12. *Е.Н. Аристова, Д.Ф. Байдин.* Экономичность методов квазидиффузии расчета критических параметров быстрого реактора // Математическое моделирование, т. 24, (2012), № 4, стр. 129–136.
http://mi.mathnet.ru/mm3264
E.N. Aristova, D.F. Baydin. Efficiency of Quasi_Diffusion Method for Calculating Critical Parameters of a Fast Reactor // Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, Vol. 4, No. 6, pp. 568–573.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048212060026
13. *Е.Н. Аристова, Д.Ф. Байдин.* Реализация метода квазидиффузии для расчета критических параметров реактора на быстрых нейтронах в трехмерной гексагональной геометрии // Математическое моделирование, т. 24, (2012), № 8, стр. 65–80.
http://mi.mathnet.ru/mm3301
E.N. Aristova, D.F. Baydin. Implementation of the Quasi Diffusion Method for Calculating the Critical Parameters of a Fast Neutron Reactor in 3D Hexagonal Geometry // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, Vol. 5, No. 2, pp. 145–155.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048213020026

14. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // ДАН, 2011, т.436, №5, с. 600–605.
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. Monotone Bicompact Schemes for a Linear Advection Equation // Doklady Mathematics. 2011. V. 83, No. 1. P.121–125.
https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562411010273
15. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2011, т.23, №6, с. 98-110.
http://mi.mathnet.ru/mm3122
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. Monotonic bicompact schemes for linear transport equations // Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, Vol. 4, # 1, pp 92–100.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048212010103
16. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН, 2010, т.430, №4, с. 470-474.
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. Fourth-Order Accurate Bicompact Schemes for Hyperbolic Equations // Doklady Mathematics. 2010. V. 81, No. 1. P. 146–150.
https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562410010400
17. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* О сходимости компактных разностных схем // Математическое моделирование, 2008, т.20, №1, с. 99-116.
http://mi.mathnet.ru/mm2141
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. On the convergence of compact difference schemes // Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, V. 1, No. 1, P. 91–104.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048209010104
18. *А.В. Чикиткин, Б.В. Рогов, Е.Н. Аристова.* Высокоточные бикомпактные схемы для многомерного неоднородного уравнения переноса и их эффективная параллельная реализация // Доклады Академии Наук, серия Математика, 2016, т. 469, № 4, с. 1-6.
A.V. Chikitkin, B.V. Rogov, E.N. Aristova. High-Order Accurate Bicompact Schemes for Solving the Multidimensional Inhomogeneous Transport Equation and Their Efficient Parallel Implementation // Doklady Mathematics, 2016, Vol. 94, No. 2, pp. 516–521.
19. *М.Д. Брагин, Б.В. Рогов.* Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных уравнений гиперболического типа // Доклады РАН, 2017, т.473, №3, с. 263–267.
M.D. Bragin, B.V. Rogov. Iterative Approximate Factorization for Difference Operators of High-Order Bicompact Schemes for Multidimensional Nonhomogeneous Hyperbolic Systems // Doklady Mathematics, 2017, V. 95, No. 2, P. 140–143.
https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562417020107
20. *Е.Н. Аристова, Б.В. Рогов, А.В. Чикиткин.* Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // ЖВМ и МФ, 2016, т. 56, № 6, с. 973–988.
http://mi.mathnet.ru/zvmmf10399

E.N. Aristova, B.V. Rogov, A.V. Chikitkin. Optimal Monotonization of a High-Order Accurate Bicompact Scheme for the Nonstationary Multidimensional Transport Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, Vol. 56, No. 6, pp. 962–976.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS0965542516060038

21. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева.* Бикомпактные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнений квазидиффузии// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2018, №45, 28 с.
E.N. Aristova, N.I. Karavaeva. Bicompact High Order Schemes for Quasi-Diffusion Equations // Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, 2018, №45, 28 p.
http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-45
22. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева.* Реализация бикомпактной схемы для HOLO алгоритмов решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019, № 21, 28 с.
E.N. Aristova, N.I. Karavaeva. Implementation of the bicompact scheme for HOLO algorithms for solving the transport equation // Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, 2019, №21, 28 p.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-21
23. *Д.Ю. Анистратов, Е.Н Аристова, В.Я. Гольдин.* Нелинейный метод решения задач переноса излучения в среде // Матем. моделирование, 1996, т. 8, № 12, с 3–28.
https://www.mathnet.ru/rus/mm/v8/i12/p3
24. *J.A. Fleck Jr., J.D. Cummings Jr.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys., Dec. 1971, v.8, p. 313–342.
https://doi.org/10.1016/0021-9991(71)90015-5
25. *Е.Н. Аристова, Б.В. Рогов.* О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, т. 24, (2012), № 10, стр. 3–14.
http://mi.mathnet.ru/mm3316
E.N. Aristova, B.V. Rogov. Boundary conditions implementation in bicompact schemes for the linear transport equation // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, Vol. 5, №3, pp. 199–208.
https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048213030022

Оглавление

1. Введение 3
2. Постановка задачи 5
3. Построение схемы для одногрупповой системы уравнений квазидиффузии 6
4. Разностная схема для уравнения энергии. Итерационный процесс 9
5. Аналитические тесты 10
6. Заключение 13

Литература 13