



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 26 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.Д. Лахно

Суперсимметричный полярон

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лахно В.Д. Суперсимметричный полярон // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 26. 12 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-26>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-26>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

В.Д. Лахно

Суперсимметричный полярон

Москва – 2023

Лахно В.Д.

Суперсимметричный полярон

Построена суперсимметричная теория полярона. Суперпартнером такой квазичастицы является заряженный фонон. Теория применима к различным типам поляронов, которые в каждом случае имеют своих суперпартнеров. Указаны способы экспериментальной проверки теории.

Ключевые слова: суперпартнер, заряженный фонон, супералгебра Ли, рамановское рассеяние, протон

Lakhno V.D.

The supersymmetric polaron

A polaron supersymmetry theory is developed. The superpartner of this quasiparticle is a charged phonon. The theory can be applied to different polarons which have their superpartners in each case. A possible experimental verification of the theory is discussed.

Key words: superpartner, charged phonon, Lie superalgebra, Raman scattering, proton

1. Введение

В теории элементарных частиц предполагается наличие возможности точной суперсимметрии при больших энергиях частиц.

При малых значениях энергии суперсимметрия разрушается и частицы суперпартнеры оказываются обладающими различающимися массами и спектральными характеристиками [1] – [3]. В последних экспериментах на адронном коллайдере частицы-суперпартнеры, однако, обнаружены не были (по крайней мере, в доступном адронному коллайдеру диапазоне энергий). Этот факт поставил под сомнение суперсимметричную теорию элементарных частиц.

Независимо от существования суперсимметрии элементарных частиц ее математический аппарат может быть использован для описания свойств элементарных квазичастиц в теории конденсированных систем.

В данной работе обсуждаются выводы, которые вытекают из точной суперсимметрии трансляционно-инвариантных (ТИ) поляронов – квазичастиц, свойства которых лежат в основе объяснения механизма высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) [4, 5].

В разделе 2 рассматривается гамильтониан свободного полярона, который выражается через операторы рождения и уничтожения полярона, подчиняющиеся фермионным перестановочным соотношениям.

В разделе 3 рассматривается тот же самый гамильтониан, выраженный через операторы рождения и уничтожения ТИ-полярона, подчиняющиеся бозонным перестановочным соотношениям.

Это противоречие разрешается в разделе 4, где рассмотрено преобразование, смешивающее бозоны и фермионы, объединяющее фермионы и бозоны в один супермультиплет. Таким образом, показано, что полярон и ТИ-поляроны являются суперпартнерами.

В разделе 5 обсуждается возможность экспериментальной проверки теории и возможные приложения теории к различным конденсированным средам.

2. Фермионный полярон

Теория полярона представляет собой простейший пример нерелятивистской квантовой теории фермионной частицы, взаимодействующей с бозонным полем.

Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \sum_k \hbar\omega(k)a_k^+ a_k + \sum_k V_k [a_k e^{ikr} + a_k^+ e^{-ikr}], \quad (1)$$

где r – радиус-вектор электрона, \hat{p} – его импульс, m – эффективная масса электрона; a_k^+ , a_k – операторы рождения и уничтожения квантов бозонного (фононного) поля с энергией $\hbar\omega(k)$, V_k – матричный элемент взаимодействия электрона с бозонным полем.

Полярон как квазичастица представляет собой электрон, одетый в облако окружающих его бозонов, функция Грина которого имеет вид [6], [7]:

$$G(\vec{p}, E) = \{E - \varepsilon_{\vec{p}} - M(\vec{p}, E)\}^{-1}, \quad (2)$$

где массовый оператор $M(\vec{p}, E)$ определяется диаграммным рядом:

$$M(\vec{p}, E) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (3)$$

в котором сплошные и пунктирные линии соответствуют свободным электронным и бозонным функциям Грина, $\varepsilon_{\vec{p}} = p^2/2m$, $E(\vec{p}) = \varepsilon_p + M(\vec{p}, E(\vec{p}))$ – энергия полярона.

Таким образом, полярон, как и электрон, является фермионом, гамильтониан которого можно записать в виде:

$$H = \sum_p E(\vec{p}) c_p^+ c_p, \quad (4)$$

где c_p^+, c_p имеют смысл фермионных операторов рождения и уничтожения полярона.

Используя представление о свободном поляроне (4) как о фермионной квазичастице, можно рассматривать ее взаимодействие с другими квазичастицами (например, рассеяние оптического полярона на оптических фононах [8], [9]). Отметим, что спиновые индексы не включены в гамильтониан (4), поскольку в случае изолированной квазичастицы это не имеет значения.

3. Бозонный полярон

Изложенная выше процедура приводит к представлению о поляроне как о фермионе, поскольку фактически исключает из рассмотрения бозонные компоненты.

При исследовании гамильтониана (1) можно было бы поступить по-иному, проведя соответствующие канонические преобразования. Фактически физические характеристики и спектральные свойства, как известно, такие преобразования не меняют.

Используем с этой целью преобразование Гейзенберга, исключаящее из гамильтониана (1) электронные координаты [10]:

$$S_1 = \exp\{i \sum_k \vec{k} a_k^+ a_k\} \vec{r}, \quad (5)$$

$$S_1^{-1}a_k S_k = a_k e^{-ikr}, \quad S_1^{-1}a_k^+ S_1 = a_k^+ e^{ikr}.$$

Преобразованный гамильтониан (1) с использованием (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= S_1^{-1} H S_1, \\ \tilde{H} &= \frac{1}{2m} (\sum_k \hbar \vec{k} a_k^+ a_k)^2 + \sum_k V_k (a_k + a_k^+) + \sum_k \hbar \omega(k) a_k^+ a_k \end{aligned} \quad (6)$$

и не содержит электронных координат.

Как показано в [10], применение к гамильтониану (6) канонических преобразований Ли, Лоу, Пайнса:

$$\begin{aligned} S_2 &= \exp\{\sum_k f_k (a_k^+ - a_k)\}, \\ S_2^{-1} a_k S_2 &= a_k + f_k, \quad S_2^{-1} a_k^+ S_2 = a_k^+ + f_k, \end{aligned} \quad (7)$$

где f_k – вещественные числа, и канонического преобразования сжатия:

$$\begin{aligned} S_3 &= C \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{k,k'} a_k^+ A_{kk'} a_{k'}^+\right\}, \\ S_3^{-1} a_k S_3 &= \sum_{k'} M_{1kk'} \alpha_{k'} + \sum_{k'} M_{2kk'} \alpha_{k'}^+, \end{aligned} \quad (8)$$

где явный вид матриц A и M приведен в [10], приводит к выражению для энергии полярона в виде:

$$\tilde{\tilde{H}} = S_3^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1} H S_1 S_2 S_3 = \sum_k E_k \alpha_k^+ \alpha_k, \quad (9)$$

где α_k^+ , α_k – операторы ТИ-полярона, удовлетворяющие бозонным перестановочным соотношениям.

Таким образом, ТИ-полярон, согласно (9), является бозоном.

Ниже мы покажем, что ТИ-полярон может быть как бозоном, так и фермионом, представляя собой пример суперсимметричной частицы.

4. Полярон как суперсимметричная частица

Поскольку оба представленных выше подхода описывают одну и ту же фермион-бозонную систему, то спектр фермионного гамильтониана:

$$H = \sum_k E_k c_k^+ c_k, \quad (10)$$

где операторы рождения и уничтожения c_k^+ , c_k подчиняются фермиевским перестановочным соотношениям: $\{c_k c_{k'}^+\} = c_k c_{k'}^+ + c_{k'}^+ c_k = \delta_{kk'}$ и спектр гамильтониана ТИ-полярона:

$$H = \sum_k E_k \alpha_k^+ \alpha_k, \quad (11)$$

где операторы рождения и уничтожения ТИ-полярона α_k^+ , α_k подчиняются бозевским перестановочным соотношениям: $[\alpha_k \alpha_{k'}^+] = \alpha_k \alpha_{k'}^+ - \alpha_{k'}^+ \alpha_k = \delta_{kk'}$ совпадают.

Введем суперсимметричный гамильтониан \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \sum_k E_k (c_k^+ c_k + \alpha_k^+ \alpha_k) = \sum_k \mathcal{H}_k, \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_k = E_k (c_k^+ c_k + \alpha_k^+ \alpha_k).$$

Введем операторы:

$$Q_k^+ = \sqrt{E_k} \alpha_k c_k^+, \quad Q_k = \sqrt{E_k} \alpha_k^+ c_k, \quad (13)$$

где Q_k^+ – оператор, превращающий бозон с импульсом k в фермион с импульсом k , Q_k – оператор, превращающий фермион с импульсом k в бозон с импульсом k .

Тогда операторы Q_{1k}, Q_{2k} :

$$Q_{1k} = Q_k^+ + Q_k, \quad Q_{2k} = -i(Q_k^+ - Q_k), \quad (14)$$

формируют супералгебру Ли [11]:

$$\{Q_{ik}, Q_{jk}\} = 2\delta_{ij}\mathcal{H}_k, \quad (15)$$

$$[Q_{ik}, \mathcal{H}_k] = 0.$$

Выраженный через операторы Q_i гамильтониан \mathcal{H} имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum_k Q_{1k}^2 = \sum_k Q_{2k}^2 = \sum_k \{Q_k^+, Q_k\}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что «фермионный» полярон, описанный в разделе 2, является суперпартнером «бозонного» полярона, описанного в разделе 3.

Обсуждение

Как показано выше, ТИ-поляроны представляют собой пример суперсимметричных квазичастиц в физике конденсированных систем, которые, в отличие от элементарных частиц, обладают точной суперсимметрией.

Суперсимметрия ТИ-поляронов нашла интересные приложения в физике конденсированного состояния. Так, наличие суперсимметрии позволило объяснить сосуществование таких частиц в сильно коррелированных фермионных системах с обычными фермионами, в частности объяснить нетривиальное поведение магнетосопротивления купратных сверхпроводников [12].

Точная суперсимметрия ТИ-поляронов затрудняет их экспериментальное изучение. В случае слабой электрон-бозонной связи свойства ТИ-полярона мало отличаются от свойств зонного электрона или его суперпартнера – бозонного возбуждения (когда его спин не имеет значения).

В случае сильной связи наличие ТИ-полярона как фермиона можно обнаружить в экспериментах по их захвату примесями кристалла [10].

Наличие бозонных свойств ТИ-полярона можно обнаружить, изучая рамановские спектры (комбинационное рассеяние). Рассеяние света на ТИ-поляронах, как и на свободных бозонах будет содержать дуплет сателлитов, отстоящих на частоту $\pm\omega(k)$ от основной частоты рассеянного света. Вклад в этот дуплет ТИ-поляронов можно обнаружить по изменению их концентрации в магнитном поле. Согласно [12], этот вклад будет пропорционален концентрации ТИ-поляронов $n_H = n(k_B T / \mu_B H) \text{th}(\mu_B H / k_B T)$, где T – температура, H – внешнее магнитное поле, n – концентрация ТИ-поляронов в отсутствие магнитного поля. На вклад обычных бозонов (если это не магнитные возбуждения) внешнее магнитное поле влиять не будет.

Суперсимметрия предполагает удвоение числа известных элементарных квазичастиц за счет наличия суперпартнеров. Можно сказать, что в случае поляронов (оптических или акустических) это будут заряженные (оптические или акустические) фононы, то есть фононные ТИ-поляроны. В случае плазморонов (электронов, взаимодействующих с плазмонами [13]) это будут заряженные плазмоны, и так далее.

Как отмечено в [4]-[5], нерелятивистская теория взаимодействия нуклонов с мезонным полем на масштабе радиуса действия ядерных сил по своей структуре аналогична теории полярона. В этом случае аналогом суперпартнера протона будет π^+ мезон, антипротона – π^- мезон, нейтрона (антинейтрона) – π^0 мезон. Свидетельством этому может служить адронный резонанс:

$$p + \gamma = n + \pi,$$

роль спектра возбужденных состояний в котором играют π мезоны [14].

Наличие суперсимметричного партнера протона или нейтрона в ядре можно обнаружить в экспериментах по неупругому рассеянию γ – квантов в ядре [15], по наличию пионных сателлитов в спектре рассеиваемых квантов (ядерный

Раман эффект), аналогично тому, как это было описано выше для случая ТИ-поляронов.

Частицы-суперпартнеры могут объединяться, образуя составные частицы. Например, ТИ-поляроны могут объединяться в ТИ-биполоны. У таких составных частиц, как и в теории элементарных частиц, суперпартнеры-квазичастицы уже отсутствуют.

Послесловие

Этот препринт посвящен замечательному ученому и человеку Николаю Максимильяновичу Плакиде. Будучи в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) в Дубне, я спросил Николая Максимильяновича, кто сейчас главный по сверхпроводимости. Он мне ответил, что он главный ¹⁾. Тогда я передал ему свою рукопись по ТИ-поляронной теории сверхпроводимости и попросил его быть рецензентом. Спустя некоторое время, прочитав рукопись, он мне сказал, что не сможет быть моим рецензентом, поскольку не понимает, почему такая фермионная частица, как полярон, в ТИ-поляронной теории описывается бозонными операторами рождения и уничтожения. Мой ответ тогда, основанный на представлении о связанных фононах, его не убедил, поскольку заряженные фононы в физике твердых тел никому не известны.

В этой статье дается ответ на вопрос Николая Максимильяновича, который, возможно, мог бы его убедить. К сожалению, его уже нет с нами, и об этом мы никогда не узнаем.

1) Будучи автором фундаментальной монографии по сверхпроводимости, изданной Шпрингером (Plakida N.M. (2010), High Temperature Cuprate Superconductors: Experiment, Theory and Applications, Heidelberg, Germany), Николай Максимильянович имел полное право на такой ответ.

Литература

- [1] I. Aitchison, *Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction*, Cambridge Univ. Press; 1st edition, 2007, 238 p.
- [2] G. Kane, *Supersymmetry and Beyond*, Basic Books; Revised edition, 2013, 215 p.
- [3] J. Terring, *Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality (International Series of Monographs on Physics) 1st Edition*, Oxford Univ. Press, 2009, 336 p.
- [4] В.Д. Лахно, Математические основы трансляционно-инвариантной биполярной теории сверхпроводимости // ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. 292 с.
- [5] V.D. Lakhno, *High-Temperature Superconductivity. Bipolaron Mechanism*, De Gruyter, Berlin, 2022, 232 p.
- [6] J. Appel, Polarons // *Sol. St. Phys.*, v.21, p.193, 1968; doi: 10.1016 / s0081 – 1947 (08) 60741 - 9
- [7] Ю.А. Фирсов (ред.), *Полярны, Наука*, 1975, 423 с.
- [8] А.В. Тулуб, Медленные электроны в полярных кристаллах // *ЖЭТФ*, 41, 1828, 1961
- [9] А.В. Тулуб, Комментарий к теории полярон-фононного рассеяния // *ТМФ*, 185(1), 199 – 212, 2015; DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8946>
- [10] В.Д. Лахно, Анзац Пекара и проблема сильной связи в теории полярона // *УФН*, 185, 317 – 331, 2015; DOI: 10.3367/UFNZ: 0185.201503d.0317
- [11] Л.Э. Генденштейн, И.В. Криве, Суперсимметрия в квантовой механике // *УФН*, т. 146 (вып. 4), 553 – 588, 1985
- [12] V.D. Lakhno, Simple Explanation of Cuprates Linear Magnetoresistance Enigma // *Condens. Matter*, 7, 64, 2022; <https://doi.org/10.3390/condmat7040064>
- [13] V. Sa-Yakanit, V.D. Lakhno, K. Hass, Path integral approach to single-particle excitation in Coulomb systems // *Phys. Rev. B*, v.57, № 10, p. 5772 -5777, 1998; DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.57.5772>
- [14] Т.Эрикссон, В. Вайзе, Пионы и ядра, М.Наука, 1991, 512 с.

[15] Ю.П. Гангрский, В.М. Мазур, Рассеяние γ - квантов ядрами и возбуждение изомерных состояний // ЭЧАЯ, т.33, С. 158-200, 2002

Оглавление

1. Введение	3
2. Фермионный полярон	4
3. Бозонный полярон	5
4. Полярон как суперсимметричная частица	7
Обсуждение	8
Послесловие	10
Литература	11