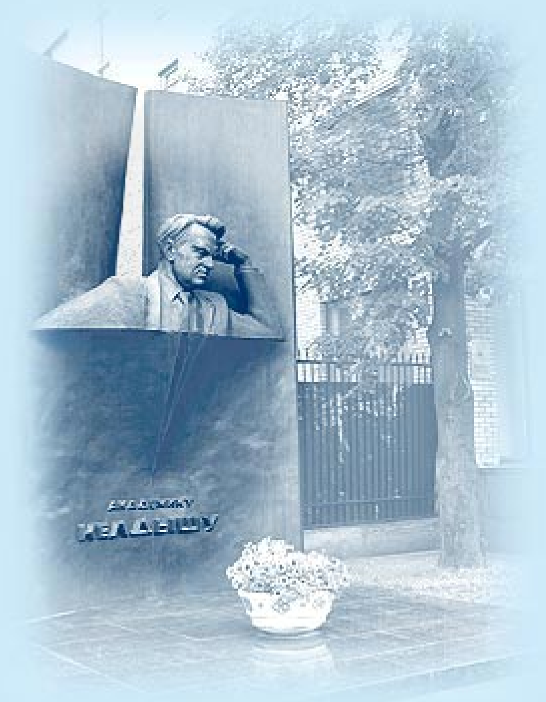

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Конструирование релятивистской гидродинамики простой жидкости в классе теорий второго порядка. 2. Метод релятивистской расширенной необратимой термодинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики простой жидкости в классе теорий второго порядка. 2. Метод релятивистской расширенной необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 3. 36 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-3
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-3

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Конструирование релятивистской гидродинамики простой жидкости в классе теорий второго порядка. 2. Метод релятивистской расширенной необратимой термодинамики

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

Конструирование релятивистской гидродинамики простой жидкости в классе теорий второго порядка. 2. Метод релятивистской расширенной необратимой термодинамики.

В работе сконструирована термо-гидродинамика для релятивистской жидкости (с учетом второго порядка отклонения от равновесия для диссипативных потоков тепла и вязкости) на основе расширенной необратимой термодинамики (РНТ). Формализм РНТ, обеспечивая адекватное моделирование близких к равновесному состоянию систем, выходит за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт расширения числа базисных независимых переменных (включая в их число диссипативные потоки), а также за счёт модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура и давление. При этом постулируются эволюционные законы для основных неравновесных полевых величин релятивистской системы: 4-вектора потока частиц, 4-тензора энергии-импульса и 4-вектора потока энтропии. С целью вывода определяющих (конститутивных) уравнений получены нелокальное ковариантное соотношение Гиббса и нелокальная форма второго начала термодинамики с источником энтропии за счет дополнительных переменных − диссипативных потоков. Получены модифицированные за счет релаксационных членов определяющие уравнения гиперболического типа, запрещающие сверхсветовые скорости. Построение релятивистской термодинамики проведено с использованием гидродинамической 4-скорости, определенной по Эккарту. Сконструированная релятивистская гидродинамика имеет свои приложения в таких важных областях науки, как ядерная физика, астрофизика и космология.

***Ключевые слова*:** релятивистская гидродинамика, расширенная необратимая термодинамика, теплопроводность, вязкое течение, релаксационные уравнения.

Aleksander Vladimirovich Kolesnichenko

Constructing relativistic hydrodynamics of a simple fluid in a class of second-order theories. 2. The method of relativistic extended irreversible thermodynamics.

In this paper we constructed thermo-hydrodynamics for relativistic fluid (taking into account the second order of deviation from equilibrium for dissipative heat and viscosity flows) on the basis of extended irreversible thermodynamics (RNT). RNT formalism, providing adequate modeling of systems close to the equilibrium state, goes beyond the local equilibrium hypothesis by expanding the number of basic independent variables (including dissipative flows), as well as by modifying such conceptual concepts as entropy, temperature and pressure. The evolutionary laws for the main nonequilibrium field quantities of the relativistic system are postulated: 4-vector particle flux, 4-vector energy-momentum and 4-vector entropy flux. In order to derive the constitutive equations, a nonlocal Gibbs covariance relation and a nonlocal form of the second principle of thermodynamics with a source of entropy due to additional variables-dissipative flows-were obtained. The defining equations of the hyperbolic type, forbidding superluminal velocities, modified by relaxation terms, have been obtained. The construction of relativistic thermodynamics is carried out using the hydrodynamic 4-speed defined by Eckart. The constructed relativistic hydrodynamics has its applications in such important fields of science as nuclear physics, astrophysics and cosmology.

Key words: relativistic fluid dynamics, extended irreversible thermodynamics, thermal conductivity, viscous flow, relaxation equations.

ВВЕДЕНИЕ

Стандартная формулировка законов переноса теплопроводной и вязкой жидкости в необратимой термодинамике (как классической, так и релятивистской) приводит к параболическим дифференциальным уравнениям для теплового и вязкого потоков и тем самым к бесконечным скоростям распространения термальных и вязких возмущений. Поскольку тепло и импульс переносятся молекулами, то естественно было бы ожидать, что распространение этих волн должно происходить примерно со средней молекулярной скоростью и, конечно, не быстрее скорости света, что полностью запрещено последовательной релятивистской теорией. Уже давно стало ясно, что истоки этого парадокса лежат в известном недостатке классической необратимой термодинамики (КНТ), которая относится к классу теорий первого порядка приближения, что делает некорректным ее применение при описании релаксационных переходных явлений.

Исторически эта проблема рассматривалась сначала в рамках кинетической теории и лишь затем в рамках феноменологической термодинамики. Решение уравнения переноса методом Чепмена−Энскога основано на предположении, что средняя длина свободного пробега частиц намного меньше характеристической макроскопической длины. Тогда макроскопическое поведение системы можно описать гидродинамическими переменными, т.е. использовать первые пять моментов функции распределения − плотность числа частиц, гидродинамическую скорость, плотность энергии (или температуры). Если средняя длина свободного пробега не мала по сравнению с макроскопическими расстояниями, то пяти гидродинамических переменных недостаточно, и кинетическое уравнение переноса следует решать с помощью других методов.

В работе Града (Grad, 1958) было показано, как переходные эффекты могут быть эффективно объяснены в рамках классической кинетической теории путем использования вместо метода Чепмена−Энскога метода моментов. Согласно методу моментов Града неравновесная функция распределения $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ выражается в терминах ее моментов по скоростям молекул (плотность числа частиц, гидродинамическая скорость, плотность энергии и их пространственные градиенты), причем процедура усечения бесконечной цепочки получаемых связанных уравнений для моментов ограничивается моментами второго порядка, соотнесенными с тепловым потоком, и некоторыми моментами третьего порядка. Получаемые при этом уравнения для тринадцати моментов позволяют получить замкнутую систему обобщенных гидродинамических уравнений, которая, являясь гиперболической, приводит к скоростям распространения тепловых и вязких возмущений порядка скорости звука. Различные релятивистские варианты метода моментов Града, учитывающие переходные эффекты, были разработаны Стюартом (Stewart,1977), Израилем и Стюартом (Israel, Stewart, 1976) и независимо Малье (Marle, 1974) и Кранисом (Kranyš, 1972a, 1972b). При этом детальные расчеты, выполненные в рамках этих теорий, показали, что $\sqrt{3/5}\,c$ − это верхний предел скорости волнового фронта тепловых возмущений в релятивистском газе, находящемся при высокой температуре.

Термодинамический подход к анализу релятивистских жидкостей также неоднократно применялся в специально-релятивистской области (см., например, Eckart, 1940; Kluitenberg и др., 1953; Landau, Lifshitz, 1959; de Groot и др., 1968, 1969, 1975; Alts, Müller, 1972; Israel, 1963,1976; Weinberg, 1972). Однако разработанная Эккартом (Eckart, 1940) и Ландау и Лифшицем (Landau, Lifshitz, 1959) на принципе локального равновесия стандартная линейная теория релятивистской термодинамики предсказывает бесконечную скорость распространения термальных и вязкостных сигналов и, кроме того, приводит к линейным определяющим соотношениям, отличающимся общей неустойчивостью − фактически при наличии малых возмущений основанные на них решения экспоненциально расходятся от состояния равновесия (Hiscock, Lindblom, 1985).

В классической феноменологической теории проблему мгновенного распространения, например, тепловых возмущений пытались решить с помощью формального добавления релаксационных членов в закон Фурье. Так, Каттанео (Cattaneo, 1948) предложил следующую версию закона Фурье с демпфером:

$$\tau\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = -(\boldsymbol{q} + \nabla T)\,,$$

которая обобщает приближённый закон Фурье для теплопроводности на случай учета большого времени релаксации τ теплового потока или учета высокочастотных (скоротечных) процессов теплопередачи при импульсах с крутым фронтом. Важно при этом подчеркнуть, что несовместимое с предположением о локальном состоянии равновесия гиперболическое уравнение Максвелла−Каттанео нашло эффективное применение при моделировании множества термодинамических экспериментов с тепловыми волнами для некоторых астрофизических процессов, в частности связанных с расчетами ядерного синтеза в аккрецирующих оболочках нейтронных звезд (Herrera, Falcon, 1995a, b).

Теоретическое обоснование законности использования подобного рода релаксационных уравнений было дано в работе (Müller, 1967), посвященной нерелятивистской термодинамике, в которой автор показал, что источник парадоксов в феноменологической теории связан с тем, что традиционная теория переноса пренебрегает членами второго порядка в тепловом потоке и вязкости в выражении для энтропии. Восстановив эти члены, Мюллер вывел модифицированную систему феноменологических релаксационных уравнений, которая согласовывалась с линеаризованной формой кинетических уравнений Града. Теория Миллера была вновь переоткрыта и распространена на релятивистские жидкости Израилем (Israel,1976). С тех пор появился целый ряд публикаций на эту тему (см., например, Israel, Stewart, 1976: Havas, 1979; Liu и др. 1986].

Наряду с этим в последние годы были выполнены интенсивные исследования в области так называемой расширенной необратимой термодинамики (РНТ), выходящей за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт расширения числа базисных независимых переменных при рассмотрении близких к равновесному состоянию систем, а также за счёт модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление и химические потенциалы (см. Müller, Ruggeri 1998;. Casas-Vazquez, Jou, 2003; Jou и др. 2005; Жоу и др., 2006; Lebon и др.,1992, 1995, 2008). Эта теория вводит в рассмотрение в качестве дополнительных структурных параметров диссипативные термодинамические потоки, фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии. К ним, в частности, относятся: гидродинамическая скорость, тензор напряжений (минус его гидростатическая часть), тепловой поток (полный поток энергии минус потоки, связанные с адвекцией и механической энергией) и т.п. Согласно теории РНТ, энтропия также зависит от диссипативных потоков, причем выражение для потока энтропии может содержать дополнительные члены, отличные от $T^{-1}\boldsymbol{q}$. Заметим, что в теории РНТ и в методе тринадцати моментов Града используются одни и те же независимые переменные. Таким образом, использование этих новых параметров состояния позволяет термодинамически получить релаксационные определяющие соотношения для сильно неравновесной системы, которые не могут быть получены в рамках КНТ, например, замыкающие соотношения для различных диссипативных потоков переноса в турбулизованной жидкости (см. Kolesnichenko, 2010). Таким образом, формализм РНТ предназначен для описания явлений с относительно длительным временем релаксации и большой длиной корреляций, а также высокочастотных и коротковолновых явлений (см. Casas-Vazquez, Jou, 2003).

Целью настоящей работы является конструирование в рамках РНТ релятивистской гидродинамики с учетом членов второго порядка для диссипативных потоков. Подобное конструирование, основанное на наборе базисных макроскопических величин N^{α}, $T^{\alpha\beta}$, S^{α}, описывающих неравновесное состояние релятивистской системы, связано с получением 14 уравнений, из которых 5 обеспечиваются постулируемыми законами сохранения $\partial_{\alpha} N^{\alpha} = 0$ и $\partial_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ для 4-вектора потока частиц и 4-тензора энергии-импульса соответственно, а являющееся основой феноменологического подхода ковариантное соотношение Гиббса (вытекающее из постулируемого закона возрастания $\partial_{\alpha} S^{\alpha} = \sigma \geq 0$ неравновесного 4-вектора потока энтропии) дает ровно 9 необходимых дополнительных уравнений. При этом ограничение, накладываемое принципом локального равновесия на скорость распространения тепловых и вязких возмущений, в РНТ полностью снимается, поскольку это допущение является слишком грубым для достаточно обширного класса неравновесных релятивистских систем (например, астрофизических высокоэнергетических систем, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями).

Распространение РНТ на общие релятивистские системы является относительно легким, если для вывода ковариантных гидродинамических уравнений использовать путь простой замены обычных производных на ковариантные и замены метрики Минковского на ее аналог Римана. Однако при этом возникает, как известно, некоторая неоднозначность, связанная с возможным выбором гидродинамической 4-скорости U^{α}. В формулировке Эккарта (Eckart, 1940) U^{α} есть скорость переноса частиц, поэтому в сопутствующей системе координат исчезает величина N^{α}, в то время как у Ландау и Лифшица (Landau, Lifshitz,1959) скорость U^{α} связана с потоком энергии; тогда в движущейся системе исчезает поток энергии cT^{0i}. В принципе, методика построения релятивистской необратимой термодинамики должна учитывать любой из этих полностью эквивалентных вариантов.

В данной работе, в отличие от теории Ландау и Лифшица (1988), будет использовано более удобное определение гидродинамической скорости по Эккарту. Кроме этого, заново рассматриваются с единой ковариантной точки зрения релятивистская гидромеханика и необратимая релятивистская термодинамика для релаксирующей космологической жидкости. Причем, в отличие от многих процитированных выше публикаций, автор при конструировании определяющих соотношений для диссипативных потоков придерживается той точки зрения, что эти соотношения должны быть сформулированы при помощи явного выражения для обобщенного производства энтропии, связанного с дополнительными переменными. При таком подходе каждый диссипативный поток (тепловой поток, вязкое давление и поток частиц) определяется собственным уравнением эволюции (уравнением релаксации), при этом кинетические коэффициенты принимают вид, который в контексте релятивистской РНТ является наиболее естественным (см. de Groot, Mazur, 1962).

Изложенные в данном синопсисе результаты представляют практический интерес как в ядерной физике, так и в космологических и астрофизических ситуациях, связанных с эффектами теплопроводности и вязкости нейтринного газа, а также при исследовании коллапса звезд, аккреции черных дыр и ранней Вселенной.

1. ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Для неоднородной релятивистской системы характеризующие ее макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x := x^{\alpha} := (ct, \mathbf{x})$, где индекс α принимает 4 значения: $\alpha = 0,1,2,3$; t − время, c − скорость света. Далее будем использовать метрику $g^{\alpha\beta}$=diag $(1,-1,-1,-1)$ и обозначать оператор ковариантного дифференцирования, как[1)]

$$\partial_{\alpha} := \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) =: (\partial_0, \nabla). \tag{1}$$

Неравновесное макроскопическое состояние релятивистской жидкости в термодинамической теории будем характеризовать, так же как и в релятивистской кинетике, 4-вектором тока частиц $N^{\alpha}(x)$, симметричным 4-тензором энергии-импульса $T^{\alpha\beta}(x)$ и 4-вектором потока энтропии S^{α} $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$.

Гидродинамическая 4-скорость $U^{\alpha}(x)$ задается при этом в виде времениподобного вектора с модулем c в каждой пространственно-временной точке

$$U^{\alpha}(x)U_{\alpha}(x) = c^2. \tag{2}$$

[1)] Это определение справедливо только при отсутствии гравитации (см. Вайнберг, 2012). В случае космологической жидкости при наличии существенных гравитационных полей это определение существенно усложняется (см, например, Chandrasekhar, 1965).

Если продифференцировать выражение (2) по пространственно-временным координатам, то получится использованное далее соотношение $U^{\alpha}\partial_{\nu}U_{\alpha}=0$.

С помощью скорости $U^{\alpha}(x)$ можно определить тензор-проектор

$$\Delta^{\alpha\beta}(x):=g^{\alpha\beta}-c^{2}U^{\alpha}(x)U^{\beta}(x), \tag{3}$$

который при свертке с произвольным 4-вектором действует как проекционный оператор, поскольку уничтожает часть 4-вектора, параллельную скорости $U^{\alpha}(x)$

$$\Delta^{\alpha\beta}(x)U_{\beta}(x)=0. \tag{4}$$

Проекционный оператор $\Delta^{\alpha\beta}$ характеризуется свойствами:

$$\Delta^{\alpha\beta}=\Delta^{\beta\alpha},\quad \Delta^{\alpha\beta}\Delta_{\beta\sigma}=\Delta^{\alpha}_{\sigma},\quad \Delta^{\alpha}_{\alpha}=3. \tag{5}$$

С помощью фундаментальных полевых величин $N^{\alpha}(x)$, $T^{\alpha\beta}(x)$, $S^{\alpha}(x)$ и гидродинамической скорости $U^{\alpha}(x)$ можно определить макроскопические параметры релятивистской системы, такие как плотность частиц $n(x)$, плотность энергии $\varepsilon(x):=en$, тепловой поток $J^{\alpha}_{q}(x)$, тензор давления $P^{\alpha\beta}(x)$ и плотность энтропии $S(x):=sn$. При этом

(i) плотность частиц n задается ковариантным выражением

$$n(x):=N^{\alpha}U_{\alpha}/c^{2}; \tag{6}$$

(ii) плотность энергии ε определяется как

$$\varepsilon(x):=en:=U_{\alpha}T^{\alpha\sigma}U_{\sigma}/c^{2}, \tag{7}$$

где $e(x)$ − средняя энергия на одну частицу;

(iii) поток тепла J^{α}_{q} задается выражением

$$J^{\alpha}_{q}(x):=(U^{\nu}T_{\nu\sigma}-h\,N_{\sigma})\Delta^{\sigma\alpha}, \tag{8}$$

где

$$h(x):=e+p/n \tag{9}$$

− энтальпия (или тепловая функция) на одну частицу, $p(x)$ – локальное гидростатическое давление; из (5) следует условие ортогональности

$$\mathsf{J}_q^{\alpha} U_{\alpha} = 0; \tag{10}$$

(iv) симметричный тензор давления $P^{\alpha\beta}$ определяется формулой

$$P^{\alpha\beta}(x) := \Delta_{\sigma}^{\alpha} T^{\sigma\tau} \Delta_{\tau}^{\beta}, \tag{11}$$

симметрия которого следует из симметрии тензора энергии-импульса; тензор давления обычно разбивается на «обратимую» и «необратимую» части:

$$P^{\alpha\beta} = -p\Delta^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta}, \tag{12}$$

где величина $\Pi^{\alpha\beta}(x)$ называется тензором вязкого давления;

(v) плотность энтропии S определяется как скаляр

$$S(x) := sn := S^{\alpha} U_{\alpha} / c^2, \tag{13}$$

где $s(x)$ − энтропия на одну частицу;

С учетом определений плотности энергии (7), потока тепла (8) и тензора давления (12) можно записать следующие соотношения:

$$\varepsilon = U_{\alpha} T^{\alpha\nu} U_{\nu} / c^2, \quad \mathsf{J}_q^{\alpha} + h\Delta^{\alpha\nu} N_{\nu} = U_{\nu} T^{\nu\sigma} \Delta_{\sigma}^{\alpha}, \quad -p\Delta^{\alpha\nu} + \Pi^{\alpha\nu} = \Delta_{\sigma}^{\alpha} T^{\sigma\lambda} \Delta_{\lambda}^{\nu}. \tag{14}$$

Разложение тензора энергии-импульса. С помощью определения (4) для проекционного оператора $\Delta^{\alpha\nu}$ можно получить тождество

$$T^{\alpha\nu} = T^{(0)\alpha\nu} + T^{(1)\alpha\nu}, \tag{15}$$

где $T^{(0)\alpha\nu}$ − «обратимая» часть:

$$T^{(0)\alpha\nu} := \varepsilon U^{\alpha} U^{\nu} / c^2 - p\Delta^{\alpha\nu}, \tag{16}$$

а $T^{(1)\alpha\nu}$ − «необратимая» часть:

$$T^{(1)\alpha\nu} := c^{-2}\left[\left(\mathsf{J}_q^{\alpha} + h\Delta^{\alpha\sigma} N_{\sigma}\right)U^{\nu} + \left(\mathsf{J}_q^{\nu} + h\Delta^{\nu\sigma} N_{\sigma}\right)U^{\alpha}\right] + \Pi^{\alpha\nu}. \tag{17}$$

Эти две формы играют, как будет показано далее, важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

Выбор гидродинамической скорости. В космологической литературе используются два эквивалентных способа определения гидродинамической скорости U^{α}. В подходе Ландау и Лифшица (1988) скорость U^{α} определяется как скорость переноса энергии, а в подходе Эккарта (Eckart, 1940) скорость U^{α} есть скорость переноса частиц (именно по этой причине в сопутствующей системе координат величина $N^{i}\,(i=1,2,3)$ исчезает). Далее будет использован подход Эккарта, в котором скорость U^{α} определяется через 4-вектор потока частиц N^{α} следующим образом:

$$U^{\alpha} := cN^{\alpha} / \sqrt{N^{\nu}N_{\nu}}\,. \tag{18}$$

С учетом нормировки (2) и определения тензора проектора (3), определение (18) эквивалентно двум формам:

$$U^{\alpha} := c^{2}N^{\alpha} / N^{\nu}U_{\nu}, \quad \Delta^{\alpha\nu}N_{\nu} = 0. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (8), получим выражение для полного потока тепла в подходе Эккарта:

$$\mathrm{J}_{q}^{\alpha} := U_{\nu}T^{\nu\sigma}\Delta_{\sigma}^{\alpha}, \tag{20}$$

а при подстановке соотношения (19) в (17) получим для тензора энергии-импульса представление

$$T^{(1)\alpha\nu} = c^{-2}\left(\mathrm{J}_{q}^{\alpha}U^{\nu} + \mathrm{J}_{q}^{\nu}U^{\alpha}\right) + \Pi^{\alpha\nu}. \qquad (21$$

Производная по времени и градиент. С помощью гидродинамической 4скорости U^{α} ковариантную производную (1) по пространственно-временным координатам удобно разложить на времениподобную и пространственноподобную части. Используя тензор-проектор (3), можно получить тождество

$$\partial^{\alpha} = c^{-2}U^{\alpha}U^{\nu}\partial_{\nu} + \Delta^{\alpha\nu}\partial_{\nu} = c^{-2}U^{\alpha}\,\mathrm{D}_{u} + \nabla^{\alpha}, \tag{22}$$

где введены обозначения

$$\mathrm{D}_{u} := U^{\nu}\partial_{\nu}, \quad \nabla^{\alpha} := \Delta^{\alpha\nu}\partial_{\nu}. \tag{23}$$

Оператор D_u является конвекционной производной по времени (в сопутствующей системе отсчета (local rest) он представляет собой чисто временное дифференцирование, $\mathrm{D}_{u\mathrm{LR}} = \partial / \partial t$), а оператор градиента ∇^{α} является чисто пространственным, поскольку в этом случае он имеет вид :

$$\nabla^0_{\mathrm{LR}} = 0, \quad \nabla^i_{\mathrm{LR}} = -\nabla_{\mathrm{LR}\,i} = -\partial / \partial x^i, \quad \text{или} \quad U^{\alpha}\nabla_{\alpha} = 0\,.$$

Помимо понятия конвекционной производной по времени дополнительно вводится еще понятие субстанциональной производной по времени $\mathrm{D} := N^{\alpha}\partial_{\alpha}$, которая описывает изменение параметров среды при перемещении их вместе с потоком частиц. При определении гидродинамической скорости U^{α} по Эккарту два оператора D_u и D отличаются лишь множителем:

$$\mathrm{D} = n\mathrm{D}_u = nU^{\nu}\partial_{\nu}\,. \tag{24}$$

2. БАЛАНСОВЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

В рамках релятивистской кинетической теории балансовые уравнения выводятся из соответствующих законов сохранения, справедливых на микроскопическом уровне (см., например, de Groot и др., 1968; Кох и др., 1976). В чисто макроскопической теории эти законы сохранения постулируются.

В космологической жидкости, в которой сохраняется число частиц, закон сохранения 4-вектора потока частиц $N^{\alpha}(x)$ имеет вид:

$$\partial_{\alpha}N^{\alpha}(x) = 0\,. \tag{25}$$

Макроскопический закон сохранения энергии-импульса в случае, когда внешнее поле отсутствует, принимает вид:

$$\partial_{\beta}T^{\alpha\beta}(x) = 0\,, \tag{26}$$

где тензор энергии-импульса $T^{\alpha\nu}$, определяемый формулами (16) и (21), задается формулой

$$T^{\alpha\nu} := \varepsilon U^{\alpha}U^{\nu} / c^2 - p\Delta^{\alpha\nu} + c^{-2}\left(\mathsf{J}^{\alpha}_q U^{\nu} + \mathsf{J}^{\nu}_q U^{\alpha}\right) + \Pi^{\alpha\nu}\,. \tag{27}$$

При $\alpha = 0$ это – закон сохранения энергии, а при $\alpha = 1, 2, 3$ – закон сохранения импульса системы.

Уравнения непрерывности. Полная числовая плотность смеси задается ковариантным выражением (6). Отсюда и из нормировки скорости (2) следует, что $nU^{\alpha} := N^{\alpha}$. Используя закон сохранения (25) и оператор конвекционной производной по времени $\mathrm{D}_u := U^{\alpha}\partial_{\alpha}$, получим уравнение непрерывности для плотности n

$$\mathrm{D}_u\, n = U^{\alpha}\partial_{\alpha} n = \Big[\partial_{\alpha}(nU^{\alpha}) - n\partial_{\alpha}U^{\alpha} = \partial_{\alpha}N^{\alpha} - n\partial_{\alpha}U^{\alpha}\Big] = -n\,\partial_{\alpha}U^{\alpha},$$

которое, с учетом тождества (22) и вспомогательного соотношения (2), может быть записано также в виде:

$$\mathrm{D}_u\, n = -n\partial_{\alpha}U^{\alpha} = -n\nabla_{\alpha}U^{\alpha} + nc^{-2}U_{\alpha}D_u U^{\alpha} =$$

$$= -n\nabla_{\alpha}U^{\alpha} + n\,c^{-2}U^{\sigma}\Big(U_{\alpha}\partial_{\sigma}U^{\alpha}\Big)\Big] = -n\nabla_{\alpha}U^{\alpha}, \qquad (28)$$

или

$$n\,\mathrm{D}_u\, n^{-1} = \nabla_{\alpha}U^{\alpha}. \qquad (28^{*})$$

Релятивистское уравнение движения. Уравнение движения выводится из закона сохранения 4-тензора энергии-импульса путем свертывания его с проекционным оператором $\Delta^{\alpha\sigma}$(3):

$$\Delta^{\alpha}_{\sigma}\partial_{\nu}T^{\sigma\nu}(x) = 0. \qquad (29)$$

Подставляя выражения (27) для тензора энергии-импульса $T^{\sigma\nu}$ в это уравнение, получим релятивистского уравнения движения в ином виде :

$$c^{-2}hn\,\mathrm{D}_u\, U^{\alpha} = \nabla^{\alpha}p - \Delta^{\alpha}_{\nu}\nabla_{\sigma}\Pi^{\nu\sigma} + (hn)^{-1}\Pi^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}p -$$

$$-c^{-2}\Big(\Delta^{\alpha}_{\nu}\,\mathrm{D}_u\,\mathsf{J}^{\nu}_{q} + \mathsf{J}^{\alpha}_{q}\nabla_{\nu}U^{\nu} + \mathsf{J}^{\nu}_{q}\nabla_{\nu}U^{\alpha}\Big), \qquad (30)$$

В котором, как и прежде, h − энтальпия на одну частицу. Из этого уравнения видно, что ускорение релятивистской среды обусловлено градиентами давления и, кроме того, рядом членов чисто релятивистского происхождения. Если пренебречь потоками $\Pi^{\alpha\nu}$ и J^{α}_{q}, связанными с явлениями диссипативного переноса, то уравнение движения сведется к уравнению нулевого порядка

$$\mathrm{D}_u\, U^{\alpha} = c^{2}(nh)^{-1}\nabla^{\alpha}p, \qquad (31)$$

которое соответствует уравнению Эйлера для идеального газа в классической гидромеханике. Выражение (31), связывающее ускорение и градиент давления, играет важную роль при выводе релятивистских определяющих соотношений в тех случаях, когда рассматриваются только соотношения, линейные по потокам, связанным с явлениями переноса.

Релятивистское уравнение энергии. Уравнение баланса для удельной энергии $\varepsilon = en$ системы выводится с использованием закона сохранения энергии-импульса (26) при учете соотношений (2), (4), (10), (11), а также определений (23) для оператора $\mathrm{D}_u := U^{\nu}\partial_{\nu}$ и (27) для 4-тензора энергии-импульса $T^{\alpha\nu}$; в результате будем иметь:

$$\mathrm{D}_u\,\varepsilon = -hn\partial_{\alpha}U^{\alpha} + \Pi^{\alpha\nu}\partial_{\nu}U_{\alpha} - \partial_{\alpha}\mathrm{J}_q^{\alpha} + c^{-2}\mathrm{J}_q^{\alpha}\,\mathrm{D}_u\,U_{\alpha}\,. \tag{32}$$

Приведем также уравнение для скорости изменения энергии $e(x)$ на одну частицу, для вывода которого вычтем из уравнения (32) уравнение непрерывности (28), умноженное на e; в результате получим

$$\mathrm{D}e \equiv n\,\mathrm{D}_u\,e = -p\nabla_{\alpha}U^{\alpha} + \Pi^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}U_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathrm{J}_q^{\alpha} + 2c^{-2}\mathrm{J}_q^{\alpha}\,\mathrm{D}_u\,U_{\alpha}\,. \tag{33}$$

Если пренебречь диссипативными потоками $\Pi^{\alpha\beta}$ и J_q^{α}, то два уравнения для энергии (32) и (33) запишутся в виде релятивистских уравнений Эйлера (уравнений нулевого порядка для энергии):

$$\mathrm{D}_u\,\varepsilon = -hn\partial_{\alpha}U^{\alpha}, \tag{34}$$

$$\mathrm{D}e = -p\partial_{\alpha}U^{\alpha}\ . \tag{35}$$

Первый закон термодинамики. Первым законом термодинамики обычно называют уравнение, которое связывает величины $\mathrm{D}_u\,e + p\,\mathrm{D}_u(1/n)$ с другими локальными величинами. Из уравнения непрерывности (28) следует, что

$$n\,\mathrm{D}_u\,n^{-1} = \nabla_{\alpha}U_{\alpha}.$$

Объединяя это выражение с (33), приходим к уравнению

$$n\left(\mathrm{D}_u\,e + p\,\mathrm{D}_u\,n^{-1}\right) = \Pi^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}U_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathrm{J}_q^{\alpha} + 2c^{-2}\mathrm{J}_q^{\alpha}\,\mathrm{D}_u\,U_{\alpha}, \tag{36}$$

которое можно назвать первым законом релятивистской термодинамики. Из уравнения (36) видно, что изменение энергии $e(x)$ происходит за счет двух членов, описывающих работу, а именно второго члена в левой части, зависящего от локального гидростатического давления $p(x)$, и первого члена в правой части, зависящего тензора вязкого давления $\Pi^{\alpha\beta}$, а кроме того, за счет двух тепловых членов: дивергенции потока тепла J_q^{α} и чисто релятивистского члена, содержащего, в силу соотношения (31), градиент давления

$$\mathrm{D}e + p\mathrm{D}n^{-1} = \Pi^{\alpha\nu}\nabla_{\nu}U_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathsf{J}_q^{\alpha} + 2\mathsf{J}_q^{\alpha}(hn)^{-1}\nabla^{\alpha}p. \tag{37}$$

В отсутствие величин, связанных с диссипативными потоками процессами переноса, этот закон принимает простой вид

$$\mathrm{D}_u e + p\mathrm{D}_u(1/n) = 0, \tag{38}$$

соответствующий первому закону термодинамики для систем, адиабатически изолированных от окружающей среды.

Приведенные уравнения релятивистской гидродинамики являются незамкнутыми, поскольку входящие в них потоки переноса $\Pi^{\alpha\beta}, \mathsf{J}_q^{\alpha}$ пока остаются неопределенными. Покажем сначала, как эти потоки можно связать линейным образом с градиентами макроскопических переменных методами релятивистской необратимой термодинамики.

3. ЗАКОН ЭНТРОПИИ И БАЛАНС ЭНТРОПИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

Содержание понятия «второй закон термодинамики» может означать одно из двух следующих утверждений или охватывать оба эти утверждения:

(i) ***Соотношение Гиббса.*** Этот закон утверждает, как изменение энтропии в пространстве и во времени связано с изменениями термодинамических переменных, которые определяют состояние системы в равновесном состоянии. Обобщение соотношения Гиббса на релятивистскую область проведено в работе (de Groot и др., 1968), в которой было показано, что традиционная форма этого соотношения остается справедливой в первом приближении по потокам переноса для релятивистской системы в равновесном состоянии.

(ii) ***Закон баланса энтропии.*** Это уравнение выражает тот факт, что локальная энтропия релятивистской системы может изменяться как из-за потока энтропии J_s^{α}, так и из-за наличия производства энтропии на единицу объема в единицу времени (интенсивности источника энтропии) $\sigma(x)$, которое, являясь неотрицательной величиной, выражается через независимые потоки и сопряженные с ними термодинамические силы, непосредственно связанные с измеряемыми физическими величинами.

Формальное уравнение баланса энтропии. В разд. 1 формулой (13) была определена плотность энтропии $S := sn$ через поток $S^{\alpha}(x)$:

$$S := sn := S^{\alpha} U_{\alpha} / c^2 ,$$

где s − энтропия на одну частицу. Получим теперь формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество

$$n \mathrm{D}_u s \equiv \partial_{\alpha}(sN^{\alpha}), \tag{39}$$

которое является следствием закона сохранения (28) числа частиц $n(x)$ и определения (23) оператора конвекционной производной по времени D_u. Добавляя и вычитая один и тот же член, запишем равенство (39) в виде

$$n \mathrm{D}_u s = -\partial_{\alpha}(S^{\alpha} - sN^{\alpha}) + \partial_{\alpha} S^{\alpha}, \tag{40}$$

которое можно трактовать как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде:

$$n \mathrm{D}_u s = -\partial_{\alpha} \mathsf{J}_s^{\alpha} + \sigma, \tag{41}$$

где

$$\mathsf{J}_s^{\alpha}(x) := S^{\alpha}(x) - s(x) N^{\alpha}(x), \quad 0 \le \sigma := \partial_{\alpha} S^{\alpha} \tag{42}$$

− соответственно поток энтропии (по определению) и интенсивность источника энтропии − величина, которая является постулируемым законом возрастания энтропии.

Релятивистское соотношение Гиббса

Из КНТ известно, что плотность энтропии является вполне определенной функцией параметров состояния, необходимых для полного описания макроскопической равновесной системы (см., например, Müller, 1986). Для рассматриваемой релятивистской жидкости такими параметрами являются энергия на одну частицу $e(x)$ и удельный объем $n(x)^{-1}$, приходящийся на одну частицу. Это свойство для релятивистских систем (как и для классических) выражается тем фактом, что для систем, находящихся в равновесии, имеет место так называемое соотношение Эйлера (см., например, de Groot и др., 1968; Israel, 1976)

$$Ts = e + pn^{-1} - \mu , \tag{43}$$

в котором T – температура системы, находящейся в равновесии; p –локальное гидростатическое давление, μ – функция Гиббса (термодинамический потенциал), приходящаяся на одну частицу.

Если взять теперь ковариантную производную ∂_ν от (43), то получим выражение

$$T\partial_\nu s = \partial_\nu e + p\partial_\nu n^{-1} + n^{-1}\partial_\nu p - s\partial_\nu T - \partial_\nu \mu , \quad (\nu = 0,1,2,3). \tag{44}$$

Поскольку три последние члена в этом выражении обращаются в нуль с $(n^{-1}\partial_\nu p - s\partial_\nu T - \partial_\nu \mu = 0$ – релятивистский вариант соотношения Гиббса-Дюгема), то из (44) следует справедливое для локально равновесных условий релятивистское соотношение Гиббса:

$$T\partial_\nu s = \partial_\nu e + p\partial_\nu n^{-1} , \quad (\nu = 0,1,2,3). \tag{45}$$

Это соотношение связывает изменение (относительно времени t и пространственных координат $\mathbf{x}$) энтропии $s(x)$ на одну частицу с изменениями энергии $e(\mathbf{x},t)$, плотности $n(\mathbf{x},t)$. Другими физическими величинами являются абсолютная температура $T(\mathbf{x},t)$ и локальное гидростатическое давление $p(\mathbf{x},t)$, определяемые производными:

$$T^{-1} = (\partial s / \partial e)_{1/n} , \quad T^{-1} p = (\partial s / \partial n^{-1})_e .$$

Соотношение Гиббса (45) с помощью оператора конвекционной производной по времени $\mathrm{D} := n\mathrm{D}_u$ может быть записано также в виде (см., de Groot и др., 1968; Israel, 1976)

$$T\,\mathrm{D}s = \mathrm{D}e + p\,\mathrm{D}n^{-1} . \tag{46}$$

Баланс энтропии, основанный на соотношении Гиббса и законах сохранения. Чтобы найти явную форму уравнения баланса энтропии (41), скомбинируем соотношение (46) и уравнение (37); в результате получим:

$$Tn\,\mathrm{D}_u\,s = \Pi^{\alpha\nu}\partial_\nu U_\alpha - \nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha + \mathsf{J}_q^\alpha (hn)^{-1}\nabla^\alpha p\,. \qquad (47$$

Это уравнение, записанное в форме уравнения баланса (41), принимает вид:

$$n\,\mathrm{D}_u\,s = -\nabla_\alpha\left(\frac{\mathsf{J}_q^\alpha}{T}\right) + \frac{1}{T}\left\{\Pi^{\alpha\nu}\nabla_\nu U_\alpha - \mathsf{J}_q^\alpha\left(\frac{\nabla_\alpha T}{T} - \frac{\nabla_\alpha p}{hn}\right)\right\}. \qquad (48)$$

Из сравнения (41) с уравнением (48) вытекают выражения для потока энтропии и производства энтропии:

$$\mathsf{J}_s^\alpha := \frac{1}{T}\mathsf{J}_q^\alpha, \quad \sigma := \frac{1}{T}\left\{\Pi^{\alpha\nu}\nabla_\nu U_\alpha - \mathsf{J}_q^\alpha\left(\frac{\nabla_\alpha T}{T} - \frac{\nabla_\alpha p}{hn}\right)\right\} \geq 0\,. \qquad (49)$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

Производство энтропии. Для удобства выполнения дальнейших операций разобьем тензор вязкого давления $\Pi^{\alpha\nu} := \Delta_\sigma^\alpha T^{\sigma\tau}\Delta_\tau^\nu + p\Delta^{\alpha\nu}$ следующим образом:

$$\Pi^{\alpha\nu} := -\Pi\Delta^{\alpha\nu} + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}\,. \qquad (50)$$

Здесь $\Delta^{\alpha\beta}(x) := g^{\alpha\beta} - c^2 U^\alpha(x) U^\beta(x)$ − тензор-проектор, обладающий рядом используемых далее свойств (5); $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$ − тензор вязкого давления с нулевым следом;

$$\Pi := -\tfrac{1}{3}\Pi^{\alpha\nu}\Delta_{\alpha\nu} \qquad (51)$$

− вязкое давление, определяемое как взятая со знаком минус одна треть следа тензора вязкого давления, $\Pi := -\tfrac{1}{3}\Pi_\alpha^\alpha$. Последнее определение вытекает из соотношения

$$\Pi^{\alpha\nu}\Delta_{\nu\alpha} = \Pi^{\alpha\nu}g_{\nu\alpha} = \Pi_\alpha^\alpha, \qquad (52)$$

где первое равенство является следствием: (i) определения тензора-проектора (5); (ii) определения (12) для тензора давления $P^{\alpha\beta}$ и определения

$$\Pi^{\alpha\beta} := P^{\alpha\beta} + p\Delta^{\alpha\beta}; \tag{53}$$

для тензора вязкого давления; (iii) соотношения ортогональности, $\Delta^{\alpha\beta} U_\beta = 0$.

Используя перечисленные вспомогательные формулы, а также формулы (5) и (50), легко показать, что справедливо равенство

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} g_{\nu\alpha} = \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \nabla_{\nu\alpha} = 0, \tag{54}$$

т.е. что тензор $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$ действительно имеет нулевой след.

Если теперь разложение (50) подставить в соотношение (49) для производства энтропии через вязкие процессы, то получим

$$T\sigma_1 = -\Pi\nabla^\nu U_\nu + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \nabla_\nu U_\alpha. \tag{55}$$

Из (55) видно, что полный вклад вязких явлений в производство релятивистской энтропии оказывается разделенным на две части. Из них первый вклад обусловлена наличием вязкого давления (второй вязкостью). Что касается второго члена в разложении (50), то из того факта, что тензор вязкости $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$ является симметричным и пространственно подобным, можно заключить, что в ковариантной производной $\partial_\nu U_\alpha$ в этом произведении существенна только ее симметричная, пространственно подобная и бесследовая часть: эта величина будет далее обозначаться кривой полоской со знаком нуля над ней. Таким образом, вместо (55) можно написать

$$T\sigma_1 = -\Pi\nabla^\nu U_\nu + \overset{\circ}{\Pi}_{\nu\alpha} \overset{\circ}{\overparen{\nabla^\alpha U^\nu}}, \tag{56}$$

где

$$\overset{\circ}{\overparen{\nabla^\alpha U^\nu}} = \left[\tfrac{1}{2}\left(\Delta^\alpha_\sigma \Delta^\nu_\tau + \Delta^\nu_\sigma \Delta^\alpha_\tau\right) - \tfrac{1}{3}\Delta^{\alpha\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right]\nabla^\sigma U^\tau. \tag{57}$$

Наконец, подставляя (56) в (49), получим окончательное выражение для полного производства энтропии

$$T\sigma = -\Pi\nabla^\nu U_\nu + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\nu\alpha} \overset{\circ}{\overparen{\nabla_\nu U_\alpha}} - \mathrm{J}_{q\alpha}\left(\nabla^\alpha \ln T - \frac{k_B T}{h}\nabla^\alpha p\right). \tag{58}$$

Перепишем теперь выражение (58), представляющее собой сумму произведений необратимых потоков и сопряженных с ними термодинамических сил различных тензорных порядков, в следующем виде:

$$T\sigma = \Pi X_U + J_q^{\alpha} X_{q\alpha} + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{X}_{\nu\alpha}, \tag{59}$$

где

$$X_U := -\nabla^{\alpha} U_{\alpha} \tag{60}$$

– термодинамическая сила (4-дивергенция гидродинамической скорости), сопряженная с потоком, обусловленным вязким давлением Π;

$$\overset{\circ}{X}_{\alpha\nu} := \overset{\circ}{\widehat{\nabla_{\nu} U_{\alpha}}} \tag{61}$$

– термодинамическая сила (тензор сдвига), сопряженная с тензором $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$;

$$X_{q\alpha} := -\left(\frac{\nabla^{\alpha} T}{T} - \frac{\nabla^{\alpha} p}{hn} \right) = -\nabla^{\alpha} \ln T + \frac{k_B T}{h} \nabla^{\alpha} \ln p, \quad (\alpha = 0,1,2,3) \tag{62}$$

– связанная с тепловым потоком J_q^{α} термодинамическая сила, включающая градиент температуры и пропорциональный градиенту давления так называемый член Эккарда (чисто релятивистский эффект, обусловленный зависимостью энтальпии h от энергии покоя mc^2).

Линейные определяющие соотношения. Для получения феноменологических определяющих соотношений, линейно связывающих между собой независимые потоки и термодинамические силы, используем выражение (59). В принципе каждая компонента потока в этом случае может быть функцией компонент всех термодинамических сил. Однако потоки и термодинамические силы в (59), как нетрудно видеть, обладают различными тензорными свойствами: являясь 4-скалярами, 4-векторами и 4-тензорами. Это означает, что трансформационные свойства указанных объектов, детерминированные при обычных пространственных вращениях их поведением относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца, являются различными (см. Вайнберг, 2000). В результате может оказаться, что, в силу свойств симметрии рассматриваемой среды, отдельные компоненты какого-либо потока будут зависеть не от всех компонентов термодинамических сил (релятивистский принцип симметрии Кюри). В частности, для изотропной среды потоки и термодинамические силы различной тензорной размерности не зависят друг от друга (de Groot, Mazur, 1962).

В соответствии с общей концепцией конструирования феноменологических определяющих соотношений в необратимой термодинамике, релятивистские определяющие соотношения для изотропной среды, связанные с вкладом вязкости в производство энтропии, принимают вид:

$$\Pi = \eta_U X_U = -\eta_U \nabla^\alpha U_\alpha, \tag{63}$$

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} = 2\eta \overset{\circ}{X}_{\alpha\nu} = 2\eta \overset{\circ}{\overbrace{\nabla^\alpha U^\nu}} \tag{64}$$

– тензорный закон для вязкого потока. Здесь $\eta_U(T, n^{-1})$, $\eta(T, n^{-1})$ – соответственно скалярный коэффициент объемной вязкости и скалярный коэффициент сдвиговой вязкости.

Линейное соотношение для теплового потока J_q^α принимает вид:

$$J_q^\alpha = l_{qq} X_q^\alpha = -l_{qq}\left(\nabla^\alpha \ln T - \frac{k_B T}{h}\nabla^\alpha \ln p\right) =$$

$$= -\lambda\left(\nabla^\alpha T - \frac{T}{hn}\nabla^\alpha p\right), \quad (\alpha = 0,1,2,3), \tag{65}$$

где $\lambda(T, n^{-1}) = l_{qq}/T$ – коэффициент теплопроводности.

В качестве кинетических коэффициентов переноса могут быть использованы результаты релятивистской кинетической теории (de Groot и др., 1975; Liu и др., 1986). В частности, в работе (Cox и др. 1976) были получены аналитические и численные результаты для первых трех приближений к коэффициентам переноса газа, состоящего из массивных частиц с постоянным дифференциальным сечением; был также изучен полный температурный режим поведения этих коэффициентов как для слаборелятивистского, так и для ультрарелятивистского идеального газа.

Релятивистская гидродинамика в классе теорий первого порядка. С помощью феноменологических линейных законов (63)-(65) и уравнений состояния

$$p = nk_B T, \tag{66}$$

$$e = mc^2 + \frac{3}{2}k_B T + \frac{15}{8}\frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \ldots \tag{67}$$

можно преобразовать уравнения баланса для плотности числа частиц $n(x)$, гидродинамической скорости $U^{\alpha}(x)$ и энергии на одну частицу $e(x)$ в систему дифференциальных уравнений в частных производных для переменных n, U^{α} и T.

Однако, если просто подставить линейные законы (64) и (65) в уравнения баланса, то получится громоздкий результат, не имеющий, по-видимому, какой-либо практической ценности. Поэтому обычно предполагают, что градиенты полевых величин можно считать малыми, что позволяет линеаризовать по этим градиентам балансовые уравнения, т.е. пренебречь членами, содержащими произведения потоков и градиентов. Коэффициенты переноса при этом можно считать постоянными.

Уравнение непрерывности (28), не содержащее каких-либо необратимых величин, сохраняет свою форму

$$\mathrm{D}_u n = -n \nabla_{\nu} U^{\nu}. \tag{68}$$

Релятивистское уравнение движения (30) после подстановки выражения (64) и линеаризации по градиентам принимает вид:

$$c^{-2} hn \, \mathrm{D}_u U^{\alpha} = \nabla^{\alpha} p - \eta_U \nabla_{\sigma} U^{\sigma} - 2\eta \nabla_{\nu} \overset{\circ}{\overbrace{\nabla^{\alpha} U^{\nu}}} - c^{-2} \, \mathrm{D}_u \mathrm{J}_q^{\alpha}. \tag{69}$$

Уравнение для энергии (33) в силу уравнений состояния (66) и (67) и линейного соотношения (65) для теплового потока после линеаризации по градиентам принимает вид:

$$nc_v \, \mathrm{D}_u T = -p \nabla_{\alpha} U^{\alpha} + \lambda \left(\nabla^2 T - \frac{T}{hn} \nabla^2 p \right). \tag{70}$$

Здесь $\nabla^2 := \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha}$; $c_v := \partial e / \partial T$ – теплоемкость на одну частицу. При использовании отношения теплоемкостей на одну частицу $\gamma = c_p / c_v = 1 + k_B / c_v$ уравнение энергии (70) можно переписать так:

$$\frac{\mathrm{D}_u T}{T} = (1-\gamma) \left[\nabla_{\alpha} U^{\alpha} + \frac{\lambda}{p} \left(\nabla^2 T - \frac{T}{hn} \nabla^2 p \right) \right]. \tag{71}$$

Выразим теперь последний член уравнения движения (71) через структурные параметры n, U^{α} и T. При использовании уравнений (66), (68) и (71) легко получить соотношение $\mathrm{D}_u\, p = \gamma p \nabla_\alpha U^\alpha$, с помощью которого искомое представление для временной производной теплового потока J_q^α имеет вид:

$$c^{-2}\,\mathrm{D}_u\,\mathsf{J}_q^\alpha = \xi \nabla^\alpha \nabla_\nu U^\nu,\ \text{где}\quad \xi := \frac{\lambda T}{c^2 h}\big[(1-\gamma)h + \gamma k_B T\big]. \qquad (72)$$

Таким образом, уравнения (68), (69), (71) и (72) образуют самосогласованную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая полностью описывает временную эволюцию релятивистской жидкости при условии, что заданы соответствующие начальные и граничные условия. Эти уравнения представляют собой релятивистское обобщение уравнений Навье−Стокса классической гидродинамики для идеальных сред. Они отличаются от этих уравнений наличием членов, которые пропорциональны коэффициентам переноса и которые описывают диссипативные эффекты в релятивистской системе.

В заключение этого раздела отметим следующее: полученная здесь система диссипативных уравнений релятивистской гидродинамики обладает двумя недостатками. Во-первых, эта гидродинамика первого порядка предсказывает существование бесконечной скорости распространения термальных и вязкостных возмущений, что, вообще говоря, неприемлемо с точки зрения релятивистской теории. Во-вторых, полученные с использованием феноменологических линейных законов уравнения переноса характеризуются общей неустойчивостью: фактически при наличии малых возмущений их решения экспоненциально расходятся от состояния равновесия (Hiscock, Lindblom, 1985).

Этих недостатков можно избежать, если использовать при конструировании релятивистской гидродинамики методологию расширенной необратимой термодинамики. Заметим, что обеспечение конечности скорости распространения термальных и вязкостных сигналов было, как раз, одной из мотиваций появления и разработки теории РНТ (см. Müller, Ruggeri 1998;. Casas-Vazquez, Jou, 2003; Jou и др. 2005; Жоу и др., 2006; Lebon и др.,1992, 1995, 2008).

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ЗАМЫКАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ РАСШИРЕННОЙ НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Перейдём теперь к главной цели данной работы − выводу определяющих соотношений, описывающих релаксацию релятивистских диссипативных потоков в рамках формализма РНТ (*Keizer,* 1983*;* Jou и др., 2003). Сразу же отметим, что РНТ (справедливая вне приближения локального равновесия) не дает в общем случае какого-либо общего критерия для их нахождения, за исключением лишь тех ограничений, которые накладывает на эти уравнения второй закон термодинамики. По этой причине уравнения эволюции не могут принимать произвольный вид, поскольку они должны удовлетворять второму закону, $\sigma \geq 0$ (отсюда линейная связь между потоками и сопряженными с ними термодинамическими силами).

Естественным путем получения дифференциальных уравнений для релаксационных диссипативных потоков, описывающих неравновесные, но устойчивые состояния релятивистской среды, является модификация полученных в разд. 4 линейных законов в рамках КНТ.

Обобщенное соотношение Гиббса. Так же, как и в КНТ, энтропия и тождество Гиббса играют в релятивистской РНТ центральную роль. В контексте формализма РНТ будем постулировать, что существует обобщённая неравновесная энтропия

$$s = s(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}), \tag{73}$$

зависящая не только от классической переменных − энергии e и удельного объема n^{-1}, но также от и потоков $\mathit{\Pi}$, J_q^{α} и $\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}$, фигурирующих в уравнениях баланса числа частиц, импульса и энергии. Тогда дифференциальная форма записи обобщенной энтропии принимает вид:

$$\mathrm{D}_u s = \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial s}{\partial e}\right)_{n^{-1},\mathit{\Pi},\mathrm{J}_q^{\alpha},\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} \mathrm{D}_u e + \left(\frac{\partial s}{\partial n^{-1}}\right)_{e,\mathit{\Pi},\mathrm{J}_q^{\alpha},\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} \mathrm{D}_u n^{-1} + \left(\frac{\partial s}{\partial \mathrm{J}_q^{\alpha}}\right)_{e,n^{-1},\mathit{\Pi},\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} \mathrm{D}_u \mathrm{J}_q^{\alpha} +$$

$$+\left(\frac{\partial s}{\partial \mathit{\Pi}}\right)_{e,n^{-1},\mathrm{J}_q^{\alpha},\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} \mathrm{D}_u \mathit{\Pi} + \left(\frac{\partial s}{\partial \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}}\right)_{e,n^{-1},\mathit{\Pi},\mathrm{J}_q^{\alpha}} \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}. \tag{74}$$

По аналогии с классической теорией необратимых процессов определим неравновесную абсолютную температуру[2)] $\theta(x)$ и неравновесное термодинамическое давление $\pi(x)$ равенствами:

$$\theta^{-1}(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}) := \left(\partial s / \partial e\right)_{n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}}, \tag{75}$$

$$\theta^{-1}\pi(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}) := \left(\partial s / \partial n^{-1}\right)_{e, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}}. \tag{76}$$

Оставшиеся частные производные в (74), по предположению, будем считать линейными по потокам. Введем обозначения:

$$\left(\partial s / \partial \mathit{\Pi}\right)_{e, n^{-1}, \mathrm{J}_q^{\alpha}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} := -T^{-1} n^{-1} \alpha_{00} \mathit{\Pi}, \tag{77}$$

$$\left(\partial s / \partial \mathrm{J}_q^{\alpha}\right)_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}} := -T^{-1} n^{-1} \alpha_{10} \mathrm{J}_q^{\alpha}, \tag{78}$$

$$(\partial s / \partial \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu})_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}} := -T^{-1} n^{-1} \alpha_{21} \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}. \tag{79}$$

Здесь коэффициенты α_{00}, α_{10} и α_{21} представляют собой неизвестные скалярные функции от параметров e и n^{-1}. Подстановка выражений (77)-(79) в (74) приводит к обобщённому соотношению Гиббса для неравновесной релятивистской системы

$$n \mathrm{D}_u s = \theta^{-1} n \mathrm{D}_u e + \theta^{-1} \pi\, n \mathrm{D}_u n^{-1} -$$

$$-T^{-1} \alpha_{00} \mathit{\Pi} (\mathrm{D}_u \mathit{\Pi}) - T^{-1} \alpha_{10} \mathrm{J}_q^{\alpha} (\mathrm{D}_u \mathrm{J}_q^{\alpha}) - T^{-1} \alpha_{21} \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu} (\mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}). \tag{80}$$

Эволюция энтропии определяется законом баланса (41), и теперь необходимо найти соответствующие выражения для потока энтропии J_s^{α} и производства энтропии σ в этом неравновесном случае. Для этого подставим в (80) выражения для $n \mathrm{D}_u e$ и $n \mathrm{D}_u n^{-1}$ из законов баланса энергии и массы (33). (28). Непосредственные выкладки позволяют получить равенство:

[2)] Заметим, что температура θ не является мерой средней энергией поступательных степеней свободы частиц релятивистской жидкой среды.

$$n\mathrm{D}_u s = \frac{1}{T}\left(-\nabla^\alpha \mathsf{J}_q^\alpha + 2\mathsf{J}_q^\alpha \frac{\nabla^\alpha p}{hn} - \varPi \nabla^\nu U_\nu + \overset{\circ}{\varPi}_{\alpha\nu} \overset{\circ}{\overline{\nabla^\alpha U^\nu}} \right) -$$

$$- \alpha_{00} \varPi (\mathrm{D}_u \varPi) - \alpha_{10} \mathsf{J}_q^\alpha (\mathrm{D}_u \mathsf{J}_q^\alpha) - \alpha_{21} \overset{\circ}{\varPi}{}^{\alpha\nu} (\mathrm{D}_u \overset{\circ}{\varPi}_{\alpha\nu}). \qquad (81)$$

При получении этого результата использовалось разложение тензора давления $P^{\alpha\nu} = -(\pi + \varPi)\Delta^{\alpha\nu} + \overset{\circ}{\varPi}{}^{\alpha\nu}$, представляющее собой известное в классической релятивистской гидродинамики разложение, в котором p заменено на неравновесное давление π. Используемая далее замена π и θ на p и T в соотношении (81) объясняется тем, что вклады второго порядка в потоках ничтожно малы (Жоу и др., 2006).

Обобщенный поток энтропии и производство энтропии. Прежде чем перейти к нахождению обобщенного выражения для производства энтропии, определяемого равенством (41)

$$\sigma = n\mathrm{D}_u s + \partial_\alpha \mathsf{J}_s^\alpha \geq 0, \qquad (82)$$

нам необходимо определить соответствующее выражение для потока энтропии J_s^α. Для изотропных релятивистских систем наиболее общим таким представлением в терминах базисных независимых переменных e, n^{-1}, $\varPi$, J_q^α и $\overset{\circ}{\varPi}{}^{\alpha\nu}$ и с учетом членов не ниже второго порядка является следующее равенство:

$$\mathsf{J}_s^\alpha := \theta^{-1} \mathsf{J}_q^\alpha + \beta'' \varPi \mathsf{J}_q^\alpha + \beta''' \overset{\circ}{\varPi}{}^{\alpha\nu} \mathsf{J}_{q\nu}, \qquad (83)$$

где коэффициенты β'' и β''' представляют собой в общем случае функции e и n^{-1} Здесь, для того чтобы показать связь с проблемой теплопроводности, в качестве коэффициента при тепловом потоке J_q^α выбрана обратная неравновесная температура θ^{-1}.

Выражение для производства энтропии можно легко получить из (82), заменив $n\mathrm{D}_u s$ и J_s^α на соответствующие выражения (81) и (83). В результате получим

$$0 \le \sigma = \frac{1}{T}\left(-\nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha + \mathsf{J}_q^\alpha \frac{2\nabla^\alpha p}{hn} - \Pi \nabla^\alpha U_\alpha + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}\, \overset{\circ}{\overbrace{\nabla_\alpha U_\nu}} \right) - \alpha_{00}\Pi(\mathrm{D}_u \Pi) -$$

$$-\alpha_{10}\mathsf{J}_q^\alpha(\mathrm{D}_u\, \mathsf{J}_{q\alpha}) - \alpha_{21}\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}(\mathrm{D}_u\, \overset{\circ}{\Pi}_{\alpha\nu}) + \partial_\alpha \left\{ \theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha + \beta'' \Pi \mathsf{J}_q^\alpha + \beta'''\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}\, \mathsf{J}_{q\nu} \right\}. \quad (84)$$

Это выражение имеет билинейную форму

$$\sigma = \Pi X_U + \mathsf{J}_q^\alpha X_{q\alpha} + \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{X}_{\alpha\nu}, \quad (85)$$

где введены следующие термодинамические силы, сопряженные с диссипативными потоками Π, J_q^α и $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$:

$$X_U := -\frac{1}{T}\nabla^\alpha U_\alpha - \alpha_{00}(\mathrm{D}_u \Pi) + \beta'' \nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha, \quad (86)$$

$$X_{q\alpha} = \frac{1}{T}\left(-\nabla^\alpha \ln T + \frac{\nabla^\alpha p}{hn} \right) - \alpha_{10}(\mathrm{D}_u\, \mathsf{J}_q^\alpha) + \beta'' \nabla^\alpha \Pi + \beta''' \nabla_\nu\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}, \quad (87)$$

$$\overset{\circ}{X}_{\alpha\nu} = \frac{1}{T}\overset{\circ}{\overbrace{\nabla^\alpha U^\nu}} - \alpha_{21}(\mathrm{D}_u\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}) + \beta''' \overset{\circ}{\overbrace{\nabla^\alpha \mathsf{J}_q^\nu}}. \quad (88)$$

При написании соотношений (86)-(88) были использованы тождественные преобразования:

$$\partial_\alpha(\theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha) = \nabla_\alpha(\theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha) + c^{-2}U_\alpha\, \mathrm{D}_u(\theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha) =$$

$$= \nabla_\alpha(\theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha) - c^{-2}\theta^{-1}\mathsf{J}_q^\alpha\, \mathrm{D}_u U^\alpha \cong T^{-1}\nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha - \mathsf{J}_q^\alpha \frac{\nabla_\alpha T}{T^2} - \frac{1}{T}\mathsf{J}_q^\alpha \frac{\nabla^\alpha p}{hn}, \quad (89))$$

$$\partial_\alpha(\beta'' \Pi \mathsf{J}_q^\alpha) = \beta'' \Pi \nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha + \beta'' \mathsf{J}_q^\alpha \nabla_\alpha \Pi - \beta'' c^{-2} \Pi \mathsf{J}_q^\alpha \left(\mathrm{D}_u\, U^\alpha \right), \quad (90)$$

$$\partial_\alpha(\beta'''\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \mathsf{J}_{q\nu}) = \beta''' \mathsf{J}_{q\nu} \nabla_\alpha\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} + \beta'''\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}\, \nabla_\alpha \mathsf{J}_{q\nu} - \beta''' c^{-2} \mathsf{J}_{q\nu}\, \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \left(\mathrm{D}_u\, U^\alpha \right), \quad (91)$$

при получении которых использованы:

(i) формула (22) для $\partial^\alpha = c^{-2}U^\alpha\, \mathrm{D}_u + \nabla^\alpha$;

(ii) вместо производной по времени $\mathrm{D}_u U^\alpha$ − справедливое для идеальной жидкости уравнение движения (31) нулевого порядка, $c^{-2}\,\mathrm{D}_u U^\alpha = (hn)^{-1}\nabla^\alpha p$;

(iii) условия ортогональности (10), $\mathsf{J}_q^\alpha U_\alpha = 0$, $\Pi^{\alpha\nu} U_\nu = 0$;

(iv) пренебрежение последними членами в соотношениях (90) и (91), поскольку они приводят к повышению порядка приближения (выше второго). **Уравнения релаксации.** В соответствии с общей концепцией конструирования определяющих соотношений в необратимой термодинамике, релятивистские уравнения эволюции для потоков J_q^α, Π и $\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}$ в изотропной релятивистской среде можно выбрать пропорциональными, соответственно, $X_{q\alpha}, X_U$ и $\overset{\circ}{X}_{\alpha\nu}$ с положительными коэффициентами пропорциональности и так, чтобы обеспечить положительность величины производства энтропии σ. Вследствие этого уравнения эволюции потоков имеют вид:

а) *Феноменологическое линейное уравнение для вязкого давления.* Это уравнение имеет вид:

$$\Pi = T\eta_U X_U = -\eta_U \left[\nabla_\nu U^\nu + \frac{1}{Tnk_B}\left(\hat{a}_{00}\,\mathrm{D}_u \Pi - \hat{\beta}''\nabla_\alpha \mathsf{J}_q^\alpha \right) \right]. \qquad (92)$$

Здесь η_U − коэффициент объемной вязкости, для которого релятивистская кинетическая теория для идеального газа дает в первом приближении вариационного метода Ритца следующее выражение (Anderson, 1975):

$$\eta_U = \frac{k_B T}{c\,\sigma(T)} \frac{[(5-3\gamma)\hat{h} - 3\gamma]^2}{A^{22}}. \qquad (93)$$

Здесь $\sigma(T)$ − эффективное дифференциальное сечение; $\hat{h} = h / k_B T$ − приведенная энтальпия; $z := mc^2 / k_B T$; $\gamma := c_p / c_v = 1 + k_B / c_v$ − отношение теплоемкостей. В том же приближении для коэффициентов $\hat{a}_{00} = a_{00} Tp$ и $\hat{\beta}'' = \beta'' Tp$, в случае идеального газа $p = k_B n T$, имеем:

i) в нерелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to \infty$:

$$\hat{\alpha}_{00} = 6z^2/5, \quad \hat{\beta}'' = 4z/5, \qquad (94)$$

ii) в ультрарелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to 0$:

$$\hat{\alpha}_{00} = 216 / z\,, \quad \hat{\beta}'' = 6 / z^2\,. \tag{95}$$

b) *Линейное уравнение эволюции для теплового потока*. Это уравнение имеет вид:

$$\mathsf{J}_q^{\alpha} = T^2 \lambda X_{q\alpha} = T\lambda \left[-\frac{\nabla^{\alpha} T}{T} + \frac{\nabla^{\alpha} p}{hn} - \frac{1}{nk_B T} \left(\hat{\alpha}_{10} (\mathrm{D}_u \mathsf{J}_q^{\alpha}) - \hat{\beta}'' \nabla^{\alpha} \Pi - \hat{\beta}''' \nabla_{\nu} \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} \right) \right], \tag{96}$$

где

$$\lambda = \frac{3ck_B}{\sigma(T)} \left(\gamma / (\gamma - 1) \right)^2 \frac{1}{B^{11}} \tag{97}$$

– коэффициент теплопроводности, полученный в первом приближении вариационного метода Ритца (Anderson, 1975); для коэффициентов $\hat{\beta}'' = Tp\beta''$, $\hat{\beta}''' = Tp\beta'''$ и $\hat{\alpha}_{10} = pT\alpha_{10}$ имеем:

i) в нерелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to \infty$:

$$\hat{\beta}'' = 4z / 5, \quad \hat{\alpha}_{10} = 2z / 5c^2, \quad \hat{\beta}''' = 2 / 5; \tag{98}$$

ii) в ультрарелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to 0$:

$$\hat{\beta}'' = 6 / z^2, \quad \hat{\alpha}_{10} = 5 / 4c^2, \quad \hat{\beta}''' = 1 / 4\,. \tag{99}$$

c) *Уравнение для давления при наличии сдвиговой вязкости*. Релятивистская расширенная необратимая термодинамика приводит к следующему результату:

$$\overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu} = 2\eta T \overset{\circ}{X}_{\alpha\nu} = 2\eta \left[\overset{\circ}{\overbrace{\nabla^{\alpha} U^{\nu}}} - \frac{1}{nk_B T} \left(\hat{\alpha}_{21} (\mathrm{D}_u \overset{\circ}{\Pi}{}^{\alpha\nu}) - \hat{\beta}''' \overset{\circ}{\overbrace{\nabla^{\alpha} \mathsf{J}_q^{\nu}}} \right) \right], \tag{100}$$

где

$$\eta = \frac{k_B T}{c\sigma(T)} \frac{10\hat{h}}{C^{00}} \tag{101}$$

− коэффициент сдвиговой вязкости в первом приближении вариационного метода Ритца (см. Anderson, 1975); коэффициенты $\hat{\alpha}_{21} = nk_B T^2 \alpha_{21}$ и $\hat{\beta}''' = nk_B T^2 \beta'''$ стремятся к значениям:

i) в нерелятивистском пределе:

$$\hat{\alpha}_{21} = 1/2, \quad \hat{\beta}''' = 2/5; \tag{102}$$

ii) в ультрарелятивистском пределе:

$$\hat{\alpha}_{21} = 3/4, \quad \hat{\beta}''' = 1/2. \tag{103}$$

Здесь матричные элементы A^{22}, B^{11} и C^{00} являются скобочным выражениями, которые вычисляются с учетом вида взаимодействия частиц.

Если с помощью линейных законов (92), (96) и (100) исключить термодинамические силы из (85), то прирост энтропии можно представить в виде

$$T\sigma = \frac{1}{\eta_U} \mathit{\Pi}^2 + \frac{1}{T\lambda} \mathsf{J}_q^\alpha \mathsf{J}_q^\alpha + \frac{1}{2\eta} \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu} \geq 0 . \tag{104}$$

Таким образом, обобщенные линейные законы совместимы с неотрицательным приростом энтропии. Найденное выражение для прироста энтропии согласуется с традиционной термодинамикой необратимых процессов.

Релятивистская гидродинамика второго порядка. Три уравнения (92), (96) и (100) для вязкого давления, теплового потока и давления при наличии сдвиговой вязкости, полученные в рамках расширенной необратимой термодинамики, являются обобщениями линейных законов (63)-(65), получаемых методами КНТ. Здесь они выведены при выборе гидродинамической скорости по Эккарту. Эти соотношения частично совпадают с аналогичными формулами, выведенными де Гроотом и др. (1968), Стюартом (1971) и Израэлем и Стюартом (1979) в их термодинамической теории. Наиболее поразительное свойство обобщенных линейных законов заключается в появлении производных по времени от потоков. Таким образом, они учитывают релаксационный эффект с типичной временной шкалой порядка среднего свободного времени.

Система гидродинамических уравнений (28), (30) и (33), линеаризованных по градиентам структурных параметров, и линейных определяющих уравнений для диссипативных потоков, переписанных в виде уравнений релаксации, имеет вид:

$$\mathrm{D}_u\, n = -n \nabla_\alpha U^\alpha , \tag{105}$$

$$c^{-2}hn\,\mathrm{D}_u U^{\alpha}=\nabla^{\alpha}p+\nabla_{\nu}\left(\mathit{\Pi}\Delta^{\alpha\nu}-\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}\right)-c^{-2}\,\mathrm{D}_u\,\mathrm{J}_q^{\alpha}, \tag{106}$$

$$n\,\mathrm{D}_u\,e=-\nabla_{\alpha}\mathrm{J}_q^{\alpha}-(p+\mathit{\Pi})\nabla_{\alpha}U^{\alpha}+\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}\,\overset{\circ}{\overbrace{\nabla_{\nu}U_{\alpha}}}\,, \tag{107}$$

$$\tau_0\,\mathrm{D}_u\mathit{\Pi}=-\mathit{\Pi}-\eta_U\nabla_{\nu}U^{\nu}+\frac{\eta_U}{Tnk_B}\hat{\beta}''\nabla_{\alpha}\mathrm{J}_q^{\alpha}, \tag{108}$$

$$\tau_2(\mathrm{D}_u\,\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu})=-\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}+2\eta\,\overset{\circ}{\overbrace{\nabla^{\alpha}U^{\nu}}}+2\eta\,p^{-1}\hat{\beta}'''\,\overset{\circ}{\overbrace{\nabla^{\alpha}\mathrm{J}_q^{\nu}}}, \tag{109}$$

$$\tau_1(\mathrm{D}_u\mathrm{J}_q^{\alpha})=-\mathrm{J}_q^{\alpha}+T\lambda\left[-\frac{\nabla^{\alpha}T}{T}+\frac{\nabla^{\alpha}p}{hn}+\frac{1}{nk_BT}\left(\hat{\beta}''\nabla^{\alpha}\mathit{\Pi}+\hat{\beta}'''\nabla_{\nu}\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}\right)\right]. \tag{110}$$

Эти пять законов сохранения (105)-(107) , а также девять уравнений релаксации (108)-(110) представляют собой систему из 14 уравнений с 14 неизвестными переменными $n, e, U_{\alpha}, \mathit{\Pi}, \mathrm{J}_q^{\alpha}$ и $\overset{\circ}{\mathit{\Pi}}{}^{\alpha\nu}$, в которых величины $\tau_0 := \eta_U\hat{a}_{00}\,/nk_BT$, $\tau_1 := \lambda\hat{\alpha}_{10}\,/nk_B$ и $\tau_2 := 2\eta\hat{\alpha}_{21}\,/nk_BT$ являющиеся временами релаксации соответственно вязкого давления, теплового потока и давления при наличии сдвиговой вязкости, учитывают релаксационный эффект с типичной временной шкалой среднего свободного времени между столкновениями. Из соотношения (107)-(109) видно, что отклонения от линейного закона имеют место, когда времена релаксации системы перекрываются ее макроскопической шкалой времени. Для нестационарных течений эти уравнения имеют гиперболический тип, в то время как аналогичные гидродинамические уравнения, полученные методом КНТ, − параболические. Точно так же стационарные уравнения (104)-(109) в зависимости от скорости течения имеют эллиптический (при малых скоростях) и гиперболический (при больших скоростях) тип, в то время как стационарные уравнения (68)-(71) всегда эллиптического типа. Результаты исследования свойств волновых явлений в этих релятивистских гиперболических теплопроводящих и вязких жидкостях представлены в работе (van Weert, 1982).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена современная формулировка релятивистской расширенной необратимой термодинамики для диссипативной жидкой среды с учетом членов второго порядка для диссипативных потоков. Релятивистская термодинамика представлена здесь как теория поля. Уравнения поля основаны на постулируемых законах сохранения таких фундаментальных макроскопических величин, как 4-вектор потока частиц с N^{α}, 4-тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ и 4-вектор потока энтропии S^{α}. Линейные определяющие соотношения для диссипативных потоков теплопроводности и вязкости получены из явного уравнения баланса энтропии, основанного на постулируемом релятивистском соотношении Гиббса как для равновесных, так и неравновесных состояний.

Показано, что теория, основанная на релятивистском соотношении Гиббса для равновесных систем, содержит фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения для теплового потока и вязкости, что противоречит принципу причинности. Таким образом, этот подход малоэффективен для многих явлений в астрофизике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями структурных параметров. Он справедлив только в случае использования членов до первого порядка при отклонениях от равновесия; однако для того, чтобы найти эффективные феноменологические определяющие соотношения на основе явного выражения для производства энтропии, требуется уже второй порядок. По этой причине целью данной работы является попытка устранения указанных недостатков путем систематического сохранения членов второго порядка по потокам в 4-векторе потока энтропии и получения на его основе определяющих релаксационных уравнений. Это привело к необходимости использования методов так называемой расширенной необратимой термодинамики, которая, выходя за пределы гипотезы о локальном равновесии, использует качестве дополнительных независимых структурных параметров диссипативные потоки соответствующих физических величин.

Сконструированная в классе теорий второго порядка релятивистская термогидродинамика имеет не только сугубо концептуальное значение: эта теория имеет свои приложения в таких важных областях знаний, как ядерная физика, астрофизика и космология. В частности, в вязкостных космологических моделях объемная вязкость выступает в роли причины диссипации, оказывающей значительное воздействие на процессы во Вселенной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые термодинамические соотношения, описывающие идеальную релятивистскую жидкость в равновесии

$p = nk_B T$ – термическое уравнение состояния;

$$e = mc^2 \frac{K_3(mc^2 / k_B T)}{K_2(mc^2 / k_B T)} - k_B T$$ – энергия на одну частицу;

$h = e + pn^{-1}$ – энтальпия на одну частицу;

энергия e и энтальпия h при низких температурах:

$$e = mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \ldots, \quad h = mc^2 + \frac{5}{2} k_B T + \frac{15}{8} \frac{(k_B T)^2}{mc^2} + \ldots;$$

$$c_p = \left(\partial h / \partial T\right)_p = k_B \frac{d}{dz^{-1}} \frac{K_3(z)}{K_2(z)}$$ – теплоемкость при постоянном давлении;

$c_v = \left(\partial e / \partial T\right)_v$ – теплоемкость при постоянном объеме;

$c_v = c_p - k_B$;

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} \frac{k_B T}{mc^2} + \ldots$$ – низкотемпературное отношение теплоемкостей;

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + k_B}{c_v} = 1 + k_B / c_v, \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \left(\frac{mc^2}{k_B T}\right)^2 + 5\frac{h}{k_B T} - \left(\frac{h}{k_B T}\right)^2;$$

$$\text{c}S = sn = \frac{1}{T}(en - \mu n) + k_B n$$ – плотность энтропии;

$\mu = e + pn^{-1} - Ts = h - Ts$ – термодинамический потенциал, приходящийся на одну частицу.

Модифицированная функция Бесселя второго рода

$$K_{\mathrm{n}}(z) = \frac{2^{n-1}(\mathrm{n}-1)!}{(2\mathrm{n}-2)!} \frac{1}{z^2} \int_z^\infty (\tau^2 - z^2)^{\mathrm{n}-3/2} \, \tau \exp(-\tau) d\tau;$$

асимптотическое представление $K_{\mathrm{n}}(z)$ для больших z имеет вид:

(для низких температур) (см. Abramowitz, Stegun, 1968)

$$K_{\mathrm{n}}(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{1}{e^{z}}\left[1+\frac{4\mathrm{n}^{2}-1}{8z}+\frac{(4\mathrm{n}^{2}-1)^{2}(4\mathrm{n}^{2}-9)}{2(8z)^{2}}+\ldots\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1964. 456 с.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.

Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.Т. VI // М.: Наука. 1988. 736 с.

Alts T., Müller I. Relativistic thermodynamics of simple heat conducting fluids//Archive for Rational Mechanics and Analysis.1972. V. 48. № 4. P. 245-273

Chandrasekhar S. The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity // Astroph. J. 1965. V. 142. P. 1488-1512.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: A review of open problems and current proposals // Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: a review of open problems and current proposals// Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: a review of open problems and current proposals// Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Cattaneo C. Sulla conduzione del calore// Atti Seminario Mat. Fis. University Modena. 1948. № 3. P. 83-101.

Cox A. У., de Groot S. R., van Leeuwen W. A. On relativistic kinetic gas theory XVI. The temperature dependence of the transport coefficients for a simple gas of hard spheres // Physica. 1976. V. 84A. P. 155-164.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 919-928.

Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases, (Handbuch der Physik XП), (Flugge S., ed.). Springer, Berlin. 1958.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T, van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // Physica. 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T., van Leeuwen W.A. On relativistic gas theory II. Reciprocal relations between transport phenomena // Physica1969. V. 40. P.581-593.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T., van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory III. The non-relativistic limit and its range of validity // Physica 1969. V. 42. P. 309-319.

de Groot S.R.,Mazur. Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam 1962.

de Groot W.A., van Leeuwe:n., . Meltzeril P. H. Transport Coefficients of a Neutrino Gas // Nuovo Cimento.1975 V. 25A. № 2. P. 229-251.

Havas P., Swenson R.J. Relativistic thermodynamics of fluids. I. // Annals of Physics.1979. V. 118. P. 259-306.

Herrera L., Falcon N. Convection theory before relaxation. Astrophysics and Space Science. 1995a. V. 234. № 1. P. 139-152.

Herrera L., Falcon N. Secular stability behaviour of nuclear burning before relaxation // Astrophysics and Space Science.1995b. V. 229. № 1. P. 105-115.

Hiscock W.A., Lindblom L. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories // Physical Review D. 1985. V. 31. № 4. P. 725-733

Israel W. Stewart J. M. // Phys. Lett., 1976, V. 58A, P. 213; Ann. Phys., 1979, V. 118, P. 341; Proc. Roy. Soc„ 1979, V. A365, P. 43.

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Israel W. Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory //Ann. Physic. 1976. V. 100. P. 310-331.

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G, Extended Irreversible Thermodynamics, 3rd ed., Springer. Berlin Heidelberg New York. 2001

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. and Grmela M. A phenomenological scaling approach for heat transport in nano-systems// Appl. Math. Lett. 2005. V. 18. P. 963-967.

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. Springer Berlin 1993.

Kranyš M. Phase and signal velocities of waves in dissipative media. Special relativistic theory // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972a. V. 48. № 4. P. 274-301.

Kranyš M. Kinetic derivation of nonstationary general relativistic thermodynamics // Nuovo Cimento B. 1972b. V.8 № 2. P.417-441.

Kolesnichenko A.V. On the thermodynamic derivation of differential equations for turbulent flow transfer in a compressible heat-conducting fluid // Solar System Research. 2010. V. 44 № 4. P. 334347.

Kluitenberg G.A., de Groot S.R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; Formal part // Physica. 1953. V. 19. P. 689-794

Kluitenberg G.A., de Groot S.R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes II. Heat conduction and diffusion; Physical part // Physica 1953. V.19. P. 1079-1094.

Keizer J. On the relationship between fluctuating irreversible thermodynamics and‘extended’ irreversible thermodynamics// J. Stat. Phys. 1983. V. 31. P. 485-497.

Landau L.D., LifshitzE.M. Fluid Mechanics // Pergamon, Oxford. 1959. 499.p

Liu I-S., Muller T. Ruggeri B. Relativistic Thermodynamics of Gases // Annals of Physics. 1986. V. 169. P. 191-219.

Lebon G., Casas-Vazquez J. and Jou D. Questions and answers about a thermodynamic theory of the third type// Contemp. Phys. 1992. V.33. P. 41-51.

Lebon G., Torrissi M. and Valenti A. A nonlocal thermodynamic analysis of second sound propagation in crystalline dielectrics// J. Phys. 1995. C **7**. P. 1461-1474.

Lebon G., Jou D., Casas-Vazquez J. Understanding Non-equilibrium Thermodynamics: Foundations, Applications, Frontiers// Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008. 325 p

Müller I. On the entropy inequality // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. V.26. № 2. P.118-141.

Marle C. M. Relativistic extension of the Chapman-Enskog method //In: Gravitational waves and radiations; International Conference, Paris, France, 1973, Transactions. (A75-26747 11-90) Paris, Centre National de la Recherche Scientifique. 1974, P. 313-330. In French.

Müller I., Ruggeri T. Rational Extended Thermodynamics, 2nd ed. Springer. Berlin. Heidelberg. New York. 1998.

Stewart J. M. Non-equilibrium Relativistic Kinetic Theory // Berlin: Springer-Verlag, 1971; Proc. Roy Soc, 1977. V. A357, P. 59.

van Weert Ch.G. Generalized hydrodynamics from relativistic kinetic theory physica // .Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1982. V.111. № 3. P. 537-552.

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология − М.: Мир, 1976.]

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология // М. : Мир. 1976].

ОГЛАВЛЕНИЕ