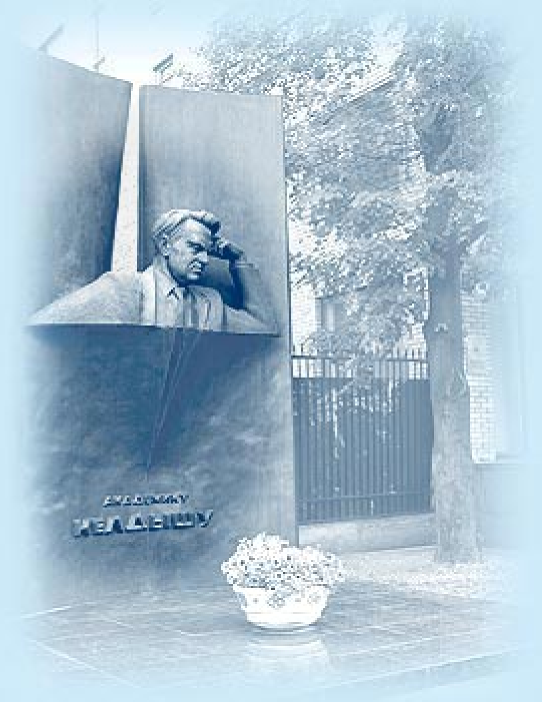
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

# Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов



***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 30. 36 с.
**https://doi.org/10.20948/prepr-2023-30**
**https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-30**

**О р д е н а   Л е н и н а**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В.Келдыша**
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский**

# Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов

**Москва — 2023**

*Гавриков М.Б., Таюрский А.А.*

**Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов**

Рассмотрены основные начально-краевые (смешанные) задачи для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов газа и возникающих в результате ионизации ионов. Неизвестными в этой системе являются концентрации атомов и ионов. Найдена общая формула достаточно гладкого решения этой системы в зависимости от времени и пространственной координаты. Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. В случае смешанной задачи для конечного отрезка аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой указанной в работе триангуляции области определения неизвестных функций.

***Ключевые слова:*** ионизационные колебания, бривинг-моды, характеристики

*Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii*

**Analytical solution of mixed problems for one-dimensional ionization equations in the case of constant velocities of atoms and ions**

The main initial-boundary (mixed) problems are considered for a nonlinear system of equations for one-dimensional gas ionization in the case of constant velocities of gas atoms and ions arising as a result of ionization. The unknowns in this system are the concentrations of atoms and ions. A general formula is found for a sufficiently smooth solution of this system depending on time and spatial coordinate. It is shown that mixed problems for the system of one-dimensional ionization equations admit integration in the form of explicit analytical expressions. In the case of a mixed problem for a finite segment, an analytical solution is constructed using recursive formulas, each of which is defined in a triangle belonging to some domain of definition of unknown functions indicated in the triangulation work.

***Key words:*** ionization oscillations, breathing modes, characteristics

## Введение

В работе рассмотрено аналитическое решение основных начально-краевых задач для системы уравнений одномерной ионизации [1, 2]

$$\partial n_a / \partial t + \partial v_a n_a / \partial z = -k_\mathrm{I} n_a n_i, \quad \partial n_i / \partial t + \partial v_i n_i / \partial z = k_\mathrm{I} n_a n_i, \tag{1}$$

где $t, z \in \mathbb{R}$, $n_a$, $n_i$ – подлежащие нахождению концентрации атомов и ионов, $v_a$, $v_i$ – заданные скорости движения атомов и ионов, $k_I > 0$ – известный коэффициент ионизации. Ниже система уравнений ионизации решается аналитически в случае $v_a = \mathrm{const}$, $v_i = \mathrm{const}$. Система (1) относится к полулинейным гиперболическим системам [3], а в случае $v_a = \mathrm{const}$, $v_i = \mathrm{const}$ она записана в инвариантах [3]. При $v_i = v_a$=const характеристики системы (1) совпадают, и она легко интегрируется по характеристикам (см. §1). В случае $v_i \neq v_a$ характеристические векторы $(1, v_a)$, $(1, v_i)$ линейно независимы и, разлагая вектор $(t, z)$ по базису из характеристических векторов и принимая координаты разложения за новые независимые переменные в системе (1), эта система, как показано в §1, сводится к виду, когда в новых переменных дифференциальный оператор левой части (1) расщепляется на два независимых оператора, что позволяет проинтегрировать систему уравнений ионизации. Указанный приём позволяет решать и некоторые другие задачи, например, задачу о поглощении (сорбции) газа поглощающим веществом [4].

В §1 поставлены основные начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей в неограниченных областях переменной $z$ и на отрезке $[0, L]$, $L > 0$. Результаты, перечисленные в §1 и полученные в [7, 8], позволяют дать в §2 аналитическое решение начально-краевой задачи на отрезке $[0, L]$ в случае, когда знаки скоростей $v_a$, $v_i$ различны. Полученные в §2–4 формулы доказывают, в частности, существование и единственность решений начально-краевых задач для системы (1). С другой стороны, они позволяют искать различные асимптотики решений рассмотренных начально-краевых задач (например, при $t \to +\infty$ или при неограниченном удалении от границы области ионизации). Однако в настоящей работе соответствующие результаты не рассматриваются.

Представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения системы (1) для постоянных скоростей $v_a$, $v_i$ на практически важный случай [5], когда $v_a = \mathrm{const}{>}0$, $v_i = v_i(z)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая функция, имеющая положительную производную и единственный нуль внутри заданного отрезка $[0, L]$ (обычно полагают $v_i(z) = a(z - z_0)$, $a > 0$, $z_0 \in (0, L)$ [6]). Начально-краевая задача для таких $v_i(z)$ сводится к задаче Гурса [3], когда краевые условия ставятся на характеристике $z = z_0$ системы (1). Численное решение показывает [7, 8], что в этом случае система (1) допускает периодические по времени решения, которые применительно к стационарному плазменному двигателю [1, 9, 10] длины $L$ описывают низкочастотные ионизационные колебания, наблюдаемые в эксперименте и называемые бривинг модами (breathing mode) [11, 12]. Таким образом, проведённые в настоящей работе исследования – это первый важный шаг в математическом анализе бривинг мод.

## §1. Решения уравнений ионизации в случае постоянных скоростей

Решим систему (1) в случае $v_a = \mathrm{const}$, $v_i = \mathrm{const}$.

Рассмотрим основной случай $v_a \neq v_i$. Проведём замену независимых переменных:

$$(t,z) \leftrightarrow (\alpha,\beta): \quad (t,z) = \alpha(1,v_a) + \beta(1,v_i),$$

или в координатном виде:

$$\begin{aligned} &t = \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_a + \beta v_i, \\ &\alpha = (tv_i - z)(v_i - v_a)^{-1}, \quad \beta = (z - tv_a)(v_i - v_a)^{-1}, \quad (\alpha,\beta) = \varphi(t,z). \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_i}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{v_a}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Подставляя эти выражения в систему (1), сведём её к эквивалентному виду:

$$\partial n_a / \partial \alpha = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i / \partial \beta = k_I n_a n_i. \tag{3}$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (1) в области $D$ переменных $(t,z)$ равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (3) в области $\varphi(D)$ переменных $(\alpha,\beta)$. Отображение $\varphi$ линейное, невырожденное, с определителем $\det\varphi = 1/(v_i - v_a) \neq 0$. В частности, $\varphi$ прямые переводит в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Построим сначала элементарную теорию решений системы (3) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0,\alpha_1]\times[\beta_0,\beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$.

**Теорема 1.** [7] 1) *Пусть* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *– дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно, *причём* $A(\alpha) \neq B(\beta)$ *для любых* $\alpha \in [\alpha_0,\alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0,\beta_1]$. *Тогда функции*

$$n_a(\alpha,\beta) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_i(\alpha,\beta) \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \tag{4}$$

*составляют непрерывно дифференцируемое решение системы* (3) *в прямоугольнике* $\Pi$.

2) *Если непрерывно дифференцируемые решения* $n_a$, $n_i$ *системы* (3) *таковы, что множество нулей каждой из этих функций в* $\Pi$ *имеет пустую внутренность и* $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *ещё один комплект функций на* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ *соответственно, удовлетворяющий условиям части* 1) *теоремы и восстанавливающий по формулам* (4) *те же самые функции* $n_a$, $n_i$ *в* $\Pi$, *то найдутся константы* $R\neq 0$, $C$, *для которых*:

$$\bar{A}(\alpha)=RA(\alpha)+C,\quad \alpha\in[\alpha_0,\alpha_1],\quad \bar{B}(\beta)=RB(\beta)+C,\quad \beta\in[\beta_0,\beta_1]. \qquad (5)$$

*Обратно, если* $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *вычисляются по* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ посредством формул (5) *для некоторых констант* $R\neq 0$, $C$, *то они удовлетворяют условиям части* 1) *и по формулам* (4) *восстанавливают те же функции* $n_a$, $n_i$, *что и для* $A(\alpha)$, $B(\beta)$.

3) *В условиях части* 1) *теоремы функции* $n_a$, $n_i$, *вычисляемые по формулам* (4), *удовлетворяют всюду в* $\Pi$ *неравенствам* $n_a\geq 0$, $n_i\geq 0$ *тогда и только тогда, когда либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не убывают на* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$, *соответственно, и* $\inf\limits_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) > \sup\limits_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0)>B(\beta_1))$, *либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не возрастают соответственно на* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ *и* $\sup\limits_{\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]} A(\alpha) < \inf\limits_{\beta\in[\beta_0,\beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0)<B(\beta_1))$.

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1) **Теоремы 1**, то $n_a$, $n_i$, вычисляемые по формулам (4), непрерывно дифференцируемы в $\Pi$ и существуют непрерывные в $\Pi$ смешанные производные $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

**Теорема 2.** [7] *Пусть* $n_a>0$, $n_i>0$ – *непрерывно дифференцируемое решение* (3) *в прямоугольнике* $\Pi$, *для которого существуют обе непрерывные в* $\Pi$ *смешанные частные производные* $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ *и* $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. *Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции* $A(\alpha)$, $B(\beta)$, *определённые на сторонах прямоугольника, соответственно,* $[\alpha_0,\alpha_1]$ и $[\beta,\beta_1]$, *для которых* $A(\alpha)\neq B(\beta)$ *при всех* $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$, $\beta\in[\beta_0,\beta_1]$ *и всюду в* $\Pi$ *выполнены равенства* (4).

**Замечание.** Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (3), для которых в $\Pi$ существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (4) задают общий вид решений этого класса.

Из **Теоремы 1.2** следует, что в формулах (4) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника $\Pi$ могут быть интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки **Теоремы 1.3** очевидны.

Из **Теорем 1, 2** следует, что в $\varphi^{-1}(\Pi)$ решение системы (1) задаётся формулами:

$$n_a(t,z)=\frac{B'(\beta)}{k_I\left[A(\alpha)-B(\beta)\right]},\, n_i(t,z)=\frac{A'(\beta)}{k_I\left[A(\alpha)-B(\beta)\right]},\alpha=\frac{tv_i-z}{v_i-v_a},\beta=\frac{z-tv_a}{v_i-v_a},\quad(6)$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условию **Теоремы 1.1**.

Доказательство **Теоремы 2** очевидным образом обобщается на случай, когда $\Pi\subseteq\mathbb{R}^2=\{(\alpha,\beta)\}$ – замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью $\mathrm{Int}\Pi$, причём $\Pi=\overline{\mathrm{Int}\Pi}$, где черта означает замыкание множества. Тогда $\Pi\subseteq[a_0,\alpha_1]\times[\beta_0,\beta_1]$, где $[\alpha_0,\alpha_1]$ – проекция $\Pi$ на ось $\alpha$, а $[\beta_0,\beta_1]$ – на ось $\beta$ (какие-то из величин $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_0$, $\beta_1$ при этом могут быть бесконечными). В этом случае справедливость **Теоремы 2** (называемой ниже обобщённой) вытекает из следующей легко проверяемой леммы:

**Лемма.** *Пусть* $\mathrm{I}_\lambda=(a_\lambda,b_\lambda)$, $a_\lambda<b_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$ *– непустое семейство интервалов и* $\varphi_\lambda(\alpha)$ *– непрерывно дифференцируемые функции на* $\mathrm{I}_\lambda$, *причём для любых* $\lambda_1\neq\lambda_2$ *имеем* $\varphi_{\lambda_1}\big|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\cap\mathrm{I}_{\lambda_2}}=\varphi_{\lambda_2}\big|_{\mathrm{I}_{\lambda_1}\cap\mathrm{I}_{\lambda_2}}+\mathrm{const}$, *тогда найдётся непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi(\alpha)$, *заданная на открытом множестве* $\mathrm{I}=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{I}_\lambda$, *для которой* $\varphi\big|_{\mathrm{I}_\lambda}=\varphi_\lambda+\mathrm{const}$ *для всех* $\lambda\in\Lambda$, *где* const *зависит от* $\lambda$.

Ниже в качестве $\Pi$ рассматривается либо замкнутая полуплоскость, граница которой непараллельна осям координат, либо замкнутый тупой угол, ограниченный двумя лучами, исходящими из начала координат (§1), либо замкнутая полуполоса, ограниченная двумя параллельными прямыми (§§2–4).

Формулы (6) справедливы для $v_i\neq v_a$. При $v_i=v_a$ они теряют смысл. Для $v_i=v_a=v$ общее решение системы (1) получается напрямую, без введения новых координат $\alpha$, $\beta$, интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (1) имеют вид $z(t)=vt+\mathrm{const}$ и различаются значениями const. Пусть $n_a(t)=n_a(t,z(t))$, $n_i(t)=n_i(t,z(t))$ – значения неизвестных функций $n_a$, $n_i$ вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (1) следует, что функции $n_a(t)$, $n_i(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$dn_a / dt = -k_I n_a n_i, \quad dn_i / dt = k_I n_a n_i. \tag{7}$$

Система (7) легко интегрируется [7]:

$$n_i = \frac{CD\exp(Ck_I t)}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad n_a = C - n_i = \frac{C}{1 + D\exp(Ck_I t)}, \quad D \ge 0, C > 0. \tag{8}$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений (7): $n_i \equiv 0$. Другое особое решение $n_i \equiv C$. Формулы (8) задают общее решение системы (7) на произвольной характеристике. Константы $C$ и $D$ определяются значениями $n_a$, $n_i$ в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (1) значения $C$ и $D$ определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (6), (8) для решения начально-краевых задач для системы (1), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

(I) **Начальная задача (задача Коши):** в полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(II) **Краевая задача:** для $v_a, v_i \ge 0$ в полуплоскости $z \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(III) **Начально-краевая (смешанная) задача:** для $v_a, v_i \ge 0$ в первом квадранте $z \ge 0$, $t \ge 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \ge 0$ и краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$, $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \ge 0$ и $t \ge 0$, подчиняющиеся условиям согласованности:

$$\begin{gathered} n_{a0}(0) = n_a^0(0), \quad n_{i0}(0) = n_i^0(0), \quad n'_{a0}(0) + v_a (n_a^0)'(0) + k_I n_{a0}(0) n_{i0}(0) = 0, \\ n'_{i0}(0) + v_i (n_i^0)'(0) - k_I n_{a0}(0) n_{i0}(0) = 0. \end{gathered}$$

(IV) **Смешанная задача на отрезке:** для $v_a > 0 > v_i$ в полуполосе $0 \le z \le L$, $t \ge 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,L) = n_{i0}(t)$, $t \ge 0$ и начальным условиям $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $0 \le z \le L$, где $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$,

$t \geq 0$, $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $0 \leq z \leq L$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию согласованности:

$$n_{a0}(0) = n_a^0(0), \quad n_{i0}(0) = n_i^0(L),$$
$$n_{a0}'(0) + v_a(n_a^0)'(0) + k_\mathrm{I} n_a^0(0) n_i^0(0) = 0, n_{i0}'(0) + v_i(n_i^0)'(L) + k_\mathrm{I} n_a^0(L) n_i^0(L) = 0.$$

Другие начально-краевые задачи рассмотрены ниже.

Сначала исследуем случай $v_i = v_a = v$.

**Задача Коши (I).** Решая её методом характеристик, получим [7]:

$$C = n_a^0(z - vt) + n_i^0(z - vt), \quad D = n_i^0(z - vt) / n_a^0(z - vt),$$
$$n_i(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_a(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = z - vt.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) убедиться, что полученные формулы задают решение задачи Коши в классе непрерывно дифференцируемых функций.

**Краевая задача (II).** Решая её методом характеристик, получим [7]:

$$C = n_{a0}(t - z/v) + n_{i0}(t - z/v), \quad D = \frac{n_{i0}(t - z/v)}{n_{a0}(t - z/v)} \exp[-Ck_I(t - z/v)],$$
$$n_i(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_I t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad n_a(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_I t)}, \quad y = t - z/v.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (3) проверить, что полученные формулы задают решение краевой задачи (II) в классе непрерывно дифференцируемых функций.

**Смешанная задача (III).** Решая её методом характеристик в области $z \geq 0$, $t \geq 0$, получим [7]:

$$C(y) = \begin{cases} n_a^0(z - vt) + n_i^0(z - vt), z \geq tv, \\ n_{a0}(t - zv^{-1}) + n_{i0}(t - zv^{-1}), z \leq tv, \end{cases} \qquad D(y) = \begin{cases} \dfrac{n_i^0(z - vt)}{n_a^0(z - tv)}, z \geq tv, \\ \dfrac{n_{i0}(t - zv^{-1})}{n_{a0}(t - zv^{-1})} e^{-Ck_I(t - z/v)}, z \leq tv, \end{cases}$$

$$n_i(z,t) = \frac{C(y)D(y)e^{C(y)k_I t}}{1 + D(y)e^{C(y)k_I t}}, \quad n_a(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)e^{C(y)k_I t}}, \quad y = \begin{cases} z - vt, z \geq tv, \\ t - zv^{-1}, z \leq tv. \end{cases}$$

Условия согласованности в нуле гарантируют, что функции $C(z,t)$, $D(z,t)$ будут непрерывны и непрерывно дифференцируемы в первом квадранте.

В случае $v = 0$ краевая и смешанная задачи теряют смысл, ионизация в различных точках пространства происходит независимо и определяется только временем. Формулы для $n_a$ и $n_i$ получаются из приведённых выше формул решения задачи Коши (I), если там положить $v=0$. Если $v\le 0$, то краевая задача ставится в полуплоскости $z\le 0$, $t\in\mathbb{R}$, а смешанная задача – во втором квадранте $z\le 0$, $t\ge 0$.

Смешанная задача (IV) для случая $v_i=v_a$ не имеет смысла.

Перейдём к случаю $v_a\ne v_i$. Рассмотрим задачу Коши (I) в случае $v_a\ne v_i$.

В переменных $(z,t)$ получаем [7] следующие формулы:

$$n_a(z,t)=\frac{n_a^0(z-v_at)e^{-N(z-v_at)}}{1-\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{z-v_it} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp+\int\limits_0^{z-v_at} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}},$$

$$n_i(z,t)=\frac{n_i^0(z-v_it)e^{-N(z-v_it)}}{1-\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{z-v_it} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp+\int\limits_0^{z-v_at} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}}, \qquad (9)$$

$$N(p)=\frac{k_I}{v_i-v_a}\int\limits_0^p\left[n_a^0(q)+n_i^0(q)\right]dq,\quad z\in\mathbb{R},\quad t\ge 0,$$

где $n_i^0(p)\ge 0$, $n_a^0(p)\ge 0$ – заданные произвольно непрерывно дифференцируемые функции, и знаменатель в формулах (9) заведомо положителен. Итак, формулы (9) дают аналитическое решение системы (1) при $t\ge 0$, удовлетворяющее начальному условию $n_a(z,0)=n_a^0(z)$, $n_i(z,0)=n_i^0(z)$, $z\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим краевую задачу (II) в случае $v_i\ne v_a$.

Решение краевой задачи в переменных $(z,t)$ имеет вид [7]:

$$n_a(z,t)=\frac{n_{a0}(t-z/v_a)\exp N(t-z/v_a)}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_in_{i0}(p)e^{N(p)}dp+\int\limits_0^{t-z/v_a} v_an_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}},$$

$$n_i(z,t)=\frac{n_{i0}(t-z/v_i)\exp N(t-z/v_i)}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_in_{i0}(p)e^{N(p)}dp+\int\limits_0^{t-z/v_a} v_an_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}}, \qquad (10)$$

$$N(p)=\frac{k_I}{v_i-v_a}\int\limits_0^p[v_an_{a0}(q)+v_in_{i0}(q)]dq,$$

где $n_{a0}(p)\ge 0$, $n_{i0}(p)\ge 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции и знаменатель в (10) заведомо положителен. Итак, формулы (10) дают аналитическое решение системы (1) в полуплоскости $z \ge 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_a(0,t) = n_{a0}(t)$, $n_i(0,t) = n_{i0}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим смешанную задачу (III) в случае $v_a > 0$, $v_i > 0$, $v_a \ne v_i$. В координатах $(\alpha, \beta)$ её решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda \underset{\text{def}}{=} \{(\alpha,\beta): \alpha+\beta \ge 0, \alpha v_a + \beta v_i \ge 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_a(\alpha,\beta)$, $n_i(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих системе (3) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим $\Lambda_t$ и $\Lambda_z$: $\partial\Lambda = \Lambda_t \cup \Lambda_z$, $\Lambda_t \cap \Lambda_z = \{(0,0)\}$, $\Lambda_t = \varphi\{(t,0): t \ge 0\}$, $\Lambda_z = \varphi\{(0,z): z \ge 0\}$. В зависимости от $v_i$, $v_a$ угол $\Lambda$ и лучи $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ изображены на рис. 1.

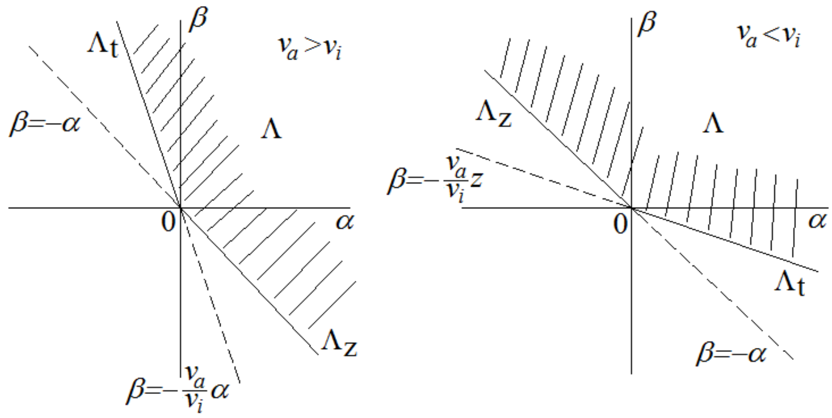



*Рис. 1.* Угол $\Lambda$ и лучи $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ в зависимости от $v_i$, $v_a$.

Значения искомого решения на лучах $\Lambda_t$, $\Lambda_z$ определяются равенствами $n_a(\alpha,\beta) = n_{a0}(\alpha+\beta)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_{i0}(\alpha+\beta)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_t$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, $\alpha+\beta \ge 0$; $n_a(\alpha,\beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_z$, $\alpha+\beta = 0$, $\alpha v_a + \beta v_i \ge 0$. Построение искомого решения для случая $v_i > v_a$ приводит к следующему результату [7].

Первый квадрант плоскости $(z,t)$, где ищется решение смешанной задачи для системы (1), прямыми $z = v_a t$, $z = v_i t$ делится на три области, изображённые на рис. 2, в каждой из которых решение задаётся одной из формул (11)–(13)

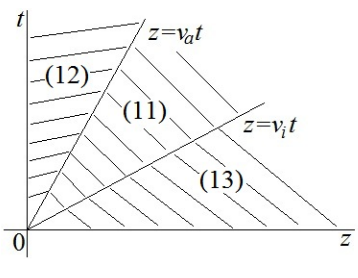



*Рис. 2.* Области, где ищется решение смешанной задачи.

$$n_a(z,t)=\frac{n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp-\int_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp(-N_*(p))dp\right\}},$$

$$n_i(z,t)=\frac{n_{i0}(t-z/v_i)\exp M_*(t-z/v_i)]}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp-\int_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp(-N_*(p))dp\right\}}; \tag{11}$$

$$n_a(z,t)=\frac{n_{a0}(t-z/v_a)\exp M_*(t-z/v_a)]}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp+\int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)\exp M_*(p)dp\right\}},$$

$$n_i(z,t)=\frac{n_{i0}(t-z/v_i)\exp M_*(t-z/v_i)]}{1+\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp+\int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)\exp M_*(p)dp\right\}}; \tag{12}$$

$$n_a(z,t)=\frac{n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]}{1-\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{z-v_i t} n_i^0(p)\exp[-N_*(p)]dp+\int_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp[-N_*(p)]dp\right\}},$$

$$n_i(z,t)=\frac{n_i^0(z-v_i t)\exp[-N_*(z-v_i t)]}{1-\dfrac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\displaystyle\int_0^{z-v_i t} n_i^0(p)\exp[-N_*(p)]dp+\int_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp[-N_*(p)]dp\right\}}. \tag{13}$$

$$N_*(p)\underset{\text{def}}{=}\frac{k_I}{v_i-v_a}\int_0^p (n_a^0(q)+n_i^0(q))dq,\quad M_*(p)\underset{\text{def}}{=}\frac{k_I}{v_i-v_a}\int_0^p (v_a n_{a0}(q)+v_i n_{i0}(q))dq. \tag{14}$$

Формулы (11) и (12) на луче $z=v_a t$, $t\geq 0$ и формулы (11) и (13) на луче $z=v_i t$, $t\geq 0$, очевидно, совпадают. При $z=0$ формула (12) даёт краевые условия $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t\geq 0$, а при $t=0$ формула (13) даёт начальные условия $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z\geq 0$. Итак, формулы (11)–(13), с учётом выражений (14), полностью определяют решение смешанной задачи для системы (1) по известным граничным $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t\geq 0$ и начальным $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z\geq 0$ условиям.

## §2. Начально-краевая задача на отрезке (IV)

Решение задачи (IV) в переменных $(\alpha,\beta)$ сводится к решению системы (3) в полуполосе П, определяемой неравенствами:

$$\Pi=\{(\alpha,\beta):\alpha+\beta\geq 0, 0\leq \alpha v_a+\beta v_i\leq L\}.$$

Множество П является замкнутым выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$, причём $\Pi = \overline{\mathrm{Int}\Pi}$, а проекции П на координатные оси α и β равны, соответственно, $[0.+\infty)$ и $[\beta_0,+\infty)$, где $\beta_0 = L/\Delta$, $\Delta = v_i - v_a < 0$. Согласно обобщённой **Теореме 2**, решение системы (3) в замкнутой области П определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $\alpha \ge 0$, $B(\beta)$, $\beta \ge \beta_0$, для которых $A(\alpha) \ne B(\beta)$, $(\alpha,\beta) \in \Pi$, и задаётся формулами (4). Эти функции определяются однозначно начальными и граничными условиями задачи (IV), которые в переменных $(\alpha,\beta)$ примут вид:

$$n_a(\alpha,-\alpha) = n_a^0(-\alpha\Delta), \quad n_i(\alpha,-\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0 = -\beta_0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &n_a(\alpha,-\alpha v_a/v_i) = n_{a0}(\alpha\Delta/v_i), \quad \alpha \ge 0, \\ &n_a(\alpha,-\alpha v_a/v_i + L/v_i) = n_{a0}(\alpha\Delta/v_i + L/v_i), \quad \alpha \ge \alpha_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Граница $\partial\Pi$ множества П состоит из замкнутого отрезка $[a,b]$, $a=(0,0)$, $b=(\alpha_0,\beta_0)$ и двух замкнутых параллельных лучей $[a,\infty)$ и $[b,\infty)$, являющихся графиками функций $\alpha = \alpha(\beta) = -\beta v_i/v_a$ и $\beta = \beta(\alpha) = -\alpha v_a/v_i + L/v_i$ соответственно. Условия (15), (16) означают, что известны значения функции $n_a$ на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a,b]\cup[a,\infty)$, а функции $n_i$ – на границе $[a,b]\cup[b,\infty)$. Для определения функций $A(\alpha)$, $\alpha \ge 0$, $B(\beta)$, $\beta \ge \beta_0$ построим рекуррентно их сужения на отрезках $[0,\alpha_0]$, $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\alpha_1,\alpha_2]$, … (для $A(\alpha)$) и отрезках $[\beta_0,\beta_1]$, $[\beta_1,\beta_2]$, $[\beta_2,\beta_3]$, … (для $B(\beta)$), имеющие непересекающиеся внутренности и дающие разбиение областей определения этих функций: $[0,+\infty] = [0,\alpha_0] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}[\alpha_{k-1},\alpha_k]\right)$, $[\beta_0,+\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty}[\beta_{k-1},\beta_k]$. Здесь $\beta_k = L/\Delta - kL/v_i$, $\alpha_k = kL/v_a - L/\Delta$, $k = 0,1,2,\ldots$ Обозначим $A_0 = A\big|_{[0,\alpha_0]}$, $A_k = A\big|_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$, $k \ge 1$, $B_k = B\big|_{[\beta_{k-1},\beta_k]}$, $k \ge 1$, $B_0 = B\big|_{[\beta_0,0]} = B_1\big|_{[\beta_0,0]}$, $B_* = B\big|_{[0,\beta_1]} = B_1\big|_{[0,\beta_1]}$.

Из формул (4) и начальных условий (15) следует, что $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ являются решениями задачи Коши для линейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} &A_0'(\alpha) = k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\alpha)[A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)], \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0, \\ &B_0'(\beta) = k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\alpha)[A_0(-\beta) - B_0(\beta)], \quad \beta_0 \le \beta \le 0, \\ &A_0(0) = C, \quad B_0(0) = D, \quad \bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad \bar{n}_a(\beta) = n_a^0(\beta\Delta), \end{aligned} \tag{17}$$

где $C \ne D$ – произвольные константы. Нетрудно указать явный вид решения системы (17)

$$A_0(\alpha) = C + (C-D)\int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\alpha)e^{N(\alpha)}d\alpha, \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0,$$

$$B_0(\beta) = D + (D-C)\int_0^{-\beta} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(-\alpha)e^{N(\alpha)}d\alpha, \quad \beta_0 \le \beta \le 0,$$

$$N(\alpha) = k_{\mathrm{I}}\int_0^{\alpha}[\bar{n}_i(\alpha) + \bar{n}_a(-\alpha)]d\alpha, \quad \alpha \ge 0.$$

Функция $B_*(\beta)$, $0 \le \beta \le \beta_1$ в силу (4) и граничного условия (16) ищется как решение задачи Коши для линейного уравнений:

$$B_*'(\beta) = k_{\mathrm{I}}n_a(\beta)[A_0(\alpha(\beta)) - B_*(\beta)], \quad B_*(0) = D, \quad 0 \le \beta \le \beta_1, \tag{18}$$

где $\alpha(\beta)$ определена выше, $n_a(\beta) = n_{a0}(\beta + \alpha(\beta)) = n_{a0}(-\beta\Delta / v_a)$.
Теперь $B_1$ однозначно определяется из условий $B_1\big|_{[\beta_0,0]} = B_0$, $B_1\big|_{[0,\beta_1]} = B_*$. Зная функцию $B_1$ на $[\beta_0, \beta_1]$, последовательно находим функции $B_1 \to A_1 \to B_2 \to A_2 \to B_3 \to \ldots \to B_k \to A_k \to B_{k+1} \to \ldots$ следующим способом на основании формулы (4) и граничного условия (16).

По $B_k(\beta)$ функция $A_k(\alpha)$, $k \ge 1$, ищется из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$:

$$A'(\alpha) = k_{\mathrm{I}}n_i(\alpha)[A(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))], \quad A(a_{k-1}) = A_{k-1}(\alpha_{k-1}), \tag{19}$$

где $\beta(\alpha) = -\alpha v_a / v_i + L / v_i$, $n_i(\alpha) = n_{i0}(\alpha + \beta(\alpha)) = n_{i0}(\alpha\Delta / v_i + L / v_i)$.

По $A_k(\alpha)$ функция $B_{k+1}(\beta)$, $k \ge 1$, ищется из решения задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\beta_k, \beta_{k+1}]$:

$$B'(\beta) = k_{\mathrm{I}}n_a(\beta)[A_k(\alpha(\beta)) - B(\beta)], \quad B(\beta_k) = B_k(\beta_k), \tag{20}$$

где $\alpha(\beta) = -\beta v_i / v_a$, $n_a(\beta) = n_{a0}(\alpha(\beta) + \beta) = n_{a0}(-\beta\Delta / v_a)$. В этом построении используются очевидные равенства $\alpha(\beta_{k+1}) = \alpha_k$, $\beta(\alpha_k) = \beta_k$, $k \ge 0$.

Используя соотношения (17)–(20) и формулы (4), можно построить решение системы (3) в полуполосе П, удовлетворяющее начальным и граничным условиям (16), (15). Для этого разобьём полуполосу П на треугольники $T_k$, $S_k$, $k \ge 0$, как указано на рис. 3. Формально имеем

$$T_k = \{(\alpha,\beta) : \alpha_{k-1} \le \alpha \le \alpha_k, \beta(\alpha) \le \beta \le \beta_k\}, \quad k \ge 1,$$
$$S_k = \{(\alpha,\beta) : \beta_k \le \beta \le \beta_{k+1}, \alpha(\beta) \le \alpha \le \alpha_k\}, \quad k \ge 1,$$
$$T_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \le \alpha \le \alpha_0, -\alpha \le \beta \le 0\}, \quad S_0 = \{(\alpha,\beta) : 0 \le \beta \le \beta_1, \alpha(\beta) \le \alpha \le \alpha_0\}.$$

Нетрудно проверить, что внутренности всех треугольников попарно не пересекаются, а в сумме треугольники дают полуполосу $\Pi$. Тогда для $(\alpha,\beta) \in \Pi$ имеем:

$(\alpha,\beta)\in T_k,\, k\ge 2$:

$$n_a(\alpha,\beta)=n_a(\beta)\frac{A_{k-1}(\alpha(\beta))-B_k(\beta)}{A_k(\alpha)-B_k(\beta)},\, n_i(\alpha,\beta)=n_i(\alpha)\frac{A_k(\alpha)-B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha)-B_k(\beta)},$$

$(\alpha,\beta)\in S_k,\, k\ge 1$:

$$n_a(\alpha,\beta)=n_a(\beta)\frac{A_k(\alpha(\beta))-B_{k+1}(\beta)}{A_k(\alpha)-B_{k+1}(\beta)},\, n_i(\alpha,\beta)=n_i(\alpha)\frac{A_k(\alpha)-B_k(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha)-B_{k+1}(\beta)},$$

$(\alpha,\beta)\in T_0$:

$$n_a(\alpha,\beta)=\bar n_a(\beta)\frac{A_0(-\beta)-B_0(\beta)}{A_0(\alpha)-B_0(\beta)},\, n_i(\alpha,\beta)=\bar n_i(\alpha)\frac{A_0(\alpha)-B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha)-B_0(\beta)},$$

$(\alpha,\beta)\in S_0$:

$$n_a(\alpha,\beta)=n_a(\beta)\frac{A_0(\alpha(\beta))-B_1(\beta)}{A_0(\alpha)-B_1(\beta)},\, n_i(\alpha,\beta)=\bar n_i(\alpha)\frac{A_0(\alpha)-B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha)-B_1(\beta)}. \tag{21}$$

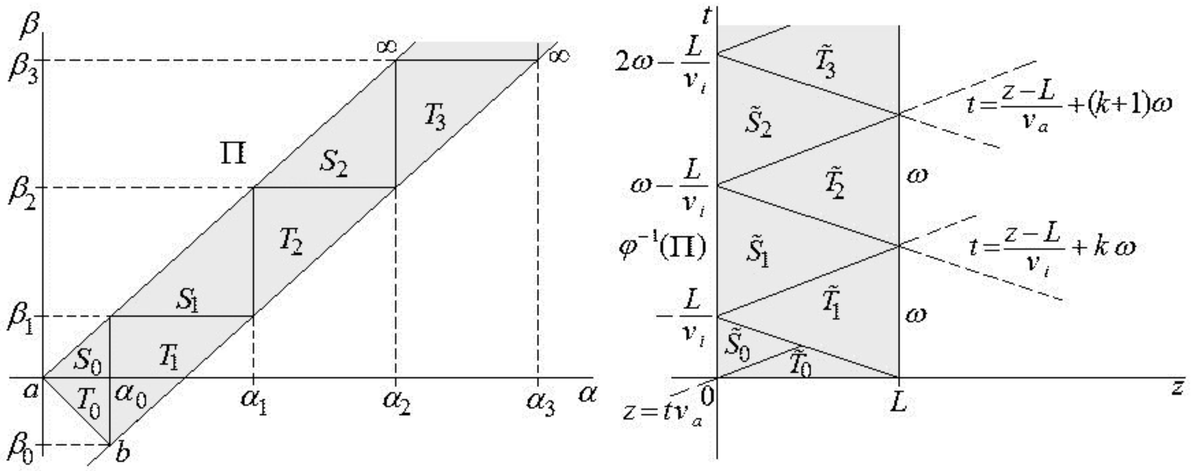


*Рис. 3.* Триангуляции полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ в переменных $(\alpha,\beta)$ и $(z,t)$.

Если $(\alpha,\beta)\in T_1$, то формула для $n_i(\alpha,\beta)$ справедлива, а для $n_a(\alpha,\beta)$ верно только при $\beta\ge 0$. Для $\beta\le 0$ она видоизменяется: $n_a(\alpha,\beta)=\bar n_a(\beta)\dfrac{A_0(-\beta)-B_0(\beta)}{A_1(\alpha)-B_1(\beta)}$. Это следствие того, что $B_1$ вычисляется по-разному для $\beta\ge 0$ и $\beta\le 0$. Легко проверить, что в пересечении любых двух треугольников приведённые формулы (21) дают одни и те же значения. Прямой подстановкой с учётом формул (17)–(20) легко проверить, что функции (21) доставляют решение системы (3).

Решая уравнения (19), (20) методом вариации произвольной постоянной, приходим к следующим рекуррентным соотношениям, позволяющим вычислить функции $A_k(\alpha)$, $k\ge 1$, $B_k(\beta)$, $k\ge 2$:

$$B_{k+1}(\beta) = A_k(\alpha(\beta)) + e^{f(\beta_k)-f(\beta)} \cdot$$

$$\cdot\left\{ B_k(\beta_k) - A_k(\alpha_{k+1}) + \frac{v_i}{v_a}\int_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)} A_k'(\alpha(\beta))d\beta \right\} = A_k(\beta) + e^{f(\beta_k)-f(\beta)} \cdot$$

$$\cdot\left\{ B_k(\beta_k) - A_k(\alpha_{k+1}) + \frac{v_i}{v_a}\int_{\beta_k}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\beta_k)} k_{\mathrm{I}} n_i(\alpha(\beta)) \left[ A_k(\alpha(\beta)) - B_k\left(\beta + \frac{L}{v_i}\right)\right] d\beta \right\},$$

$$f(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}} n_a(\beta)d\beta, \quad \alpha(\beta) = -\frac{v_i}{v_a}\beta, \quad \beta_k \le \beta \le \beta_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (22)$$

$$A_k(\alpha) = B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(\alpha)-g(\alpha_{k-1})} \cdot$$

$$\cdot\left\{ A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_a}{v_i}\int_{\alpha_k}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)} B_k'(\beta(\alpha))d\beta \right\} = B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(\alpha)-g(\alpha_{k-1})} \cdot$$

$$\cdot\left\{ A_{k-1}(\alpha_{k-1}) - B_k(\beta_{k-1}) + \frac{v_a}{v_i}\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha} e^{g(\alpha_{k-1})-g(\alpha)} k_{\mathrm{I}} n_a(\beta(\alpha)) \left[ A_{k-1}\left(\alpha - \frac{L}{v_a}\right) - B_k(\beta(\alpha)) \right] d\alpha \right\},$$

$$g(\beta) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}} n_i(\beta)d\alpha, \quad \beta(\alpha) = -\frac{v_a}{v_i}\alpha + \frac{L}{v_i}, \quad \alpha_{k-1} \le \alpha \le \alpha_k, \quad k = 2, 3, \ldots \qquad (23)$$

При $k = 1$ первое равенство в (23) справедливо, а второе верно, если интегральное слагаемое в фигурной скобке скорректировать в зависимости от $\alpha$ следующим образом. При $\alpha_0 \le \alpha \le L/v_a$ интегральное слагаемое в фигурной скобке надо заменить на $I(\alpha)$, где

$$I(\alpha) = \frac{v_a}{v_i}\int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_a(\beta(\alpha))[A_0(-\beta(\alpha)) - B_0(\beta(\alpha))]d\alpha.$$

При $L/v_a \le \alpha \le \alpha_1$ интегральное слагаемое заменяется на $I(L/v_a) + (v_a/v_i)\int_{L/v_a}^{\alpha} e^{g(\alpha_0)-g(\alpha)} k_{\mathrm{I}} n_a(\beta(\alpha))[A_0(\alpha - L/v_a) - B_1(\beta(\alpha))]d\alpha$.

Итак, зная $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ и вычисляя $B_1(\beta)$ (при $\beta \le 0$ $B_1(\beta) = B_0(\beta)$, а при $\beta \ge 0$ $B_1(\beta)$ вычисляя решением уравнения (18) методом вариации произвольной постоянной:

$$B_1(\beta) = A_0(\alpha(\beta)) + e^{-f(\beta)}(D - C) +$$

$$+e^{-f(\beta)}\frac{v_i}{v_a}\int_0^{\beta} e^{f(\beta)} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\alpha(\beta))[A_0(\alpha(\beta)) - B_0(-\alpha(\beta))]d\beta, \quad 0 \le \beta \le \beta_1),$$

по формулам (22), (23) последовательно вычисляем функции $A_1, B_2, A_2, B_3, \dots,$ и затем по формулам (21) вычисляем $n_a$, $n_i$ в полуполосе П в переменных $(\alpha,\beta)$.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1) Проведённое построение зависит от констант $C$ и $D$, но итоговые формулы (21) от $C$ и $D$ не зависят (зависимости от $C$ и $D$ числителя и знаменателя в этих формулах взаимно уничтожаются).

2) При $C > D$ из (22), (23) индукцией по $k$ нетрудно вывести, что функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно возрастают и $A(\alpha) > B(\beta)$ для $(\alpha,\beta)\in\Pi$, а при $C < D$ функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ монотонно убывают и $A(\alpha) < B(\beta)$ для $(\alpha,\beta)\in\Pi$. В частности, числитель и знаменатель формул (21) имеют одинаковые знаки и все знаменатели отличны от нуля.

3) По построению, функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ непрерывны. Если начальные и граничные условия непрерывно дифференцируемы, то с учётом условий согласованности нетрудно установить двукратную непрерывную дифференцируемость функций $A(\alpha)$ и $B(\beta)$.

4) Переходя в формулах (21) к переменным $t=\alpha+\beta$, $z=\alpha v_a+\beta v_i$, получим решение начально-краевой задачи на отрезке $[0,L]$ в полуполосе $\varphi^{-1}(\Pi)$: $t\ge 0$, $0\le z\le L$. Поскольку преобразование независимых переменных $(\alpha,\beta)=\varphi(z,t)$ линейное и невырожденное, то полные прообразы $\tilde{S}_k=\varphi^{-1}(S_k)$, $\tilde{T}_k=\varphi^{-1}(T_k)$, $k\ge 0$ тоже треугольники с непересекающимися внутренностями, дающими разбиение полуполосы $\varphi^{-1}(\Pi)=\{(z,t),0\le z\le L,t\ge 0\}$, как это показано на рис. 3. Нетрудно проверить, что границы треугольников $\tilde{T}_k$, $\tilde{S}_k$, $k\ge 1$ задаются прямыми $t=(z-L)/v_i+k\omega$, $k=0,1,\dots,$ $t=(z-L)/v_a+k\omega$, $k=1,2,\dots,$ где $\omega=L\Delta/(v_iv_a)$, и прямыми $z=0$, $z=L$. Треугольники $\tilde{S}_0$, $\tilde{T}_0$ пересекаются по границе $t=z/v_a$. Явные формулы для решения (21) в переменных $(z,t)$ получаются после подстановки в (21) выражений $\alpha=(tv_i-z)/\Delta$, $\beta=(z-tv_a)/\Delta$ с учётом равенств $\alpha(\beta)=(tv_i-zv_i/v_a)/\Delta$, $\beta(\alpha)=(z-tv_i)/(v_i\Delta)\cdot v_a+L/v_i$. Например, для $(z,t)\in\tilde{T}_k$, $k\ge 2$ получим

$$n_a(z,t)=n_{a0}\left(zv_a^{-1}-t\right)\left[A_{k-1}\left(\left(tv_i-v_iv_a^{-1}z\right)/\Delta\right)-B_k((z-tv_a)/\Delta)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[A_{k-1}\left((tv_i-z)/\Delta\right)-B_k((z-tv_a)/\Delta)\right]^{-1},$$

$$n_i(z,t)=n_{i0}\left(t-zv_i^{-1}+Lv_i^{-1}\right)\left[A_k\left((tv_i-z)/\Delta\right)-B_k(Lv_i^{-1}+v_av_i^{-1}\Delta^{-1}(z-tv_a))\right]\cdot$$

$$\cdot\left[A_{k-1}\left((tv_i-z)/\Delta\right)-B_k((z-tv_a)/\Delta)\right]^{-1}.$$

Аналогично преобразуются и другие формулы (21).

Аналогично решается начально-краевая задача на отрезке в случае $v_a < 0 < v_i$. Тогда краевые условия для $n_a$ ставятся на правой границе $z = L$, а для $n_i$ – на левой $z = 0$. Условия согласованности примут вид

$$n_{i0}(0) = n_i^0(0), \quad n_{a0}(0) = n_a^0(L),$$
$$n'_{i0}(0) + v_i (n_i^0)'(0) - k_I n_i^0(0) n_a^0(0) = 0, \quad n'_{a0}(0) + v_a (n_a^0)'(L) + k_I n_i^0(L) n_a^0(L) = 0.$$

Решение задачи (IV) в переменных $(\alpha, \beta)$ сводится к решению системы (3) в полуполосе $\Pi$, указанной выше и изображённой на рис. 4, где $\alpha(\beta) = -(v_i / v_a)\beta + L / v_a$, $\beta(\alpha) = -(v_a / v_i)\alpha$. Проекция полуполосы $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$ суть $[\alpha_0, +\infty)$ и $[0, +\infty)$, соответственно, где $\alpha_0 = -L/\Delta$, $\Delta = v_i - v_a > 0$.

Согласно обобщённой **Теореме 2**, решение системы (3) в замкнутой области $\Pi$ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $\alpha \ge \alpha_0$, $B(\beta)$, $\beta \ge 0$, для которых $A(\alpha) \ne B(\beta)$, $(\alpha, \beta) \in \Pi$ и задаётся формулами (4). Эти функции однозначно определяются начальными и граничными условиями задачи (IV), которые в переменных $(\alpha, \beta)$ примут вид:

$$n_a(\alpha, -\alpha) = n_a^0(-\alpha\Delta), \quad n_i(\alpha, -\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad \alpha_0 \le \alpha \le 0, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} n_a(\alpha(\beta), \beta) = n_{a0}(\beta + \alpha(\beta)) = n_{a0}\left(-\Delta\beta / v_a + L / v_a\right), \quad \beta \ge \beta_0 = -\alpha_0 = L/\Delta, \\ n_i(\alpha, \beta(\alpha)) = n_{i0}(\beta(\alpha) + \alpha) = n_{i0}(\alpha\Delta / v_i), \quad \alpha \ge 0. \end{gathered} \tag{25}$$

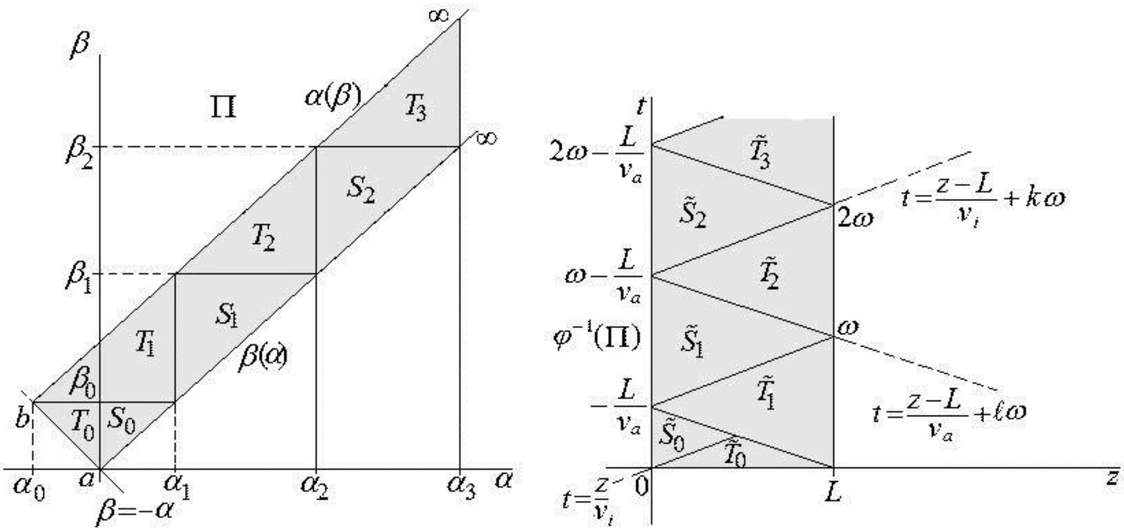



*Рис. 4.* Триангуляции полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ в переменных $(\alpha, \beta)$ и $(z, t)$, где $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, $\omega = -L\Delta / (v_a v_i)$.

Условия (24), (25) означают, что известны значения $n_a$ на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a, b] \cup [b, \infty)$ и значения $n_i$ – на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a, b] \cup [a, \infty)$, где $a = (0, 0)$, $\beta = (a_0, \beta_0)$. Для нахождения функций $A(\alpha)$, $\alpha \ge \alpha_0$, $B(\beta)$, $\beta \ge 0$ рекуррентно построим их сужения на отрезках $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $k \ge 1$, (для $A(\alpha)$) и $[0, \beta_0]$, $[\beta_{k-1}, \beta_k]$, $k \ge 1$ (для $B(\beta)$), где $\alpha_k = -L/\Delta - kL/v_a$, $\beta_k = L/\Delta + kL/v_i$, $k \ge 0$, при этом $\alpha(\beta_k) = \alpha_k$, $k \ge 0$, $\beta(\alpha_{k+1}) = \beta_k$, $k \ge 0$. Обозначим $B_0 = B\big|_{[0,\beta_0]}$, $B_k = B\big|_{[\beta_{k-1},\beta_k]}$, $A_k = A\big|_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}$, $k \ge 1$ и $A_0 = A_1\big|_{[\alpha_0,0]}$, $A_* = A_1\big|_{[0,\alpha_1]}$. Заметим, что отрезки $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $k \ge 1$ имеют попарно непересекающиеся внутренности и в сумме дают область определения функции $A(\alpha)$, $\alpha \ge \alpha_0$. Аналогично отрезки $[0, \beta_0]$, $[\beta_{k-1}, \beta_k]$, $k \ge 1$ имеют также попарно непересекающиеся внутренности и в сумме дают область определения функции $B(\beta)$, $\beta \ge 0$.

Из формул (4) и начальных условий (24) следует, что $A_0(\alpha)$, $\alpha_0 \le \alpha \le 0$, $B_0(\beta)$, $0 \le \beta \le \beta_0$ являются решением задачи Коши для системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&A_0'(\alpha) = k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\alpha)(A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)), \quad \alpha_0 \le \alpha \le 0, \\
&B_0'(\beta) = k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\beta)(A_0(-\beta) - B_0(\beta)), \quad 0 \le \beta \le \beta_0, \\
&A_0(0) = C, \quad B_0(0) = D, \quad \bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad \bar{n}_a(\beta) = n_a^0(\beta\Delta),
\end{aligned} \tag{26}$$

где $C \ne D$ – произвольные константы.

Функция $A_*(\alpha)$, $0 \le \alpha \le \alpha_1$ в силу (4) и граничного условия (25) ищется как решение задачи Коши для линейного уравнения

$$\begin{gathered}
A_*'(\alpha) = k_{\mathrm{I}} n_i(\alpha)(A_*(\alpha) - B_0(\beta(\alpha))), \quad A_*(0) = C, \quad 0 \le \alpha \le \alpha_1, \\
n_i(\alpha) = n_{i0}(\alpha + \beta(\alpha)) = n_{i0}(\alpha\Delta / v_i).
\end{gathered} \tag{27}$$

Теперь $A_1$ однозначно определяется условиями $A_1\big|_{[\alpha_0,0]} = A_0$, $A_1\big|_{[0,\alpha_1]} = A_*$. Зная $A_1$ на $[\alpha_0, \alpha_1]$ последовательно находим функции $A_1 \to B_1 \to A_2 \to B_2 \to B_3 \to \ldots \to A_k \to B_k \to A_{k+1} \to \ldots$ следующим способом на основе формул (4) и граничного условия (25).

По $A_k(\alpha)$ функция $B_k(\beta)$, $k \ge 1$ ищется как решение задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\beta_{k-1}, \beta_k]$:

$$\begin{gathered}
B_k'(\beta) = k_I n_a(\beta)(A_k(\alpha(\beta)) - B_k(\beta)), \quad B_k(\beta_{k-1}) = B_{k-1}(\beta_{k-1}), \\
n_a(\beta) = n_{a0}(\beta + \alpha(\beta)) = n_{a0}\left(L/v_a - \beta\Delta / v_a\right).
\end{gathered} \tag{28}$$

По $B_k(\beta)$ функция $A_{k+1}(\alpha)$, $k \ge 1$ ищется как решение задачи Коши для линейного уравнения на отрезке $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$:

$$\begin{gathered}
A_{k+1}'(\alpha) = k_{\mathrm{I}} n_i(\alpha)(A_{k+1}(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))), \quad A_{k+1}(\alpha_k) = A_k(\alpha_k), \\
n_i(\alpha) = n_{i0}(\alpha + \beta(\alpha)) = n_{i0}\left(\alpha\Delta / v_i\right).
\end{gathered} \tag{29}$$

Явные рекуррентные формулы, позволяющие вычислить функции $A_k$, $k \ge 2$, $B_k$, $k \ge 1$ получатся интеграцией линейных уравнений (27)–(29) методом вариации произвольной постоянной:

$$B_k(\beta) = A_k(\alpha(\beta)) + e^{f(\beta_{k-1})-f(\beta)}[B_{k-1}(\beta_{k-1}) - A_k(\alpha_{k-1})] +$$

$$+\frac{v_i}{v_a}\int_{\beta_{k-1}}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\gamma)} k_{\mathrm{I}} n_i(\alpha(\gamma))[A_k(\alpha(\gamma)) - B_{k-1}(\gamma - L/v_i)]d\gamma, \quad k \ge 2, \tag{30}$$

$$\beta_{k-1} \le \beta \le \beta_k, \quad f(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}} n_a(\gamma)d\gamma,$$

$$A_{k+1}(\beta) = B_k(\beta(\alpha)) + e^{g(\alpha)-g(\alpha_k)}[A_k(\alpha_k) - B_k(\beta_{k-1})] +$$

$$+\frac{v_a}{v_i}\int_{\alpha_k}^{\alpha} e^{g(\alpha)-g(\gamma)} k_{\mathrm{I}} n_a(\beta(\gamma))[A_k(\gamma + L/v_a) - B_k(\beta(\gamma))]d\gamma, \quad k \ge 1, \tag{31}$$

$$\alpha_k \le \alpha \le \alpha_{k+1}, \quad g(\beta) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}} n_i(\gamma)d\gamma.$$

При $k = 1$ справедливость формулы (30) сохраняется, если заменить интегральное слагаемое в этой формуле в зависимости от $\beta$ на

$$\begin{aligned} J(\beta) &= \frac{v_i}{v_a}\int_{\beta_0}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\gamma)} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\alpha(\gamma))[A_0(\alpha(\gamma)) - B_0(-\alpha(\gamma))]d\gamma, \quad \beta_0 \le \beta \le \frac{L}{v_i}, \\ & J\left(\frac{L}{v_i}\right) + \frac{v_i}{v_a}\int_{L/v_i}^{\beta} e^{f(\beta)-f(\gamma)} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\alpha(\gamma))[A_1(\alpha(\gamma)) - B_0(\gamma - L/v_i)]d\gamma, \quad \frac{L}{v_i} \le \beta \le \beta_1. \end{aligned} \tag{32}$$

Итак, зная $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$, которые вычисляются в явном виде из системы (26) по формулам

$$A_0(\alpha) = C + (D - C)\int_0^{-\alpha} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(-\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma, \quad \alpha_0 \le \alpha \le 0,$$

$$B_0(\beta) = D + (C - D)\int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_a(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma, \quad 0 \le \beta \le \beta_0,$$

$$N(\alpha) = k_{\mathrm{I}}\int_0^{\alpha}[\bar{n}_i(-\gamma) + \bar{n}_a(\gamma)]d\gamma, \quad \alpha \ge 0,$$

и затем вычисляя $A_1(\alpha)$ (при $\alpha \le 0$ $A_1(\alpha) = A_0(\alpha)$, при $0 \le \alpha \le \alpha_1$ $A_1(\alpha)$ вычисляются из решения задачи Коши методом вариации произвольной постоянной:

$$A_1(\alpha) = A_*(\alpha) = B_0(\beta(\alpha)) + e^{f(\alpha)}(C - D) +$$
$$+\frac{v_i}{v_a}\int_0^\alpha e^{f(\alpha)-f(\gamma)} k_\mathrm{I}\bar{n}_a(\beta(\gamma))(A_0(-\beta(\gamma)) - B_0(\beta(\gamma)))d\gamma,$$

где $f(\alpha) = \int_0^\alpha k_\mathrm{I} n_i(\gamma)d\gamma$) по формулам (30)–(32) последовательно находим функции $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, …

Используя построенные функции $A_k$, $k \geq 1$, $B_k$, $k \geq 0$, найдём решение системы (3) в полуполосе $\Pi$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям (24), (25). Для этого разобьём полуполосу на треугольники $T_k$, $S_k$, $k \geq 0$, как это указано на рис. 4.

$$T_k = \Pi \cap ([\alpha_{k-1}, \alpha_k] \times [\beta_{k-1}, \beta_k]) = \{(\alpha, \beta):\ \beta_{k-1} \leq \beta \leq \beta_k, \alpha(\beta) \leq \alpha \leq \alpha_k\}, \quad k \geq 1,$$
$$S_k = \Pi \cap ([\alpha_k, \alpha_{k+1}] \times [\beta_{k-1}, \beta_k]) = \{(\alpha, \beta):\ \alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_{k+1}, \beta(\alpha) \leq \beta \leq \beta_k\}, \quad k \geq 1,$$
$$T_0 = \Pi \cap ([\alpha_0, 0] \times [0, \beta_0]) = \{(\alpha, \beta):\ 0 \leq \beta \leq \beta_0, -\beta \leq \alpha \leq 0\},$$
$$S_0 = \Pi \cap ([0, \alpha_1] \times [0, \beta_0]) = \{(\alpha, \beta):\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta(\alpha) \leq \beta \leq \beta_0\}.$$

Нетрудно проверить, что внутренности различных треугольников не пересекаются и в сумме треугольники дают полуполосу $\Pi$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
&n_a(\alpha,\beta) = n_a(\beta)\frac{A_k(\alpha(\beta)) - B_k(\beta)}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)},\ n_i(\alpha,\beta) = n_i(\alpha)\frac{A_k(\alpha) - B_{k-1}(\beta(\alpha))}{A_k(\alpha) - B_k(\beta)},\\
&(\alpha,\beta) \in T_k,\ k \geq 2,\\
&n_a(\alpha,\beta) = n_a(\beta)\frac{A_k(\alpha(\beta)) - B_k(\beta)}{A_{k+1}(\alpha) - B_k(\beta)},\ n_i(\alpha,\beta) = n_i(\alpha)\frac{A_{k+1}(\alpha) - B_k(\beta(\alpha))}{A_{k+1}(\alpha) - B_k(\beta)},\\
&(\alpha,\beta) \in S_k,\ k \geq 1,\\
&n_a(\alpha,\beta) = \bar{n}_a(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)},\ n_i(\alpha,\beta) = \bar{n}_i(\alpha)\frac{A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)}{A_0(\alpha) - B_0(\beta)},\\
&(\alpha,\beta) \in T_0,\\
&n_a(\alpha,\beta) = \bar{n}_a(\beta)\frac{A_0(-\beta) - B_0(\beta)}{A_1(\alpha) - B_0(\beta)},\ n_i(\alpha,\beta) = n_i(\alpha)\frac{A_1(\alpha) - B_0(\beta(\alpha))}{A_1(\alpha) - B_0(\beta)},\\
&(\alpha,\beta) \in S_0.
\end{aligned} \tag{33}$$

При $k = 1$ формулы (33) для $(\alpha, \beta) \in T_1$ нуждаются в коррекции: формула для $n_a(\alpha, \beta)$ остаётся прежней, а формула для $n_i(\alpha, \beta)$ верна для $\alpha \geq 0$, а при $\alpha_0 \leq \alpha \leq 0$ она заменяется на следующую:

$$n_i(\alpha,\beta)=\bar{n}_i(\alpha)[A_0(\alpha)-B_0(-\alpha)][A_1(\alpha)-B_1(\beta)]^{-1}.$$

Прямой подстановкой с учётом соотношений (26)–(29) легко проверить, что функции (33) доставляют решение системы (3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (24), (25). Кроме того, формулы (33) согласованы в том смысле, что на пересечении любых двух треугольников их значения совпадают.

Справедливы замечания 1)–4), сделанные выше. В частности, переходя в формулах (33) к переменным $t=\alpha+\beta$, $z=\alpha v_a+\beta v_i$, получим решение начально-краевой задачи на отрезке $[0,L]$ в полуполосе $\varphi^{-1}(\Pi)=\{(z,t):t\ge 0, 0\le z\le L\}$, которая разбивается на треугольники $S_k=\varphi^{-1}(S_k)$, $T_k=\varphi^{-1}(T_k)$, $k\ge 0$ с непересекающимися внутренностями, как это показано на рис. 4. Подставляя в формулы (33) выражения $\alpha=\dfrac{tv_i-z}{\Delta}$, $\beta=\dfrac{z-tv_a}{\Delta}$, $\alpha(\beta)=\dfrac{L}{v_a}+\dfrac{v_i}{v_a}\dfrac{tv_a-z}{\Delta}$, $\beta(\alpha)=\dfrac{v_a}{v_i}\dfrac{z-tv_i}{\Delta}$, приходим к искомому результату. Например, для $k\ge 2$, $(z,t)\in T_k$ получим:

$$n_a(z,t)=n_{a0}\left(t-\frac{z}{v_a}+\frac{L}{v_a}\right)\frac{A_k\left(\dfrac{L}{v_a}+\dfrac{v_i}{v_a}\dfrac{tv_a-z}{\Delta}\right)-B_k\left(\dfrac{z-tv_a}{\Delta}\right)}{A_k\left(\dfrac{tv_i-z}{\Delta}\right)-B_k\left(\dfrac{z-tv_a}{\Delta}\right)},$$

$$n_i(z,t)=n_{i0}\left(t-\frac{z}{v_i}\right)\frac{A_k\left(\dfrac{tv_i-z}{\Delta}\right)-B_{k-1}\left(\dfrac{v_a}{v_i}\dfrac{z-tv_i}{\Delta}\right)}{A_k\left(\dfrac{tv_i-z}{\Delta}\right)-B_k\left(\dfrac{z-tv_a}{\Delta}\right)}.$$

Аналогично получаются и другие формулы в переменных $(z,t)$.

## §3. Смешанная краевая задача на отрезке в случае $v_a\cdot v_i>0$

Рассмотрим случай $v_a>0$, $v_i>0$, $v_a\ne v_i$. Тогда краевые условия для $n_a$ и $n_i$ ставятся только на левой границе $z=0$, а условия согласованности примут вид:

$$n_{a0}(0)=n_a^0(0),\quad n_{i0}(0)=n_i^0(0),$$

$$n'_{a0}(0)+v_a(n_a^0)'(0)+k_\mathrm{I}n_a^0(0)n_i^0(0)=0,\quad n'_{i0}(0)+v_i(n_i^0)'(0)-k_\mathrm{I}n_a^0(0)n_i^0(0)=0.$$

Решение задачи (IV) проходит по схеме решения задачи (III). Выделим основные этапы построения решения.

В случае $v_a > v_i > 0$ полуполоса $\Pi$ изображена на рис. 5, проекции на оси $\alpha$ и $\beta$ суть, соответственно, $(-\infty, \alpha_0]$ и $[\beta_0, +\infty)$, где $\alpha_0 = -L/\Delta$, $\beta_0 = L/\Delta = -\alpha_0$, $\Delta = v_i - v_a < 0$. Структурные функции $A(\alpha)$, $\alpha \le \alpha_0$, $B(\beta)$, $\beta \ge \beta_0$ ищутся из начальных и граничных условий, принимающих в переменных $(\alpha, \beta)$ вид:

$$n_a(-\beta, \beta) = n_a^0(\beta\Delta), \beta_0 \le \beta \le 0, \quad n_i(\alpha, -\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), 0 \le \alpha \le \alpha_0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &n_a(\alpha(\beta), \beta) = n_{a0}(\alpha(\beta) + \beta) = n_{a0}(-\beta\Delta / v_a), \beta \ge 0, \\ &n_i(\alpha, \beta(\alpha)) = n_{i0}(\alpha + \beta(\alpha)) = n_{i0}(\alpha\Delta / v_i), \alpha \le 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\alpha(\beta) = -(v_i / v_a)\beta$, $\beta(\alpha) = -(v_a / v_i)\alpha$. Таким образом, известны значения $n_a$ и $n_i$ на части границы $\partial\Pi$, состоящей из объединения $[a, \infty) \cup [a, b]$, $a = (0,0)$, $\beta = (\alpha_0, \beta_0)$.

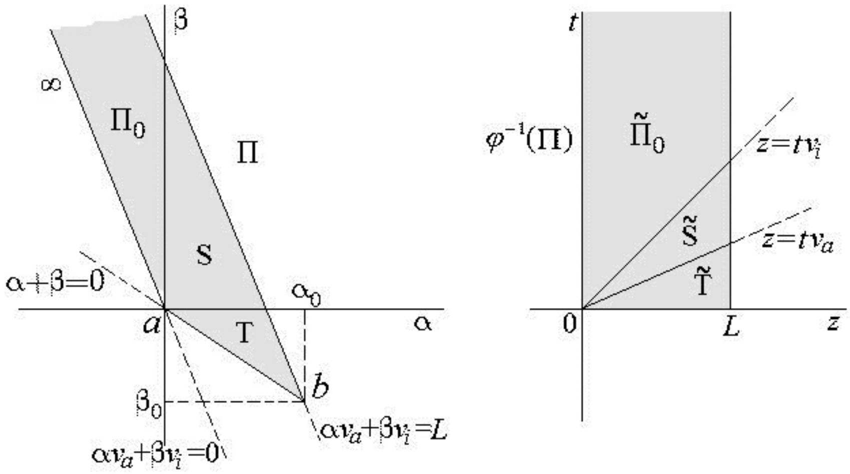



*Рис. 5.* Случай $0 < v_i < v_a$.

Найдём сужения функций $A$ и $B$ на отрезках $A_0 = A\big|_{[0,\alpha_0]}$, $B_0 = B\big|_{[\beta_0,0]}$, $A_1 = A\big|_{(-\infty,\alpha_0]}$, $B_1 = B\big|_{[0,+\infty)}$. Из формул (4) и начальных условий (34) имеем для нахождения $A_0$ и $B_0$:

$$\begin{aligned} &B_0'(\beta) = k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\beta)(A_0(-\beta) - B_0(\beta)), \quad \beta_0 \le \beta \le 0, \\ &A_0'(\alpha) = k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\alpha)(A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)), \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0, \\ &\bar{n}_a(\beta) = n_a^0(\beta\Delta), \quad \bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta). \end{aligned}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $A_0(\alpha)$, $B_*(\alpha) \underset{\mathrm{def}}{=} B_0(-\alpha)$, $0 \le \alpha \le \alpha_0$:

$$B'_*(\alpha) = -k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\alpha)(A_0(\alpha) - B_*(\alpha)), \quad A'_0(\alpha) = k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\alpha)(A_0(\alpha) - B_*(\alpha))_0,$$
$$\bar{n}_a(\alpha) = n_a^0(-\alpha\Delta), \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0. \tag{36}$$

Решение системы (36) с начальным условием $A_0(0) = C$, $B_*(0) = D$ выписывается в явном виде:

$$B_*(\alpha) = D + (D - C)\int_0^\alpha k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma, A_0(\alpha) = C + (C - D)\int_0^\alpha k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma,$$
$$N(\alpha) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_0^\alpha k_{\mathrm{I}}(\bar{n}_a(\gamma) + \bar{n}_i(\gamma))d\gamma, \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0, \quad C \ne D. \tag{37}$$

Откуда для $A_0(\alpha)$, $B_0(\beta)$ получаются формулы

$$B_0(\beta) = B_*(-\beta) = D + (D - C)\int_0^{-\beta} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma,$$

$$A_0(\alpha) = C + (C - D)\int_0^\alpha k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma, \quad \beta_0 \le \beta \le 0, 0 \le \alpha \le \alpha_0, \tag{38}$$
$$\bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(-\alpha\Delta), \quad \bar{n}_a(\alpha) = n_a^0(-\alpha\Delta), \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0$$

и $N(\alpha)$ вычисляется по (37).

Аналогично ищутся функции $A_1(\alpha)$, $\alpha \le 0$, $B_1(\beta)$, $\beta \ge 0$. Из формул (4) и граничных условий (35) получим

$$B'_1(\beta) = k_{\mathrm{I}}n_a(\beta)(A_1(\alpha(\beta)) - B_1(\beta)), \quad \beta \ge 0,$$
$$A'_1(\alpha) = k_{\mathrm{I}}n_i(\alpha)(A_1(\alpha) - B_1(\beta(\alpha))), \quad \alpha \le 0,$$
$$n_a(\beta) = n_{a0}(-\beta\Delta / v_a), \quad n_i(\alpha) = n_{i0}(\alpha\Delta / v_i).$$

Последние равенства можно рассматривать как систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $A_*(\beta) \underset{\mathrm{def}}{=} A_1(\alpha(\beta))$ и $B_1(\beta)$, $\beta \ge 0$:

$$B'_1(\beta) = k_{\mathrm{I}}n_a(\beta)(A_*(\beta) - B_1(\beta)), A'_*(\beta) = -k_{\mathrm{I}}n_i^*(\beta)(A_*(\beta) - B_1(\beta)), \beta \ge 0,$$
$$n_i^*(\beta) = (v_a / v_i)n_i(\alpha(\beta)).$$

Решение этой системы с тем же начальным условием $A_*(0) = C$, $B_1(0) = D$, $C \ne D$, что и для системы (36), выписывается в явном виде:

$$B_1(\beta) = D + (C - D)\int_0^\beta k_{\mathrm{I}}n_a(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma, A_*(\beta) = C + (D - C)\int_0^\beta k_{\mathrm{I}}n_i^*(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma,$$

$$M(\beta) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\beta k_{\mathrm{I}}(n_a(\gamma) + n_i^*(\gamma))d\gamma, \tag{39}$$

откуда для $A_1(\alpha)$, $B_1(\beta)$ получаются формулы:

$$B_1(\beta) = D + (C - D)\int_0^\beta k_{\mathrm{I}} n_a(\gamma) e^{-M(\gamma)} d\gamma, A_1(\alpha) = C + (D - C)\int_0^{\beta(\alpha)} k_{\mathrm{I}} n_i^*(\gamma) e^{-M(\gamma)} d\gamma, \tag{40}$$
$$\beta \geq 0 \geq \alpha,$$

где $M(\beta)$, $\beta \geq 0$ вычисляется по (39).

Формулы (38), (40) позволяют вычислить в явном виде структурные функции $A(\alpha)$, $\alpha \leq \alpha_0$, $B(\beta)$, $\beta \geq \beta_0$. Если начальные и граничные условия – непрерывно дифференцируемые функции в своих областях определения и выполнены условия согласованности, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ дважды непрерывно дифференцируемы (см. решение задачи (III) в [7, 8]).

Теперь из формул (4) легко получить формулы для решения смешанной задачи (IV). Для этого разобьём полуполосу $\Pi$ на два треугольника $S$ и $T$ и полуполосу $\Pi_0$, как показано на рис. 5,

$$T = \Pi \cap ([0,\alpha_0]\times[\beta_0,0]) = \{(\alpha,\beta): \beta_0 \leq \beta \leq 0, -\beta \leq \alpha \leq (L - \beta v_i)/v_a\},$$
$$S = \Pi \cap ([0,\alpha_0]\times[0,+\infty)) = \{(\alpha,\beta): 0 \leq \alpha \leq L/v_a, 0 \leq \beta \leq (L - \alpha v_a)/v_i\},$$
$$\Pi_0 = \Pi \cap ((-\infty,0]\times[0,+\infty)) = \{(\alpha,\beta): \alpha \leq 0, -v_a/v_i\alpha \leq \beta \leq (L - \alpha v_a)/v_i\}.$$

Тогда из формул (4) вытекают соотношения:

$$n_i(\alpha,\beta) = \frac{A_1'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_1(\alpha) - B_1(\beta)]}, n_a(\alpha,\beta) = \frac{B_1'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_1(\alpha) - B_1(\beta)]}, (\alpha,\beta) \in \Pi_0, \tag{41}$$

$$n_i(\alpha,\beta) = \frac{A_0'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_1(\beta)]}, n_a(\alpha,\beta) = \frac{B_1'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_1(\beta)]}, (\alpha,\beta) \in S, \tag{42}$$

$$n_i(\alpha,\beta) = \frac{A_0'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_0(\beta)]}, n_a(\alpha,\beta) = \frac{B_0'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_0(\beta)]}, (\alpha,\beta) \in T. \tag{43}$$

Подставляя в формулы (41)–(43) выражения (38), (40) для $A_0, B_0, A_1, B_1$, получим явные формулы для решения смешанной задачи, в которых константы $C$ и $D$ сокращаются и, таким образом, не входят в итоговые формулы (ср. с [7, 8]).

Наконец, подставляя в (41)–(43) выражения $a = (tv_i - z)/\Delta$, $\beta = (z - tv_a)/\Delta$, получим формулы для концентраций $n_i$, $n_a$ в переменных $(t,z)$ в полуполосе $\varphi^{-1}(\Pi) = [0,L]\times[0,+\infty)$. Эти формулы зависят от того, в каком подмножестве полуполосы $\varphi^{-1}(\Pi)$ ($S = \varphi^{-1}S$, $T = \varphi^{-1}T$, $\Pi_0 = \varphi^{-1}\Pi$) лежит точка $(z,t)$ (рис. 5).

Аналогичные построения проводятся в каждом из трёх оставшихся случаев: $0 < v_a < v_i$, $v_a < v_i < 0$, $v_i < v_a < 0$. В каждом из трёх случаев укажем необходимое для задания решения в переменных $(\alpha, \beta)$ и $(z, t)$ разбиение полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$, построение структурных функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и формулы для решения.
В случае $0 < v_a < v_i$ имеем $\Delta = v_i - v_a > 0$, и разбиение $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ имеет вид:

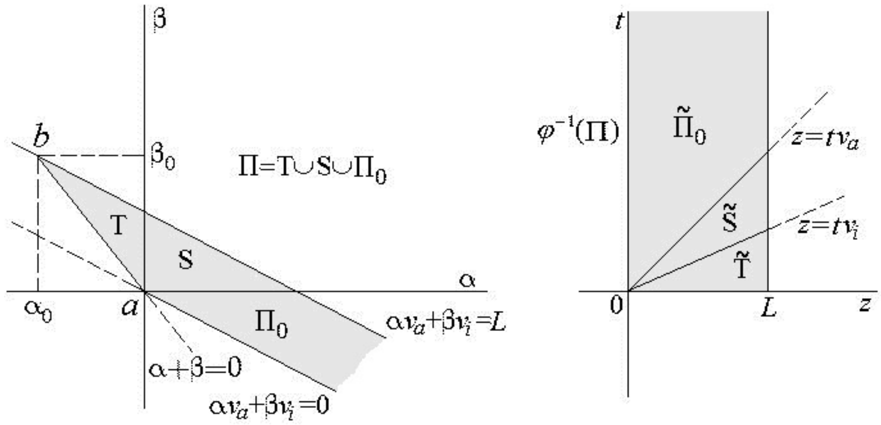



Рис. 6. Случай $0 < v_a < v_i$.

Где $\alpha_0 = -L/\Delta$, $\beta_0 = L/\Delta$. Структурные функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ заданы на проекциях полуполосы $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$, т.е. на бесконечных полуинтервалах $[\alpha_0, +\infty)$ и $(-\infty, \beta_0]$. Пусть $A_0 = A\big|_{[\alpha_0,0]}$, $B_0 = B\big|_{[0,\beta_0]}$, $A_1 = A\big|_{[\alpha_0,+\infty)}$, $B_1 = B\big|_{(-\infty,0]}$. Тогда имеем следующие явные формулы для указанных функций:

$$B_0(\beta) = D + (C - D)\int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma,\ A_0(\alpha) = C + (D - C)\int_0^{-\alpha} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma,$$

$$0 \le \beta \le \beta_0,\ \alpha_0 \le \alpha \le 0,\ \bar{n}_i(\gamma) = n_i^0(\gamma\Delta),\ \bar{n}_a(\gamma) = n_a^0(\gamma\Delta),\ 0 \le \gamma \le L/\Delta,$$

$$N(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}}(\bar{n}_i(\gamma) + \bar{n}_a(\gamma))d\gamma,\ \beta \ge 0,$$

$$B_1(\beta) = D + (D - C)\int_0^{\alpha(\beta)} k_{\mathrm{I}}n_a^*(\gamma)e^{M(\gamma)}d\gamma,\ A_1(\alpha) = C + (C - D)\int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}n_i(\gamma)e^{M(\gamma)}d\gamma,$$

$$\alpha(\beta) = -(v_i / v_a)\beta,\ \beta \le 0,\ \alpha \ge 0,\ n_i(\gamma) = n_{i0}(\gamma\Delta / v_i),\ n_a^*(\gamma) = (v_a / v_i)n_{a0}(\gamma\Delta / v_i),\ \gamma \ge 0,$$

$$M(\alpha) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}(n_a^*(\gamma) + n_i(\gamma))d\gamma,\ \alpha \ge 0.$$

Разбиение полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ задаются равенствами $T = \Pi \cap ([\alpha_0, 0] \times [0, \beta_0])$, $S = \Pi \cap ([0, +\infty) \times [0, \beta_0])$, $\Pi_0 = \Pi \cap ([0, +\infty) \times (-\infty, 0])$,

$T=\varphi^{-1}(T)$, $S=\varphi^{-1}(S)$, $\Pi_0=\varphi^{-1}(\Pi_0)$. Формулы (41), (43) для решения остаются в силе, а формула (42) заменяется на следующую:

$$n_i(\alpha,\beta)=\frac{A_1'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_1(\alpha)-B_0(\beta)]},\quad n_a(\alpha,\beta)=\frac{B_0'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_1(\alpha)-B_0(\beta)]},\quad (\alpha,\beta)\in S. \qquad (44)$$

Подставляя в формулы (41), (43), (44) указанные выше выражения для функций $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$, приходим к окончательным формулам для решения смешанной задачи на отрезке.
Наконец, подставляя в последние формулы соотношения $\alpha=(tv_i-z)/\Delta$, $\beta=(z-tv_a)/\Delta$, получим формулы для решения смешанной задачи в переменных $(z,t)$.

В случаях $v_a,v_i<0$ граничные условия для $n_i$, $n_a$ ставятся только на правой границе $z=L$, а условия согласованности перепишутся в виде

$$n_a^0(L)=n_{a0}(0),\quad n_i^0(L)=n_{i0}(0),$$
$$n_a'(0)+v_a(n_a^0)'(L)+k_{\mathrm{I}}n_a^0(L)n_i^0(L)=0, n_i'(0)+v_i(n_i^0)'(L)-k_{\mathrm{I}}n_a^0(L)n_i^0(L)=0.$$

В случае $v_a<v_i<0$ имеем $\Delta=v_i-v_a>0$, и разбиения $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ имеют вид:

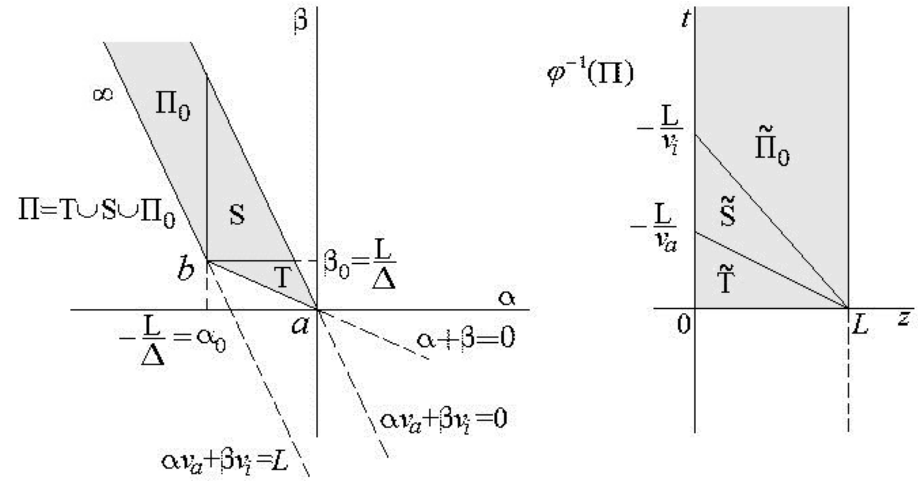



*Рис. 7.* Случай $v_a<v_i<0$.

Граничные условия в переменных $(\alpha,\beta)$ ставятся на луче $[b,\infty)$, а начальные – на отрезке $[a,b]$, где $a=(0,0)$, $b=(\alpha_0,\beta_0)$, как это указано на рис. 7, и имеют вид

$$n_a(-\beta,\beta)=n_a^0(\beta\Delta),\quad n_i(-\beta,\beta)=n_i^0(\beta\Delta),\quad 0\le\beta\le\beta_0, \qquad (45)$$

$$\begin{aligned}&n_a(\alpha(\beta),\beta)=n_{a0}(\alpha(\beta)+\beta)=n_{a0}\left(L/v_a-\beta\Delta/v_a\right),\\&n_i(\alpha(\beta),\beta)=n_{i0}(\alpha(\beta)+\beta)=n_{i0}\left(L/v_a-\beta\Delta/v_a\right),\beta\ge\beta_0,\end{aligned} \qquad (46)$$

где $\alpha(\beta) = L/v_a - (v_i/v_a)\beta$, $\beta(\alpha) = L/v_i - (v_a/v_i)\alpha$.
Структурные функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ заданы на проекциях полуполосы $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$, т.е. на бесконечных полуинтервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. Пусть $A_0 = A\big|_{[\alpha_0, 0]}$, $B_0 = B\big|_{[0,\beta_0]}$, $A_1 = A\big|_{(-\infty,\alpha_0]}$, $B_1 = B\big|_{[\beta_0,+\infty)}$. Тогда имеем следующие явные формулы для указанных функций:

$$B_0(\beta) = D + (C - D)\int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma,\ 0 \le \beta \le \beta_0,$$

$$A_0(\alpha) = C + (D - C)\int_0^{-\alpha} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma,\ \alpha_0 \le \alpha \le 0,$$

$$\bar{n}_a(\gamma) = n_a^0(\gamma\Delta),\ \bar{n}_i(\gamma) = n_i^0(\gamma\Delta),\ 0 \le \gamma \le \beta_0,$$

$$N(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}}(\bar{n}_a(\gamma) + \bar{n}_i(\gamma))d\gamma,\ 0 \le \beta \le \beta_0,$$

$$B_1(\beta) = D_* + (C_* - D_*)\int_{\beta_0}^{\beta} k_{\mathrm{I}}n_a(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma,\ \beta \ge \beta_0,$$

$$A_1(\alpha) = C_* + (D_* - C_*)\int_{\beta_0}^{\beta} k_{\mathrm{I}}n_i^*(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma,\ \alpha \le \alpha_0,$$

$$n_a(\gamma) = n_{a0}\left(\gamma + \alpha(\gamma)\right) = n_{a0}\left(\frac{L}{v_a} - \gamma\frac{\Delta}{v_a}\right),\ n_i^*(\gamma) = \frac{v_i}{v_a}n_{i0}\left(\frac{L}{v_a} - \gamma\frac{\Delta}{v_a}\right),$$

$$M(\beta) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}(n_a(\gamma) + n_i^*(\gamma))d\gamma,\ \beta \ge \beta_0,$$

где $C \ne D$, $C_* \ne D_*$ – произвольные константы, связанные линейными соотношениями

$$C_* = A_0(\alpha_0) = C + (D - C)\int_0^{\beta_0} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma,$$

$$D_* = B_0(\beta_0) = D + (C - D)\int_0^{\beta_0} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{-N(\gamma)}d\gamma.$$

В частности, $C_* - D_* = (C - D)e^{-N(\beta_0)}$. Разбиение полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ задаётся равенствами $T = \Pi \cap ([\alpha_0, 0] \times [0, \beta_0])$, $S = \Pi \cap ([\alpha_0, 0] \times [\beta_0, +\infty))$, $\Pi_0 = \Pi \cap ((-\infty, \alpha_0] \times [\beta_0, +\infty))$, $T = \varphi^{-1}(T)$, $S = \varphi^{-1}(S)$, $\Pi_0 = \varphi^{-1}(\Pi_0)$. Формулы

(41)÷(43) для решения в переменных $(\alpha,\beta)$ остаются в силе с учётом новых указанных выше значений для $B_0$, $B_1$, $A_0$, $A_1$.

В случае $v_i < v_a < 0$ имеем $\Delta = v_i - v_a < 0$, разбиения полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ представлены на рис. 8.

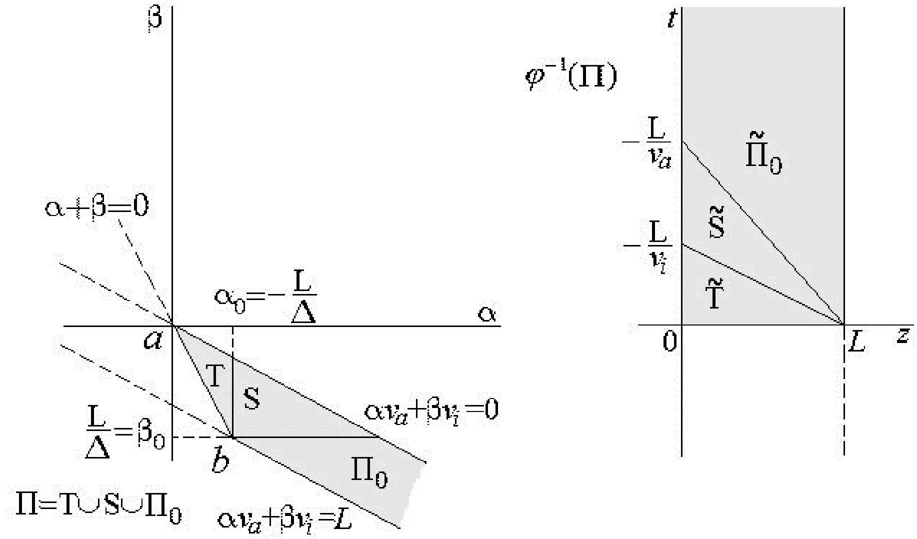



*Рис. 8.* Случай $v_i < v_a < 0$.

Граничные и начальные условия имеют вид (45), (46), где в (45) надо считать $\beta_0 \le \beta \le 0$, а в (46) – $\beta \le \beta_0$. Структурные функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ заданы на проекциях полуполосы $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$, т.е. на бесконечных полуинтервалах $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$. Пусть $A_0 = A\big|_{[0,\alpha_0]}$, $B_0 = B\big|_{[\beta_0,0]}$, $A_1 = A\big|_{[\alpha_0,+\infty)}$, $B_1 = B\big|_{(-\infty,\beta_0]}$. Тогда получим следующие явные формулы для указанных функций:

$$B_0(\beta) = D + (D-C)\int_0^{-\beta} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma,\ \beta_0 \le \beta \le 0,$$

$$A_0(\alpha) = C + (C-D)\int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma,\ 0 \le \alpha \le \alpha_0,$$

$$\bar{n}_a(\gamma) = n_a^0(-\gamma\Delta),\ \bar{n}_i(\gamma) = n_i^0(-\gamma\Delta),\ 0 \le \gamma \le \alpha_0,$$

$$N(\alpha) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}}(\bar{n}_i(\gamma) + \bar{n}_a(\gamma))d\gamma,\ 0 \le \alpha \le \alpha_0,$$

$$B_1(\beta) = D_* + (D_* - C_*)\int_{\alpha_0}^{\alpha(\beta)} k_1 n_a^*(\gamma)e^{M(\gamma)}d\gamma,\ \beta \le \beta_0,$$

$$A_1(\alpha) = C_* + (C_* - D_*)\int_{\alpha_0}^{\alpha} k_1 n_i(\gamma)e^{M(\gamma)}d\gamma,\ \alpha \ge \alpha_0,$$

$$n_i(\gamma)=n_{i0}\left(\gamma+\beta(\gamma)\right), n_a^*(\gamma)=\frac{v_a}{v_i}n_{a0}\left(\gamma+\beta(\gamma)\right), \gamma\ge\alpha_0,$$

$$M(\alpha)=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}k_{\mathrm{I}}(n_a^*(\gamma)+n_i(\gamma))d\gamma, \alpha\ge\alpha_0,$$

где $C\ne D$, $C_*\ne D_*$ – произвольные константы, связанные соотношениями

$$C_*=C+(C-D)\int\limits_0^{\alpha_0}k_{\mathrm{I}}\overline{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma, D_*=D+(D-C)\int\limits_0^{\alpha_0}k_{\mathrm{I}}\overline{n}_a(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma.$$

В частности, $C_*-D_*=(C-D)e^{N(\alpha_0)}$. Разбиение полуполос $\Pi$ и $\varphi^{-1}(\Pi)$ задаётся равенствами $T=\Pi\cap([0,\alpha_0]\times[\beta_0,0])$, $S=\Pi\cap([\alpha_0,+\infty)\times[\beta_0,0])$, $\Pi_0=\Pi\cap([\alpha_0,+\infty)\times(-\infty,\beta_0])$, $T=\varphi^{-1}(T)$, $S=\varphi^{-1}(S)$, $\Pi_0=\varphi^{-1}(\Pi_0)$. С учётом полученных функций $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$ решение в переменных $(\alpha,\beta)$ задаётся формулами (41), (43), (44), куда надо подставить значения указанных функций. Подставляя в полученные выражения соотношения $\alpha=(tv_i-z)/\Delta$, $\beta=(z-tv_a)/\Delta$, получим решение смешанной задачи на отрезке в переменных $(z,t)$. При этом итоговые формулы для решения как в переменных $(\alpha,\beta)$, так и в переменных $(z,t)$, от констант $C$, $D$, $C_*$, $D_*$ не зависят.

## §4. Вырожденные случаи

Речь идёт о случаях, когда одна из скоростей $v_i$, $v_a$ обращается в нуль или когда $v_i=v_a\ne 0$.

Пусть $v_i=0$, $v_a>0$. Тогда граничное условие для $n_a$ ставится на левой границе $z=0$, а граничное условие для $n_i$ отсутствует. При этом условия согласованности имеют вид:

$$n_{a0}(0)=n_a^0(0),\quad n'_{a0}(0)+v_a(n_a^0)'(0)+k_{\mathrm{I}}n_a^0(0)n_i^0(0)=0.$$

Полуполоса $\Pi$ изображена на рис. 9, её проекции на оси $\alpha$ и $\beta$ суть $[0,\alpha_0]$ и $[\beta_0,+\infty)$ соответственно, где $\alpha_0=L/v_a$, $\beta_0=-\alpha_0=-L/v_a$. Структурные функции $A(\alpha):[0,\alpha_0]\to\mathbb{R}$, $B(\beta):[\beta_0,+\infty]\to\mathbb{R}$ ищутся из начальных и граничных условий, которые в переменных $(\alpha,\beta)$ примут вид:

$$n_a(-\beta,\beta)=n_a^0(-\beta v_a), n_i(\alpha,-\alpha)=n_i^0(\alpha v_a), \beta_0\le\beta\le 0, 0\le\alpha\le\alpha_0, \tag{47}$$

$$n_a(0,\beta)=n_{a0}(\beta),\quad \beta\ge 0. \tag{48}$$

Обозначим $A_0=A$ и пусть $B_0=B\big|_{[\beta_0,0]}$, $B_1=B\big|_{[0,+\infty)}$. Тогда из формул (4) и начальных условий (47) следуют соотношения:

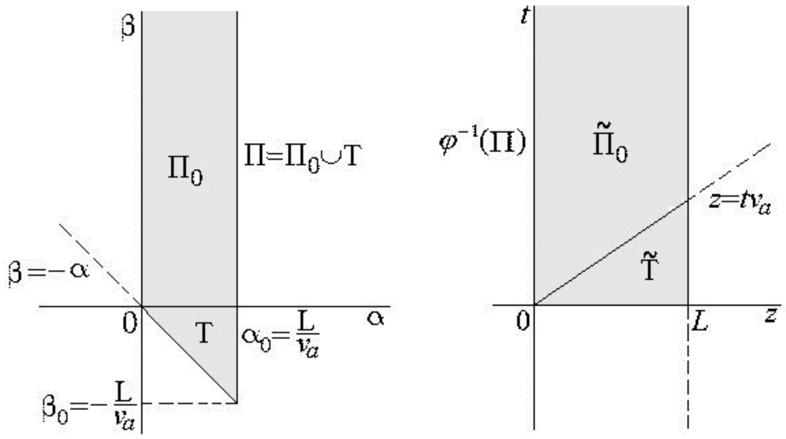



*Рис. 9.* Случай $v_i = 0 < v_a$.

$$B_0'(\beta) = k_{\mathrm{I}} \bar{n}_a(\beta)(A_0(-\beta) - B_0(\beta)),\ A_0'(\alpha) = k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\alpha)(A_0(\alpha) - B_0(-\alpha)),$$
$$\bar{n}_a(\beta) = n_a^0(-\beta v_a),\ \bar{n}_i(\alpha) = n_i^0(\alpha v_a),\ \beta_0 \le \beta \le 0,\ 0 \le \alpha \le \alpha_0,$$

откуда функции $B_0(\beta)$, $A_0(\alpha)$ ищутся в явном виде:

$$B_0(\beta) = D + (D - C)\int_0^{-\beta} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_a(-\gamma) e^{N(\gamma)} d\gamma,\ A_0(\alpha) = C + (C - D)\int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}} \bar{n}_i(\gamma) e^{N(\gamma)} d\gamma,$$
$$N(\alpha) = \int_0^{\alpha} k_{\mathrm{I}} [\bar{n}_a(-\gamma) + \bar{n}_i(\gamma)] d\gamma,\ \beta_0 \le \beta \le 0,\ 0 \le \alpha \le \alpha_0, \tag{49}$$

где $C \neq D$ – произвольные константы ($A_0(0) = C$, $B_0(0) = D$).

Из формулы (4) и граничного условия (48) следует соотношение:

$$B_1'(\beta) = k_{\mathrm{I}} n_a(\beta)(A_0(0) - B_1(\beta)),\ B_1(0) = B_0(0),\ \beta \ge 0,\ n_a(\beta) = n_{a0}(\beta),$$

откуда

$$B_1(\beta) = C + (D - C)e^{-f(\beta)},\ f(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}} n_a(\gamma) d\gamma,\ \beta \ge 0. \tag{50}$$

Используя разбиение полуполосы $\Pi = \Pi_0 \cup T$, $\Pi_0 = \Pi \cap ([0, \alpha_0] \times [0, +\infty))$, $T = \Pi \cap ([0, \alpha_0] \times [\beta_0, 0])$, теперь легко выписать решение смешанной задачи в явном виде, отталкиваясь от формул (4):

$$n_i(\alpha, \beta) = \frac{A_0'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_0(\beta)]},\ n_a(\alpha, \beta) = \frac{B_0'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_0(\beta)]},\ (\alpha, \beta) \in T,$$
$$n_i(\alpha, \beta) = \frac{A_0'(\alpha)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_1(\beta)]},\ n_a(\alpha, \beta) = \frac{B_1'(\beta)}{k_{\mathrm{I}}[A_0(\alpha) - B_1(\beta)]},\ (\alpha, \beta) \in \Pi_0. \tag{51}$$

Подставляя в (51) полученные выражения для $A_0$, $B_0$, $B_1$, получим явные формулы

$$n_i(\alpha,\beta)=n_i^0(\alpha v_a)\frac{e^{N(\alpha)}}{1+\int\limits_0^{\alpha}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma+\int\limits_0^{-\beta}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(-\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma},(\alpha,\beta)\in T,$$
$$n_a(\alpha,\beta)=n_a^0(-\beta v_a)\frac{e^{N(-\beta)}}{1+\int\limits_0^{\alpha}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma+\int\limits_0^{-\beta}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(-\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma},(\alpha,\beta)\in T, \quad (52)$$

$$n_i(\alpha,\beta)=n_i^0(\alpha v_a)e^{N(\alpha)}\left[\int\limits_0^{\alpha}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma+e^{-f(\beta)}\right]^{-1},(\alpha,\beta)\in\Pi_0,$$
$$n_a(\alpha,\beta)=n_{a0}(\beta)e^{-f(\beta)}\left[\int\limits_0^{\alpha}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{N(\gamma)}d\gamma+e^{-f(\beta)}\right]^{-1},(\alpha,\beta)\in\Pi_0, \quad (53)$$

где $N(\alpha)$ и $f(\beta)$ вычисляются по (49) и (50).

Переходя в формулах (52), (53) к переменным $(z,t)$, $\alpha=z/v_a$, $\beta=t-z/v_a$, получим решение смешанной задачи в полуполосе $\varphi^{-1}(\Pi)$ в зависимости от принадлежности точки $(z,t)$ к одному из множеств $T=\varphi^{-1}(T)$ и $\Pi_0=\varphi^{-1}(\Pi_0)$.

Аналогичные построения проводятся и в случае $v_i=0$, $v_a<0$. Тогда проекции $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$ суть $[\alpha_0,0]$ и $[0,+\infty)$, соответственно, где $\alpha_0=L/v_a$ (рис. 10).

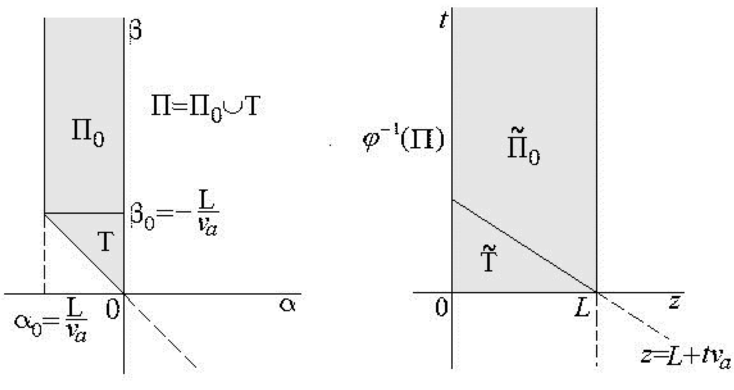



*Рис. 10.* Случай $v_i=0$, $v_a<0$.

В этом случае граничные условия ставятся только для $n_a$, причём на правой границе $z=L$, а условия согласованности имеют вид:

$$n_{a0}(0)=n_a^0(L),\quad n'_{a0}(0)+v_a(n_a^0)'(L)+k_{\mathrm{I}}n_a^0(L)n_i^0(L)=0.$$

Начальные условия в переменных $(\alpha,\beta)$ те же, что и выше, а граничное условие запишется в виде

$$n_a(L/v_a,\beta)=n_{a0}(\beta+L/v_a),\quad \beta\ge\beta_0.$$

Структурные функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ заданы на $[\alpha_0,0]$ и $[0,+\infty)$, соответственно. Обозначим $A_0=A$, $B_0=B\big|_{[0,\beta_0]}$, $B_1=B\big|_{[\beta_0,+\infty)}$. Тогда из формул (4) и начальных условий (47) для функций $A_0$, $B_0$ получается система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой эти функции ищутся в явном виде:

$$B_0(\beta)=D+(C-D)\int_0^{\beta}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_a(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma,\ A_0(\alpha)=C+(D-C)\int_0^{-\alpha}k_{\mathrm{I}}\bar{n}_i(\gamma)e^{-M(\gamma)}d\gamma,$$

$$\bar{n}_a(\gamma)=n_a^0(-\gamma v_a),\ \bar{n}_i(\gamma)=n_i^0(-\gamma v_a),\ 0\le\gamma,\ \beta\le\beta_0,\ \alpha_0\le\alpha\le 0,\tag{54}$$

$$M(\beta)=\int_0^{\beta}k_{\mathrm{I}}(\bar{n}_a(\gamma)+\bar{n}_i(\gamma))d\gamma,\ 0\le\beta\le\beta_0,$$

где $C\ne D$ – произвольные постоянные.
Функция $B_1(\beta)$, $\beta\ge\beta_0$ ищется из линейного дифференциального уравнения

$$B_1'(\beta)=k_{\mathrm{I}}n_{a0}\left(\beta+\frac{L}{v_a}\right)(A_0(\alpha_0)-B_1(\beta)),\ B_1(\beta_0)=B_0(\beta_0),\ \beta\ge\beta_0,$$

которое является следствием формул (4) и граничного условия для $n_a$, откуда несложно получить явное выражение для $B_1(\beta)$:

$$B_1(\beta)=A_0(\alpha_0)+(B_0(\beta_0)-A_0(\alpha_0))e^{-g(\beta)},\ g(\beta)=\int_{\beta_0}^{\beta}k_{\mathrm{I}}n_{a0}\left(\gamma+\frac{L}{v_a}\right)d\gamma,\ \beta\ge\beta_0.\tag{55}$$

Разбивая полуполосу $\Pi$ на две части $\Pi=\Pi_0\cup T$, $\Pi_0=\Pi\cap([\alpha_0,0]\times[\beta_0,+\infty))$, $T=\Pi\cap([\alpha_0,0]\times[0,\beta_0])$, из формул (4) получим выражения (51) для решения смешанной задачи. Подставляя в (51) полученные выражения (54), (55) для функций $A_0$, $B_0$, $A_1$, приходим к явным формулам для решения смешанной задачи в переменных $(\alpha,\beta)$. Подставляя в последние формулы соотношения $\alpha=z/v_a$, $\beta=t-z/v_a$, получим решение смешанной задачи в переменных $(z,t)$.

Случай $v_a = 0$ рассматривается аналогично. При $v_i > 0$ граничные условия для $n_i$ задаются на левой границе $z = 0$, а при $v_i < 0$ – на правой $z = L$. Условия согласованности записываются в виде:

$$v_i > 0 : n_{i0}(0) = n_i^0(0), n_{i0}'(0) + v_i(n_i^0)'(0) - k_{\mathrm{I}} n_i^0(0) n_a^0(0) = 0,$$
$$v_i < 0 : n_{i0}(0) = n_i^0(L), n_{i0}'(0) + v_i(n_i^0)'(L) - k_{\mathrm{I}} n_i^0(L) n_a^0(L) = 0.$$

Граничные условия для $n_a$ отсутствуют. Начальные условия имеют прежний вид, а граничные условия в переменных $(\alpha, \beta)$ запишутся так:

$$v_i > 0 : n_i(0,\beta) = n_{i0}(\beta), \beta \ge 0; v_i < 0 : n_i\left(\frac{L}{v_i}, \beta\right) = n_{i0}\left(\beta + \frac{L}{v_i}\right), \beta \ge \beta_0 = -\frac{L}{v_i}.$$

Геометрия полуполосы $\Pi$ в зависимости от знака $v_i$ изображена на рис. 11.

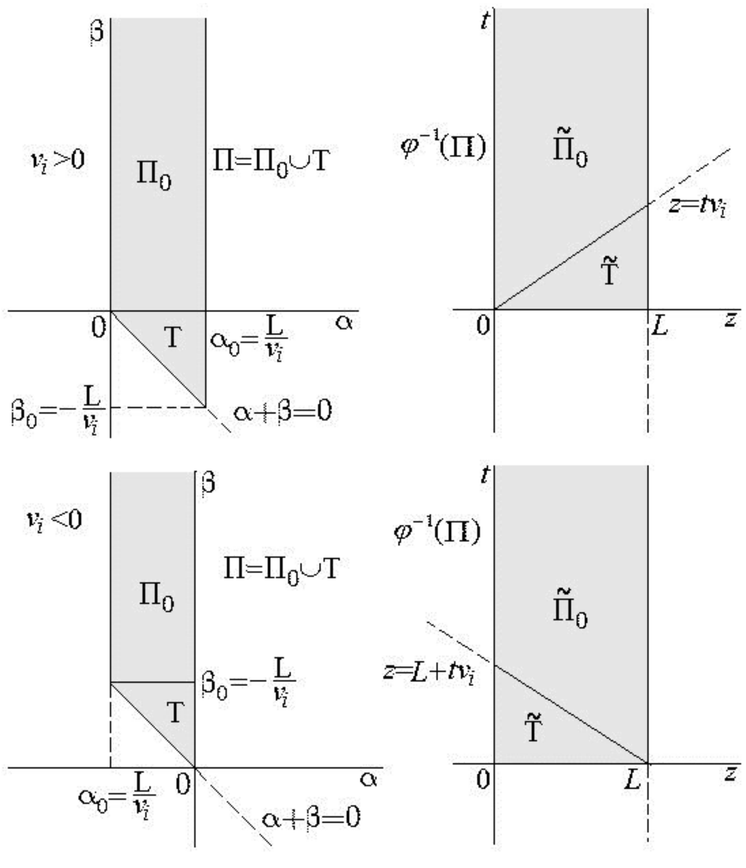



*Рис. 11.* Случай $v_a = 0$, $v_i \ne 0$.

Проекции полуполосы $\Pi$ на оси $\alpha$ и $\beta$ суть $[0, \alpha_0]$ и $[\beta_0, +\infty)$, $\alpha_0 = L / v_i$, $\beta_0 = -\alpha_0$ для $v_i > 0$ и $[\alpha_0, 0]$ и $[0, +\infty)$, $\alpha_0 = L / v_i$ для $v_i < 0$. Поэтому структурные функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ заданы на $[0, \alpha_0]$, $[\beta_0, +\infty)$ для $v_i > 0$ и на $[\alpha_0, 0]$, $[0, +\infty)$ для $v_i < 0$ (см. рис. 11). Обозначим $A_0 = A$, $B_0 = B\big|_{[\beta_0, 0]}$,

$B_1 = B\big|_{[0,+\infty)}$ для $v_i > 0$ и $A_0 = A,\ B_0 = B\big|_{[0,\beta_0]},\ B_1 = B\big|_{[\beta_0,+\infty)}$ для $v_i < 0$. Функции $A_0$, $B_0$ вычисляются по формулам (49) (где надо положить $\alpha_0 = L / v_i$, $\beta_0 = -L / v_i$) в случае $v_i > 0$ и по формулам (54) (где надо положить $\alpha_0 = L / v_i$, $\beta_0 = -L / v_i$) в случае $v_i < 0$. При этом $A_0(0) = C$, $B_0(0) = D$, $C \neq D$.

Функция $B_1(\beta)$ удовлетворяет начальному условию $B_1(\beta_0) = B_0(\beta_0)$ при $v_i < 0$ и $B_1(0) = D$ при $v_i > 0$ и записывается в явном виде:

$$v_i > 0 \quad B_1(\beta) = C + (D - C)e^{-f(\beta)},\ f(\beta) = \int_0^{\beta} k_{\mathrm{I}} n_{i0}(\gamma)d\gamma, \beta \geq 0,$$

$$v_i < 0 \quad B_1(\beta) = A_0(\alpha_0) + (B(\beta_0) - A_0(\alpha_0))e^{-g(\beta)},\ g(\beta) = \int_{\beta_0}^{\beta} k_{\mathrm{I}} n_{i0}\left(\gamma + \frac{L}{v_i}\right)d\gamma, \beta \geq \beta_0,$$

где в последнем случае $A_0$ и $B_0$ вычисляются по формуле (54) с указанными выше изменениями. Наконец, по указанным $A_0$, $B_0$, $B_1$ решение смешанной задачи определяется формулами (51) в переменных $(\alpha, \beta)$. Делая в полученных формулах подстановку $\alpha = t - z / v_i$, $\beta = z / v_i$, приходим к решению смешанной задачи в переменных $(z,t)$.

В случае $v = v_i = v_a \neq 0$ решение задаётся формулой (8). При $v > 0$ константы $C$ и $D$ в (8) вычисляются по формулам решения задачи (III) в случае совпадающих скоростей. При $v < 0$ формулы для $C$ и $D$ имеют вид

$$C(y) = \begin{cases} n_a^0(z - vt) + n_i^0(z - vt), & 0 \leq t \leq \dfrac{z-L}{v}, \\ n_{a0}\left(t + \dfrac{L-z}{v}\right) + n_{i0}\left(t + \dfrac{L-z}{v}\right), & t \geq \dfrac{z-L}{v}, \end{cases}$$

$$D(y) = \begin{cases} \dfrac{n_i^0(z - vt)}{n_a^0(z - vt)}, & 0 \leq t \leq \dfrac{z-L}{v}, \\ \dfrac{n_{i0}\left(t + \dfrac{L-z}{v}\right)}{n_{a0}\left(t + \dfrac{L-z}{v}\right)} e^{-Ck_{\mathrm{I}}\left(t + \frac{L-z}{v}\right)}, & t \geq \dfrac{z-L}{v}, \end{cases}$$

$$n_i(z,t) = \frac{C(y)D(y)e^{C(y)k_{\mathrm{I}}t}}{1 + D(y)e^{C(y)k_{\mathrm{I}}t}},\ n_a(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)e^{C(y)k_{\mathrm{I}}t}},\ y = \begin{cases} z - vt, & t \leq \dfrac{z-L}{v}, \\ t + \dfrac{L-z}{v}, & t \geq \dfrac{z-L}{v}. \end{cases}$$

## Заключение

В работе рассмотрены основные начально-краевые (смешанные задачи) для нелинейной системы уравнений одномерной ионизации газа в случае постоянных скоростей атомов и ионов и указан общий вид решений этой системы.

Показано, что смешанные задачи для системы уравнений одномерной ионизации допускают интеграцию в виде явных аналитических выражений. Особый интерес представляет смешанная задача для конечного отрезка. В наиболее важном случае, когда скорости атомов и ионов имею разные знаки, аналитическое решение строится посредством рекуррентных формул, каждая из которых определена в треугольнике, принадлежащем некоторой построенной в работе триангуляции области определения неизвестных функций.

Полученные результаты доказывают существование и единственность решения поставленных начально-краевых задач и могут использоваться для построения различных асимптотических формул для полученных решений.

Для исследования ионизационных колебаний представляет значительный интерес обобщение предложенного в работе метода решения смешанной задачи на отрезке на практически важный случай, когда скорость атомов постоянна и положительна, а скорость ионов линейная, имеет положительную производную и обращается в нуль внутри рассматриваемого отрезка.

## Список литературы

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006 – 576 с.
2. Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M. Theory of Oscillations and Conductivity for Hall Thrusters, 32nd Joint Propulsion Conference, AIAA 96-3192, 1996.
3. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) – М.: Наука, 1977, 735 с.
5. Бишаев А.М., Ким В. Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения // ЖТФ. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853-1857.
6. Chapurin O., Smolyakov A.I., Hagelaar G., Raitses Y. On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters. Journal of Applied Physics, 129, 233307 (2021).
7. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 94. 48 с.
8. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Стационарные и осциллирующие решения уравнений ионизации // ЖВМ. 2022. Т. 62. № 7. С. 1158–1179.

9. Fife J., Martínez-Sánchez M., and Szabo J. A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters, 33rd Joint Propulsion Conference, AIAA 97–3052, 1997.
10. Barral S. and Ahedo E. On the Origin of Low Frequency Oscillations in Hall Thrusters. AIP Conf. Proc. 993, 439–442 (2008).
11. Dale E. and Jorns B., Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism, Part I: Theory, 36th International Electric Propulsion Conference, University of Vienna, Austria (2019).
12. Boeuf J. and Garrigues L. Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster. Journal of Applied Physics, 84, 3541–3554 (1998).

# Оглавление