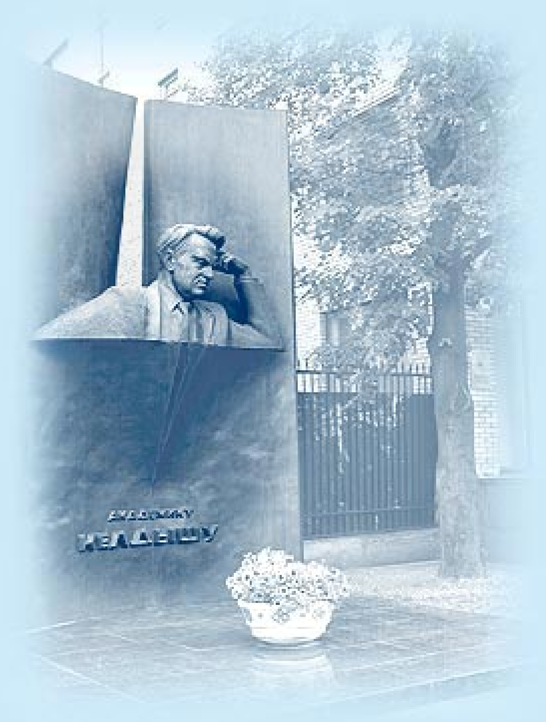
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Марков, О.С. Косарев,
С.В. Паротькин, И.А. Тараканов

Моделирование электропроводности ионизированного газа на основе численного анализа кинетики электронов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моделирование электропроводности ионизированного газа на основе численного анализа кинетики электронов / М.Б. Марков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 42. 32 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-42
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-42

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.Б. Марков, О.С. Косарев, С.В. Паротькин, И.А. Тараканов

Моделирование электропроводности ионизированного газа на основе численного анализа кинетики электронов

Москва – 2023

Марков М.Б., Косарев О.С., Паротькин С.В., Тараканов И.А.

Моделирование электропроводности ионизованного газа на основе численного анализа кинетики электронов

Рассмотрена слабоионизованная среда, образующаяся при ударной ионизации разреженного газа быстрыми электронами. Представлено развитие модели радиационной проводимости, основанной на приближениях пространственной однородности функции распределения медленных вторичных электронов и ее симметрии относительно направления электрического поля. Уравнения для концентрации, дрейфовой скорости и удельной энергии медленных электронов выведены из кинетического уравнения. Численное решение точного кинетического уравнения использовано при построении коэффициентов уравнений для моментов, а также для проверки модели радиационной проводимости.

Ключевые слова: электрон, слабоионизованный газ, ударная ионизация, кинетическое уравнение, электрическое поле, функция распределения, моменты

Markov M.B., Kosarev O.S., Parot'kin S.V., Tarakanov I.A.

Modeling the Electrical Conductivity of an Ionized Gas Based on a Numerical Analysis of the Electron Kinetics

A weakly ionized medium formed during impact ionization of a rarefied gas by fast electrons is considered. The development of a model of radiative conductivity based on approximations of the spatial homogeneity of the distribution function of slow secondary electrons and its symmetry with respect to the direction of the electric field is presented. The equations for the concentration, drift velocity, and specific energy of slow electrons are derived from the kinetic equation. The numerical solution of the full kinetic equation is used to construct the coefficients of the equations for the moments, as well as to test the radiative conductivity model.

Key words: electron, weekly-ionized gas, impact ionization, kinetic equation, electric field, distribution function, moments

Оглавление

Введение

Распространение пучка быстрых электронов в газовой среде сопровождается рядом столкновительных эффектов [1,2]. Одним из них является ударная ионизация молекул газа, в результате которой образуются свободные вторичные электроны. Сечение ударной ионизации обратно пропорционально квадрату энергии, теряемой рассеивающимся электроном [3-5]. Это означает, что наиболее вероятны акты ударной ионизации, при которых быстрый электрон теряет мало энергии. Следовательно, вторичный электрон при образовании имеет в среднем малую энергию и изотропную диаграмму направленности. Вторичные электроны за счет дрейфа по направлению электрического поля формируют ток проводимости, частично компенсирующий сторонний ток пучка.

В газовой среде нормальной плотности вторичные электроны быстро приходят в равновесие с электрическим полем, генерируемым током пучка. Моделирование проводимости при этом может основываться на рассмотрении баланса и подвижности заряженных частиц. Если рассеивающая среда разрежена, то время установления равновесия увеличивается и может оказаться сопоставимым с длительностью пучка быстрых электронов. В такой ситуации требуется рассмотрение кинетического уравнения для функции распределения низкоэнергетических электронов.

В работе [6] авторами рассмотрена математическая модель, основанная на предположениях о пространственной однородности кинетического уравнения, изотропности начального распределения вторичных электронов, совпадении направления их дрейфа и электрического поля. На основе этих приближений построена гидродинамическая модель, включающая уравнения для концентрации, дрейфовой скорости и удельной энергии вторичных электронов. Коэффициенты и правые части уравнений вычисляются путем усреднений функционалов сечений рассеяния электронов на основе приближенного решения кинетического уравнения вторичных электронов. Модель проверена путем сравнения с прямым моделированием столкновений в рамках решения полного кинетического уравнения статистическим методом частиц [7].

Данная работа продолжает исследование вторичной ионизации разреженного газа в направлении уточнения математической модели. Результаты численного решения кинетического уравнения в полной постановке используются не только для проверки приближенной модели, но и непосредственно при построении уравнений для моментов функции распределения.

Цель разработки модели обусловлена недопустимым объемом вычислений, требуемым для применения полной кинетической модели [7] в практических задачах.

1 Кинетическое уравнение

Функция распределения низкоэнергетических электронов $f \equiv f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ определяет концентрацию электронов в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{r}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{p}}$ координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\mathbf{p}$. Для функции распределения $f \equiv f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ считается справедливым следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{v}f) - e\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big[\big(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{H}]\big) f\Big] + \sigma_t v f = Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f(\mathbf{p}'), \quad (1)$$

где t – лабораторное время, e – заряд электрона, $\mathbf{v}$ – скорость электрона, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{H} = \mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ – напряженности электрического и магнитного полей. Заданная функция $Q \equiv Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ в фазовом пространстве описывает генерацию электронов непрерывного спектра, то есть естественную ионизацию. Рассматриваются три типа столкновений электронов с нейтральными молекулами и ионами: упругое рассеяние, возбуждение молекул и ударная ионизация. Эти процессы описываются линейным интегралом столкновений $\sigma_t v f - \int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f(\mathbf{p}')$, где $\sigma_t(p)$ – полное макроскопическое сечение поглощения (рассеяния) электронов, $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ – сумма всех дифференциальных макроскопических сечений рассеяния электронов. Символы $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ обозначают импульс электрона до и после столкновения соответственно.

Интеграл столкновений уравнения (1) можно представить в виде суммы:

$$\int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f(\mathbf{p}') - \sigma_t v f = I^{el} + I^{unl} + I^{ion}. \quad (2)$$

Интеграл упругих столкновений $I^{el}(f)$ запишем в виде [9]:

$$I^{el}(f) = \iint d\mathbf{v}_1 d\Omega \sigma^{el}\left(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \vartheta\right)|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|\left[f(\mathbf{v}) f_m(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}') f_m(\mathbf{v}'_1)\right], \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_1$ – скорость молекулы, с которой сталкивается электрон, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}'_1$ – скорости электрона и молекулы до столкновения, f_m – максвелловская функция распределения молекул по скоростям. Интегрирование проводится по скоростям молекул и по углам рассеяния $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, где ϑ – угол между векторами $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$. Скорости электрона и молекулы до столкновения $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}'_1$ определяются, при данном угле рассеяния ϑ, через $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ с помощью законов сохранения импульса и энергии.

Скорости электронов, при которых возможны столкновения с возбуждением и ионизация, существенно превосходят скорости молекул газа.

Поэтому такие столкновения можно рассматривать как рассеяние на неподвижных центрах, а интегралы неупругих и ионизационных столкновений будут иметь вид:

$$I^{unl,ion}(f)=\sum_i\left[\int d\mathbf{v}'N\sigma_i^{unl,ion}(v',v,\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})v'f(v',\mathbf{\Omega}')-N\sigma_i^{unl,ion}(v)vf(v,\mathbf{\Omega})\right], \quad (4)$$

где i – номер возбуждаемого уровня.

Учитывая, что при возбуждении вращательных, колебательных и электронных уровней молекулы ей передается фиксированное количество энергии, из (4) можно получить [2]

$$\begin{aligned}I^{unl}(f)&=\sum_i\int d\mathbf{\Omega}'\left(\frac{v'}{v}\right)^2\left|\frac{\partial v'}{\partial v}\right|N\sigma_i^{unl}(v',\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})v'f(v',\mathbf{\Omega}')-N\sigma_i^{unl}(v)vf(v,\mathbf{\Omega})=\\&=\left(\frac{v'^2}{v}\right)\int d\mathbf{\Omega}'N\sum_i\sigma_i^{unl}(v',\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})f(v',\mathbf{\Omega}')-N\sum_i\sigma_i^{unl}(v)vf(v,\mathbf{\Omega}),\end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{\Omega}'$ и $v'=\sqrt{v+2b_i/m}$ – направление и величина скорости электрона до столкновения, b_i – энергия возбуждения i-го энергетического уровня.

Источник вторичных электронов имеет вид:

$$Q(t,\mathbf{v})=\sum_i\int\limits_{\varepsilon'>2\varepsilon+\Delta\varepsilon} d\mathbf{v}'N\sigma_i^{ion}(v',v,\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})v'q(v',\mathbf{\Omega}'), \quad (6)$$

где q – функция распределения быстрых электронов. Пределы интегрирования получаются из условия, что электрон со скоростью v – медленный, и значит, его энергия должна быть меньше энергии второго из образовавшихся электронов, то есть $\varepsilon<\varepsilon'-\Delta\varepsilon-\varepsilon$.

Суммирование ведется по всем уровням возбуждения или ионизации молекул.

В используемых далее скоростных переменных кинетическое уравнение для функции распределения $f\equiv f(t,\boldsymbol{r},\mathbf{v})$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}(\mathbf{v}f)-\frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left[\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right)f\right]=I^{el}+I^{unl}+I^{ion}+Q.$$

2 Приближения модели

Пусть характерный пространственный масштаб изменения плотности и температуры газа существенно превосходит пространственный масштаб неоднородности источника. Тогда функция распределения существенно меняется только на длине порядка $\min\{cT, r_d\}$, где T – характерное время изменения функции распределения первичных электронов, r_d – их дебаевский радиус.

Средняя скорость $v_{ср}$ первого поколения вторичных электронов для первичных электронов с энергией порядка 1.4 МэВ, составляет $4\cdot10^8$ см/с $<< c$. Деградация энергии вторичных электронов снижает среднюю скорость до $6\cdot10^7$ см/с. Отсюда следуют оценки:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}f) \approx v_{ср}\frac{f}{cT} \approx \frac{v_{ср}}{c}\frac{\partial f}{\partial t} << \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}f) \approx v_{ср}\frac{f}{r_d} = \frac{v_{ср}\tau_{пл}}{r_d}\frac{f}{\tau_{пл}} \approx \frac{v_{ср}}{v}\frac{\partial f}{\partial t} << \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{8}$$

где v – скорость быстрых электронов, $\tau_{пл} = r_d / v$ – период плазменных колебаний.

На основании этой оценки слагаемым с пространственными производными в (1) пренебрегается. Отметим, что в ограниченной области оценки для дивергенции будут такими же, так как размер области не входит в уравнения (7-8). Это справедливо, если пространственный масштаб изменения плотности и температуры газа существенно превосходит пространственный масштаб неоднородности источника.

Смещение вторичного электрона за характерное время мало по сравнению с масштабом пространственной неоднородности источника и с дебаевским радиусом.

Длина пробега вторичных электронов пренебрежимо мала по сравнению с пробегом первичных электронов. Пренебрежем действием магнитного поля на вторичные электроны в силу $v/c \ll 1$. Здесь рассматривается электромагнитное поле, генерируемое быстрыми электронами. Его электрическая и магнитная компоненты сопоставимы. Считается, что внешнее поле отсутствует. Таким образом, физически выделенным направлением в данной задаче можно считать направление электрического поля.

При упругих столкновениях угловое распределение рассеянных электронов близко к равномерному. Поэтому изотропизация скорости происходит за несколько столкновений, то есть существенно быстрее, чем процессы деградации энергии и установление равновесия с электрическим полем. Поэтому будем считать функцию распределения слабо отличной от изотропной из-за влияния электрического поля.

Эти соображения сохраняются для ограниченной области, если ее размер l много больше длины пробега между упругими столкновениями рассеянных электронов первого поколения $l >> 1/\left(pN\sigma^{el}\right)$, где σ^{el} – полное сечение упругого рассеяния, p – давление газа, N – концентрация молекул газа. Тем более это неравенство будет выполняться для рассеянных электронов следующих поколений. Средняя энергия рассеянных электронов первого поколения составляет величину порядка 40 эв. Тогда $N\sigma^{el} = 2.5\cdot 10^{4}$ см$^{-1}$. Условие на размер области принимает вид $l \gg 4\cdot 10^{-5}/p$ см.

Пусть θ – угол между вектором скорости и осью z, направленной по электрическому полю. Тогда решение кинетического уравнения можно разложить в ряд по полиномам Лежандра от переменной $\cos\theta$, сохраняя нулевой и первый члены.

То есть полагаем, что функция распределения имеет вид

$$f\left(v,\cos\theta\right) = f_0\left(v\right) + f_1\left(v\right)\cos\theta . \tag{9}$$

Функции f_0 и f_1 определяют основные макроскопические величины, характеризующие систему вторичных электронов – концентрацию n, поток nu, энергию единицы объема $n\bar{\varepsilon}$:

$$n = 4\pi\int_0^\infty v^2 dv f_0\left(v\right) = 4\pi\int_0^\infty d\varepsilon\, \tilde{f}_0\left(\varepsilon\right), \tag{10}$$

где ε – безразмерная энергий в единицах $\varepsilon_0 = 1.6\cdot 10^{-12}$ эрг.

$$nu = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^2 dv v f_1\left(v\right) = \frac{4\pi}{3} v_0 \int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right),\ v_0 = \sqrt{2\varepsilon_0/m}, \\ v = \sqrt{2\varepsilon\varepsilon_0/m} = \sqrt{2\varepsilon_0/m}\sqrt{\varepsilon} . \tag{11}$$

$$n\bar{\varepsilon} = 4\pi\int_0^\infty v^2 dv \frac{mv^2}{2} f_0\left(v\right) = 4\pi\varepsilon_0\int_0^\infty \varepsilon d\varepsilon\cdot \tilde{f}_0\left(\varepsilon\right). \tag{12}$$

Функция распределения $\tilde{f}_0(\varepsilon)$ со знаком тильды получена из функции распределения в скоростных переменных соответствующей заменой переменных.

Подставив в кинетическое уравнение выражение для $f\left(v,\cos\theta\right)$ и вычислив два первых угловых момента, получим уравнения для f_0 и f_1:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v} v^2 f_1 = I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0 , \tag{13}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion} + Q_1, \tag{14}$$

где $I_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega I,\ I_1 = \frac{3}{4\pi}\int d\Omega \cos\theta I$, $Q_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega Q,\ Q_1 = \frac{3}{4\pi}\int d\Omega \cos\theta Q$.

3 Угловые моменты интегралов столкновений

Рассмотрим угловые моменты интеграла упругих столкновений. Согласно [9], из (13) можно получить:

$$I_0^{el} = N\delta \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sigma^{tr}(v)v^4 f_0 + \sigma^{tr}(v)v^3 \frac{2\varepsilon_g}{3m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right],\ \delta = \frac{2m}{M}, \tag{15}$$

$$I_1^{el} = -N\sigma^{tr}(v)vf_1, \sigma^{tr}(v) = 2\pi\int d(\mathbf{\Omega\Omega'})(1-\mathbf{\Omega\Omega'})\sigma^{el}(v,\mathbf{\Omega\Omega'}), \tag{16}$$

где ε_g – средняя кинетическая энергия молекул газа.

Рассмотрим угловые моменты интеграла неупругих столкновений. Из (5) можно получить нулевой момент:

$$4\pi I_0^{unl} = \int d\Omega I^{unl} =$$

$$= \left(\frac{v'^2}{v}\right)\int d\mathbf{\Omega}' f(v',\mathbf{\Omega}')\int d\Omega \sum_i N\sigma_i^{unl}(v',\mathbf{\Omega'\Omega}) - v\sum_i N\sigma_i^{unl}(v)\int d\mathbf{\Omega} f(v,\mathbf{\Omega}).$$

Раскладывая сечение в ряд по полиномам Лежандра и применяя теорему сложения, получим

$$\int d\Omega \sigma_i^{unl}(v',\mathbf{\Omega'\Omega}) = \sigma_i^{unl}(v'),\ \int d\Omega \cos\theta \sigma_i^{unl}(v',\mathbf{\Omega'\Omega}) = \bar{\mu}\sigma\cos\theta'.$$

Тогда

$$I_0^{unl} = \frac{1}{v}\left[v'^2 f_0(v')\sum_i N\sigma_i^{unl}(v') - v^2 f_0(v)\sum_i N\sigma_i^{unl}(v)\right]. \tag{17}$$

<u>Первый момент</u>

$$I_1^{unl} = \frac{3}{4\pi}\int d\Omega\,\cos\theta I^{unl} =$$

$$= \left(\frac{v'^2}{v}\right)\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}' f\left(v',\mathbf{\Omega}'\right)\int d\Omega\cos\theta\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v',\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}\right) -$$

$$-v\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}\cos\theta f\left(v,\mathbf{\Omega}\right).$$

Раскладывая сечение в ряд по полиномам Лежандра и применяя теорему сложения, получим:

$$I_1^{unl} = \left(\frac{v'^2}{v}\right)\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right)\bar{\mu}_i^{unl}\left(v'\right)\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}'\cos\theta' f\left(v',\mathbf{\Omega}'\right) -$$

$$-v\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}\cos\theta f\left(v,\mathbf{\Omega}\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{v}\left[v'^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right)\bar{\mu}_i^{unl}\left(v'\right)f_1\left(v'\right) - v^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)f_1\left(v\right)\right],$$

где $\bar{\mu}$ – средний косинус угла рассеяния.

Рассмотрим угловые моменты интеграла ионизационных столкновений. Из (4) можно получить нулевой момент

$$I_0^{ion} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\, I^{ion} = \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}' f\left(v',\mathbf{\Omega}'\right)\int d\Omega N\sigma_i^{ion}\left(v',v,\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}\right) -$$

$$-v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega} f\left(v,\mathbf{\Omega}\right) = \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right) f_0\left(v'\right) - v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)f_0\left(v\right). \tag{19}$$

Первый момент равен

$$I_1^{ion} = \frac{3}{4\pi}\int d\Omega\,\cos\theta I^{ion} =$$

$$= \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}' f\left(v',\mathbf{\Omega}'\right)\int d\Omega\cos\theta N\sigma_i^{ion}\left(v',v,\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}\right) -$$

$$-v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)\frac{3}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}\cos\theta f\left(v,\mathbf{\Omega}\right) = \tag{20}$$

$$= \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right)\bar{\mu}_i^{ion}\left(v',v\right) f_1\left(v'\right) - v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)f_1\left(v\right).$$

Вычислим угловые моменты источника вторичных электронов. Из (6) можно получить

$$Q_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega Q = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \sum_i \int\limits_{\varepsilon' > 2\varepsilon + b_i} d\mathbf{v}' N\sigma_i^{ion}\left(v', v, \mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}\right) v' q\left(v', \mathbf{\Omega}'\right) =$$

$$= \sum_i \int\limits_{\varepsilon' > 2\varepsilon + b_i} dv' v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v', v\right) \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}' q\left(v', \mathbf{\Omega}'\right) = \tag{21}$$

$$= \sum_i \int\limits_{\varepsilon' > 2\varepsilon + b_i} dv' v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v', v\right) q_0\left(v'\right),$$

где $q_0\left(v\right) = \int d\mathbf{\Omega} q\left(v, \mathbf{\Omega}\right) \big/ 4\pi$. Считая начальное распределение вторичных электронов изотропным, получим $Q_1 = 0$.

4 Уравнения для моментов

Получим уравнения для концентрации, плотности потока и плотности энергии медленных электронов. Уравнение для концентрации следует из (13):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v} v^2 f_1 = I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0 .$$

Умножаем (13) на $4\pi v^2 dv$ и интегрируем от 0 до ∞ с учетом:

$$I_0^{el} = N\delta \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sigma^{tr}\left(v\right) v^4 f_0 + \sigma^{tr}\left(v\right) v^3 \frac{2\varepsilon_g}{3m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right],$$

$$I_0^{unl} = \frac{1}{v}\left[v'^2 f_0\left(v'\right)\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right) - v^2 f\left(v\right)\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)\right],$$

$$I_0^{ion} = \sum_i \int\limits_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} dv' v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v', v\right) f_0\left(v'\right) - v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right) f_0\left(v\right),$$

$$Q_0 = \sum_i \int\limits_{\varepsilon' > 2\varepsilon + b_i} dv'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v', v\right) q_0\left(v'\right).$$

Интеграл от второго слагаемого в левой части (13) равен нулю. Также интеграл от I_0^{el} равен нулю. Интеграл от нулевого углового момента интеграла неупругих столкновений равен:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2 I_0^{unl} = 4\pi\int_0^\infty dvv\sum_i\left[v'^2 N\sigma_i^{unl}\left(v'\right)f_0\left(v'\right) - N\sigma_i^{unl}\left(v\right)v^2 f_0\left(v\right)\right] =$$

$$= 4\pi\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\varepsilon_0}{mv}v\sum_i\left[v'^2 N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon'\right)\frac{m}{v'\varepsilon_0}\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right) - N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)v^2\frac{m}{v\varepsilon_0}\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)\right] =$$

$$= 4\pi v_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon + b_i}N\sum_i\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon + b_i\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon + b_i\right) -$$

$$-4\pi v_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}N\sum_i\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right) = -4\pi v_0\int_0^{b_i} d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}N\sum_i\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right) = 0.$$

Здесь применена следующая замена переменных:

$$\varepsilon_0\varepsilon \equiv \frac{mv^2}{2},\ v^2 dv f_0\left(v\right) = d\varepsilon\,\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right),\ dv = d\varepsilon\frac{\varepsilon_0}{mv},$$
$$f_0\left(v\right) = \frac{1}{v^2}\frac{d\varepsilon}{dv}\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right) = \frac{m}{v\varepsilon_0}\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right).$$

Интеграл от нулевого углового момента интеграла ионизационного рассеяния равен:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2 I_0^{ion} = 4\pi N\int_0^\infty dvv^2\sum_i\left[\int_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} dv'v'^3\sigma_i^{ion}\left(v',v\right)f_0\left(v'\right) - \sigma_i^{ion}\left(v\right)vf_0\left(v\right)\right] =$$

$$= 4\pi Nv_0\int_0^\infty d\varepsilon\sum_i\int_{\varepsilon + b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon',\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right) - 4\pi Nv_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\sum_i\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right).$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$4\pi Nv_0\int_0^\infty d\varepsilon\sum_i\int_{\varepsilon + b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon',\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right) - 4\pi Nv_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\sum_i\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right) =$$

$$= 4\pi Nv_0\sum_i\left[2\int_{b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon'\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right) - \int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)\right] =$$

$$= 4\pi Nv_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\sum_i\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right).$$

Здесь учтено, что

$$\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)=\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon'-b_i-\varepsilon),$$

$$\int_0^{\varepsilon'-b_i} d\varepsilon\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)=2\int_0^{(\varepsilon'-b_i)/2} d\varepsilon\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)=2\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon').$$

Интеграл от нулевого момента источника равен:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2Q_0=\sum_i 4\pi\int_0^\infty dvv^2\int_{\varepsilon'>2\varepsilon+b_i} dv'v'^3N\sigma_i^{ion}(v',v)q_0(v')=$$

$$=\sum_i 4\pi\int_{\varepsilon'>b_i}^\infty dv'v'^3q_0(v')\int_0^{\frac{\varepsilon'-b_i}{2}} dvv^2N\sigma_i^{ion}(v',v)=\sum_i 4\pi\int_{\varepsilon'>b_i}^\infty dv'v'^3q_0(v')N\sigma_i^{ion}(v'),$$

Для моноэнергетической функции распределения первичных электронов, представляющей собой одно из слагаемых обобщенного решения кинетического уравнения:

$$q(t,\mathbf{v})=h_{ext}(t)\frac{\delta(v-v_{ext})\delta(\varphi-\varphi_{ext})\delta(\mu-\mu_{ext})}{v^2},$$

где $\mathbf{v}_{ext}=\mathbf{v}_{ext}(t)$ – решение уравнения движения первичного электрона в самосогласованном электромагнитном поле. Поскольку

$$q_0(v)=\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{\Omega}q(v,\mathbf{\Omega})=\frac{1}{4\pi}h_{ext}(t)\frac{\delta(v-v_{ext})}{v^2},$$

интеграл от нулевого углового момента источника вторичных электронов будет следующим:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2Q_0=h_{ext}(t)\sum_i v_{ext}N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$

где $\varepsilon_{ext}=mv_{ext}^2/2$.

Тогда уравнение для концентрации получается следующим:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=4\pi Nv_0\int_{b_{\min}}^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\tilde{\sigma}^{ion}(\varepsilon)\,\tilde{f}_0(\varepsilon)+h_{ext}(t)v_{ext}N\tilde{\sigma}^{ion}(\varepsilon_{ext}), \qquad (22)$$

где $b_{\min}$ – минимальная энергия связи, $\tilde{\sigma}^{ion}\left(\varepsilon_{ext}\right)=\sum_i \tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon_{ext}\right)$.

Уравнение для потока nu получим из (14):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}-\frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}=I_1^{el}+I_1^{unl}+I_1^{ion}+Q_1,$$

умножая его на $\frac{4\pi}{3}dvv^3$, интегрируя от 0 до ∞ и учитывая

$$I_1^{el}=-N\sigma^{tr}\left(v\right)vf_1,\ Q_1=0,$$

$$I_1^{unl}=\frac{1}{v}\left[v'^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right)\bar{\mu}_i^{unl}\left(v'\right)f_1\left(v'\right)-v^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)f_1\left(v\right)\right],$$

$$I_1^{ion}=\sum_i\int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i}dv'v'^3N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right)\bar{\mu}_i^{ion}\left(v',v\right)f_1\left(v'\right)-v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)f_1\left(v\right),$$

$$\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty dvv^3\frac{\partial f_1}{\partial t}=\frac{dnu}{dt},\ -\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty dvv^3\frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}=\frac{eEn}{m}.$$

Интеграл от первого углового момента интеграла упругих столкновений равен:

$$\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty v^3dvI_1^{el}=-\frac{4\pi}{3}v_0^2\int\limits_0^\infty d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}^{tr}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right).$$

Интеграл от первого углового момента интеграла неупругих столкновений равен:

$$\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty dvv^3I_1^{unl}=$$

$$=\frac{4\pi}{3}v_0^2\int\limits_0^\infty\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon\left[\sqrt{\varepsilon'}\sum_i N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon'\right)\bar{\mu}_i^{unl}\left(\varepsilon'\right)\tilde{f}_1\left(\varepsilon'\right)-\sqrt{\varepsilon}\sum_i N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right)\right]=$$

$$=\frac{4\pi}{3}v_0^2\sum_i\left[\int\limits_{b_i}^\infty\sqrt{\varepsilon\left(\varepsilon-b_i\right)}d\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\bar{\mu}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right)-\int\limits_0^\infty d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\right]=$$

$$=\frac{4\pi}{3}v_0^2\sum_i\int\limits_{b_i}^\infty\varepsilon d\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)\left(\sqrt{1-\frac{b_i}{\varepsilon}}\bar{\mu}_i^{unl}\left(\varepsilon\right)-1\right)\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right),$$

Основной вклад в интеграл дает отрезок интегрирования в области значений ε, не сильно превышающих b_i. Это следует из численного анализа функции распределения вторичных электронов. Анализ показывает, что при больших ε функция $\tilde{f}_1(\varepsilon)$ экспоненциально уменьшается. Этот факт будет более подробно иллюстрироваться ниже, при выборе приближенного выражения для $\tilde{f}_1(\varepsilon)$. При этом $\bar{\mu}_i^{unl}(\varepsilon) << 1$ и первым слагаемым в скобках можно пренебречь.

Тогда

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dv v^3 I_1^{unl} = -\frac{4\pi}{3} v_0^2 \sum_i \int_{b_i}^\infty d\varepsilon \varepsilon N \sigma_i^{unl}(\varepsilon)\, \tilde{f}_1(\varepsilon).$$

Интеграл от первого углового момента интеграла ионизационных столкновений равен:

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dv v^3 I_1^{ion} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty d\varepsilon v \left[\sum_i \int_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} d\varepsilon' v' N \tilde{\sigma}_i^{ion}(v',\varepsilon)\, \bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)\, \tilde{f}_1(\varepsilon') - v \sum_i N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\, \tilde{f}_1(\varepsilon) \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} v_0^2 N \sum_i \left[\int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \int_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} d\varepsilon' \sqrt{\varepsilon'}\, \tilde{\sigma}_i^{ion}(v',\varepsilon)\, \bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)\, \tilde{f}_1(\varepsilon') - \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\, \tilde{f}_1(\varepsilon) \right].$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$\frac{4\pi}{3} v_0^2 \sum_i \left[\int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \int_{\varepsilon' > \varepsilon + b_i} d\varepsilon' \sqrt{\varepsilon'}\, N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)\, \bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)\, f_1(\varepsilon') - \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\, f_1(\varepsilon) \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} v_0^2 \sum_i \left[\int_{b_i}^\infty d\varepsilon' \sqrt{\varepsilon'}\, f_1(\varepsilon') \int_0^{\varepsilon' - b_i} d\varepsilon \varepsilon N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon) \frac{\bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} - \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\, f_1(\varepsilon) \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} v_0^2 \sum_i \left[\int_{b_i}^\infty d\varepsilon' \sqrt{\varepsilon'}\, f_1(\varepsilon') \frac{\bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon^*)}{\sqrt{\varepsilon^*}} (\varepsilon' - b_i)\, \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon') - \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon N \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\, f_1(\varepsilon) \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{3} v_0^2 \sum_i \int_{b_i}^\infty d\varepsilon' \varepsilon' \left(\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon^*}} \left(1 - \frac{b_i}{\varepsilon'}\right) \bar{\mu}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon^*) - 1 \right) \tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon')\, f_1(\varepsilon').$$

где $0 < \varepsilon^* < \varepsilon'$. Здесь использовано следующее свойство ионизационного сечения:

$$\int_0^{\varepsilon'-b_i} d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon'-b_i} d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon'-b_i-\varepsilon) =$$

$$= -\int_{\varepsilon'-b_i}^{0} d\omega(\varepsilon'-b_i-\omega)N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\omega) =$$

$$= (\varepsilon'-b_i)\int_0^{\varepsilon'-b_i} d\omega N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\omega) - \int_0^{\varepsilon'-b_i} d\omega\omega N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\omega) =$$

$$= 2(\varepsilon'-b_i)\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon') - \int_0^{\varepsilon'-b_i} d\omega\omega N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\omega).$$

Отсюда

$$\int_0^{\varepsilon'-b_i} d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon',\varepsilon) = (\varepsilon'-b_i)\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon').$$

Основной вклад в интеграл дает отрезок интегрирования в области значений ε, не сильно превышающих b_i. При этом $\overline{\mu}_i^{unl}(\varepsilon) << 1$ и первым слагаемым в скобках можно пренебречь. Тогда

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty dvv^3 I_1^{ion} = -\frac{4\pi}{3}v_0^2\sum_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon\varepsilon\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon),$$

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^3 dv\left(I_1^{el}+I_1^{unl}+I_1^{ion}\right) = -\frac{4\pi}{3}v_0^2\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\varepsilon N\sigma(\varepsilon)\tilde{f}_1(\varepsilon).$$

где $\sigma(v) = \sigma^{tr}(v) + \sigma^{unl}(v) + \sigma^{ion}(v)$.

Тогда уравнение для потока получается следующим

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -\frac{4\pi}{3}Nv_0^2\int_0^\infty d\varepsilon\cdot\varepsilon\sigma(\varepsilon)\tilde{f}_1(\varepsilon). \quad (23)$$

Уравнение для энергии единицы объема $n\overline{\varepsilon}$ получим из (23),

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}v^2 f_1 = I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0.$$

Умножая его на $4\pi dvv^2\dfrac{mv^2}{2}$, интегрируем от 0 до ∞ с учетом

$$I_0^{el} = N\delta \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sigma^{tr}\left(v\right)v^4 f_0 + \sigma^{tr}\left(v\right)v^3\frac{2\varepsilon_g}{3m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right],$$

здесь $\bar{\varepsilon}$ – безразмерная средняя энергия в единицах ε_0.

Интеграл от нулевого углового момента интеграла упругих столкновений равен:

$$I_0^{unl} = \frac{1}{v}\left[v'^2 f_0\left(v'\right)\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right) - v^2 f\left(v\right)\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)\right],$$

$$I_0^{ion} = \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right) f_0\left(v'\right) - v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right) f_0\left(v\right),$$

$$Q_0 = \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>2\varepsilon+b_i} dv'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right) q_0\left(v'\right),$$

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\frac{\partial f_0}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{dn\bar{\varepsilon}}{dt},\quad -4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial v^2 f_1}{\partial v} = eEnu,$$

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}I_0^{el} = 4\pi\delta\int_0^\infty dv\frac{mv^2}{2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[N\sigma^{tr}\left(v\right)v^4 f_0 + N\sigma^{tr}\left(v\right)v^3\frac{2\varepsilon_g}{3m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right] =$$

$$= -4\pi\delta\left[\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}N\sigma^{tr}\left(v\right)vf_0 + \int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\frac{2\varepsilon_g}{3m}N\sigma^{tr}\left(v\right)\frac{\partial f_0}{\partial v}\right].$$

Здесь учтено, что функция $f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$ на бесконечности и ограничена в нуле.

Вычислим первый интеграл

$$\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}N\sigma^{tr}\left(v\right)vf_0\left(v\right) = \varepsilon_0 v_0\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}N\tilde{\sigma}^{tr}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right).$$

Вычислим второй интеграл

$$\int_0^\infty dvv^2 \frac{mv^2}{2}\frac{2\varepsilon_g}{3m} N\sigma^{tr}(v)\frac{\partial f_0(v)}{\partial v} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{v_0}\frac{2\varepsilon_g}{3m}\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{1/2} N\tilde{\sigma}^{tr}(\varepsilon)\,\tilde{f}_0(\varepsilon) + \frac{2\varepsilon_g}{3} v_0 \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2} N\tilde{\sigma}^{tr}(\varepsilon)\frac{\partial \tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon_g}{3} v_0 \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{1/2} N\tilde{\sigma}^{tr}(\varepsilon)\left[2\varepsilon\frac{\partial \tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} - \tilde{f}_0(\varepsilon)\right].$$

В итоге получим:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2} I_0^{el} = -4\pi\varepsilon_0 v_0 \delta\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2} N\tilde{\sigma}^{tr}(\varepsilon)\left[\tilde{f}_0(\varepsilon) + \frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3}\left(2\frac{\partial\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} - \frac{\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right],$$

где $\tilde{\varepsilon}_g = \varepsilon_g / \varepsilon_0$.

Интеграл от нулевого углового момента интеграла неупругих столкновений равен:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2} I_0^{unl} =$$

$$= 4\pi\int_0^\infty dvv\frac{mv^2}{2} v'^2 f_0(v')\sum_i N\sigma_i^{unl}(v') - 4\pi\int_0^\infty dvv\frac{mv^2}{2} v^2 f(v)\sum_i N\sigma_i^{unl}(v) =$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 v_0\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon\sqrt{\varepsilon'}\,\tilde{f}_0(\varepsilon')\sum_i N\tilde{\sigma}_i^{unl}(\varepsilon') - 4\pi\varepsilon_0 v_0\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\tilde{f}(\varepsilon)\sum_i N\tilde{\sigma}_i^{unl}(\varepsilon) =$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 v_0\sum_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon(\varepsilon - b_i)\sqrt{\varepsilon}N\tilde{\sigma}_i^{unl}(\varepsilon)\,\tilde{f}_0(\varepsilon) -$$

$$-4\pi\varepsilon_0 v_0\sum_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\tilde{f}(\varepsilon)N\tilde{\sigma}_i^{unl}(\varepsilon) = -4\pi\varepsilon_0 v_0\sum_i b_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}N\tilde{\sigma}_i^{unl}(\varepsilon)\,\tilde{f}_0(\varepsilon).$$

Интеграл от нулевого углового момента интеграла ионизационных столкновений равен:

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}I_0^{ion}=$$

$$=4\pi\sum_i\left[\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\int_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i}dv'v'^3N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right)f_0\left(v'\right)-\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}vN\sigma_i^{ion}\left(v\right)f_0\left(v\right)\right]=$$

$$=4\pi\varepsilon_0v_0\sum_i\left[\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon\int_{\varepsilon+b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon',\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right)-\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)\right],$$

Меняем порядок интегрирования

$$4\pi\varepsilon_0v_0\sum_i\left[\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon\int_{\varepsilon+b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon',\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right)-\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)\right]=$$

$$=4\pi\varepsilon_0v_0\sum_i\left[\int_{b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right)\left(\varepsilon'-b_i\right)N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon'\right)-\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon\right)\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)\right]=$$

$$=-4\pi\varepsilon_0v_0\sum_i b_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right)N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon'\right).$$

В результате

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}I_0^{ion}=-4\pi\varepsilon_0v_0\sum_i b_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}\tilde{f}_0\left(\varepsilon'\right)N\tilde{\sigma}_i^{ion}\left(\varepsilon'\right),$$

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\left(I_0^{el}+I_0^{unl}+I_0^{ion}\right)=-4\pi\varepsilon_0v_0\times$$

$$\times\left[\delta\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}N\sigma^{tr}\left(\varepsilon\right)\left[\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)+\frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3}\left(2\frac{\partial\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)}{\partial\varepsilon}-\frac{\tilde{f}_0\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_i b_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}N\sigma_i^{unl}\left(\varepsilon\right)f_0\left(\varepsilon\right)+\sum_i b_i\int_{b_i}^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}N\sigma_i^{ion}\left(\varepsilon\right)f_0\left(\varepsilon\right)\right].$$

Интеграл от Q_0 равен

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}Q_0=\sum_i 4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}\int_{\varepsilon'>2\varepsilon+b_i} dv'v'^3 N\sigma_i^{ion}(v',v)q_0(v')=$$

$$=\sum_i 4\pi\int_{\varepsilon'>b_i}^\infty dv'v'^3 q_0(v')\int_0^{\frac{\varepsilon'-b_i}{2}} dvv^2\frac{mv^2}{2}N\sigma_i^{ion}(v',v).$$

Для моноэнергетической функции распределения первичных электронов интеграл от нулевого углового момента источника вторичных электронов будет следующим:

$$\sum_i 4\pi\int_{\varepsilon'>b_i}^\infty dv'v'^3 q_0(v')\int_0^{\frac{\varepsilon'-b_i}{2}} dvv^2\frac{mv^2}{2}N\sigma_i^{ion}(v',v)=$$

$$=\varepsilon_0 h_{ext}(t)v(\varepsilon_{ext})\sum_i\int_0^{\frac{\varepsilon_{ext}-b_i}{2}} d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon_{ext},\varepsilon),$$

где $\varepsilon_{ext}=mv_{ext}^2/2$.

Окончательно

$$4\pi\int_0^\infty dvv^2\frac{mv^2}{2}Q_0=\varepsilon_0 h_{ext}(t)v(\varepsilon_{ext})\sum_i\int_0^{\frac{\varepsilon_{ext}-b_i}{2}} d\varepsilon\varepsilon N\tilde{\sigma}_i^{ion}(\varepsilon_{ext},\varepsilon).$$

Тогда уравнение для энергии получается следующим:

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{eEnu}{\varepsilon_0}=-v_0 4\pi\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\times$$

$$\times\left[\delta N\sigma^{tr}(\varepsilon)\left(\tilde{f}_0(\varepsilon)+\frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3}\left(2\frac{\partial\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right)+\sum_i\frac{b_i}{\varepsilon}N\sigma_i(\varepsilon)\tilde{f}_0(\varepsilon)\right]+ \qquad (24)$$

$$+h_{ext}(t)v_{ext}\sum_i N\int_0^{(\varepsilon_{ext}-b_i)/2} d\varepsilon\varepsilon\sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext},\varepsilon).$$

5 Усреднение сечений

Уравнения (22-24)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 4\pi N v_0 \int_{b_{\min}}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma^{ion}(\varepsilon) \tilde{f}_0(\varepsilon) + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -\frac{4\pi}{3} N v_0^2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon \sigma(\varepsilon) \tilde{f}_1(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{eEnu}{\varepsilon_0} = -v_0 4\pi \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \times$$

$$\times \left[\delta N \sigma^{tr}(\varepsilon) \left(\tilde{f}_0(\varepsilon) + \frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3} \left(2 \frac{\partial \tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon} N \sigma_i(\varepsilon) \tilde{f}_0(\varepsilon) \right] +$$

$$+ h_{ext}(t) v_{ext} \sum_i N \int_0^{(\varepsilon_{ext} - b_i)/2} d\varepsilon \varepsilon \sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext}, \varepsilon)$$

не замкнуты относительно концентрации, плотности потока и удельной энергии электронов, так как в их правые части входят неизвестные функции f_0 и f_1. Методом моментов уравнения замыкаются следующим образом. Вместо точной функции распределения выбирается приближенная. Она зависит от n, u, $\bar{\varepsilon}$ как от параметров. Тогда в (22-24) f_0 и f_1 определяются через n, u, $\bar{\varepsilon}$.

Применим метод моментов не к исходному кинетическому уравнению, а к системе (23-24). В качестве приближения надо подобрать две функции f_0 и f_1, но от одной переменной. Одну из них, f_0, можно подобрать по результатам численного решения исходного кинетического уравнения. Подбирается наиболее подходящая аналитическая формула. В результате численных экспериментов оказалось, что наилучшие свойства приближения имеет функция:

$$f_0 = n \frac{1}{4\pi} \frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}^2} \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right).$$

Функцию распределения f_1 получим из следующих соображений. Рассмотрим уравнение (24):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion},$$

$$I_1^{el} = -N\sigma^{tr}\left(v\right)vf_1,$$

$$I_1^{unl} = \frac{1}{v}\left[v'^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v'\right)\overline{\mu}_i^{unl}\left(v'\right)f_1\left(v'\right) - v^2\sum_i N\sigma_i^{unl}\left(v\right)f_1\left(v\right)\right],$$

$$I_1^{ion} = \sum_i \int\limits_{\varepsilon'>\varepsilon+b_i} dv'v'^3 N\sigma_i^{ion}\left(v',v\right)\overline{\mu}_i^{ion}\left(v',v\right) f_1\left(v'\right) - v\sum_i N\sigma_i^{ion}\left(v\right)f_1\left(v\right).$$

Тогда (24) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + N\sigma\left(v\right)vf = \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v},$$

где $\sigma\left(v\right) = \sigma^{tr}\left(v\right) + \sum_i \sigma_i^{unl}\left(v\right) + \sum_i \sigma_i^{ion}\left(v\right)$ или

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{f_1}{\tau} = \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}.$$

Характерное время изменения f_0 определяется длительностью импульса Q_0, то есть характерным временем изменения источника быстрых электронов *T*. Значит, производной по времени можно пренебречь, если выполнено условие:

$$\tau = \frac{1}{N\sigma\left(v\right)v} = \frac{1}{pN\sigma\left(v\right)v} << T.$$

При выполнении этого условия f_1 выражается через f_0:

$$f_1 = \tau\frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{1}{pN\sigma\left(v\right)v}\frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v},$$

соответственно

$$\tilde{f}_1\left(\varepsilon\right) = \frac{eE}{p}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{N\tilde{\sigma}\left(\varepsilon\right)}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\tilde{f}_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, функция f_1, так же как и f_0, является экспоненциально убывающей. Будем считать, что приближенная формула для $\tilde{f}_1(\varepsilon)$ имеет такой же вид:

$$\tilde{f}_1(\varepsilon) = C\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\tilde{f}_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Постоянная С определяется из условия

$$nu = \frac{4\pi}{3}v_0\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{f}_1(t,\varepsilon).$$

Так в выражение для f_1 вводятся искомые макроскопические функции n и u.

Определим постоянную С. Предварительно вычислим:

$$\frac{\partial\tilde{f}_0}{\partial\varepsilon} = \frac{n}{4\pi}\frac{4}{\bar{\varepsilon}^2}\left(1-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)$$

и конструкцию

$$-\tilde{f}_0 + 2\varepsilon\frac{\partial\tilde{f}_0}{\partial\varepsilon} = \frac{n}{4\pi}\frac{4}{\bar{\varepsilon}^2}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right).$$

Тогда

$$nu = \frac{2}{3}\frac{nv_0C}{\bar{\varepsilon}^2}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right).$$

Отсюда

$$nu = \frac{2}{3}\frac{nv_0C}{\bar{\varepsilon}^2}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right),$$

$$C = \frac{3}{2}\frac{u}{v_0}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}(\varepsilon)}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)}.$$

Теперь можно подставить выражения для f_0 и f_1 в уравнения (22)-(24):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 4\pi v_0 \int\limits_{b_{\min}}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} N \sigma^{ion}(\varepsilon)\, \tilde{f}_0(\varepsilon) + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = -\frac{4\pi}{3} v_0^2 \int\limits_0^{\infty} d\varepsilon \cdot \varepsilon N \sigma(\varepsilon) \tilde{f}_1(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{eEnu}{\varepsilon_0} = -v_0 4\pi \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \left[\delta N \sigma^{tr}(\varepsilon) \left(\tilde{f}_0(\varepsilon) + \frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3} \left(2 \frac{\partial \tilde{f}_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right) + \sum_i \frac{b_i}{\varepsilon} N \sigma_i(\varepsilon)\, \tilde{f}_0(\varepsilon) \right] +$$

$$+ h_{ext}(t) v_{ext} \sum_i N \int\limits_0^{(\varepsilon_{ext} - b_i)/2} d\varepsilon \varepsilon \sigma_i^{ion}(\varepsilon_{ext}, \varepsilon).$$

Тогда уравнение для концентрации получится следующим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 4\pi v_0 \int\limits_{b_{\min}}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} N \sigma^{ion}(\varepsilon) \frac{n}{4\pi} \frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}^2} \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right) + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S_n(\bar{\varepsilon}) n + h_{ext}(t) v_{ext} N \sigma^{ion}(\varepsilon_{ext}),$$
$$S_n(\bar{\varepsilon}) = \frac{4v_0}{\bar{\varepsilon}^2} \int\limits_{b_{\min}}^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} N \sigma^{ion}(\varepsilon) \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right) \tag{25}$$

Уравнение для плотности потока получится следующим

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = \frac{3}{4} v_0 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\int\limits_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{N \tilde{\sigma}(\varepsilon)} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right) \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)} nu,$$

или

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{eEn}{m} = S_u(\bar{\varepsilon}) nu, \tag{26}$$

$$S_u\left(\bar{\varepsilon}\right)=\frac{3}{4}v_0\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\int\limits_0^\infty d\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{N\tilde{\sigma}\left(\varepsilon\right)}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)}.$$

Уравнение для плотности энергии получится следующим:

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{eEnu}{\varepsilon_0}=$$

$$=-n\frac{4v_0}{\bar{\varepsilon}^2}\int\limits_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\left[\delta N\sigma^{tr}\left(\varepsilon\right)\left(\varepsilon+\frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\right)+\sum_i b_i N\sigma_i\left(\varepsilon\right)\right]+$$

$$+h_{ext}\left(t\right)v_{ext}\sum_i N\int\limits_0^{(\varepsilon_{ext}-b_i)/2}d\varepsilon\varepsilon\sigma_i^{ion}\left(\varepsilon_{ext},\varepsilon\right),$$

или

$$\frac{\partial n\bar{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{eEnu}{\varepsilon_0}=-S_\varepsilon\left(\bar{\varepsilon}\right)n\bar{\varepsilon}+h_{ext}\left(t\right)v_{ext}\sum_i N\int\limits_0^{(\varepsilon_{ext}-b_i)/2}d\varepsilon\varepsilon\sigma_i^{ion}\left(\varepsilon_{ext},\varepsilon\right),$$

$$S_\varepsilon\left(\bar{\varepsilon}\right)= \qquad (27)$$

$$=\frac{4v_0}{\bar{\varepsilon}^3}\int\limits_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^{3/2}\left[\delta N\sigma^{tr}\left(\varepsilon\right)\left(\varepsilon+\frac{\tilde{\varepsilon}_g}{3}\left(1-\frac{4\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)\right)+\sum_i b_i N\sigma_i^{unl,ion}\left(\varepsilon\right)\right]\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right).$$

6 Сравнение с точной моделью

Проведены две серии расчетов.

Первая серия проводилась для давления воздуха 0.01 атм при постоянных значениях электрического поля 0.01, 0.1, 1, 10 СГСЭ. Для каждого случая вычисления концентрации n, плотности потока nu и плотности энергии электронов $n\bar{\varepsilon}$ проводились с помощью полной модели [7] и решения системы уравнений (25-27). Источники медленных электронов считались равными 0. Электрическое поле направлено по оси z.

Приняты следующие начальные условия для полной модели. Начальная концентрация медленных электронов $n=1$. Начальное распределение электронов по скоростям имеет среднее значение скорости по оси z, равное нулю. Начальное распределение электронов по энергиям соответствует рождению медленных электронов при ионизации быстрыми электронами с энергией 1 МэВ.

При решении уравнений (25-27) начальная концентрация медленных электронов n = 1, скорость электронов u = 0, средняя энергия $\bar{\varepsilon}$ равна средней энергии медленных электронов при ионизации быстрыми электронами с

энергией
1 МэВ.

На следующих рисунках представлены графики зависимости концентрации n, скорости u и средней энергии электронов $\overline{\varepsilon}$ от времени. Результаты расчетов в полной модели обозначены индексом "p".

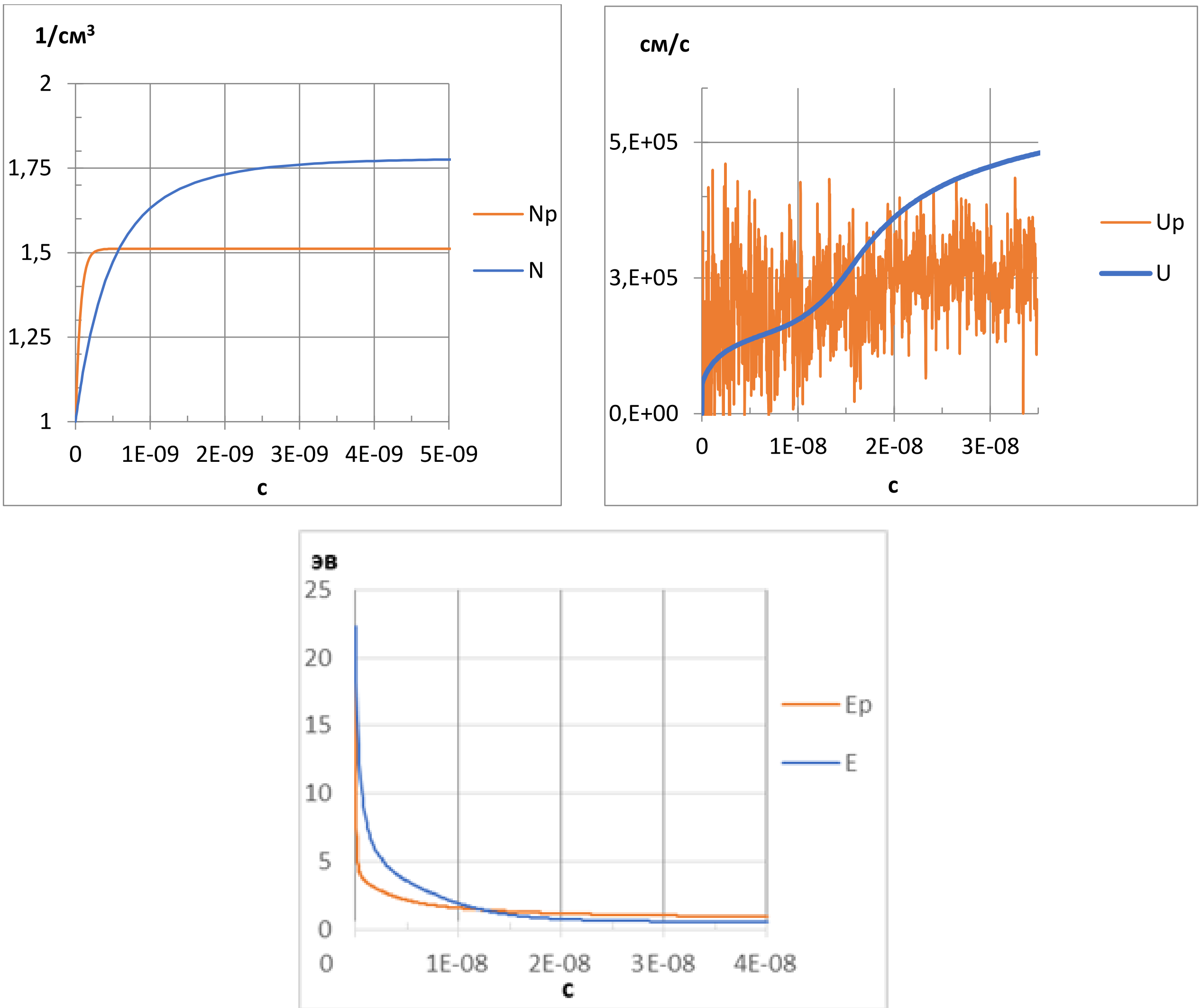


Рис.1. Графики зависимости концентрации n, скорости u и средней энергии электронов $\overline{\varepsilon}$ от времени при E/p=1 СГС/атм

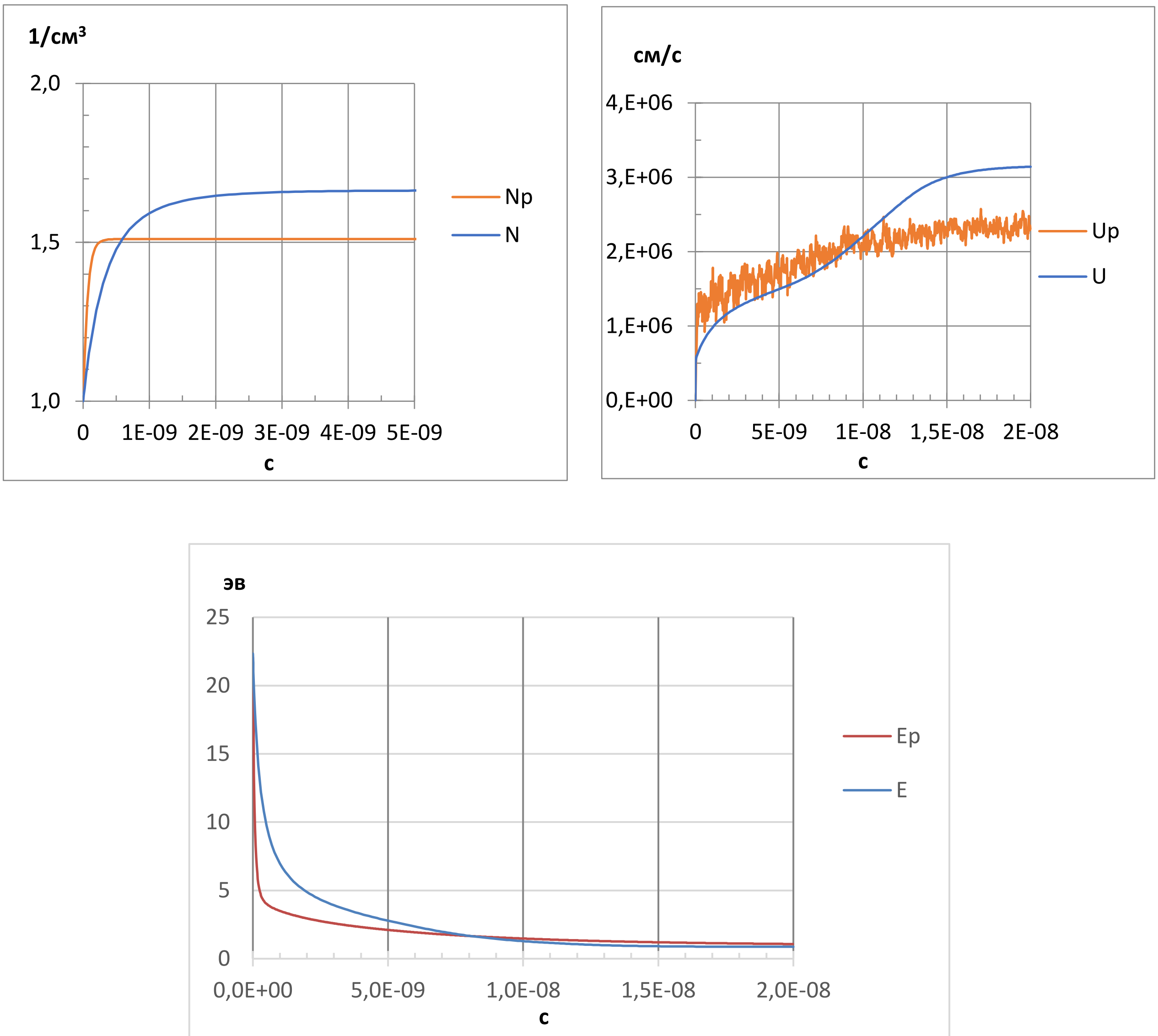
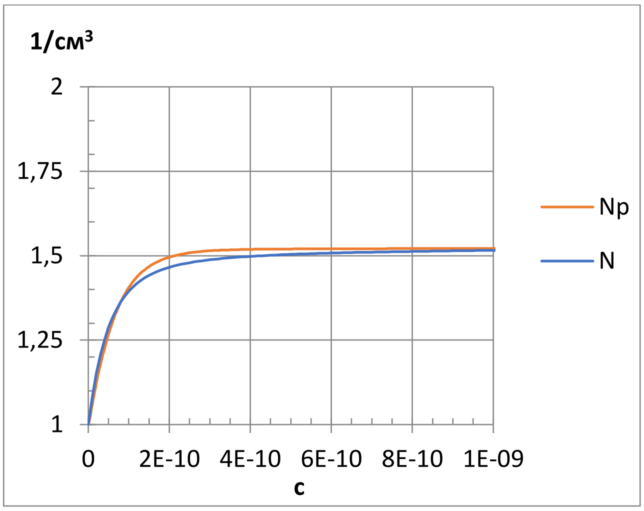
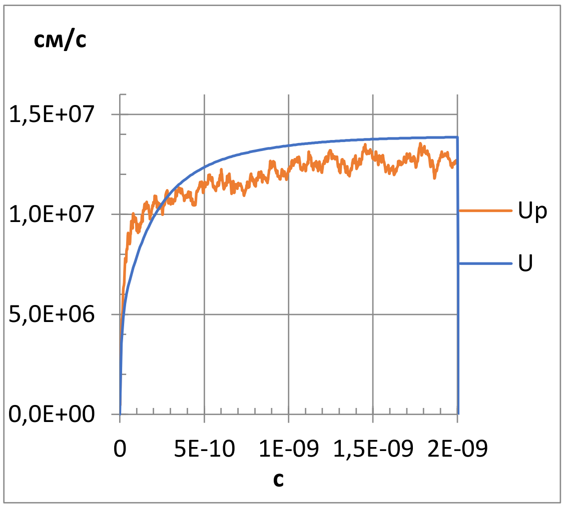


Рис.2. Графики зависимости концентрации n, скорости u и средней энергии электронов $\bar{\varepsilon}$ от времени при E/p=10 СГС/атм





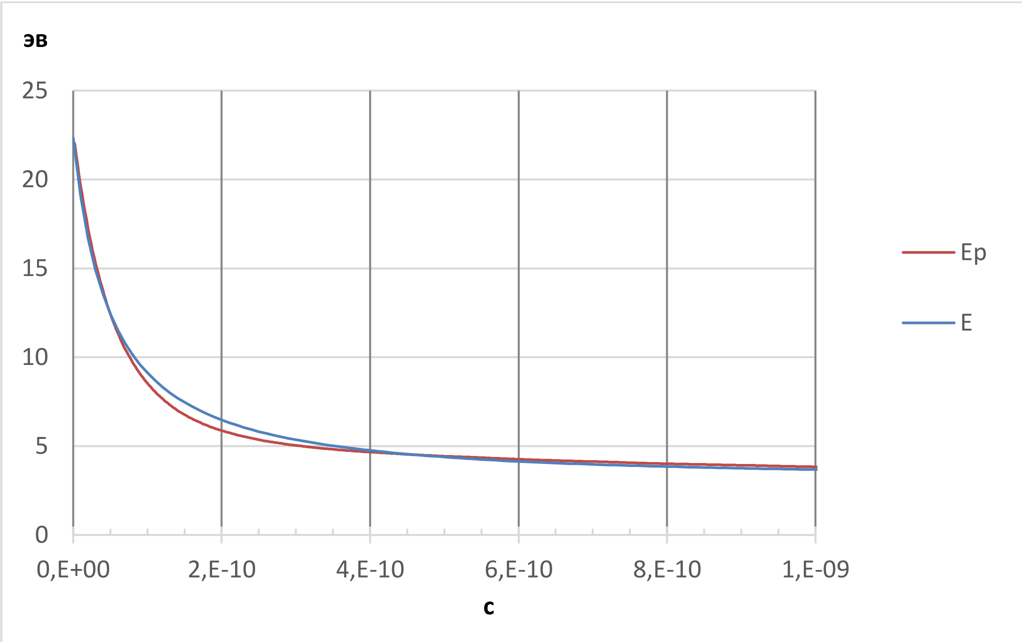


Рис.3. Графики зависимости концентрации n, скорости u и средней энергии электронов $\bar{\varepsilon}$ от времени при E/p=100 СГС/атм

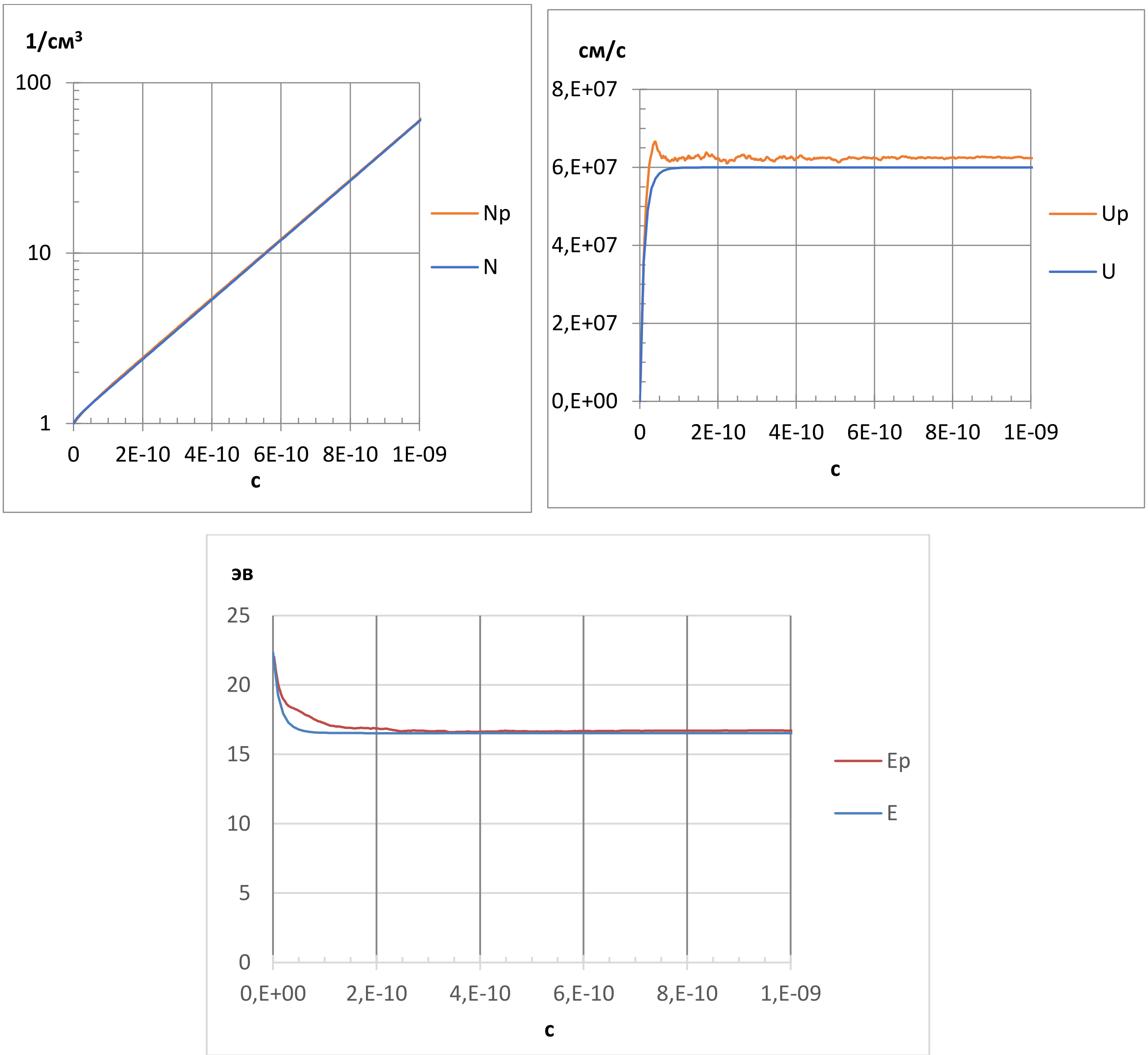


Рис.4. Графики зависимости концентрации n, скорости u и средней энергии электронов $\bar{\varepsilon}$ от времени при *E/p*=1000 СГС/атм

Вторая серия расчетов проводилась для электрического поля, заданного формулой

$$E = E_{\max}\frac{t}{T}\exp\left(-\left(\frac{t}{T}-1\right)\right).$$

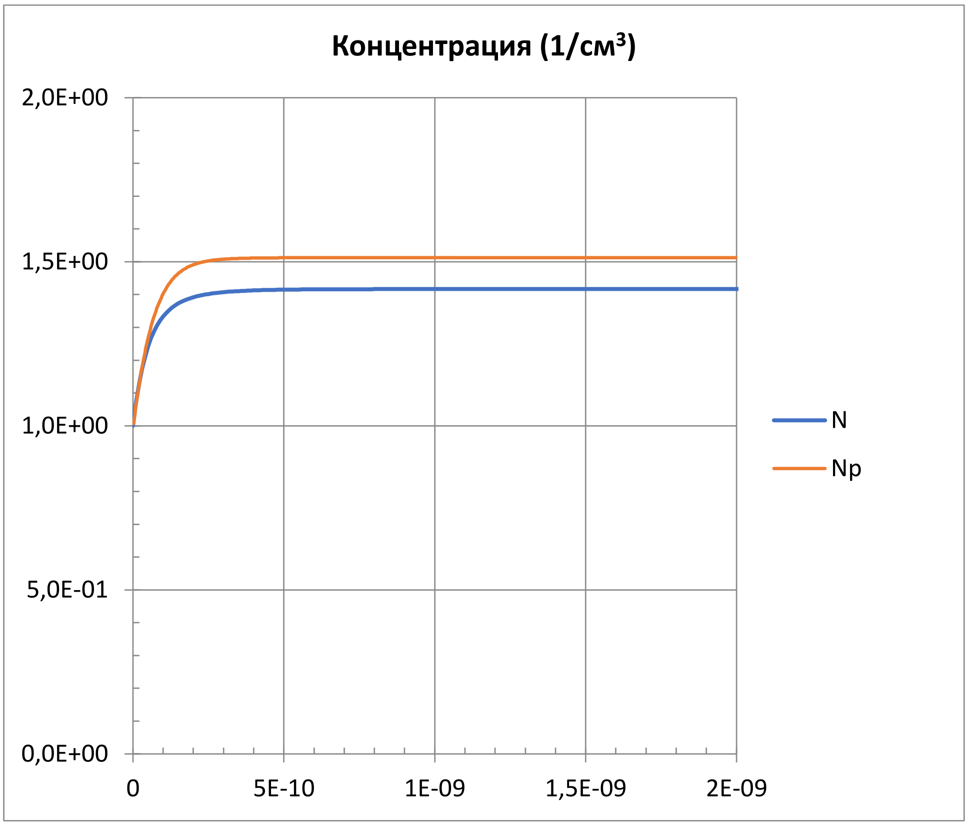
Использовались значения:

Вариант 1: $p = 0.01$ атм, $E_{\max} = 0.1$СГСЭ, $E_{\max}/p = 10$СГСЭ/атм.

Вариант 2: $p = 0.001$ атм, $E_{\max} = 0.1$СГСЭ, $E_{\max}/p = 100$СГСЭ/атм.

Вариант 3: $p = 0.001$ атм, $E_{\max} = 1$СГСЭ, $E_{\max}/p = 1000$СГСЭ/атм.

Расчеты проводились при тех же начальных условиях, что и в предыдущей серии. На следующих рисунках показаны зависимости концентрации электронов и скорости от времени.



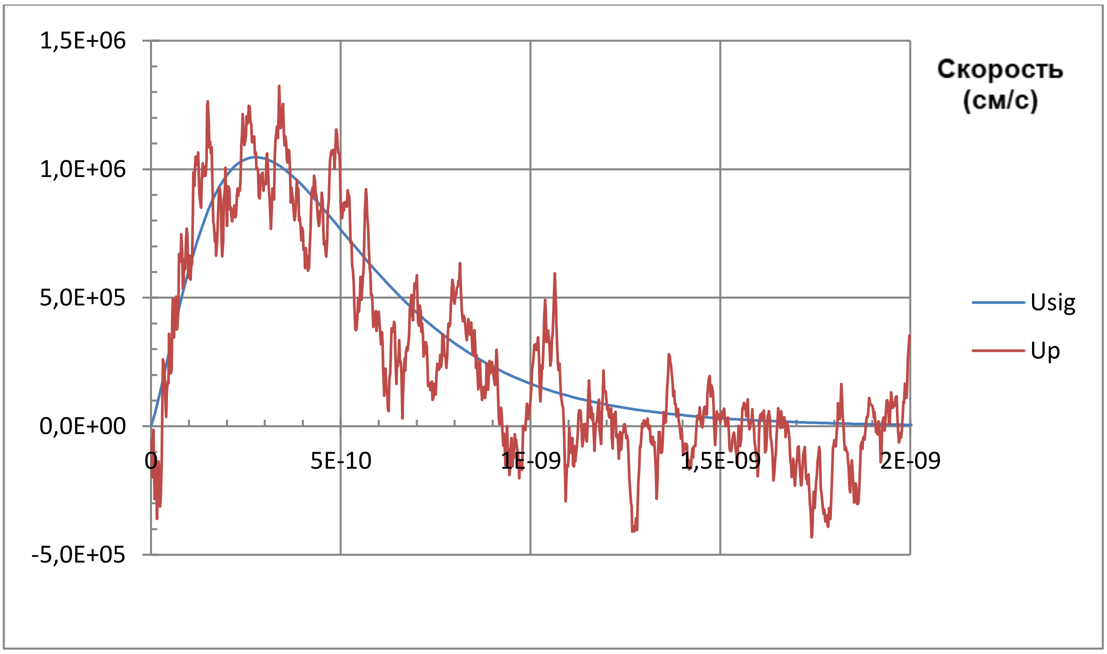
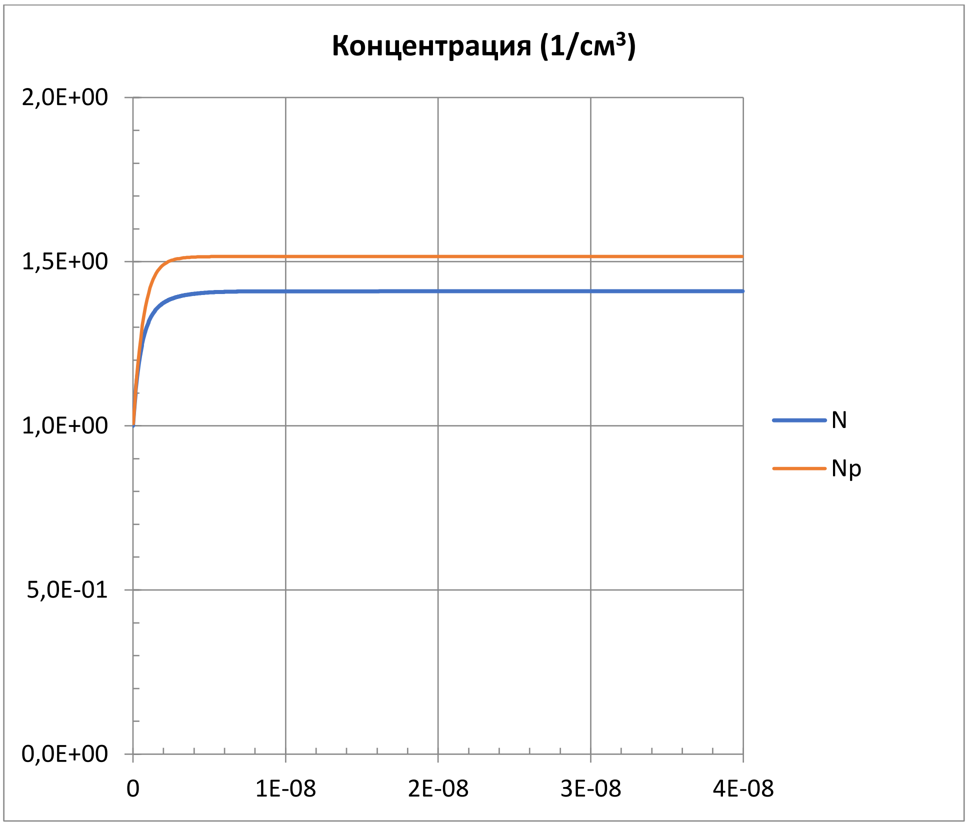


Рис.5. Графики зависимости концентрации n, скорости u от времени, вариант 1.



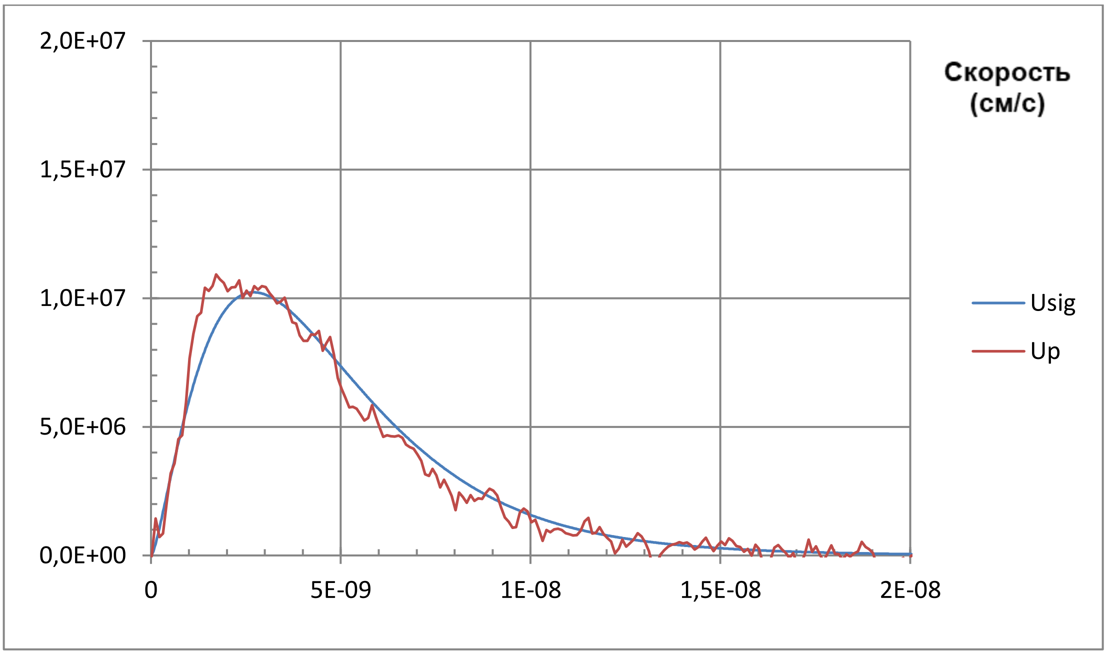
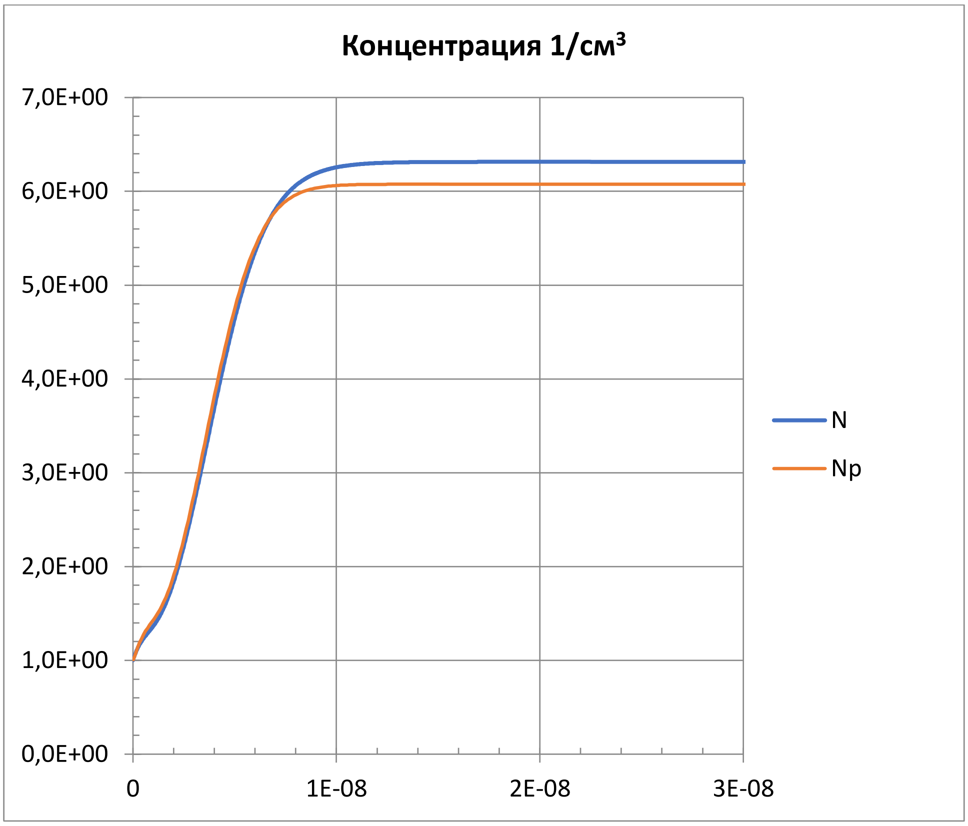


Рис.6. Графики зависимости концентрации n, скорости u от времени, вариант 2.



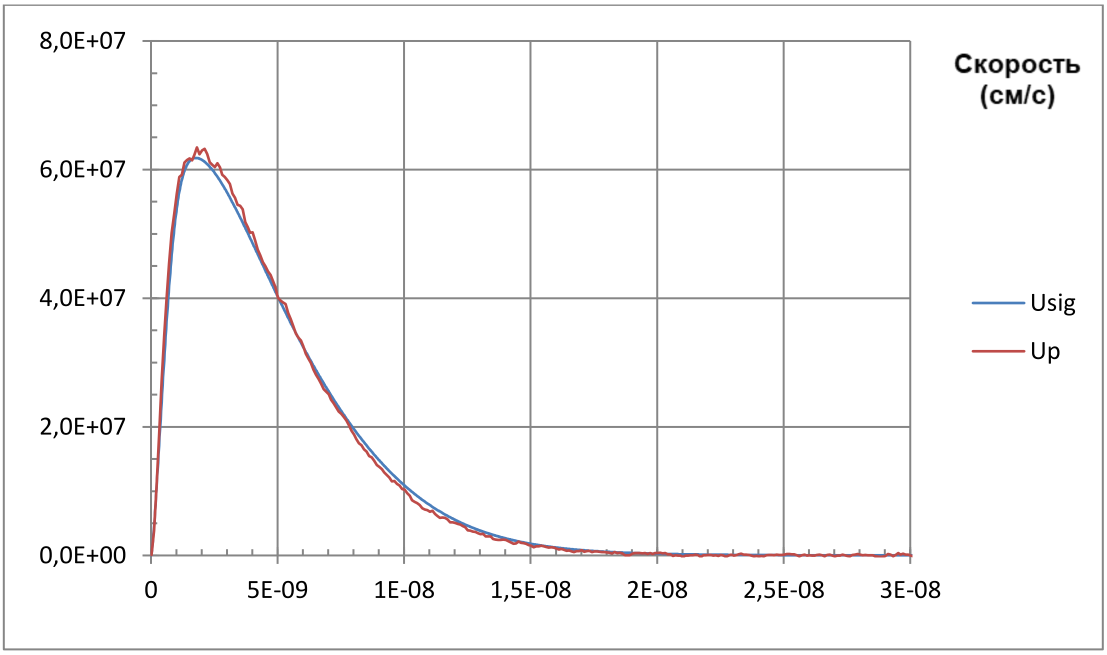


Рис.7. Графики зависимости концентрации n, скорости u от времени, вариант 3.

Рисунки 1-7 подтверждают удовлетворительное совпадение решений уравнений (25-27) и моментов функции распределения электронов, вычисленных статистическим методом частиц в рамках полной модели [7].

Заключение

Применение метода моментов для построения гидродинамических приближений для кинетических уравнений основывается на подборе функции распределения и выявлении ее зависимости от макроскопических параметров. Наличие возможности анализа свойств точной функции распределения существенно повышает эффективность метода моментов. Повышение достигается заменой построения аналитического решения приближенного кинетического уравнения анализом точного численного решения.

Библиографический список

1. Экспериментальная ядерная физика. / Ред. Э. Сегре, т. 1. – М.: Иностранная литература, 1958.
2. Г. Мэсси, Е. Бархоп. Электронные и ионные столкновения. – М.: МИР, 1958.
3. S.W. Massey, E.H.S. Burhop. Electronic and Ionic Impact Phenomena – Oxford: Clarendon Press, 1969.
4. Y.-K., Kim, M.E. Rudd. Theory for Ionization of Molecules by Electrons. – Phys. Rev. 1994, A50, pp. 3954-3967.
5. W. Hwang, Y.-K, Kim, M.E. Rudd. New Model for Electron-Impact Ionization Cross Sections of Atmospheric Molecules. – Chem. Phys. 1996, 104, pp. 2956-2966.
6. Y.-K, Kim, W. Hwang, N. M. Weinberger. Electron-impact ionization cross sections of atmospheric molecules. – J. Chem. Phys. 1997, 106 (3), pp. 1026-1033.
7. А. В. Березин, М. Б. Марков, О. С. Косарев, С. В. Паротькин, И. А. Тараканов. Неравновесная модель ионизации газа быстрыми электронами // Матем. моделирование, 34:1 (2022), 3–15; A. V. Berezin, M. B. Markov, O. S. Kosarev, S. V. Parot'kin, I. A. Tarakanov, “On the simulation of gas ionization by fast electrons”, Math. Models Comput. Simul., 14:4 (2022), 625–632.
8. А. В. Березин, М. Б. Марков, С. В. Паротькин. О методе частиц для электронов в неоднородной рассеивающей среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 61:9 (2021), 1545–1555; A. V. Berezin, M. B. Markov, S. V. Parot'kin, “On the particle method for electrons in an inhomogeneous scattering medium”, Comput. Math. Math. Phys., 61:9 (2021), 1521–1531.
9. В.Л. Гинзбург, А.В. Гуревич. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле // УФН т.LXX, вып.2, с.201, 1960.