



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.А. Гасилов, Р.Д. Москаленко

Стабилизированная сеточно-
характеристическая схема
для системы уравнений
переноса излучения

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гасилов В.А., Москаленко Р.Д. Стабилизированная сеточно-характеристическая схема для системы уравнений переноса излучения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 44. 26 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-44>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-44>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

В.А. Гасилов, Р.Д. Москаленко

**Стабилизированная сеточно-
характеристическая схема
для системы уравнений
переноса излучения**

Москва — 2023

Гасилов В.А., Москаленко Р.Д.

Стабилизированная сеточно-характеристическая схема для расчета переноса излучения

Уравнения переноса излучения в P_1 - и диффузионном приближениях модифицируются за счет множителей, корректирующих скорость переноса энергии излучением. Проведены вычислительные эксперименты, показывающие, что такая коррекция способна уменьшить влияние нефизических эффектов в расчетах лучистого теплообмена в средах с неоднородной оптической толщиной. Теоретически и численно обосновано улучшение условия устойчивости явных разностных схем для скорректированных уравнений моделей P_1 и диффузионной. Показано, что в разностной сетке шаги по времени и пространству допустимо брать в соотношении менее жестком, чем в явной схеме без регуляризации.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, приближение P_1 , диффузионное приближение, сеточно-характеристический метод

Gasilov V.A., Moskalenko R.D.

Stabilized grid-characteristic scheme for the system of radiative transfer equations

Radiation transfer equations in the P_1 - and diffusion approximations are modified by factors that correct the rate of radiation energy transfer. Numerical experiments have been carried out showing that such a correction can reduce the influence of nonphysical effects in calculations of radiant heat transfer in media with a nonuniform optical thickness. The improvement of the stability condition for explicit difference schemes for the corrected equations of the P_1 and diffusion models is substantiated theoretically and numerically. It is shown that in a difference grid it is permissible to take the steps in time and space in a less rigid relation than in an explicit scheme without regularization.

Key words: radiation transfer, P_1 -approximation, diffusion approximation, grid-characteristic method

Введение

Вычислительная сложность решения задач радиационной газодинамики обусловлена необходимостью учитывать, в общем случае, взаимосвязь поля излучения с газодинамическими полями, от которых зависят оптические свойства среды [1,2]. Перенос излучения в высокотемпературных средах зачастую происходит при заметных отклонениях от локального термодинамического равновесия, что приводит к необходимости использования еще более сложных моделей для расчета теплофизических и оптических параметров излучающей среды.

В предельных случаях оптически тонкой либо оптически толстой среды используются упрощенные модели расчета: модель лучистых потерь энергии, модель лучистой теплопроводности, модель диффузии и т.д. Возможность использования той или иной модели зависит от соотношения между длиной свободного пробега квантов, вносящих существенный вклад в теплообмен, и характерным размером расчетной области.

В настоящей работе рассматриваются уравнения переноса излучения в P_1 - и диффузионном приближениях. Известно [3], что оба эти приближения не свободны от нефизических эффектов, связанных со скоростью переноса лучистого потока энергии. В приближении P_1 эта скорость занижена сравнительно со скоростью света, а в диффузионном приближении она может быть бесконечно большой (например, в случае постоянного коэффициента диффузии). Уравнения этих моделей можно модифицировать за счет использования множителей, корректирующих скорость переноса энергии излучения. Проведены численные эксперименты, показывающие, что такая коррекция способна уменьшить влияние нефизических эффектов в расчетах лучистого теплообмена в средах с неоднородной оптической толщиной. Численные эксперименты с тестовыми задачами, имеющими точные решения, показывают хорошую практическую точность расчетов по модифицированным моделям. Теоретически и численно обосновано улучшение условия устойчивости явных схем для уравнений, стабилизированных с помощью коррекции потоков энергии. Показано, что шаг по времени и шаг по пространству допустимо брать в соотношении $\tau \sim h\sqrt{h}$, в то время как нестабилизированная явная схема имеет более жесткое ограничение по устойчивости $\tau \sim h^2$. Предложенный подход позволяет развивать явные численные алгоритмы, удобные для адаптации к различным архитектурам параллельных вычислителей [4].

Первый раздел работы содержит предварительные сведения, второй – основные определения. Модель P_1 и ее варианты рассматриваются в третьем разделе.

Далее обсуждаются граничные условия (раздел 4) и переход от модели приближения P_1 к диффузионному (раздел 5).

Построение сеточно-характеристической разностной схемы приведено в разделе 6. Описание тестовых решений и результаты расчетов представлены в седьмом разделе.

Плотность энергии, поток энергии, тензор давления излучения

Мы будем рассматривать перенос энергии излучением в случае излучающей и поглощающей среды. Соответствующее уравнение обычно записывается для спектральной интенсивности поля излучения [1]

$$I_\nu(r, \Omega, t) dv d\Omega = h\nu c F(\nu, r, \Omega, t) dv d\Omega. \quad (1.1)$$

В (1.1) $F(\nu, r, \Omega, t)$ есть количество квантов света, находящихся в момент времени t в единичном интервале частот $(\nu, \nu+1)$ в единичном элементе объема около точки с радиус-вектором r и движущихся в единичном элементе телесного угла Ω в направлении Ω , c – скорость света. Соответственно, I_ν есть количество энергии, переносимой фотонами в спектральном интервале dv , за 1 сек через площадку в 1 см^2 , помещенную в точке r перпендикулярно направлению движения квантов Ω в элементе телесного угла $d\Omega$ около вектора Ω . Функция $I_\nu(r, \Omega, t)$ носит название *спектральной интенсивности излучения* (или просто *интенсивности*).

Уравнение для функции $I_\nu(r, \Omega, t)$ в случае излучающей и поглощающей среды имеет вид [1]

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial t}(r, \Omega, t) + \Omega^T \nabla I_\nu(r, \Omega, t) = B_\nu(r, \Omega, t) - k_\nu(r, \Omega, t) I_\nu(r, \Omega, t), \quad (1.2)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$, а функции $B_\nu(r, \Omega, t)$, $k_\nu(r, \Omega, t)$ называются соответственно «коэффициент испускания» и «коэффициент поглощения».

Уравнение (1.2) не включает учет рассеяния фотонов. Ситуации, когда это приближение справедливо для газовых и плазменных сред, подробно рассмотрены, например, в монографиях [1,2].

Введем в рассмотрение необходимые для дальнейших выкладок величины
- плотность и энергию излучения:

$$U_\nu(r, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} I_\nu(r, \Omega, t) d\omega, \quad (1.3)$$

а также поток энергии излучения:

$$W_v(r, t) = \int_{\mathbb{S}^2} \Omega I_v(r, \Omega, t) d\omega, \quad (1.4)$$

и тензор давления излучения:

$$P_v(r, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} \Omega \Omega^T I_v(r, \Omega, t) d\omega. \quad (1.5)$$

Путем интегрирования исходного уравнения по полному телесному углу получим уравнение, связывающее $U_v(r, t)$ и $W_v(r, t)$:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_v(r, \Omega, t)}{\partial t} + \Omega^T \nabla I_v(r, \Omega, t) \right] d\omega = \frac{\partial U_v}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} W_{vk}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} W_v = \Phi(r, t),$$

где $\Phi(r, t)$ – интеграл от правой части по сфере \mathbb{S}^2 (его конкретный вид сейчас не важен).

Аналогично, проинтегрировав исходное уравнение после домножения на компоненты вектора Ω ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$), получим уравнение, связывающее $W_v(r, \Omega, t)$ и $P_v(r, \Omega, t)$:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \left[\frac{1}{c} \Omega_i \frac{\partial I_v}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \Omega_i \Omega_k \frac{\partial I_v}{\partial x_k} \right] d\omega = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_i I_v d\omega + \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{k=1}^3 \Omega_i \Omega_k \frac{\partial I_v}{\partial x_k} d\omega =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial W_{v,i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_i \Omega_k I_v d\omega = \frac{1}{c} \frac{\partial W_{v,i}}{\partial t} + c \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{v,ik}}{\partial x_k},$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$. Отсюда следует уравнение для потока энергии излучения:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + c \nabla \mathbf{P}_v = \Psi(r, t), \quad (1.6)$$

где $\Psi(r, t)$ – интеграл правой части по сфере \mathbb{S}^2 после домножения на Ω , $\nabla \mathbf{P}_v$ – это сокращенная запись выражения $(\nabla^T \mathbf{P}_v)^T$.

Приближение P_I

Предположим вначале независимость величин $B_v(r, \Omega, t)$, $k_v(r, \Omega, t)$ от угловой переменной, т.е.:

$$B_v(r, \Omega, t) = B_v(r, t), \quad (2.1)$$

$$k_v(r, \Omega, t) = k_v(r, t). \quad (2.2)$$

Система (1.5)-(1.6) при этом условии имеет вид [2, 4]:

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} W_v = 4\pi B_v - ck_v U_v, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W_v}{\partial t} + c \nabla P_v = -k_v W_v. \quad (2.4)$$

В итоге имеем систему двух дифференциальных уравнений с тремя неизвестными. Перед ее исследованием укажем полезное в дальнейшем соотношение между U_v и P_v [4]

$$\begin{aligned} U_v(r, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} I_v(r, \Omega, t) d\omega = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} |\Omega|^2 I_v(r, \Omega, t) d\omega = \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 \Omega_k^2 I_v(r, \Omega, t) d\omega = \sum_{k=1}^3 P_{v,kk}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В случае пространственной изотропии среды диагональные элементы тензора $P_v(r, t)$ равны между собой:

$$P_{v,11}(r, t) = P_{v,22}(r, t) = P_{v,33}(r, t) = P_v(r, t), \quad (2.5)$$

а его недиагональные элементы равны нулю, т.е.

$$\mathbf{P}_v(\mathbf{r}, t) = P_v(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Таким образом, можно записать

$$U_v(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Tr} \mathbf{P}_v(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Tr} P_v(\mathbf{r}, t) \mathbf{E} = 3P_v(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Подставим эту связь в систему уравнений (2.3), (2.4), тем самым замкнун ее:

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v - ck_v U_v, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = -k_v \mathbf{W}_v. \quad (2.9)$$

Эту же систему можно получить, если в представлении зависимости от компонент вектора $\boldsymbol{\Omega}$ интенсивности поля излучения $I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$ в виде суммы по сферическим гармоникам [4] удерживать только линейную часть

$$I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = f_v(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\Omega}^T g_v(\mathbf{r}, t). \quad (2.10)$$

Функции $f_v(\mathbf{r}, t)$ и $g_v(\mathbf{r}, t)$ приведены, например, в [4]:

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} U_v(\mathbf{r}, t), \\ g_v(\mathbf{r}, t) &= \frac{3}{4\pi} \mathbf{W}_v(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как система (2.8)-(2.9) получена в результате применения линейного приближения $I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$ в разложении по сферическим функциям, она получила название *уравнение приближения P_1* .

Линейное приближение для поля интенсивности упрощает уравнение для потока энергии (2.9), в то время как уравнение (2.8) не меняется. Оно выражает баланс лучистой энергии [2]. Практическое применение системы (2.8)-(2.9) оправдано лишь при небольшом отклонении состояния среды от равновесного. Подробно этот вопрос освещен в [1].

Можно показать [3], что если условие $l_v \ll L$, где L – характерный размер задачи, не выполняется, то уравнения в приближении P_1 соответствуют волновому процессу при скорости, меньшей скорости света.

Пусть $l_v \sim L$. Так как $l_v = \frac{1}{k_v}$, то можно заключить, что k_v мало. Пользуясь этим, пренебрежем в системе (2.8), (2.9) слагаемыми, которые домножаются на k_v .

Имеем

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = 0. \quad (2.11)$$

Первое уравнение продифференцируем по t и домножим его на $\frac{1}{c}$, а на второе подействуем оператором div , получим:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 U_v}{\partial t^2} + \frac{1}{c} div \left(\frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} \right) = 4\pi \frac{\partial B_v}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{c} div \left(\frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} \right) + \frac{c}{3} div(\nabla U_v) = 0. \quad (2.13)$$

Вычтем из первого уравнения второе и домножим результат на c , получим уравнение гиперболического типа для U_v :

$$\frac{\partial^2 U_v}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} div(\nabla U_v) = \frac{\partial^2 U_v}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} \Delta U_v = 4\pi \frac{\partial B_v}{\partial t}, \quad (2.14)$$

из которого видно, что скорость распространения волны равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Граничные условия

Для обеспечения единственности решения системы (2.8)-(2.9) необходимо дополнить ее граничными условиями.

Простейшее и часто используемое на практике граничное условие – отсутствие падающего на область D , занятую излучающей средой, внешнего излучения [2]. Математически это условие записывается следующим образом:

$I_v(s, \mathbf{\Omega}, t) = 0$, $s \in \Gamma_s$, $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{n}) < 0$, (\mathbf{n} – внешняя нормаль к границе ∂D области D):

$$-\Gamma_s = \left\{ \mathbf{\Omega} \in \mathbb{S}^2 \mid (\mathbf{\Omega}, \mathbf{n}(s)) > 0 \right\}.$$

Если же в область решения извне поступает излучение

$$I_v(s, \mathbf{\Omega}, t) = I_v^0(s, \mathbf{\Omega}, t), \quad s \in \partial D, \quad \mathbf{\Omega} \in \Gamma_s, \quad (\mathbf{\Omega}, \mathbf{n}(s)) < 0,$$

граничное условие можно записать, как показано в [2], в виде связи $\mathbf{W}_v(s, t)$ и $U_v(s, t)$:

$$\mathbf{W}_v(s, t) = -\frac{c}{2} U_v(s, t) \mathbf{n}(s), \quad s \in \partial D. \quad (2.15)$$

Диффузионная модель

Условие $l_v \ll L$ означает, что длина свободного пробега кванта много меньше расстояния, на котором физические характеристики среды (например температура) заметно меняются. В условиях локального термодинамического равновесия поле излучения быстро “подстраивается” к состоянию среды. В этом случае часто применяется упрощение модели P_l , связанное с отбрасыванием в уравнении (2.11) производной \mathbf{W}_v по времени. Тогда получим выражение для потока энергии в виде [3,4]:

$$\frac{c}{3} \nabla U_v = -k_v \mathbf{W}_v \Rightarrow \mathbf{W}_v = -\frac{c}{3k_v} \nabla U_v. \quad (3.1)$$

В результате вместо системы (2.10)-(2.11) получаем систему, описывающую лучистый перенос энергии в виде диффузии.

Исключая теперь \mathbf{W}_v из системы (1.3.8), (1.3.9), получим уравнение модели диффузии относительно функции U_v :

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\frac{c}{3k_v} \nabla U_v \right] = 4\pi B_v - k_v U_v. \quad (3.2)$$

Рассматривая уравнение (3.2), без предположения малости l_v , замечаем, что коэффициент диффузии

$$D_v = \frac{c}{3k_v} = \frac{cl_v}{3} \quad (3.3)$$

может быть сколь угодно большим, что влечет неограниченность скорости распространения U_v , т.е. нефизичность модели диффузии для сред малой оптической толщины.

Корректировка диффузионной модели

Физически обоснованным обобщением способа замыкания системы моментных уравнений для сред, где не выполняется условие $l_v \ll L$, является указание линейной связи между $U_v(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{P}_v(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{P}_v(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_E U_v(\mathbf{r}, t), \quad (3.4)$$

где \mathbf{f}_E – так называемый фактор Эддингтона, зависящий от параметров среды [5]. Воспользовавшись (3.4), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v - k_v U_v, \quad (3.5)$$

$$c\nabla[\mathbf{f}_E U_v] = -k_v \mathbf{W}_v. \quad (3.6)$$

Тензор f_E используется в расчетах лучистого теплообмена в случае сред переменной оптической толщины, отсюда и название метода – коррекция потока. На практике применяются различные зависимости f_E от k_v (или от l_v). Показано (см., напр., [5]), что если среда изотропна (или слабо анизотропна), то $\mathbf{f}_E = \frac{1}{3} \mathbf{E}$. Часто применяемая аппроксимация f_E имеет вид [5]:

$$f_E = \frac{\frac{L}{3} + l_v}{L + l_v}, \quad (3.7)$$

где L – характерный размер области расчета.

В данной работе мы используем иной подход к коорректировке диффузионной модели. Устранение нефизически завышенной скорости переноса энергии возможно, если не отбрасывать производную по времени потока энергии, как в уравнении (3.1), но "масштабировать" ее с помощью некоторого параметра α_v :

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \text{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v - ck_v U_v, \quad (3.8)$$

$$\frac{\alpha_v}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = -k_v \mathbf{W}_v. \quad (3.9)$$

Как уже было сказано выше, "нефизичности" возникают при попытке перенести аппроксимацию уравнения переноса излучения при неких свойствах среды на задачи, где у сред свойства отличны. Это значит, что α_v , как и фактор Эддингтона, должен зависеть от свойств среды:

$$\alpha_v = \alpha_v(\mathbf{r}, t). \quad (3.10)$$

При малых k_v значение α_v должно быть близко к $\frac{1}{3}$, поскольку, как было показано выше, если k_v мало, то приближение P_I приводит к уравнению для U_v вида (2.14), из которого следует заниженная скорость волнового процесса:

$c' = \frac{c}{\sqrt{3}}$. В работе [3] предложена модифицированная система уравнений P_I :

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \text{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v - ck_v U_v, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{3c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = -k_v \mathbf{W}_v. \quad (3.12)$$

Если в (3.11), (3.12) пренебречь слагаемыми с k_v (случай оптически тонкой среды), получим систему

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v = 4\pi B_v, \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{3c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = 0. \quad (3.14)$$

Исключая функцию потока из (3.13)-(3.14), приходим к гиперболическому уравнению относительно плотности энергии U_v :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_v}{\partial t^2} + \frac{c^2}{3} \Delta U_v = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_v}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 U_v}{\partial t^2} - c^2 \Delta U_v = 4\pi \frac{\partial B_v}{\partial t}, \quad (3.15)$$

в котором фигурирует уже правильная скорость света.

Методика расчета лучистого теплообмена на основе спектральной диффузионной модели

В качестве базовой мы далее будем использовать систему уравнений (2.12)-(2-13) спектральной модели P_1 либо скорректированную модель уравнений диффузионного приближения (3.8)-(3.9). Запишем уравнения модели P_1 с учетом выражения для лучеиспускательной способности среды в соответствии с законом Кирхгофа [1,2]:

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_v = c k_v (U_{vp} - U_v), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_v = -k_v \mathbf{W}_v. \quad (4.2)$$

Учтем теплообмен излучения с веществом. Пусть $T = T(\mathbf{r}, t)$ – температура среды в момент времени t в точке \mathbf{r} . Запишем уравнение для внутренней энергии среды $E = E(T)$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \int_0^\infty k_v (U_v - U_{vp}) dv. \quad (4.3)$$

Далее мы рассмотрим задачу лучистого теплообмена в одномерном случае.

Пусть излучающая и поглощающая среда занимает вдоль оси Ox отрезок $[0, L]$. Начальный момент времени примем $t_0 = 0$, конечный $t = t^*$. Пусть рассматривается излучение в спектральном интервале $[v_1, v_2]$. Имеем из (4.1)-(4.3):

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \frac{\partial W_v}{\partial x} = c k_v (U_{vp} - U_v), \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W_v}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_v}{\partial x} = -k_v W_v, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \int_0^\infty k_v (U_v - U_{vp}) dv, \quad (4.8)$$

$$x \in [0, L], \quad t \in [0, t^*], \quad v \in [v_1, v_2]. \quad (4.9)$$

Получим инварианты Римана [6] для уравнений спектральной диффузии (4.6)-(4.7). Материал данного раздела в дальнейшем будет использован для построения численной методики решения уравнений данной модели.

В системе (4.6)-(4.7) для сокращения записи опустим индекс v , а правые части обозначим соответственно как $F(U)$ и $G(W)$. Перепишем (4.6)-(4.7) в векторном виде. Введем обозначение

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

С учетом (4.9) имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial W}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{c^2}{3} \frac{\partial U}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c^2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} F(U) \\ G(W) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Из (4.10)-(4.12) получаем систему

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}). \quad (4.13)$$

Вычисляя левые собственные вектора l_1 и l_2 матрицы \mathbf{A}

$$l_i \mathbf{A} = \lambda_i l_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.14)$$

получим:

$$l_1 = \left(\frac{c}{\sqrt{3}}, 1 \right), \quad l_2 = \left(-\frac{c}{\sqrt{3}}, 1 \right). \quad (4.15)$$

По стандартной процедуре [5], умножая (4.13) на l_i , $i \in \{1, 2\}$, перейдем к системе:

$$l_i \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) = l_i \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + l_i \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \frac{\partial (l_i \mathbf{Q})}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial (l_i \mathbf{Q})}{\partial x} = l_i \mathbf{S}(\mathbf{Q}). \quad (4.16)$$

После определения S_i функции U и W могут быть найдены путем решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$l_i \mathbf{Q} = S_i, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.17)$$

Матрица системы (4.17) составлена из собственных векторов невырожденной матрицы \mathbf{A} , т.е. она также не вырождена, из чего следует существование и единственность решения данной системы. Используя (4.15) и (4.16), получим решение (4.17):

$$U = \frac{(S_1 - S_2)\sqrt{3}}{2c}, \quad W = \frac{S_1 + S_2}{2}. \quad (4.18)$$

Сеточно-характеристический метод

Решение (4.18) используем для построения методики численного решения задачи (4.6)–(4.9) сеточно-характеристическим методом [7]. Введем сетки по осям $0x$ и $0t$ соответственно с шагами h и τ .

$$\omega_h = \{ih : i \in \mathbb{N}\}, \quad \omega_\tau = \{j\tau : j \in \mathbb{N}\}.$$

Будем обозначать $u_i^j = u(ih, j\tau)$. Пусть известны все u_i^j для $i \in \mathbb{N}$. Сеточно-характеристический метод заключается в том, чтобы из точки $(ih, (j+1)\tau) \in \omega_h \times \omega_\tau$ «выпускать» характеристику до пересечения с прямой $t = j\tau$. Обозначим точку пересечения $P_i = (P_{ix}, P_{iy})$. Очевидно,

$$u_i^{j+1} = u(ih, (j+1)\tau) = u(P_{ix}, P_{iy}). \quad (5.1)$$

Так как u_i^j и u_{i-1}^j известны, $u(P_{ix}, P_{iy})$ может быть вычислена путем интерполяции функции u на отрезке $[(i-1)h, ih]$, например – линейной интерполяцией:

$$u(x, (j+1)\tau) = u_{i-1}^j + \frac{x}{h}(u_i^j - u_{i-1}^j), \quad x \in [(i-1)h, ih]. \quad (5.2)$$

Для построения сеточно-характеристической аппроксимации системы уравнений спектральной диффузии с регуляризацией (4.6) – (4.9) проделаем некоторые предварительные выкладки.

Пусть $T = T(x, t)$ – температура среды, $T(x, 0) = T^*$. Введем на отрезке $[v', v'']$ неравномерную, вообще говоря, сетку

$$\omega = \{v'_n \in [v', v''] \mid n \in \{0, 1, \dots, N\}, v'_0 = v', v'_N = v''\}.$$

Обозначим

$$v_n = \frac{v'_{n-1} + v'_n}{2}, \quad d_n = v'_n - v'_{n-1}. \quad (5.3)$$

Проинтегрируем уравнения (4.6), (4.7) по dv на интервале $[v'_n, v'_{n+1}]$. Для (4.6) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} \left(\frac{\partial U_v}{\partial t} + \frac{\partial W_v}{\partial x} \right) dv &= \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} \frac{\partial U_v}{\partial t} dv + \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} \frac{\partial W_v}{\partial x} dv = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{v'_{n-1}}^{v'_n} U_v dv \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{v'_{n-1}}^{v'_n} W_v dv \right) = c \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} k_v (U_{vp} - U_v) dv = \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$= c \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu U_{\nu p} d\nu - \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu U_\nu d\nu \right).$$

Обозначим

$$U_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu, \quad W_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} W_\nu d\nu. \quad (5.7)$$

Средние значения величин k_ν и $U_{\nu p}$, как функций частоты излучения на интервале $[\nu'_{n-1}, \nu'_n]$, обозначим как

$$k_n = k(\nu_n), \quad B_n = U_p(\nu_n). \quad (5.8)$$

Правая часть (5.4) с учетом (5.7), (5.8) примет вид:

$$c \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu U_{\nu p} d\nu - \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu U_\nu d\nu \right) = \quad (5.9)$$

$$c \left(k_n B_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} d\nu - k_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu \right) = c k_n (B_n d_n - U_n).$$

Аналогичную операцию осреднения на интервале $[\nu'_{n-1}, \nu'_n]$ проделаем для уравнения (3.9):

$$\frac{1}{c} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \alpha_\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial t} d\nu + \frac{c}{3} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} d\nu = - \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu W_\nu d\nu. \quad (5.10)$$

После интегрирования (5.9) по $d\nu$ на интервале $[\nu'_{n-1}, \nu'_n]$ получим осредненные уравнения (3.8)-(3.9) для плотности и потока излучения

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial W_n}{\partial x} = c k_n (B_n d_n - U_n), \quad (5.11)$$

$$\frac{\alpha_n}{c} \frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_n}{\partial x} = -k_n W_n. \quad (5.12)$$

В (5.12) через α_n обозначено значение корректирующего множителя α на интервале $[v'_{n-1}, v'_n]$.

Уравнение для внутренней энергии среды (4.8) для дальнейшего удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 4AT^3 \frac{\partial T}{\partial t} = c \sum_{n=1}^N \left(\int_{v'_{n-1}}^{v'_n} k_v U_v dv - \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} k_v U_{vp} dv \right) = \\ &= c \sum_{n=1}^N \left(k_n \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} U_v dv - k_n B_n \int_{v'_{n-1}}^{v'_n} dv \right) = c \sum_{n=1}^N k_n (U_n - B_n d_n), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{c}{4AT^3} \sum_{n=1}^N k_n (U_n - B_n d_n). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Уравнения (5.11) - (5.13) составляют, в многогрупповом по спектру приближении, систему из N уравнений для функций T , U_n и W_n , $n \in \{1, \dots, N\}$.

О начальных и краевых условиях к этой системе, описывающей обмен энергией между веществом и излучением, будет сказано далее, при описании тестовых решений.

Найдем инварианты Римана для подсистемы, включающей уравнения (5.11) и (5.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial W_n}{\partial x} + ck_n U_n - ck_n B_n d_n, \\ \frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{c^2}{3\alpha_n} \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Аналогично (4.10), обозначив вектор решения системы (5.14)

$$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} U_n \\ W_n \end{pmatrix},$$

представим ее в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial t} + \mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial x} + \mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n) = 0, \quad (5.15)$$

где

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_n}{\partial t} \\ \frac{\partial W_n}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial t}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial W_n}{\partial x} \\ \frac{c^2}{3\alpha_n} \frac{\partial U_n}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c^2}{3\alpha_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_n}{\partial x} \\ \frac{\partial W_n}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial x},$$

$$\mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n) = \begin{pmatrix} ck_n U_n - ck_n B_n d_n \\ \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n \end{pmatrix}.$$

Левые собственные вектора матрицы \mathbf{A}_n имеют вид

$$\mathbf{l}_n^1 = \left(\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \quad \mathbf{l}_n^2 = \left(-\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \quad (5.16)$$

им соответствуют собственные значения:

$$\lambda_n^1 = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad \lambda_n^2 = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}. \quad (5.17)$$

Инварианты Римана системы (5.15) имеют вид:

$$l_n^1 = \mathbf{l}_n^1 \mathbf{Q}_n = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n, \quad l_n^2 = \mathbf{l}_n^2 \mathbf{Q}_n = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n. \quad (5.18)$$

Умножая (5.15) на \mathbf{l}_n^1 и \mathbf{l}_n^2 , получим систему уравнений для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial l_n^1}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial l_n^1}{\partial x} + \frac{c^2 k_n}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n - \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial l_n^2}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial l_n^2}{\partial x} - \frac{c^2 k_n}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n - \frac{c k_n}{\alpha_n} W_n = - \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}. \quad (5.20)$$

Если l_n^1 и l_n^2 найдены, значения функций U_n и W_n вычисляются по формулам:

$$U_n = \frac{(I_n^1 - I_n^2) \sqrt{3\alpha_n}}{2c}, \quad W_n = \frac{I_n^1 + I_n^2}{2}. \quad (5.21)$$

Перейдем к описанию сеточно-характеристической схемы, аппроксимирующей уравнения спектральной модели диффузии (5.11) - (5.13). Введем сетки по осям $0x$ и $0t$ с постоянными шагами соответственно h и τ :

$$\omega_h = \{ih : i \in \{0, 1, \dots, N_L\}\}, \quad \omega_\tau = \{j\tau : j \in \mathbb{N}\}, \quad (5.22)$$

где $N_L = L/h \in \mathbb{N}$. Для каждого узла из ω_τ введем сеточные функции, аппроксимирующие инварианты Римана на множестве ω_h

$$F_n = \mathcal{P}_h I_n^1 \in H_h[0, L], \quad G_n = \mathcal{P}_h I_n^2 \in H_h[0, L]. \quad (5.23)$$

Сеточные функции $\mathcal{P}_h U_n \in H_h[0, L]$ и $\mathcal{P}_h W_n \in H_h[0, L]$ определяются аналогично (5.23), так как оператор \mathcal{P}_h , очевидно, линейный. Обозначим $F_i^{n,j} = F^{n,j}(ih)$, $G_i^{n,j} = G^{n,j}(ih)$, $U_i^{n,j} = \mathcal{P}_h U^{n,j}(ih)$, $W_i^{n,j} = \mathcal{P}_h W^{n,j}(ih)$, где $ih \in \omega_h$, $n\tau \in \omega_\tau$, $j\tau \in \omega_\tau$. Сеточно-характеристические аппроксимации уравнений (5.19), (5.20) можно записать в виде рекуррентных формул пересчета значений $F_{n,i}^j$, $G_{n,i}^j$ через значения в точках $(j-1)$ -го слоя:

$$F_{n,i}^j = F_{n,i}^{j-1} - \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (F_{n,i}^{j-1} - F_{n,i-1}^{j-1}) - \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_{n,i}^{j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_{n,i}^{j-1} + \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (5.24)$$

$$G_{n,i}^j = G_{n,i}^{j-1} + \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (G_{n,i+1}^{j-1} - G_{n,i}^{j-1}) + \quad (5.25)$$

$$+ \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_{n,i+1}^{j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_{n,i+1}^{j-1} - \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}.$$

Вычисления по формулам (5.24), (5.25) выполняются для $i \in \{2, \dots, N_L\}$ и $i \in \{1, \dots, N_L - 1\}$. Значения $F_{n,0}^j$ и $G_{n,N}^j$ определены краевыми условиями. Значения $F_{n,i}^0$ и $G_{n,i}^0$ для $i \in \{1, \dots, N_L\}$ известны из начальных условий.

Расчет температуры среды проведем по простейшей схеме, аппроксимирующей (5.13):

$$T_{i+1}^j = T_i^{j-1} + \frac{c\tau}{4(T_i^j)^3} \sum_{n=1}^N k_n (T_i^{j-1}) (U_{n,i}^{j-1} - B_n (T_i^{j-1})). \quad (5.26)$$

Таким образом, полный алгоритм решения системы (5.13), (5.14) следующий:

по распределению температуры T_i^{j-1} , $i \in \{0, 1, \dots, N_L\}$ рассчитываются значения функций $U_{n,i}^j$ и $W_{n,i}^j$ для $n \in \{1, \dots, N\}$ по формулам (5.21);

далее вычисляются температура T_i^j по формуле (5.26) и значения сеточных функций (5.23)

$$F_{n,i}^j = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_{n,i}^j + W_{n,i}^j, \quad G_{n,i}^j = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_{n,i}^j + W_{n,i}^j$$

для $i \in \{0, 1, \dots, N_L\}$ и $n \in \{1, \dots, N\}$, которые используются для расчета инвариантов Римана по формулам (5.24), (5.25), и, по формулам (5.21) - значений плотности и потока излучения на следующем шаге по времени.

Задачи для численных экспериментов

Ниже приведены результаты численного решения двух задач с использованием стабилизированной и исходной разностных схем для уравнений диффузионной модели. Остановимся вначале на описании первой тестовой задачи, решение которой приведено в работе [10].

Решение задачи получено при степенной зависимости внутренней энергии среды от температуры:

$$E(T) = AT^4. \quad (6.1)$$

Функции U_{vp} и k_v используются в следующем виде:

$$U_{vp}(T) = \frac{p v^3}{\exp\left(\frac{v}{T}\right) - 1}, \quad k_v(T) = \frac{k v \exp\left(\frac{v}{T}\right)}{4 \left(\exp\left(\frac{v}{T}\right) - 1 \right) T^{m+1}}. \quad (6.2)$$

Начальные и краевые условия для системы диффузионной модели (5.11)-(5.13) для наших расчетов выберем в соответствии с данными [10].

Возможный вариант таких условий имеет вид

$$T(x, 0) = T^*, \quad U_n(x, 0) = \frac{30}{\pi^4} f(v_n, T^*), \quad (6.3)$$

$$W_n(x, 0) = \frac{15c}{\pi^4} f(v_n, T^*), \quad (6.4)$$

$$U_n(0, t) = \frac{30}{\pi^4} g(v_n, T^*), \quad W_n(0, t) = \frac{15c}{\pi^4} g(v_n, T^*), \quad (6.5)$$

$$U_n(L, t) = \frac{30}{\pi^4} r(v_n, T^*, L, t), \quad W_n(L, t) = \frac{15c}{\pi^4} r(v_n, T^*, L, t). \quad (6.6)$$

В формулах (6.3)-(6.6) обозначены

$$f(v_n, T^*) = \frac{v_n^3}{\exp \frac{v_n}{T^*} - 1}, \quad g(v_n, T^*, t) = \frac{v_n^3}{\exp \frac{v_n}{ct + T^*} - 1},$$

$$r(v_n, T^*, L, t) = \frac{v_n^3}{\exp \frac{v_n}{ct - 3L + T^*} - 1}.$$

Согласно [10], решение системы (5.11) – (5.13) отыскивается среди функций вида

$$T(x, t) = \begin{cases} (ax + bct + T^*)^{\frac{1}{m}}, & ax + bct > 0 \\ T^*, & ax + bct \leq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

В соотношениях (6.3) – (6.6) a, b, A, p, q, R, m – константы, часть из которых определяется из начальных и краевых условий и свойств среды, другие можно найти подстановкой решения (6.7) в уравнение (5.12).

Возможен следующий набор констант, определяющий решение типа бегущей волны

$$A = m = b = 1, \quad k = 4, \quad R = 2, \quad a = -3, \quad p = \frac{15}{\pi^4}.$$

Соответствующее этому набору точное решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{для } x \in [0, 1]: T(x, t) &= -3x + 1, 5t + 15, \quad U(x, t) = 2 T^4(x, t), \\ \text{для } x \in [1, 2]: T(x, t) &= -6x + t + 14, \quad U(x, t) = 3 T^4(x, t). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Результаты расчетов

Для проведения расчетов программные единицы длины и времени выбраны так, чтобы скорость света была равна 3. Так как $c \approx 3 \times 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, то программными единицами длины и времени могут быть соответственно 10 см и 10^{-5} нс. Программной единицей частоты будет 10^{14} Гц.

Программная единица температуры принята равной 4.8×10^{-2} К. При этом отношение постоянной Планка к постоянной Больцмана равно 1.

Задача решалась на отрезке длиной $L = 2$. Шаги по пространству и по времени полагались равными соответственно 0,01 и 10^{-3} . Рассмотрим интервал частот $\nu \in [6 \text{ ед. ч.}, 20 \text{ ед. ч.}]$. Разобьем его на 14 равных единичных интервалов (именуемых далее *группами*). Таким образом,

$$\nu_k \in [6.5 \text{ ед. ч.}, 7.5 \text{ ед. ч.}, \dots, 19.5 \text{ ед. ч.}].$$

Расчеты проведены для ряда значений параметра регуляризации α_n , который полагался одинаковым для всех спектральных групп:

$$\alpha_n = 1, \quad \alpha_n = 0.33, \quad \alpha_n = 0.2.$$

Для решения задачи по сеточно-характеристической схеме начальные условия в соответствии с (5.19) - (5.20) и с точным решением (6.8) имеют вид

$$l_n^1(x, 0) = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{v_n^3}{\exp\frac{v_n}{T^*} - 1}, \quad (6.9)$$

$$l_n^2(x, 0) = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{v_n^3}{\exp\frac{v_n}{T^*} - 1}. \quad (6.10)$$

Краевыми условиями для (5.19) - (5.20) в тестовом решении являются:

$$l_n^1(0, t) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{v_n^3}{\exp\frac{v_n}{ct + T^*} - 1}, \quad (6.11)$$

$$l_n^2(L, t) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{v_n^3}{\exp\frac{v_n}{ct - 3L + T^*} - 1}. \quad (6.12)$$

На рисунке 1 приведены профили температуры в момент времени $t = 1.4$ нс. Синий сплошной профиль – точное решение типа тепловой волны, полученное в разделе 2.5.

Оранжевый сплошной – профиль, рассчитанный при $\alpha_n = 1$ (что соответствует прямому численному решению уравнения приближения P_I без регуляризации). На одном и том же моменте времени профиль "отстает" от точного решения, что и означает "неправильную" скорость света, следующую из уравнения приближения P_I при невыполнении условия $l_n \ll L$ где l_n – длина свободного пробега квантов n -й группы (скорость численного решения примерно в 1.28 раз меньше правильной)

Как видно, при $\alpha_n = 0.2$ рассчитанная и точная скорости практически совпадают. Уменьшение параметра α_n привело к увеличению скорости и к уменьшению градиента тепловой волны. Этот эффект ранее был отмечен в работе [10]).

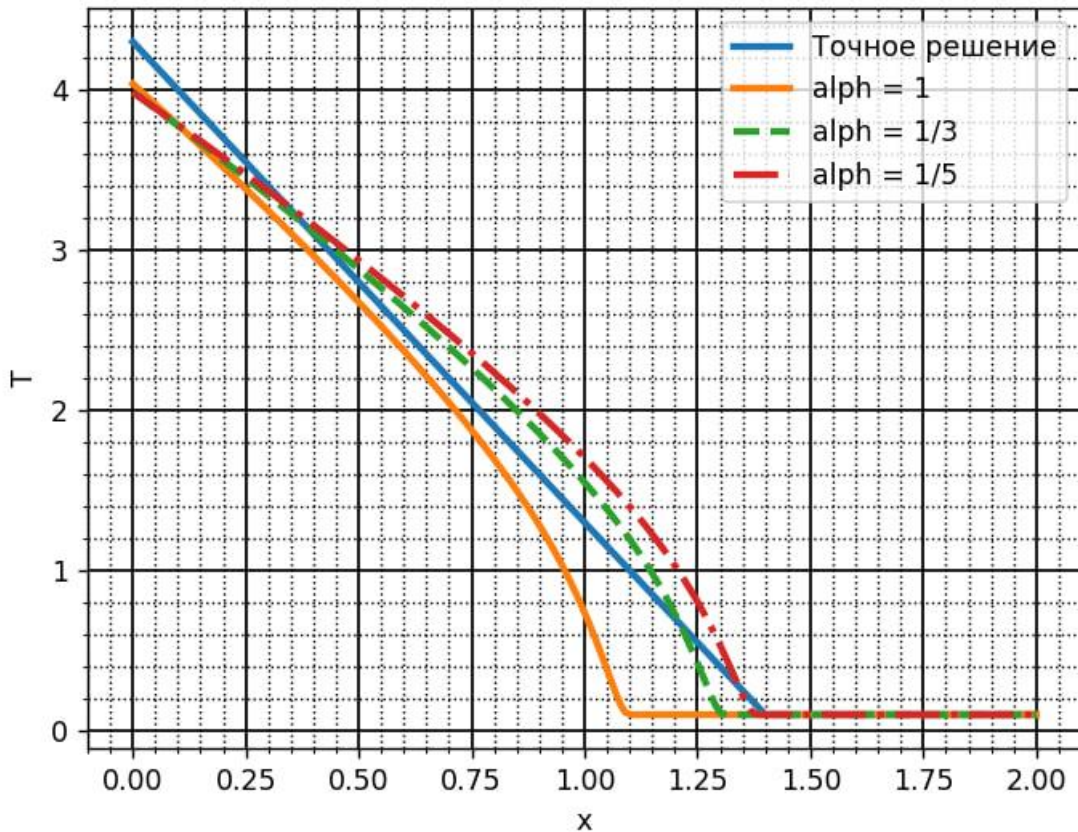


Рис. 1. Распределение температуры для различных значений α_n .

Следующее точное решение начально-краевой задачи, выбранное в качестве теста, взято из работы [11]. Решение получено в одномерной постановке для среды, состоящей из двух областей с различными коэффициентами поглощения. Для описания решения на отрезке $[0, L]$ точку разрыва функции $k(x, t)$ обозначим $x_0 \in [0, L]$. Из физических соображений функции $U(x, t)$ и $W(x, t)$ должны быть непрерывны:

$$U_1(x_0, t) = U_2(x_0, t), \quad W_1(x_0, t) = W_2(x_0, t). \quad (6.13)$$

В рамках данной постановки задачи распределение температуры может иметь разрыв.

Решение задачи получено в [11] путем конструирования решения в форме $\sigma T_\alpha^4 = a_\alpha x + b_\alpha t + d_\alpha$, $U_\alpha = R_\alpha \sigma T_\alpha^4$,

где k_α , A_α , a_α , b_α , d_α , R_α – некоторые константы. Энергия среды и коэффициент поглощения приняты равными

$$\varepsilon_\alpha = k_\alpha (\sigma T_\alpha^4)^{-1} \quad \text{и} \quad E_\alpha = A_\alpha \sigma T_\alpha^4.$$

Решение задачи [11] на отрезке $[0, 2]$ имеет вид

$$T^4(x,t) = \begin{cases} -3x+1.5t+15, & x \in (0,1), \\ -6x+t+14, & x \in (1,2), \end{cases} \quad U(x,t) = \begin{cases} 2T^4(x,t), & x \in (0,1), \\ 3T^4(x,t), & x \in (1,2), \end{cases}$$

оно получено при следующих условиях:

$$U(0,t) = 3t + 30.5, \quad U(2,t) = 3t + 6,$$

$$T^4(x,0) = \begin{cases} -3x+15, & x \in (0,1), \\ -6x+14, & x \in (1,2), \end{cases} \quad U(x,0) = \begin{cases} 2T^4(x,0), & x \in (0,1), \\ 3T^4(x,0), & x \in (1,2), \end{cases}$$

$$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 2T^4(x,t), & x \in (0,1), \\ 4T^4(x,t), & x \in (1,2), \end{cases} \quad E(x,t) = \begin{cases} 4T^4(x,t), & x \in (0,1), \\ 24T^4(x,t), & x \in (1,2). \end{cases}$$

Численные решения для различных значений параметра стабилизации α_n получены при одном и том же шаге по пространству $h = 0.01$. Результаты расчетов приведены на Рис.2. Они проделаны по явным схемам – исходной и стабилизированной. Все результаты практически не отличаются от точного решения. Однако данное решение получается счетом до стационарного состояния. Как видно, для стабилизированной схемы шаг интегрирования по времени может быть существенно увеличен по сравнению со схемой без стабилизации.

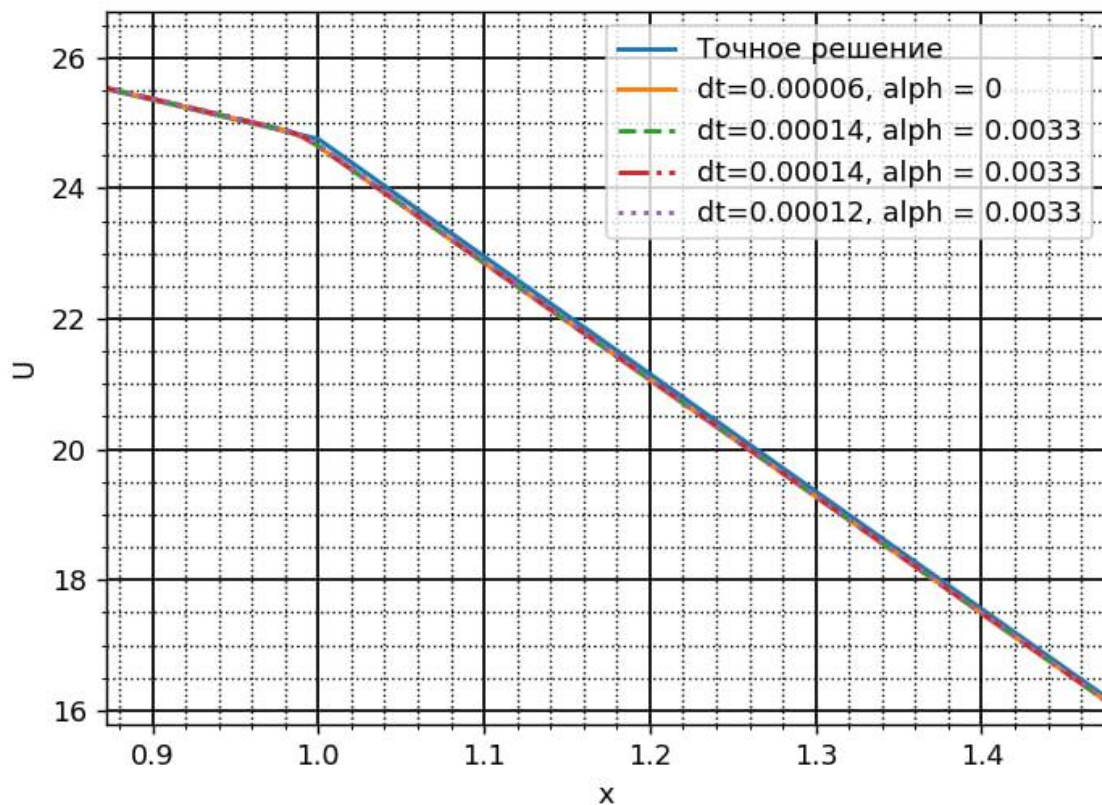


Рис. 2. Распределение значений плотности энергии излучения при различных значениях α .

Заключение

В настоящей работе построена и изучена разностная (сеточно-характеристическая) схема решения системы уравнений лучистого теплообмена в модифицированной модели диффузии в задачах для сред с малой непрозрачностью, а именно – введение стабилизирующей поправки в уравнение для потока энергии излучения. Цель регуляризации – корректировка скорости переноса лучистой энергии. Использование поправки такого типа в уравнении для плотности излучения, обычно используемого в рамках диффузионного приближения, было предложено в работе [12]. В настоящей работе принцип стабилизации [12] применен для построения сеточно-характеристической схемы решения системы уравнений модели диффузии. Был проведен ряд численных экспериментов для уравнений приближений P_1 и для диффузионного. Показано, что предложенный метод устранения нефизических эффектов в задачах со средой с переменной непрозрачностью дает удовлетворительные по точности результаты.

Было исследовано влияние стабилизирующего фактора на устойчивость явных схем для численного решения уравнений в приближениях P_1 и диффузионном. Так как предложенный метод заменяет параболическую задачу математической физики на гиперболическую, ожидалось, что шаг по времени в явных схемах можно брать крупнее, чем при решении тех же уравнений без стабилизации, без нарушения устойчивости явной схемы. Вычислительные эксперименты подтвердили, что предложенный метод допускает счет с более крупными шагами по времени. При шагах расчетной сетки по пространству и времени, соответственно равных h и τ , регуляризирующий множитель целесообразно брать одного порядка с h : $\alpha \sim h$. Тогда ограничение на шаг по времени для устойчивого счета устойчивости заменяется с $\tau \sim h^2$ на $\tau \sim h\sqrt{h}$.

Литература

- [1] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
- [2] Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
- [3] Gordon L. Olson. Introduction to radiation transport. In: Workshop on MHD and radiation Methods for Pulsed Power Los Alamos National Laboratory, 1998.
- [4] Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976.
- [5] John I. Castor. Radiation Hydrodynamics. Cambridge University Press, 2004.
- [6] Alan Jeffrey, Tosiya Taniuti. Non-linear Wave Propagation: With Applications to Physics and Magnetohydrodynamics. New York, Academic Press, 1964.
- [7] Petrov I.B. Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems. Comput. Math. and Inform. Technologies, 2023, V. 6, no. 1. P. 6–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21>.
- [8] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.

- [9] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2019.
- [10] Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б. О некоторых точных решениях системы уравнений диффузии излучения. ВАНТ, серия: Методики и программы численного решения задач математической физики, вып. 3/14/1983, С. 65-67.
- [11] Думкина Г.В., Козманов М.Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 1061-1063.
- [12] Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А. Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // ДАН, № 4, 2023. С. 19-27.

Оглавление

Введение	3
Плотность энергии, поток энергии, тензор давления излучения.	4
Приближение P_1	6
Граничные условия	8
Диффузионная модель.	9
Сеточно-характеристический метод	13
Численные эксперименты.....	19
Заключение.....	25
Литература	25