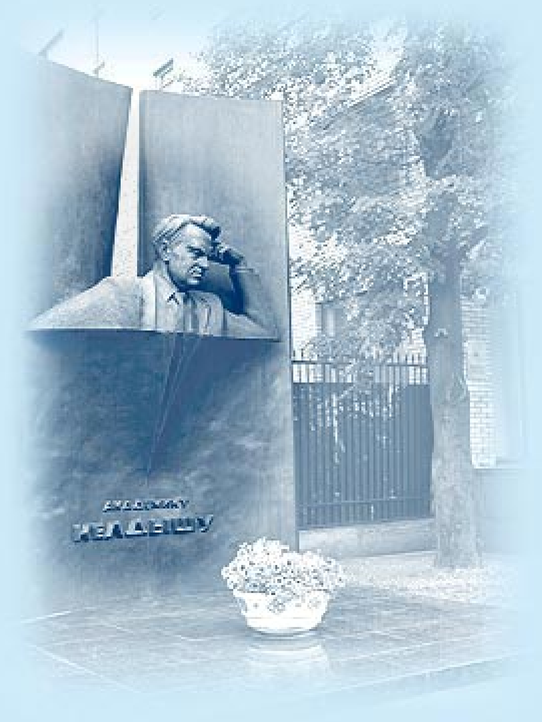
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Простые волны и малоамплитудные возмущения в радиационной газодинамике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Простые волны и малоамплитудные возмущения в радиационной газодинамике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 48. 34 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2023-48**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-48

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ И МАЛОАМПЛИТУДНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

Простые волны и малоамплитудные возмущения в радиационной газодинамике.

Аннотация. В работе проводится анализ одномерных простых волн и малоамплитудных возмущений в излучающем и рассеивающем сером газе. Получено управляющее уравнение радиационной акустики, описывающее динамику простых волн. В это уравнение введены условия радиационно-тепловой диссипации и сила радиационного сопротивления для описания распространения с рассеянием и затуханием различных радиационных волн возмущения.

Для исследования неравновесных волновых явлений в излучающей среде используется феноменологический приближенный метод Уитхема. Этот метод является эффективным способом анализа фундаментальных мод в том случае, когда в управляющем уравнении появляется более одной скорости. Использование этого метода демонстрируется в работе на примере рассмотрения эволюции одномерных гармонических волн, вызванных коротковолновым начальным возмущением равновесного состояния излучающей и рассеивающей среды. Для всех волновых мод получены аналитические решения, которые позволяют интерпретировать их физическое значение.

Эти решения могут являться, в частности, дополнительным тестом для радиационных гидродинамических кодов, работающих в режиме радиационной акустики. Представленный подход, возможно, будет полезным при детализации численных схем Годунова высшего порядка для задач радиационной акустики.

Ключевые слова: радиационная гидродинамика, простые волны, метод Уитхема, перенос излучения.

Aleksander Vladimirovich Kolesnichenko

Simple waves and small perturbations in radiative gas dynamics.

Annotation.The paper analyses one-dimensional simple waves and small-amplitude disturbances in radiating and scattering grey gas. The governing equation of radiation acoustics describing the dynamics of simple waves is derived. Radiation-thermal dissipation conditions and radiation resistance force are introduced into this equation to describe the propagation and attenuation of various radiation perturbation waves. To study non-equilibrium wave phenomena in a radiating medium, the phenomenological Whitham method is used. This method is an effective way to analyse fundamental modes when more than one velocity appears in the governing equation. The use of this method is demonstrated in the paper by considering the evolution of one-dimensional harmonic waves caused by a short-wave initial perturbation of the equilibrium state of the radiating and scattering medium. For all wave modes, analytical solutions have been obtained, which allow us to understand their physical significance.

These solutions can be, in particular, an additional test for radiative hydrodynamic codes operating in the radiative acoustics regime. The general approach can be useful in the development of higher-order Godunov numerical schemes for radiation hydrodynamics problems.

Key words: radiation hydrodynamics, simple waves, Whitham method, radiation transport.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика излучающих потоков представляет интерес для широкого круга волновых астрофизических явлений, где взаимодействие вещества и излучения играет важную роль (например, в случае аккреции на компактные астрофизические объекты, при изучении звездных структур, звездных пульсаций и взрывов, при формировании звездных аккреционных дисков и планет, а также ветров, вызванных излучением и т.п.). Целью данной работы является анализ динамики простых волн и малых возмущений в радиационной гидродинамике, рассматриваемой как система дифференциальных уравнений гиперболического типа.

В отличие от классических работ, в которых анализ простых волн традиционно проводится с получением инвариантов Римана и характеристических кривых одномерной системы уравнений (см., например, Курант, Фридрихс, 1950; Balsara, 1999; Johnson, 2009), в данной работе для анализа неравновесных волновых явлений в серой излучающей среде используется приближенный метод, разработанный Уитхемом (Whitham, 1959). Этот метод является эффективным способом исследования распространения линейных волн в радиационной гидродинамике, когда в точных управляющих уравнениях, описывающих динамику простых волн, появляется более одной скорости (Cogley, Vincent, 1969). Суть этого метода состоит в том, что он заменяет, например, точное управляющее уравнение радиационной акустики набором управляющих уравнений низшего порядка, которые во многих случаях могут быть решены аналитически.

В работе использование этого метода демонстрируется на примере рассмотрения эволюции одномерных гармонических волн, распространяющихся в излучающей и рассеивающей среде. Проанализированы скорости распространения волновых мод гиперболических частей уравнений радиационной гидродинамики. Показано, что излучающая система допускает помимо обычных энтропийных и двух звуковых волн (адиабатической и изотермической), известных по уравнениям Эйлера, еще две новые волны, которые обеспечивают распространение энергии излучения. Эти радиационные волны распространяются со скоростями, сравнимыми со скоростью света и, как следствие, не вызывают флуктуаций для гиперболической части системы уравнений излучающей среды, что физически согласуется с тем, что материя не может передвигаться со скоростью света.

Помимо этого, поскольку существует сильное взаимодействие между веществом и излучением, гидродинамические волны, в частности, такие как звуковые или сдвиговые, могут изменять характеристики распространения радиационной части уравнений радиационной гидродинамики. Выполненное в работе исследование показало, что важным отличием от классических результатов является то, что гидродинамика излучающей серой среды допускает и другие малоизученные в литературе простые волны. Во-первых, это пара радиационных волн. Во-вторых, поскольку в исследуемую акустическую систему уравнений введены условия радиационно-тепловой диссипации и сила радиационного сопротивления, то возникают новые волновые моды с затуханием: адиабатическая звуковая волна, изотермические звуковые волны с затуханием, радиационно-акустическая волна, волны с затуханием при непрозрачности и затуханием при охлаждении, диффузионные волновые моды постоянного объема и постоянного давления и некоторые другие, возникающие в зависимости от режима распространения, различающегося оптической глубиной и соотношением между давлением излучения и давлением газа. Для всех волновых мод нами получены аналитические решения, позволяющие понимать их физическую природу.

Одной из целей данного исследования является также изучение новых специфических особенностей радиационных мод, которые могут быть полезны при численном интегрировании задач радиационной акустики методом Годунова высшего порядка (см. Lowrie, More, 2001; Jiang и др., 2012), позволяющим, в частности, решать набор линейных гиперболических уравнений для подсистемы излучения вместо одного интегро-дифференциального волнового уравнения, используемого в приближении диффузии с ограниченным потоком (см., например, Vincenti, Baldwin, 1962).

1. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИЗЛУЧАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

1.1. Базовые уравнения радиационной гидродинамики и некоторые предположения

Уравнения радиационной гидродинамики используются для моделирования жидкостей, в которых вещество и излучение сильно связаны между собой. Анализируемая далее система уравнений радиационной гидродинамики для идеального совершенного газа (плазмы) в нерелятивистском приближении, записанная при отсутствии некоторых диссипативных эффектов, состоит из следующих трех уравнений гидродинамики и двух моментных уравнений излучения (Hsieh, Spiegel, 1976; Buchler, 1979; Kaneko и др., 1984; Mihalas, Mihalas, 1983):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\mathcal{D}\mathbf{v}}{\mathcal{D}t}+\nabla P_g=\frac{\kappa_{\mathbf{F}}\rho}{c}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r\,, \tag{2}$$

$$\rho T_g\frac{\mathcal{D}s_g}{\mathcal{D}t}=\frac{\mathcal{D}E_g}{\mathcal{D}t}+\gamma E_g\nabla\cdot\mathbf{v}=\kappa_{\mathbf{J}}\rho\left(cE_r-4\pi\mathcal{S}_r\right), \tag{3}$$

$$\rho T_r\frac{\mathcal{D}s_r}{\mathcal{D}t}=\frac{\mathcal{D}E_r}{\mathcal{D}t}+(1+f)E_r\nabla\cdot\mathbf{v}+$$

$$+\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{F}}_r+\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r:\nabla\cdot\mathbf{v}=\kappa_{\mathbf{J}}\rho\left(4\pi\mathcal{S}_r-cE_r\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r}{\mathcal{D}t}+\boldsymbol{\mathcal{F}}_r\nabla\cdot\mathbf{v}+\boldsymbol{\mathcal{F}}_r\cdot\nabla\mathbf{v}\right]+\nabla\mathcal{P}_r+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r=-\frac{1}{c}\kappa_{\mathbf{F}}\rho\boldsymbol{\mathcal{F}}_r\,. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{D}(..)/\mathcal{D}t:=\partial(..)/\partial t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$; $\rho(\mathbf{r},t)$ – массовая плотность; $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – скорость жидкости; $T_g(\mathbf{r},t)$ – температура газа; $P_g(\mathbf{r},t):=(\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho T_g$ – давление газа; $\mathcal{R}$ – газовая постоянная; $\bar{\mu}$ – средний молекулярный вес газа; $E_g(\mathbf{r},t):=P_g/(\gamma-1)=\rho\mathcal{C}_{Vg}T_g$ – плотность внутренней энергии газа (на единицу объема); $\mathcal{C}_{Vg}:=(\mathcal{R}/\bar{\mu})(\gamma-1)^{-1}$ – удельная (на единицу массы) теплоемкость газа при постоянном объеме; $\gamma:=\mathcal{C}_{Pg}/\mathcal{C}_{Vg}$ – показатель адиабаты в газе; $s_g(\mathbf{r},t):=(\gamma-1)^{-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})\ln\left(P_g/\rho^{\gamma}\right)+const$ – удельная энтропия газа; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_r(\mathbf{r},t)$ – частотно-интегрированный поток энергии излучения; c – скорость света; $a=\dfrac{8\pi^5\mathrm{k}^4}{15c^3h^2}=7{,}565\times10^{-15}$ г/см сек^2 град^4 – постоянная давления излучения; $E_r(\mathbf{r},t)=aT_r^4$ – плотность энергии излучения; $T_r(\mathbf{r},t)$ – температура поля излучения; $s_r(\mathbf{r},t):=4aT_r^3/3\rho$ – удельная энтропия излучения; $\mathcal{S}_r$ – интегральная функция источника излучения; $\boldsymbol{\mathcal{P}}_r=\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r+\mathcal{P}_r\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – интегральный тензор анизотропного давления излучения; $\mathcal{P}_r(\mathbf{r},t):=f\,E_r$ – скалярное радиационное давление; $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – трехмерный единичный тензор; $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r$ – бесследный тензор радиационного давления.

В данной работе использовано приближение Эддингтона, при котором эффектом фотонной вязкости можно пренебречь (Agol, Krolik 1998). Тогда

$\hat{\mathcal{P}}_r = f E_r \mathcal{I},$ где f – фактор Эддингтона (являющийся медленно меняющейся функцией оптической глубины; далее предполагается, что $f = 1/3$ – для оптически толстой среды, $f = 1$ – для оптически тонкой среды). Сразу отметим, что рассматривая здесь излучение, захваченное пылевой непрозрачностью[1)], мы, тем не менее, в уравнениях (1-6) пренебрегаем двухфазностью астрофизической среды, предполагая идеальную столкновительную и энергетическую связь между плазмой и пылью (более общий случай рассмотрен в работах (Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2022). Наконец, обычные теплопроводность, радиационная вязкость и удельное сопротивление считаются в данном рассмотрении пренебрежимо малыми.

Правая часть уравнения (3) представляет собой чистый прирост энергии от излучения, а интегрированные плотность энергии излучения E_r, поток $\mathcal{F}_r$ и тензор давления $\mathcal{P}_r$ излучения определяются через угловые моменты от удельной спектральной интенсивности излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ следующими соотношениями:

$$E_r := \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu, \quad \mathcal{F}_r := \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu \mathbf{n}, \quad \mathcal{P}_r := \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega\, I_\nu \mathbf{n}\mathbf{n}, \tag{7}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения излучения, которому соответствует элемент телесного угла $d\Omega$.

Рассматриваемые далее коэффициенты поглощения состоят из двух частей, обусловленных истинным излучением и рассеянием: $\kappa_\mathbf{F} := \alpha_\mathbf{F} + \sigma$ и $\kappa_\mathbf{J} := \alpha_\mathbf{J} + \sigma$, где $\alpha_\mathbf{F}$ и $\alpha_\mathbf{J}$ − средний коэффициент поглощения потока излучения и средний коэффициент поглощения интенсивности истинного излучения, соответственно, а σ − коэффициент поглощения за счет рассеяния Томсона, в частности, электронов, рассеяние которых определяет доминирующую непрозрачность в астрофизических задачах.

Следуя (Kaneko и др., 1976), введем далее следующие соотношения:

$$\theta := \alpha_\mathbf{J} / \kappa_\mathbf{F}; \tag{8}$$

тогда в случае ЛТР

$$\kappa_\mathbf{J}\left(cE_r - 4\pi\mathcal{S}_r\right) = \kappa_\mathbf{F}\theta(cE_r - \mathcal{B}) = c\kappa_\mathbf{F}\theta(E_r - aT^4),$$

[1)] Предполагается, что излучение перерабатывается астрофизической пылью, поскольку взаимодействие между фотонами можно считать полностью отсутствующим (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

где $\mathcal{S}_r^{eq}(\mathbf{r},t) := cE_r / 4\pi = acT^4 / 4\pi = \mathcal{B}(T)$ − функция источника, обусловленная истинным излучением (интегрированная по частоте функция Планка, или интенсивность черного тела). В непрозрачном материале, обусловленном рассеянием и тепловым излучением (когда $\theta \neq 0$), связь вещества и излучения сильная и действует главным образом для поддержания газа и излучения в локальном термодинамическом равновесии (ЛТР). При достижении одинаковой температуры вещества и излучения последнее действует как дополнительный источник давления на газ, а также как диффузионный поглотитель энергии; при этом вещество адвектирует излучение.

1.2. Локальное термодинамическое равновесие

В случае ЛТР, когда излучение в каждой точке среды находится в равновесии с веществом при температуре $T_r = T_g = T(\mathbf{r},t)$, равновесная интенсивность излучения I_ν^{eq} описывается изотропной (не зависящей от направления $\mathbf{n}$) термодинамической формулой Планка

$$I_\nu^{eq}(\mathbf{r},t) = \mathcal{B}_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu / \mathrm{k}T) - 1}. \tag{9}$$

С учетом равенств $\oint d\Omega = 4\pi$, $\oint \mathbf{n}\, d\Omega = 0$, $\oint \mathbf{n}\mathbf{n}\, d\Omega = \frac{4}{3}\pi\mathcal{I}$ можно получить в этом случае следующее представление для интегральных характеристик поля излучения:

$$E_r^{eq} := \frac{4\pi}{c}\mathcal{B}(T) = aT^4, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_r^{eq} = 0 \quad P_r^{eq} := f\,\frac{4\pi}{c}\mathcal{B}(T) = faT^4, \tag{10}$$

при использовании которых источниковый член $\kappa_{\mathbf{J}}\rho\left(cE_r - 4\pi\mathcal{S}_r \right)$ в уравнениях (3) и (4) исчезает. В соотношениях (10) величина $\mathcal{B}(T) = \dfrac{ac}{4\pi}T^4$ является проинтегрированной по всем частотам ν функцией Планка. Кроме этого, для черного излучения удельные энтропия $s_r(\mathbf{r},t)$ и теплоемкость при постоянном объеме $\mathcal{C}_{rV}(\mathbf{r},t)$ определяются выражениям и (Ландау, Лифшиц, 1976)

$$s_r(\mathbf{r},t) := (4/3)aT^3/\rho + const, \quad \mathcal{C}_{rV}(\mathbf{r},t) := 4aT^3/\rho. \tag{11}$$

1.3. Одномерные слабые разрывы и простые волны в радиационной серой среде

В данном разделе получим в явном виде характеристические соотношения для простых плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в излучающей серой среде с учетом эффектов радиационного рассеяния, давления и плотности энергии. Подлежащие анализу исходные уравнения (1)-(6), записанные как в оптически тонком, так и в оптически толстом пределе, перепишем в этом случае с точностью до членов порядка $1/c$ следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_g}{\partial x}=\frac{\kappa_{\mathbf{F}}}{c}\mathcal{F}_r, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial t}+v\frac{\partial P_g}{\partial x}+\gamma P_g\frac{\partial v}{\partial x}=(\gamma-1)\kappa_{\mathbf{F}}\theta\rho(\mathrm{c}E_r-\mathcal{B}), \qquad (14)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t}+v\frac{\partial E_r}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}+(1+f)E_r\frac{\partial v}{\partial x}=\kappa_{\mathbf{F}}\theta\rho(\mathcal{B}-\mathrm{c}E_r), \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial t}+v\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}+2\mathcal{F}_r\frac{\partial v}{\partial x}+fc^2\frac{\partial E_r}{\partial x}=-c\kappa_{\mathbf{F}}\rho\mathcal{F}_r. \qquad (16)$$

Уравнения (12)-(16) записаны в форме, которая очень четко показывает различие между гиперболическими и «источниковыми» членами. Левые гиперболические части приводит к тому, что решения уравнений имеют волнообразный характер. Правые источниковые части, не имеющие пространственных и временных производных, могут быть жесткими и сильно нелинейными. В энергетических уравнениях (14) и (15) они способствуют выравниванию температур газа и излучения, в то время как в уравнениях (13) и (16) для импульса газа и для потока излучения они приводят к уменьшению потока излучения относительно газа. Следует при этом отметить, что источниковые члены также вызывают диссипацию в системе. Однако ее природа отличается от диссипации, вызванной, например, вязкостью в уравнениях Навье-Стокса, которая носит диффузионный характер, зависящий в общем случае от времени. Напротив, диссипация, производимая источниковыми радиационными членами, является локальной, не меняющей характера уравнений радиационной гидродинамики, описывающих волнообразное поведение возмущенной излучающей среды.

Напомним теперь, что кривой слабого разрыва некоторой функции, являющейся решением системы дифференциальных уравнений, называется кривая, на которой имеет разрыв хотя бы одна из первых производных этой функции при непрерывности самой функции (Ландау, Лифшиц, 1976). Подобные кривые по определению являются характеристическими для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Если выписать систему уравнений для двух точек, лежащих по обе стороны от линии слабого разрыва сколь угодно близко, и затем вычесть получившиеся уравнения друг из друга, то вместо производных по t и по x в полученный результат будут входить только разности их значений по обе стороны от разрыва. Это происходит потому, что в исходной и конечной точках значения функции по обе стороны от разрыва равны между собой, а претерпевать разрыв могут только производные по x и по t.

Проделав эту операцию для системы (12)-(16), получим:

$$\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}+v\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}+\rho\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=0,$$

$$\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\}+v\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial P_g}{\partial x}\right\}=0,$$

$$\left\{\frac{\partial P_g}{\partial t}\right\}+v\left\{\frac{\partial P_g}{\partial x}\right\}+\gamma P_g\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=0, \tag{17}$$

$$\left\{\frac{\partial E_r}{\partial t}\right\}+v\left\{\frac{\partial E_r}{\partial x}\right\}+\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right\}+(1+f)E_r\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=0,$$

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial t}\right\}+v\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right\}+2\mathcal{F}_r\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}+fc^2\left\{\frac{\partial E_r}{\partial x}\right\}=0,$$

где символом $\{..\}$ обозначена разность значений (скачок первых производных) соответствующей величины перед и за слабым разрывом. Так как для любой функции ψ, входящей в решение данной системы, условие $\{\psi\}=0$ выполняется тождественно по t, то функция ψ с обеих сторон от линии слабого разрыва получает одинаковые приращения $\{d\psi\}=0,$ где $d\psi=\psi(\mathrm{x}+dx,t+dt)-\psi(\mathrm{x},t)$, причем точки с координатами $(\mathrm{x}+dx)$ и x

лежат на линии разрыва соответственно в моменты времени $t + dt$ и t. Используя равенство производных по направлениям, касательным к прямой слабого разрыва, получим

$$\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}\frac{dx}{dt} = 0,$$

где dx – расстояние, на которое передвинулся разрыв в плоскости x,t; dx/dt – скорость распространения слабого разрыва вдоль оси x относительно неподвижной системы координат. Если обозначить через a скорость движения разрыва относительно газа $a = dx/dt - v$, то получим

$$\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} + v\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} = -a\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}.$$

С помощью подобных равенств можно исключить из уравнений (17) первые производные всех искомых величин ρ, P_g, v, E_r и $\mathcal{F}_r$ по времени; в результате получим:

$$-a\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\} + \rho\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0,$$

$$-a\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} - \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial P_g}{\partial x}\right\} = 0,$$

$$-a\left\{\frac{\partial P_g}{\partial x}\right\} + \gamma P_g\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0, \qquad (18)$$

$$-a\left\{\frac{\partial E_r}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right\} + (1+f)E_r\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0,$$

$$-a\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right\} + 2\mathcal{F}_r\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + fc^2\left\{\frac{\partial E_r}{\partial x}\right\} = 0.$$

Таким образом, скачки производных различных функций на линии слабого разрыва должны удовлетворять системе линейных однородных алгебраических уравнений (18). Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, т. е. существовал бы нетривиальный слабый разрыв, необходимо, чтобы характеристический определитель этой системы был ранен нулю:

$$a\left[a^2 - c_g^2\right]\left[a^2 - c_f^2\right] = 0. \qquad (19)$$

Здесь

$c_g^2 := \left(\partial P_g / \partial \rho\right)_{s_g} = \gamma P_g / \rho$ − *адиабатическая* (*изоэнтропийная*) *скорость звука в газе*;

$c_f^2 := fc^2$ − *радиационная волновая скорость*.

Смысл уравнения (19) заключается в том, что оно позволяет ввести *характеристики простых волн* в плоскости (x,t), которые представляют собой линии, вдоль которых распространяются слабые разрывы, скорости которых $dx/dt = v + a$ отличаются от скорости частиц газа v на скорости a. Соответственно, система (12)-(16) имеет пять характеристик простой волны $dx/dt = v + a_{1-5}$, вдоль которых распространяются волны возмущения. Характеристика $dx/dt = v$ соответствует так называемой *энтропийной волне*, которая распространяется вместе с элементом жидкости, к которому она принадлежит; две характеристики $dx/dt = v \pm c_g$ соответствуют *звуковым волнам*, распространяющимися вперед и назад вдоль оси x; две характеристики $dx/dt = v \pm c_f$ соответствуют *радиационно-волновым модам*. Поскольку корни уравнения (19) разделяются на две части для газа и излучения, то их можно рассматривать как соответствующие оптически тонкому случаю или ранней фазе распространения малых возмущений, при которой взаимодействие газа и излучения очень слабое.

Рассмотрим теперь общий случай, когда все решения уравнения (19) являются однократными корнями определителя системы (12)-(16). При этом для каждой из полученных скоростей a одно уравнение системы (12)-(16) становится линейной комбинацией остальных, а из оставшихся четырех уравнений можно выразить скачки производных всех величин через скачок производной одной из них. Отсюда следует, что все производные искомых функций пропорциональны одной из них, причем коэффициенты пропорциональности зависят от искомых функций ρ, P_g, v, E_r и $\mathcal{F}_r$.

Характеристические соотношения, соответствующие корням уравнения (19), задаются следующим образом[2)]:

$$dP_g - c_g^2 d\rho = \mathrm{c}(\gamma-1)\theta(E_r - \mathcal{B})\frac{d\tau}{v}, \quad \text{для } a_1 = 0; \tag{20}$$

$$\rho dv \pm \frac{dP_g}{c_g} = \left[\frac{\mathcal{F}_r}{c} \pm c(\gamma-1)\theta\frac{E_r - \mathcal{B}}{c_g}\right]\frac{d\tau}{v \pm c_g}, \quad \text{для } a_{2,3} = \pm c_g; \tag{21}$$

$$\frac{dv}{c_f} + \frac{c\sqrt{f}\; dE_r + d\mathcal{F}_r}{2\mathcal{F}_r \pm 4\pi(1+f)\sqrt{f}} =$$

$$= \frac{\mathcal{F}_r \pm \dfrac{c\theta}{\sqrt{f}}(E_r - \mathcal{B})}{\left(1 \pm \dfrac{v}{c_f}\right)\left[2\mathcal{F}_r \pm (1+f)\sqrt{f}\,\mathrm{c}\, E_r\right]} d\tau, \quad \text{для } a_{4,5} = \pm c_f. \tag{22}$$

Здесь

$d\tau := \rho\, \kappa_{\mathbf{F}}\, dx$ – *оптическая глубина.*

При написании (20)-(22) проигнорированы члены порядка $1/c^2$.

Соответствующее энтропийной волне характеристическое соотношение (20) связано с приростом $ds_g = \mathcal{C}_{Vg} P_g \left(dP_g - c_g^2 d\rho\right)$ энтропии газа s_g. Поэтому энтропия сохраняется в оптически тонкой среде ($d\tau = 0$), в случае радиационного равновесия ($E_r - \mathcal{B} = 0$) и для чистого рассеяния энергии $(\theta = 0)$, когда имеет место изоэнтропичность процесса; однако, когда радиационный нагрев преобладает над радиационным охлаждением ($E_r - \mathcal{B} > 0$), энтропия увеличивается, и наоборот – при обратном неравенстве.

Как известно, в оптически тонком случае ($d\tau = 0$), уравнения (20) и (21) дают адиабатическое уравнение Пуассона и инварианты Римана (см. Курант, Фридрихс, 1950).

[2)] Наиболее полно процедура получения характеристических соотношений для гиперболических уравнений представлена в классических монографиях (Курант, Фридрихс,1950; Ландау, Лифшиц, 1976).

2. УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКИ

2.1. Одномерные линейные волны в излучающем газе

Плоские акустические линейные волны также относятся к числу простых волн. Рассмотрим здесь малоамплитудные возмущения плоской волны, связанные с возникновением акустических волн (в общем случае неустойчивых) из-за первоначально приложенных к равновесному состоянию излучающей и рассеивающей серой среды[3)] коротковолновых возмущений. Для исследования проблемы эволюции во времени начальных мелкомасштабных возмущений удобно линеаризовать исходную систему уравнений радиационной гидромеханики (1)-(6). С этой целью представим структурные параметры излучающей гидродинамической среды в виде сумм невозмущенных $\rho_0 = const, P_{g0} = const$ $v_0 = 0$, $\mathcal{F}_{r0} = 0$ и возмущенных $\delta\rho$, δP_g, v, $\delta\mathcal{F}_r$ величин (далее подстрочный индекс «0» у невозмущенных величин для простоты формул будем опускать). Невозмущенные параметры описывают механически равновесную систему, находящуюся в состоянии ЛТР, а величины, описывающие возмущения структурных параметров равновесной среды, являются малыми пульсациями этих параметров (такими, что в линеаризованных уравнениях можно пренебречь членами порядка выше первого для этих величин их производных, слабо нарушающими невозмущенное состояние). Относительно равновесного излучения будем далее предполагать однородное и изотропное поле излучения, в приближении локально замороженного осредненного коэффициента непрозрачности[4)] ($\kappa_{\mathbf{F}} = const$), а ЛТР в возмущенном потоке плазмы может быть адекватно описано спектром излучения черного тела при температуре T.

[3)] Рассматриваемая в работе среда представляет собой полностью ионизованную водородную плазму, в которой свободные и несвязанные переходы учитываются как непрозрачность, обусловленная истинным излучением.

[4)] Далее для простоты предполагается, что осредненное по частоте значение коэффициента непрозрачности является постоянным, что позволяет исключить из рассмотрения радиационно-гидродинамические неустойчивости, такие как странные режимы и механизмы связанных неустойчивостей, которые зависят от изменения коэффициента непрозрачности (Glatzel, 1994).

С учетом всех сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1), (2), (6) и (9), при выполнении всех необходимых разложений и удержании членов только порядка $1/c$ и первого порядка относительно малоамплитудных возмущений, принимают следующий линеаризованный вид:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P_g}{\partial x} = \frac{\kappa_{\mathbf{F}}}{c} \delta \mathcal{F}_r, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \delta E_g}{\partial t} + \gamma E_g \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \omega_F \theta (\delta E_r - \delta E_r^{eq}), \tag{25}$$

$$\frac{\partial \delta E_r}{\partial t} + \frac{\partial \delta \mathcal{F}_r}{\partial x} + (1 + \mathrm{f}) E_r \frac{\partial \delta v}{\partial x} = -\omega_F \theta (\delta E_r - \delta E_r^{eq}), \tag{26}$$

$$\frac{\partial \delta \mathcal{F}_r}{\partial t} + f c^2 \frac{\partial \delta E_r}{\partial x} = -\omega_{\mathbf{F}} \delta \mathcal{F}_r. \tag{27}$$

Здесь

$$E_r^{eq} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{B}(T) = a T^4, \quad \delta E_r^{eq} = 4 E_r^{eq} \left[\frac{\delta P_g}{P_g} - \frac{\delta \rho}{\rho} \right] \tag{28}$$

− функция источника, обусловленная истинным излучением;

$$\omega_{\mathbf{F}} \coloneqq \kappa_{\mathbf{F}} \rho c \tag{29}$$

− *частота, характеризующая затухание потока энергии излучения*.

Заметим, что частота $\omega_{\mathbf{F}}$ связана со средним свободным пробегом фотона l_p или средним свободным временем пробега фотона t_p. Здесь время $t_p = l_p / \mathrm{c} = 1/\omega_{\mathbf{F}}$ − это шкала времени, характеризующая ослабление потока энергии излучения за счет непрозрачности, а величина $t_E = 1/\theta\omega_{\mathbf{F}}$ − это шкала времени, характеризующая ослабление плотности энергии излучения истинной эмиссией при нагревании.

С учетом соотношений (28) и (29) уравнения (25)-(27) могут быть переписаны в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\theta\omega_{th}\right)\delta P_g+\rho c_g^2\frac{\partial\delta v}{\partial x}-\theta\omega_{th}c_g'^2\delta\rho=(\gamma-1)\omega_{\mathbf{F}}\theta\,\delta E_r\,, \qquad (30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\theta\omega_{\mathbf{F}}\right)\delta E_r+\frac{\partial\delta\mathcal{F}_r}{\partial x}+(1+\mathrm{f})E_r\frac{\partial\delta v}{\partial x}=\theta\omega_{th}\frac{\delta P_g-c_g'^2\delta\rho}{\gamma-1}, \qquad (31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\omega_{\mathbf{F}}\right)\delta\mathcal{F}_r+c_f^2\frac{\partial\delta E_r}{\partial x}=0, \qquad (32)$$

где

$c_g'^2:=\left(\partial P_g/\partial\rho\right)_T=P_g/\rho-$ *изотермическая скорость звука в газе*;

$c_r^2:=(1+f)P_r/\rho$ – *радиационная адиабатическая скорость звука*;

$\omega_{th}:=12(\gamma-1)\dfrac{P_r}{P_g}\omega_{\mathbf{F}}=12\dfrac{\gamma-1}{1+f}\dfrac{c_r^2}{c_g'^2}\omega_{\mathbf{F}}=\omega_{\mathbf{F}}\Upsilon$ – *частота теплообмена*, определяющая эволюцию и характер гравитационных волн;

$\Upsilon:=12(\gamma-1)\dfrac{P_r}{P_g}=\dfrac{\mathcal{C}_{rV}}{\mathcal{C}_{gV}}$ – *отношение удельных теплоемкостей излучения и газа* (*плазмы*) *при постоянном объеме*.

2.2. Управляющее уравнение радиационной акустики

Далее будем использовать приближенный метод анализа волновых явлений Уитхема (Whitham, 1959) в радиационной акустике, который хорошо подходит для решения задач распространения волн, когда в управляющих дифференциальных уравнениях появляется более одной скорости их распространения.

Получим здесь управляющее уравнение радиационной акустики путем последовательного исключения возмущенных величин из линеаризованных уравнений (20), (21), (30), (31) и (32). Исключая возмущенные величины δv, δP_g и δE_r, получим следующие два уравнения для возмущений $\delta\rho$ и $\delta\mathcal{F}_r$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-c_g^2\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2}\right)+\theta\omega_{th}\left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-c_g'^2\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\frac{\omega_{\mathbf{F}}}{c^2}\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{f}\theta\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right)+\frac{\gamma-1}{f}\theta\omega_{\mathbf{F}}\left(1+\frac{4}{1+f}\frac{c_r^2}{c_g'^2}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}\right)\right]=0 \quad (33)$$

– акустическое уравнение газа, включающее все радиационные эффекты;

$$\left[\frac{f\theta\omega_{th}}{\gamma-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_g'^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+c_r^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\delta\rho+$$

$$+\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+(1+\theta)\omega_{\mathbf{F}}\frac{\partial}{\partial t}+\theta\omega_{\mathbf{F}}^2\left(1+\frac{4}{1+f}\frac{c_r^2}{c_g'^2}\right)\right]\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x}=0 \quad (34)$$

– акустическое уравнение излучения, содержащее все члены, взаимодействующие с газом.

Если теперь исключить из уравнений (33) и (34) вариацию $\delta\rho$ (или $\partial \mathcal{F}_r / \partial x$), то получим следующее полное *управляющее уравнение* (пятого порядка) радиационной акустики:

$$\left\{\mathbf{P}_5+\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\mathbf{P}_4+\omega_{\mathbf{F}}^2\theta\left(1+\Upsilon\right)\mathbf{P}_3\right\}\psi=0, \quad (35)$$

где $\psi=\left\{\delta\rho,\ \delta v,\ \delta P_g,\ \delta E_r,\ \delta\mathcal{F}_r\right\}$ – возмущенные величины, а операторы $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_4$ и $\mathbf{P}_3$ для волн пятого, четвертого и третьего порядков, соответствующие высокочастотному, среднечастотному и низкочастотному режимам, имеют соответственно вид:

$$\mathbf{P}_5:=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_g^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

$$\mathbf{P}_4:=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_I^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_{II}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_3:=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_\Gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Здесь

$c_\Gamma^2 := \left(\partial P / \partial \rho\right)_S = \Gamma_1 P / \rho = \Gamma_0 P_g / \rho = \Gamma_0\, c_g'^2$ – *изоэнтропическая радиационно-акустическая скорость*;

$P := (P_g + P_r)$ и $S := (s_g + s_r) = \mathcal{C}_{Vg} \ln\left(P_g / \rho^{\gamma}\right) + 4aT^3/3\rho$ – полные давление и энтропия радиационной среды;

$\beta := \dfrac{P_g}{P} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = \dfrac{12(\gamma-1)}{\Upsilon + 12(\gamma-1)}$ – коэффициент, характеризующий долю газа в полном давлении смеси вещества и чернотельного излучения;

$\Gamma_1 := \beta + \dfrac{(\gamma-1)(4-3\beta)^2}{\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)} = \dfrac{4}{3}\dfrac{\Upsilon^2 + (\gamma-1)(15\Upsilon + 9\gamma)}{(\Upsilon+1)[\Upsilon + 12(\gamma-1)]}$ – обобщенный показатель адиабаты для смеси (Chandrasekhar, 1961);

$\Gamma_0 := \dfrac{\mathcal{C}_p^{(tot)}}{\mathcal{C}_V^{(tot)}} = \dfrac{\Upsilon^2 + (\gamma-1)(5\Upsilon + 9\gamma)}{9(\Upsilon+1)(\gamma-1)} = \dfrac{c_\Gamma^2}{c_g'^2}$ – отношение полных удельных теплоемкостей при постоянном давлении $\mathcal{C}_P^{(tot)}$ и постоянном объеме $\mathcal{C}_V^{(tot)} := \mathcal{C}_{rV} + \mathcal{C}_{gV}$;

$\mathcal{C}_P^{(tot)} - \mathcal{C}_V^{(tot)} = \mathcal{R}\mu^{-1}\left(1 + 4P_r / P_g\right)^2$ – обобщенное соотношение Майера;

$c_{rg}^2 := c_r^2 + c_g^2$ – *радиационная акустическая скорость*.

Введем уже здесь коэффициенты *диффузии постоянного объема* $\mathcal{D}_V := \dfrac{\Upsilon}{(1+\Upsilon)}\dfrac{c_f^2}{\omega_{\mathbf{F}}}$ и *постоянного давления* $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_V / \Gamma_0$, которые будут использоваться далее при анализе радиационно-гидродинамических волн.

Скорости c_I^2 и c_{II}^2 в уравнении (36) определяются выражением

$$c_I^2, c_{II}^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \qquad (37)$$

где

$A := 1 + (1+\Upsilon)\theta,\;\; B := c_{rg}^2 + \left[c_g^2 + 3(\gamma-1)c_r^2 + (c_f^2 + c_g'^2)\Upsilon\right]\theta,\;\; C := c_f^2 c_g'^2 \theta\Upsilon.$

В нерелятивистском приближении, когда справедливо неравенство $P/c^2\rho \ll \beta^{-1}(1-\beta)\theta$, скорости c_I^2 и c_{II}^2 задаются соотношениями

$$c_{II}^2 = c_g'^2, \quad c_I^2 = \frac{\theta\Upsilon}{1+\theta\left(1+\Upsilon\right)} c_f^2 = \frac{12(\gamma-1)(1-\beta)\theta}{\beta+\left[\beta+12(\gamma-1)(1-\beta)\right]\theta} c_f^2$$

– *уменьшенная скорость волны излучения* (не являющаяся, однако, реальной скоростью распространяющейся волны). Если $(1-\beta)\theta \gg \beta$, то $c_I^2 = c_f^2$, что соответствует р*адиационно-индуцированной волне,* которая возникает из радиационного возмущения со скоростью c_f; если $\theta=1$, то $c_I^2 = c_f^2\Upsilon(2+\Upsilon)^{-1}$; если $\theta=0$, то $c_I^2 = 0$, $c_{II}^2 = c_{rg}^2$.

Уравнение (35) является фундаментальным акустическим уравнением для изучения поведения одномерных радиационных гидродинамических волн в серой среде. Это уравнение состоит из трех членов: пятого, четвертого и третьего порядков. Как было показано выше, при слабом взаимодействии между газом и излучением скорости согласуются с характерными направлениями (19) оптически тонкого предела, т.е. характер волны определяется в основном членом пятого порядка, а при сильном взаимодействии − членом третьего порядка, который включает скорости, согласующиеся с оптически толстым случаем при отсутствии рассеяния, или при слабом рассеянии. Можно предположить, что член четвертого порядка в (35) со скоростями c_I^2 и c_{II}^2 становится доминирующим на промежуточной стадии $\tau \sim 1$. Модифицированные классические и радиационно-индуцированные волны описываются членами пятого и четвертого порядков, а член третьего порядка описывает только модифицированную классическую волну (Kaneko и др., 1976).

2.3. Гармонические волны

В этом разделе проанализируем гармоническое решение управляющего уравнения радиационной акустики (35), которое может способствовать пониманию физических процессов, происходящих между веществом и излучением, которое пока еще не является полностью удовлетворительным.

Рассмотрим плоскую коротковолновую моду возмущения равновесного фона и будем предполагать, что начальное возмущение линейных волн является колебанием комплексной угловой частоты ω при действительном волновом числе k. Тогда все структурные параметры радиационной среды эволюционируют во времени по закону $\psi \sim \exp\left[\mathrm{i}(k\,x-\omega t)\right]$, где ω – *комплексная частота* гармонических колебаний[5)], а k – *действительное волновое число*, т.е. все возмущения $\delta\rho$, $\delta v, \delta\mathcal{F}_r, \delta E_g$ и δE_r зависят только от x и t. Легко убедиться, что в этом случае фундаментальному акустическому уравнению (35) соответствует следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^5+i\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\omega^4-\left[(c_r^2+c_f^2)k^2+\omega_{\mathbf{F}}^2\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\omega^3-$$

$$-i\left\{\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right](c_I^2+c_g'^2)k^2\right\}\omega^2+$$

$$+\left[c_f^2c_g^2k^4+\omega_{\mathbf{F}}^2\theta\left(1+\Upsilon\right)c_\Gamma^2k^2\right]\omega+i\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]c_I^2c_g'^2k^4=0. \qquad (37)$$

Если ввести безразмерные угловую частоту $\tilde{\omega}:=\omega/\omega_{\boldsymbol{F}}$ и волновое число $\tilde{k}:=ck/\omega_{\mathbf{F}}$, то дисперсионному уравнению (37) можно придать следующий безразмерный вид:

$$\tilde{\omega}^5+\mathbf{n}_1\tilde{\omega}^4+\mathbf{n}_2\tilde{\omega}^3+\mathbf{n}_3\tilde{\omega}^2+\mathbf{n}_4\tilde{\omega}+\mathbf{n}_5=0, \qquad (38$$

где

$$\mathbf{n}_1:=i\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right],$$

$$\mathbf{n}_2:=-\frac{c_r^2+c_f^2}{c^2}\tilde{k}^2-\theta\left(1+\Upsilon\right),$$

$$\mathbf{n}_3:=-i\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\frac{c_I^2+c_g'^2}{c^2}\tilde{k}^2, \qquad (39)$$

$$\mathbf{n}_4:=\frac{c_f^2c_g^2}{c^4}\tilde{k}^4+\theta\left(1+\Upsilon\right)\frac{c_\Gamma^2}{c^2}\tilde{k}^2,$$

[5)] Действительная часть комплексной частоты ω связана с фазовой скоростью $V=\left|\mathrm{Re}\,\omega\right|/k$, а обратная мнимая часть дает время затухания волны $t_d=1/\left|\mathrm{Im}\,\omega\right|$.

$$\mathbf{n}_5 := i\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\frac{c_I^2 c_g'^2}{c^4}\tilde{k}^4 .$$

Отметим, что безразмерное волновое число $\tilde{k}$ связано с оптической глубиной одной длины волны $\tau = \lambda / l_p$ через соотношение $\tilde{k} = ck/\omega_{\mathbf{F}} = kl_p = 2\pi l_p/\lambda = 2\pi/\tau$ (здесь l_p – средний свободный путь фотона, $\lambda = 2\pi / k$ – длина волны). Действительная часть комплексной частоты ω связана с фазовой скоростью $V = \left|\mathrm{Re}\,\omega\right| / k$, а обратная мнимая часть дает время затухания $t_d = 1/\left|\mathrm{Im}\,\omega\right|$.

В случае чистого рассеяния энергии $(\theta = 0)$ из уравнения (37) следует более простое дисперсионное соотношение

$$\tilde{\omega}^4 + i\tilde{\omega}^3 - \left(\frac{c_r^2 + c_f^2}{c^2}\right)\tilde{k}^2\tilde{\omega}^2 - i\left(\frac{c_{rg}^2}{c^2}\right)\tilde{k}^2\tilde{\omega} + \left(\frac{c_f^2 c_g^2}{c^4}\right)\tilde{k}^4 = 0, \qquad (40)$$

решение которого описывает частоты распространяющихся волновых мод, возникающих в результате обмена импульсами между веществом и излучением.

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА УИТХЭМА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕРАВНОВЕСНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ

Используемый в этом разделе метод Уитхэма приближенного решения задач распространения акустических волн, когда в управляющем дифференциальном уравнении появляется более одной скорости, основан на физической идее, согласно которой в одномерном волновом движении форма волны оказывается почти инвариантной, если следовать за ней с ее собственной скоростью распространения (Whitham, 1959). Математическим следствием этой идеи является то, что возможно заменить точное управляющее уравнение набором приближенных уравнений низшего порядка, каждое из которых является частью достоверного приближения к точному уравнению в определенной области независимой временной переменной. Для каждой скорости распространения, входящей в точное уравнение, получается свое управляющее уравнение низшего порядка. При этом решения уравнений низшего порядка, которые во многих случаях можно получить в замкнутой форме, представляют собой часть общего решения. Преимуществом данного метода является разделение задачи на физически значимые части, что позволяет увидеть, каким образом развиваются результирующие формы отдельных волн возмущения. В работе мы ограничимся только линейными задачами. Однако, как показал Уитхэм, линейные решения являются важным первым шагом в понимании соответствующих нелинейных явлений.

Относительно простая форма уравнений низшего порядка позволяет также без формального решения полной задачи, определить явно, какого типа отклика на возмущение равновесного фона системы можно ожидать. В радиационной акустике возможно появление так называемых вырожденных скоростей со значениями ноль и бесконечность. Эти вырожденные скорости могут представлять собой диффузионные механизмы, которые приводят к возникновению чисто диффузионных волн.

Метод Уитхэма носит эвристический и приближенный характер и не претендует на математически строгую аргументацию. Поэтому его точность не приводится в качестве неотъемлемой части метода. Вместе с тем, как показало сравнение результатов, полученных подобным методом и полученных с помощью численного решения управляющего уравнения, их точность весьма высокая в широком диапазоне частот для всех режимов радиационной акустики (Vincenti, Baldwin, 1962; Lick, 1964; Moore, 1966; Long, Vincenti, 1967; Cogley, Vincenti, 1969; Kaneko и др., 2000). Исключения возможны в небольших областях частот, при которых решение переходит от одного уравнения низшего порядка к другому, но и в этом случае аналитические результаты не имеют серьезных отклонений.

Продемонстрируем теперь возможности приблизительного метода Уитхэма (Whitham, 1974) на примере получения характерных черт для основных (не всех) фундаментальных акустических мод в радиационной гидродинамике.

3.1. Радиационные волны в высокочастотном режиме

Используя точное управляющее уравнение радиационной акустики (35) для получения общего представления об одномерных волновых явлениях, рассмотрим для начала *высокочастотный радиационно-волновой режим*. С этой целью положим в уравнении (35) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_f^2\, \partial^2/\partial x^2$, что соответствует трактовке Уитхэма о том, что волновая мода со скоростью c_f аппроксимируется заданием $\partial/\partial t \approx \pm c_f\, \partial/\partial x$.

Поскольку радиационно-волновой режим излучения волн имеет пятый порядок, то можно пренебречь в уравнении (35) членом, описывающим волны третьего порядка $\mathbf{P}_3$. В двух оставшихся частях уравнения (35) с помощью выбранного аппроксимационного соотношения для $\partial^2/\partial t^2$ в членах, включающих скорости c_g^2, c_I^2 и $c_g'^2$, производную $\partial^2/\partial t^2$ заменим на $c_f^2\,\partial^2/\partial x^2$, а затем к обрезанному уравнению радиационной акустики применим очевидные неравенства $c_g^2 \ll c_f^2$ и $c_g'^2 \ll c_f^2$. В результате получим следующее приближенное управляющее уравнение в виде радиационной части для возмущенных величин $\psi = \{\delta E_r, \delta\mathcal{F}_r\}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{F}}(1+\theta)\frac{\partial}{\partial t} - c_f^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi = 0\,, \tag{41}$$

где для скорости c_I^2 использовано соотношение

$$c_I^2 = c_f^2\,\frac{\theta\Upsilon}{1+\theta(1+\Upsilon)}. \tag{42}$$

Подставляя гармоническое возмущение вида $\psi \sim \exp[\mathrm{i}(k\,x - \omega t)]$, в уравнение (41), получим дисперсионное соотношение для режима распространения волны-излучения

$$\omega^2 + i\omega_{\mathbf{F}}(1+\theta)\omega - c_f^2 k^2 = 0\,, \tag{43}$$

решение которого (в случае оптически тонкого режима, $\tilde{k} > 1$) имеет вид

$$\omega_{1,2} = -i\,\frac{\omega_{\mathbf{F}}(1+\theta)}{2} \pm a_f k, \quad a_f := c_f\sqrt{1-\left(\frac{k_c(f)}{k}\right)^2}\,. \tag{44}$$

Здесь $k > k_c(f) := \omega_{\mathbf{F}}(1+\theta)/2c_f$ – волновое число блокировки (отсечки) распространения моды радиационные волны.

Коэффициент $(1+\theta)$ означает, что затухание радиационно-волновой моды обусловлено как потерей энергии излучения из-за непрозрачности, так и потерей плотности энергии за счет реабсорбции. В случае рассеяния без обмена энергией между веществом и излучением (оптически тонкая среда), когда в приведенных выше результатах $\theta = 0$, эффект истинного излучения отсутствует, и взаимодействие между ними происходит только за счет обмена импульсом. В этом случае дисперсионное соотношение (43) принимает вид:

$$\omega^2 + i\omega_{\mathbf{F}}\omega - c_f^2 k^2 = 0.$$

Именно это уравнение определяет поведение радиационной моды при строго консервативном условии и, следовательно, дает название *консервативной волны излучения.*

В случае оптически толстого режима ($\tilde{k} < 1,\ k < k_c(f)$) уравнение (41) описывает чисто мнимые решения

$$\omega_{1,2} = -i\frac{\omega_{\mathbf{F}}(1+\theta)}{2} \pm i\frac{\omega_{\mathbf{F}}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{k_c(f)}\right)^2}. \tag{45}$$

Если $k \ll k_c(f)$, то $\omega_2 \simeq -i\omega_{\mathbf{F}}$. Это решение носит название *волны с затуханием из-за непрозрачности*, что соответствует так называемому *режиму изотропизации* (Mihalas, Mihalas, 1999).

С другой стороны, уравнение (45) дает следующее приближенное выражение для нижней мнимой ветви частоты радиационной волны:

$$\omega_2 \approx -i\frac{c_f^2}{\omega_{\mathbf{F}}}k^2 = -i\mathcal{D}_r k^2, \tag{46}$$

где $\mathcal{D}_r := c_f^2 / \omega_{\mathbf{F}} = l_p c / 3$ – диффузионный коэффициент радиации (не учитывающий влияние энергии газа[6]).

3.2. Адиабатическая звуковая мода

Для исследования адиабатического режима звуковой волны положим в управляющем уравнении (35) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_g^2\, \partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2 \gg c_g^2$ и $\mathbf{P}_3 = 0$, получим следующее квадратичное уравнение для возмущенных величин $\psi = \left\{\delta\rho,\ \delta v,\ \delta P_g\right\}$

---

[6] Более строгий анализ показывает, что имеет место решение $\omega_2 \approx -i\mathcal{D}_v k^2$ для нижней мнимой ветви, которое является *диффузией постоянного объема* $\mathcal{D}_v := \Upsilon c_f^2 / \omega_{\mathbf{F}}(1+\Upsilon)$ (Kaneko и др. 2000); это решение называется *режимом тепловой релаксации* (Mihalas, Mihalas (1999).

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\left(\omega_{\mathbf{F}}\frac{c_r^2}{c_f^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\omega_{th}\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}-c_g^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\,. \tag{47}$$

Поскольку член затухания из-за охлаждения $\theta\Upsilon\omega_{th}(\gamma-1)/\gamma$ намного больше, чем сила радиационного сопротивления $\omega_{\mathbf{F}}c_r^2/c_f^2$ (см. Peebles, 1993), то соответствующее дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\omega^2+i\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\omega_{th}\theta\right)\omega-c_g^2k^2=0. \tag{48}$$

Решением этого уравнения являются следующие частоты:

$$\omega_{1,2}=\pm a_g k-i\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\omega_{th}\theta\right),\quad a_g:=c_g\sqrt{1-\left(\,k_c(g)/k\right)^2}\,. \tag{49}$$

Скорость a_g исчезает при $k=k_c(g)$, где

$$k_c(g):=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{\Upsilon\omega_{\mathbf{F}}}{c_g}\theta \tag{50}$$

– волновое число блокировки. Однако, как будет показано в следующем пункте, адиабатическая звуковая волна переходит в изотермическую звуковую волну прежде, чем волновое число k достигнет числа $k_c(g)$, если только изотермическая звуковая волна не подавлена.

В случае рассеяния, без истинного излучения (когда $\theta=0$) и затухания за счет излучения, сила радиационного сопротивления становится преобладающей. В этом случае соответствующее управляющему уравнению (47) дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2+i\frac{c_r^2}{\mathcal{D}_r}\omega-c_g^2k^2=0\,. \tag{51}$$

Решением этого уравнения являются частоты

$$\omega_{1,2}=\pm a_g' k-i\frac{\omega_{\mathbf{F}}}{2}\frac{c_r^2}{c_f^2},\quad a_g':=c_g\sqrt{1-\left(\,k_c(\mathrm{g}')/k^2\right)^2},\ \ k_c(\mathrm{g}')<k\,, \tag{52}$$

где $k_c(\mathrm{g}') := \frac{c_r^2}{c_f^2} \frac{\omega_{\mathbf{F}}}{2c_g}$ – волновое число, отсекающее распространение адиабатической звуковой моды.

Режим рассеяния адиабатической звуковой волны, затухание которой обусловлено силой сопротивления излучения, совпадает с режимами адиабатической и изотермической звуковых волн.

3.3. Изотермическая звуковая волна

Для исследования изотермического режима звуковой волны положим в управляющем уравнении (35) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_g'^2 \partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2, c_I^2 \gg c_g^2, c_g'^2$, получим следующее уравнение для возмущенных величин $\psi = \left\{\delta\rho,\, \delta v,\, \delta P_g\right\}$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_g'^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \omega_{\mathbf{F}} \frac{c_r^2}{c_f^2}\left(1 + \frac{c_g'^2}{3c_r^2}\right)^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{\Upsilon\theta\omega_{\mathbf{F}}} \frac{\partial}{\partial t}\left(c_g'^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right), \qquad (53)$$

при написании которого было использовано выражение

$$c_\Gamma^2 - c_g'^2 = \frac{9(\gamma - 1)}{\left[1 + 9(\gamma - 1)c_r^2 / c_g'^2\right]} \frac{c_r^4}{c_g'^2}\left(1 + c_g'^2 / 3c_r^4\right)^2. \qquad (54)$$

Если записать коэффициент второго члена в левой части уравнения (53) в виде

$$\omega_{\mathbf{F}} \frac{c_r^2}{c_f^2}\left(1 + \frac{c_g'^2}{3c_r^2}\right)^2 = \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} \frac{c_g'^2}{\mathcal{D}_P} = \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} \frac{c_\Gamma^2}{\mathcal{D}_V}, \qquad (55)$$

то соответствующее дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\omega^2 + i\left[\frac{\gamma - 1}{\theta\omega_{th}} c_g'^2 k^2 + \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} \frac{c_g'^2}{\mathcal{D}_P}\right]\omega - c_g'^2 k^2 = 0. \qquad (56)$$

Решением уравнения (56) являются частоты

$$\omega_{1,2} = a'_g k - \frac{i}{2}\left[\frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}} c'^2_g k^2 + \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{c'^2_g}{\mathcal{D}_P}\right], \tag{57}$$

где

$$a'_g := c'_g \sqrt{1 - \frac{1}{4c'^2_g k^2}\left[\frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}} c'^2_g k^2 + \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{c'^2_g}{\mathcal{D}_P}\right]^2}\,. \tag{58}$$

Условие $a'_g = 0$ удовлетворяется следующим соотношением:

$$c'^2_g k^2 - \frac{2\theta\omega_{th}}{\gamma-1} c'_g k + \frac{\theta\omega_{th}}{\gamma-1}\frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{c'^2_g}{\mathcal{D}_P} = 0. \tag{59}$$

Отсюда следует, что изотермический звуковой режим имеет два волновых числа блокировки:

$$k_{\pm}(\mathrm{g}') = \frac{\theta\omega_{th}}{(\gamma-1)c'^2_g}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}}\frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{c'^2_g}{\mathcal{D}_P}}\right], \tag{60}$$

первое из которых определяется числом $k_{+}(\mathrm{g}')$, что соответствует высокочастотному или коротковолновому режиму распространения волны, а второе число $k_{-}(\mathrm{g}')$ соответствует низкочастотному или длинноволновому режиму распространения.

Таким образом, изотермическая звуковая волна распространяется при следующих двух режимах: *изотермический звуковой режим с затуханием при охлаждении* и *изотермической звуковой волны с демпфированием силой сопротивления.* При этом член, пропорциональный k^2 в коэффициенте при ω в уравнении (56), является вкладом от *изотермической звуковой моды с охлаждением*, а член, пропорциональный $c'^2_g / \mathcal{D}_P$, является вкладом от *изотермической звуковой моды с демпфированием* силой сопротивления. Первая мода возникает в результате взаимодействия с волнами пятого порядка $\mathbf{P}_5$, а вторая мода возникает в результате взаимодействия с волнами третьего порядка $\mathbf{P}_3$.

Волновое число перехода $k(\mathrm{g'c{-}\,g'd})$ между изотермой с охлаждением и изотермой с силой сопротивления определим из равенства

$$\frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}} c_g'^2 k^2 = \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} \frac{c_g'^2}{\mathcal{D}_P};$$

в результате получим

$$k(\mathrm{g'c}-\mathrm{g'd}) := \sqrt{\frac{(\Gamma_0-1)}{(\gamma-1)\Gamma_0} \frac{\theta\omega_{th}}{\mathcal{D}_P}}. \tag{61}$$

Сравнение этого результата с последним членом квадратного уравнения (59) показывает, что волновое число перехода (61) является средним геометрическим

$$k(\mathrm{g'c}-\mathrm{g'd}) := \sqrt{k_+(\mathrm{g'})k_-(\mathrm{g'})}. \tag{62}$$

Из этого соотношения следует, что изотермическая звуковая волна имеет логарифмическую форму, разделяя на равные части изотермические звуковые режимы с охлаждением и изотермические звуковые режимы с силой сопротивления.

Численные расчеты показали, что акустическая мода в среднечастотном режиме – это изотермическая звуковая мода, которая гасится радиационным охлаждением на высоких частотах и радиационно-тепловой силой сопротивления на низких частотах. Две моды, появляющиеся в низкочастотном режиме, − это изоэнтропийная радиационно-акустическая и диффузионная моды постоянного давления (Kaneko и др. 2000).

3.4. Изоэнтропическая радиационно-акустическая мода

Для исследования изоэнтропийного радиационно-акустического режима распространения одномерной волны возмущения в излучающем газе положим в уравнении (35) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_\Gamma^2 \partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_I^2 \gg c_\Gamma^2$ и $\mathbf{P}_5=0$, получим следующее управляющее уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_\Gamma^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \mathcal{G}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3} \quad , \quad \mathcal{G} := \frac{c_f^2 c_r^2}{\omega_{\mathbf{F}} c_\Gamma^4}\left[\frac{\Upsilon}{1+\Upsilon}\left(1+\frac{c_g'^2}{3c_r^2}\right)\right]^2 . \tag{61}$$

С учетом введенных ранее обозначений выражение для коэффициента $\mathcal{K}$ можно переписать в виде

$$\mathcal{G} := \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{D_V}{c_\Gamma^2} = \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0}\frac{D_P}{c_g'^2} . \tag{62}$$

В результате получим следующее дисперсионное соотношение

$$\omega^2 + i\frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0} D_V k^2 \omega - c_\Gamma^2 k^2 = 0 , \tag{63}$$

решением которого являются частоты

$$\omega_{1,2} = \pm a_\Gamma k - i\frac{\Gamma_0 - 1}{2\Gamma_0} D_V k^2 , \tag{64}$$

где

$$a_\Gamma := c_\Gamma \sqrt{1 - k^2 / k_c^2(\Gamma)} , \quad k_c(\Gamma) := \frac{2}{\mathcal{K} c_\Gamma} = \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_0 - 1}\frac{c_\Gamma}{D_V} . \tag{65}$$

Волновое число блокировки $k_c(\Gamma)$ связано с границей между *режимом разрыва* и *изоэнтропийным радиационно-акустическим режимом*, что будет обсуждаться в следующем разделе.

Характер волн в среднечастотном и низкочастотном режимах в решающей степени зависит от значимости излучения, для которого критерий задается в виде отношения Υ полных удельных теплот при постоянном давлении и постоянном объеме. Когда излучение преобладает над веществом, возникает режим разрыва между изотермическим звуком, затухающим под действием силы сопротивления, и изотропным радиационным звуком, затухающей изотермической звуковой и *изоэнтропийной радиационной акустическими модами.* Когда вещество преобладает над излучением, между режимами излучения и диффузии при постоянном объеме возникают затухающая мода излучения и затухающая радиационно-диффузионная мода.

3.5. Радиационно-диффузионная мода постоянного объема

В этом разделе рассмотрим *диффузионную моду постоянного объема*, фазовую скорость которой обозначим как c_{VD}, где индекс «*VD*» указывает на режим диффузии при постоянном объеме (Mihalas, Mihalas, 1999). Заметим, что диффузия постоянного объема является самой низкочастотной из рассматриваемых выше мод. Для исследования радиационно-диффузионного режима распространения этой одномерной волны возмущения в излучающем газе положим в полном управляющем уравнении (35) $\partial^2/\partial t^2 \approx c_{VD}^2 \partial^2/\partial x^2$ и будем предполагать, что $c_f^2 \gg c_{VD}^2 \gg (c_g^2, c_g'^2, c_\Gamma^2)$, но $c_{VD}^2 \ll c_I^2$. Как в случаях с преобладанием радиации, так и в случае с преобладанием материи и слабо выраженным излучением будем считать, что $c_I^2 \sim c_f^2$. Поскольку диффузия возникает из-за взаимодействия с членом $\mathbf{P}_3$, то, опуская член $\mathbf{P}_5$ в уравнении (35), получим следующее уравнение диффузии

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - D_V \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \;, \quad \mathcal{D}_V := \frac{\Upsilon}{1+\Upsilon}\frac{c_f^2}{\omega_{\mathbf{F}}}, \tag{66}$$

где $\psi = (\delta E_r, \mathcal{F}_r)$. Следует отметить, что энергия газа и энергия излучения вносят одинаковый вклад в коэффициент диффузии $\mathcal{D}_V$.

Решение уравнения (66) дает следующую частоту распространения диффузионной моды постоянного объема:

$$\omega_{D_V} = -iD_V k^2 = -i\frac{\Upsilon}{1+\Upsilon}\frac{c_f^2}{\omega_{\mathbf{F}}}k^2. \tag{67}$$

Отсюда следует, что время затухания радиационно-диффузионной волны постоянного объема определяется соотношением $t_{D_V} = 1/D_V k^2$. Режим диффузии при постоянном объеме называется режимом тепловой релаксации (Mihalas, Mihalas, 1999).

3.6. Моды с затуханием при непрозрачности и затуханием при охлаждении

Дисперсионное соотношение для волн с затуханием при непрозрачности и волн с затуханием при охлаждении можно получить из уравнения (37), если пренебречь членами первого и нулевого порядков и предположить, что $c_g^2 \ll c_f^2$. В результате получим:

$$\omega^2 + i\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]\omega - \left[c_f^2 k^2 + \omega_{\mathbf{F}}^2\theta\left(1+\Upsilon\right)\right] = 0\,. \tag{68}$$

Решением этого уравнения являются чисто мнимые частоты

$$\omega_{\Sigma\pm} = -i\frac{\omega_{\mathbf{F}}\left[1+\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]}{2} \pm \frac{\omega_{\mathbf{F}}\left[1-\theta\left(1+\Upsilon\right)\right]}{2}\sqrt{1-\frac{k^2}{k_c^2(\Sigma)}}\,. \qquad (69)$$

Здесь решение $\omega_{\Sigma-}$ является *волной с затуханием непрозрачности*. Двумя асимптотическими решениями уравнения (68) являются следующие частоты:

$$\omega_{\Sigma-} \approx -i\omega_{\mathbf{F}}, \quad \omega_{\Sigma+} \approx -i\omega_{\mathbf{F}}\theta\left(1+\Upsilon\right). \qquad (70)$$

Эти выражения показывают, что волна излучения расщепляется на волну с затуханием от непрозрачности $\omega_{\Sigma-}$ и волну с затуханием при охлаждения $\omega_{\Sigma+}$, затухание которой возникает из-за ослабления плотности энергии излучения вследствие истинного излучения (Mihalas, Mihalas 1999).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проанализированы простые волны и малые возмущения в радиационной газодинамической серой среде. На основании выполненного приближенного решения фундаментального управляющего радиационно-акустического уравнения можно сделать следующие выводы. Это уравнение содержит три члена пятого, четвертого и третьего порядков. Соответствующие им управляющие уравнения низкого порядка и их аналитические решения могут служить математическим инструментом для исследования поведения волн в различных физических условиях. При слабом взаимодействии между газом и излучением характер волны определяется в основном членом пятого порядка, а при сильном взаимодействии − членом третьего порядка, который включает скорости, согласующиеся с оптически толстым случаем при отсутствии рассеяния или при слабом рассеянии. Вместе с тем член четвертого порядка в управляющем акустическом уравнении становится доминирующим на промежуточной стадии $\tau \sim 1$. Модифицированные классические и радиационно-индуцированные волны описываются членами пятого и четвертого порядков, а член третьего порядка описывает только модифицированную классическую волну.

Каждый член включает обе или одну из следующих модифицированных классических и радиационно-индуцированных мод: классическая звуковая мода (но с несколько измененной скоростью и небольшим затуханием), консервативная радиационная мода, энтропийная мода, адиабатическая звуковая волна, изотермические звуковые волны с затуханием при охлаждении и затуханием при силе сопротивления, мода с затуханием и затуханием при охлаждении, моды диффузии постоянного объема и постоянного давления и некоторые другие.

Анализ радиационно-индуцированных мод позволяет увидеть, как радиационные части уравнений радиационной гидродинамики могут быть подвержены влиянию обычных гидродинамических волн. Из гармонического решения управляющего уравнения следует, что эффективная оптическая толщина, соответствующая какой-либо волне возмущения, является фундаментальной величиной для каждой линейной волновой моды. Найденное решение применимо во всем диапазоне от абсолютно прозрачного до абсолютно непрозрачного газа и от очень низких до очень высоких температур. Для всех волновых мод мнимая часть решения определяет характерную частоту затухания, которая зависит от определяющих ее физических процессов. Были найдены также переходные частоты между соседними двумя волновыми модами в различных условиях.

Полученные результаты могут быть полезными при численном решении задач радиационной акустики методом Годунова высокого порядка. Как известно, этот метод позволяет решать набор линейных гиперболических уравнений вместо одного интегро-дифференциального волнового уравнения, часто используемого в приближении диффузии с ограниченным потоком (см., например, Vincenti, Baldwin, 1962; Jiang и др., 2012). Именно по этой причине результаты данной работы могут помочь в проведении необходимых преобразований переменных в расчетных зонах, в разработке линеаризованных римановых решателей, которые позволяют устранить разрывы в переходных зонах. Они также позволят выявить некоторые недостатки численных схем, основанных на расщеплении операторов.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша Российской Академии Наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Колесниченко А.В. Роль черного излучения в модификации критериев неустойчивости Джинса для экзопланетного пылевого плазменного диска при учете магнитной вязкости и лучевого теплообмена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 3. 40 с.

Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны // Москва: Изд-во Ин. Лит. 1950. 426 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая механика. М.: Наука. 1976. 588 с.

Agol E., Krolik J. Photon Damping of Waves in Accretion Disks // The Astrophysical Journal, 1998. V. 507 №1. P. 304-315.

Balsara W.S. An analysis of the hyperbolic nature of the equations of radiation hydrodynamics // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1999. V. 61. No. 5. P. 617-527.

Baldwin B.S. The propagation of plane acoustic waves in a radiating gas. NASA TR R-138. 1962.

Buchler J.R. Radiation hydrodynamics in the fluid frame // J.Quant.Spectrosc. Radiat.Transfer/ 1979. V.22. P. 293-300.

Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press. 1961. 588 p.

Cogley A.C., Vincenti W.G. Application to radiative acoustics of Whitham’s method for the analysis of non-equilibrium wave phenomena // J. Fluid Mech.1969. V. 39. P. 641.

Glatzel W. On the origin of strange modes and the mechanism of related instabilities // Mon. Not. R. Astron.Soc. 1994. V.271. P.66-74.

Hsieh S.-H., Spiegel E.A. The equations of photohydrodynamis // The Astrophysical Journal. 1976. V. 207. P.244-252.

Johnson B.M. Simple waves in ideal radiation hydrodynamics // The Astroph. J. 2009. V. 693. P.:1637–1644.

Kaneko N., Tamazawa S., OnoY. Linear waves in a radiating and scattering grey medium // Astrophysics and Space Science. 1976. V.42. P.441-461.

Kaneko N., Morita K., Maekawa M. The comoving-frame equation of radiative transfer in a curvilinear coordinate system // Astrophysics and Space Science. 1984.V. 107. P. 333-346.

Kaneko N., Morita K., Satoh T., Toyama K., Hishimura M., Maekawa M. Small-Amplitude Disturbances in a Radiating and Scattering Grey Medium I. Solutions of Given Realwave Frequency ω // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274. P. 601-641.

Kumar A., Sutar D.L., Pensia R.K. Jeans instability of a monatomic gas in the presence of thermal radiation // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. V. 836. P. 012012 (1-3).

Lick W.J. The propagation of small disturbances in a radiating gas // J. Fluid Mech.1964 V.18.P. 274.

Long H. R., Vincenti W.G. Radiation-driven acoustic waves in a confined gas // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1365.

Lowrie R.B., More J.E. Issues with high-resolution Godunov methods for radiation hydrodynamics // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2001. V.69.P. 475-489.

Mihalas D**., **Mihalas B. W. On the propagation of acoustic waves in a radiating fluid //Astroph. J. 1983. V. 273. P.355-362.

Mihalas D., Mihalas, B.W. Foundations of Radiation Hydrodynamics, New York, Oxford Univ. Press, 1999, 731 p.

Moore F.K. Effect of radiative transfer on a sound wave travelling in a gas having y near one. Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 70.

Sharma R.C., Patidar A. Effect of ion radiative cooling on Jeans instability of partially ionized dusty plasma with dust charge fluctuation // Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 013705 (1-13).

Zhang W., Howell L., Almgren A., Burrows A., Dolence J., Bell J. Castro: A new compressible astrophysical solver. III. Multigroup radiation hydrodynamics // The Astrophysical Journal Supplement Series, 204:7 (27pp). January.2013

Vincenti W., ***Baldwin B***. Effect of thermal radiation on the propagation of plane acoustic waves //J. Fluid Mech. 1962. V. 12 P. 449-477.

Whitham G.B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics // Comm. Pure Appl. Math.1959. V. 12. P.113.

ОГЛАВЛЕНИЕ