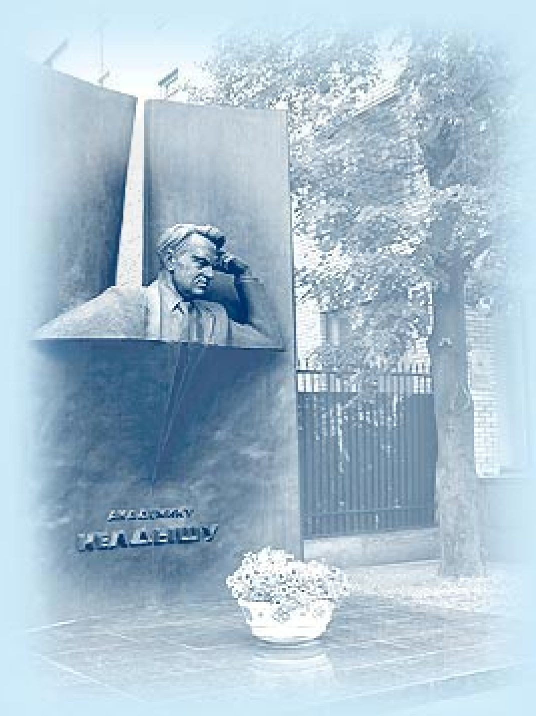
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 49 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Применение к радиационной акустике метода Уитхэма для анализа волновых явлений в намагниченной плазме

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Применение к радиационной акустике метода Уитхэма для анализа волновых явлений в намагниченной плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 49. 35 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2023-49**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-49

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

ПРИМЕНЕНИЕ К РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКЕ МЕТОДА УИТХЭМА ДЛЯ АНАЛИЗА ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

Применение к радиационной акустике метода Уитхэма для анализа волновых явлений в намагниченной плазме.

Аннотация. В работе получено точное управляющее уравнение радиационной акустики в излучающем сером газе с учетом влияния поперечного магнитного поля. Радиационная МГД описывается тремя уравнениями гидродинамики и двумя уравнениями момента излучения при широком использовании формализма радиационной термодинамики. С целью описания распространения линейных радиационных магнитно-акустических волн возмущения с рассеянием и затуханием в эти уравнения введены условия радиационно-тепловой диссипации, сила радиационного сопротивления, а также магнитная сила и джоулево тепло. Используется приближение Эддингтона, которое позволяет исследовать моды радиационных магнитно-гидродинамических волн в двух асимптотических случаях − оптически тонкого и толстого газа.

Выведенное в работе точное управляющее уравнение позволило при использовании эвристического метода Уитхэма получить набор приближенных управляющих уравнений низшего порядка, каждое из которых является частью достоверного приближения к точному уравнению в определенной области независимой временной переменной. Относительно простая форма подобных уравнений позволила без формального решения полной задачи исследовать физические процессы, происходящие в каждой радиационной магнитно-акустической волне.

***Ключевые слова*:** радиационная МГД, радиационная термодинамика, радиационные магнитно-гидродинамические линейные волны, метод Уитхема.

Aleksander Vladimirovich Kolesnichenko

Application to radiation acoustics of the Whitham method for analysing wave phenomena in magnetised plasma.

Annotation. The exact governing equation of radiative acoustics in radiating grey gas is derived in this work, taking into account the influence of the transverse magnetic field. The radiative MHD is described by three equations of hydrodynamics and two equations of radiation momentum with extensive use of the formalism of radiative thermodynamics. In order to describe the propagation of linear radiative magneto-acoustic perturbation waves with scattering and attenuation, radiation-thermal dissipation conditions, radiation drag force, and magnetic force and Joule heat are introduced into these equations. The Eddington approximation is used, which allows us to study the modes of radiative magneto-hydrodynamic waves in two asymptotic cases - optically thin and thick gas.

The exact governing equation derived in this paper allows, using the heuristic Whitham method, to obtain a set of approximate governing equations of lower order, each of which is part of a reliable approximation to the exact equation in a certain region of the independent time variable. The relatively simple form of such equations allows, without formally solving the full problem, to investigate the physical processes occurring in each radiative magneto-hydrodynamic linear travelling wave.

Key words: radiation MHD, radiation thermodynamics, radiation magneto-hydrodynamic linear waves, Whitham's method.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика излучающей намагниченной плазмы представляет интерес для широкого круга волновых астрофизических явлений, где взаимодействие вещества и излучения играет важную роль (например, в случае аккреции на компактные астрофизические объекты, при изучении звездных структур, звездных пульсаций и взрывов, вызванных излучением, при формировании звездных аккреционных дисков и планет, а также в Солнечной атмосфере, фотосфере и хромосфере и т.п.). Целью данной работы является вывод уравнения радиационной акустики для бесконечной, намагниченной и излучающей плазмы и исследование на его основе локальных условий распространения и затухания малоамплитудных радиационных магнитно-акустических волн в серых излучающих и поглощающих газовых средах. В данной работе мы ограничились исследованием одномерных акустических волновых мод, поскольку линейные решения являются важным первым шагом в понимании соответствующих нелинейных явлений (Cox, Giuli, 1968).

Известно, что в случае радиационной акустики имеет место наличие двух совершенно разных математических проблем в зависимости от того, является ли начальное возмущение, от которого возникают распространяющиеся волны, колебанием угловой частоты ω или флуктуацией волнового числа k. Это связано с тем, что управляющее уравнение радиационной акустики или соответствующее дисперсионное соотношение, описывающее поведение линейных волн радиационной МГД, имеет различную форму относительно производной по времени $\partial/\partial t$ и пространственной производной $\partial/\partial x$. Дисперсионное соотношение для комплексной частоты ω всегда имеет пять комплексных корней, и в этом случае волновое число k является вещественным параметром, который необходимо задать. Однако дисперсионное соотношение для квадратичного волнового числа k^2 всегда дает четыре комплексных корня, при этом ω является действительным параметром. Первый случай давно и основательно изучен многими авторами (см, например, Cogley, Vincenti,1969; Уизем, 1977; Mihalas, Mihalas, 1983, 1999; Simmons, Mihalas, 2000; Kaneko и др., 2005; Kato, Fukue, 2020). Настоящая работа посвящена исследованию второго случая (т.е. систем с заданной частотой) решения уравнения радиационной акустики для *намагниченной и излучающей плазмы*, поскольку, как нам известно, основательного анализа этого случая не существует, хотя он абсолютно необходим для полного понимания фундаментальных свойств линейных волновых явлений в радиационной МГД (см. Johnson и др., 2010).

В отличие от классической (недиссипативной) акустической теории, в которой анализ простых волн традиционно проводится с получением инвариантов Римана и характеристических кривых одномерной системы уравнений (см., например, Курант, Фридрихс, 1950; Уизем, 1977; Buchler, 1979; Ландау, Лифшиц, 1986; Balsara, 1998, 1999; Куликовский, Свешникова, 1998), в данной работе для анализа неравновесных волновых явлений в серой излучающей среде использован феноменологический метод, разработанный Уитхемом (Whitham, 1959). Этот метод основан на физической идее, что в одномерном волновом движении форма волны представляется почти инвариантной, если следовать за ней с ее собственной скоростью распространения. Математическим следствием этой идеи является то, что появляется возможность заменить точное дифференциальное управляющее уравнение радиационной акустики набором управляющих уравнений низшего порядка, которые во многих случаях могут быть решены аналитически. Решения уравнений низшего порядка представляют собой часть общего решения. Подход Уитхэма носит эвристический характер и не исходит из математически строгой аргументации. Вместе с тем этот метод является эффективным способом исследования распространения линейных волн в гиперболической акустике, когда в точных управляющих уравнениях, описывающих динамику простых волн, появляется более одной скорости (Lick, 1964; Moore, 1966; Cogley, Vincent, 1969). Сравнение с результатами предшествующих работ, которые были получены с помощью традиционных методов, устанавливает обоснованность, точность и полезность приближенного подхода Уитхема.

В настоящей работе использование этого метода демонстрируется на примере рассмотрения эволюции одномерных гармонических волн, обусловленных синусоидальным движением и распространяющихся в излучающей и рассеивающей среде. Подход Уитхема значительно упрощает математику для этой задачи по сравнению с аналогичными результатами, полученными в исследованиях, выполненных другими методами (в том числе и численными (Jiang и др.2012)). Реализованный в работе анализ показал, что модифицированная акустическая система описывает обычные звуковые волны, сдвиговые волны и энтропийную волну, знакомые по уравнениям Эйлера. Однако важным отличием от классического подхода является то, что эти волны вносят существенный вклад в радиационные части полной системы уравнений таким образом, что магнитная гидродинамика излучающей среды допускает новые малоизученные в литературе простые волны.

Выполненное в работе исследование распространения волновых мод на основе гиперболических частей уравнений радиационной МГД (для наиболее простого случая поперечного магнитного поля) показало, что излучающая плазма допускает помимо индуцированных излучением акустических волн (адиабатической, изотермической, изэнтропической и радиационно-акустической), основательно исследованных, например, в работе (Kaneko и др., 2005), также и другие модифицированные магнитным полем новые волны: магнитно-адиабатическую, магнитно-изотермическую, магнитно-изэнтропическую и радиационную магнитно-акустическую волны с затуханием от непрозрачности и с затуханием при охлаждении, соответственно. Эти и некоторые другие волновые моды возникают вследствие того, что в изучаемую акустическую систему дифференциальных уравнений исходно включены условия радиационно-тепловой и джоулевой диссипации, а также магнитная сила и сила радиационного сопротивления. Для новых волновых мод получены аналитические решения, позволяющие лучше понять их физическую природу.

Таким образом, важнейшими результатами данной работы являются: вывод точного определяющего уравнения магнитно-радиационной акустики, получение соответствующего ему дисперсионного соотношения, а также приближенное решение управляющих уравнений низкого порядка с использованием эвристического метода Уитхэма. Установленные в этих уравнениях демпфирующие члены (для определения мнимых частей решений) определяют характерные частоты для исследуемых волновых мод. Найдены характеристические частоты перехода между соседними двумя волновыми модами в различных условиях. Эти частоты вместе с управляющими уравнениями и их аналитическими решениями предоставляют дополнительные математические инструменты для численного исследования поведения магнитно-радиационных волн в различных физических условиях (см. Lowrie, More, 2001; Jiang и др., 2012).

Таким образом, проведенное в работе исследование иллюстрирует уникальные возможности эвристического подхода Уитхема, который позволяет не только качественно понять волновые явления, но и аналитически решать конкретные задачи.

1. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ МГД И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Уравнения радиационной магнитной гидродинамики используются для моделирования проводящих жидкостей, для которых плазма и излучение сильно связаны между собой. Уравнения нерелятивистской гидромеханики для проводящей жидкости в магнитном поле модифицируются за счет включения в уравнение движения магнитной силы $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$ и в уравнение энтропии теплового члена Джоуля $\boldsymbol{j}^2/\sigma$ ($\boldsymbol{j}$ − плотность тока, $\boldsymbol{B}$ − магнитная индукция, σ − электропроводность). Таким образом, гидродинамические уравнения радиационной МГД первого порядка по $\boldsymbol{v}/c$ (при отсутствии некоторых диссипативных эффектов) вместе с уравнениями Максвелла и законом Ома имеют вид (Hsieh, Spiegel, 1976; Бисноватый-Коган, Блинников, 1978; Buchler, 1979; Kaneko и др., 1984; Mihalas, Mihalas, 1983; Jiang, и др., 2012):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{v}}{\mathcal{D}t}+\nabla P_g=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\frac{\kappa_{\boldsymbol{F}}\rho}{c}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r\,, \tag{2}$$

$$\rho T_g\frac{\mathcal{D}s_g}{\mathcal{D}t}=\left[\frac{\mathcal{D}E_g}{\mathcal{D}t}+\gamma E_g\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]=4\pi\kappa_{\boldsymbol{J}}\rho\big(\mathcal{J}-\mathcal{S}\big)+\frac{\boldsymbol{j}^2}{\sigma}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{j}=\sigma\big(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\big). \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{D}(..)/\mathcal{D}t:=\partial(..)/\partial t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$; $\rho(\boldsymbol{r},t)$ – массовая плотность; $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ – скорость жидкости; $P_g(\mathbf{r},t):=(\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho T_g$ – давление газа (плазмы); $T_g(\mathbf{r},t)$ – температура газа; $\mathcal{R}$ – газовая постоянная; $\bar{\mu}$ – средний молекулярный вес газа; $E_g(\mathbf{r},t):=P_g/(\gamma-1)=\rho\mathcal{C}_{gV}T_g$ – плотность внутренней энергии газа (на единицу объема); $\mathcal{C}_{gV} := (\mathcal{R}/\bar{\mu})(\gamma - 1)^{-1}$ – удельная (на единицу массы) теплоемкость газа при постоянном объеме; $s_g(\mathbf{r},t) := (\gamma-1)^{-1}(\mathcal{R}/\bar{\mu})\ln\left(P_g/\rho^{\gamma}\right) + const$ – удельная энтропия газа; $\gamma = \mathcal{C}_{gP}/\mathcal{C}_{gV}$ – показатель адиабаты в газе; $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ – электрическое поле; μ – электрическая проницаемость вакуума; ε – диэлектрическая проницаемость намагниченной плазмы; $\mathcal{F}_r(\boldsymbol{r},t)$ – частотно-интегрированный поток энергии излучения; $\mathcal{J}(\boldsymbol{r},t)$, $\mathcal{S}(\boldsymbol{r},t)$ – соответственно интегральная интенсивность и интегральная функция источника излучения.

При описании нерелятивистской движущейся намагниченной среды ток смещения $\varepsilon\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ следовало бы опустить. Однако тогда скорость света $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ будет бесконечной, а чисто электромагнитное волновое движение представляет собой диффузионное явление. Поскольку в дальнейшем будут учитываться многие другие диффузионные эффекты, удобно сохранить ток смещения и рассматривать этот эффект как вырожденное электромагнитное волновое движение. В конечном итоге можно будет принять, что $\varepsilon = 0, c = \infty$.

Фигурирующие в уравнениях (2) и (3) коэффициенты поглощения состоят из двух частей, обусловленных истинным излучением и рассеянием: $\kappa_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},t) = \alpha_{\boldsymbol{F}} + \hat{\sigma}$ и $\kappa_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},t) = \alpha_{\boldsymbol{J}} + \hat{\sigma}$, где $\alpha_{\boldsymbol{F}}$ и $\alpha_{\boldsymbol{J}}$ – средний коэффициент поглощения потока излучения и средний коэффициент поглощения интенсивности истинного излучения соответственно, а $\hat{\sigma}$ – коэффициент поглощения за счет рассеяния Томсона, в частности, электронов, рассеяние которых определяет доминирующую непрозрачность в астрофизических задачах. Следуя (Kaneko и др., 2005), введем далее следующие соотношения:

$$\theta := \alpha_{\boldsymbol{J}}/\kappa_{\boldsymbol{F}}; \tag{7}$$

тогда

$$4\pi\rho\kappa_{\boldsymbol{J}}\left(\mathcal{J} - \mathcal{S}\right) = 4\pi\rho\kappa_{\boldsymbol{F}}\theta(\mathcal{J} - \mathcal{B}), \tag{8}$$

где $\mathcal{B}$ – функция источника, обусловленная истинным излучением; в случае локального термодинамического равновесия (ЛТР) функция $\mathcal{B}$ является функцией Планка.

Радиационная гидродинамика описывается двумя проинтегрированными по частоте уравнениями момента излучения (нулевого и первого порядков) вместе с соответствующей схемой замыкания Эдингтона для тензора радиационного давления. Эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\rho T_r \frac{\mathcal{D}s_r}{\mathcal{D}t} = \frac{\mathcal{D}E_r}{\mathcal{D}t} + (1+f)E_r \nabla\cdot\boldsymbol{v} = -\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{F}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r : \nabla\cdot\boldsymbol{v} - 4\pi\kappa_{\boldsymbol{J}}\rho\left(\mathcal{J}-\mathcal{S}\right), \quad (9)$$

$$\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\mathcal{F}}_r}{\mathcal{D}t} + \boldsymbol{\mathcal{F}}_r \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\mathcal{F}}_r\cdot\nabla\boldsymbol{v} + c^2\nabla\mathcal{P}_r + c^2\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r = -c\kappa_{\boldsymbol{F}}\rho\boldsymbol{\mathcal{F}}_r. \quad (10)$$

Здесь $\boldsymbol{\mathcal{P}}_r := \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r + \mathcal{P}_r\boldsymbol{I}$ – интегральный тензор анизотропного радиационного давления; $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r(\boldsymbol{r},t)$ – бесследный тензор радиационного давления; $\mathcal{P}_r(\boldsymbol{r},t) = fE_r$ – скалярное радиационное давление; f – фактор Эддингтона, равный $1/3$ для оптически толстой среды и $f=1$ для оптически тонкой среды; $\boldsymbol{I}$ − трехмерный единичный тензор. В данной работе использовано приближение Эддингтона, при котором $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_r := fE_r\boldsymbol{I}$ и эффектом фотонной вязкости можно пренебречь (Agol, Krolik 1998).

Фигурирующие в уравнениях (9) и (10) интегрированные плотность энергии излучения E_r, поток $\boldsymbol{\mathcal{F}}_r$ и тензор давления $\boldsymbol{\mathcal{P}}_r$ излучения определяются через угловые моменты от удельной спектральной интенсивности излучения $I_\nu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},t)$ следующими соотношениями:

$$E_r = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J} := \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_r := \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}_r := \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор в направлении распространения излучения, которому соответствует элемент телесного угла $d\Omega$.

В случае ЛТР, когда излучение в каждой точке среды находится в равновесии с веществом при температуре $T_r = T_g = T(\boldsymbol{r},t)$, равновесная интенсивность излучения I_ν^{eq} описывается изотропной (не зависящей от направления $\boldsymbol{n}$) термодинамической формулой Планка

$$I_\nu^{eq}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{B}_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/\mathrm{k}T)-1}. \quad (12)$$

С учетом равенств $\oint d\Omega = 4\pi$, $\oint \boldsymbol{n} d\Omega = 0$, $\oint \boldsymbol{nn} d\Omega = \frac{4}{3}\pi \boldsymbol{I}$ можно получить в этом случае следующее представление для интегральных характеристик поля черного излучения:

$$E_r^{eq}(\boldsymbol{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathcal{B}(T) = aT^4, \quad \mathcal{F}_r^{eq}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad P_r^{eq}(\boldsymbol{r},t) = f\frac{4\pi}{c}\mathcal{B}(T) = faT^4, \tag{13}$$

где $\mathcal{B}(T) := acT^4/4\pi$ – интегрированная по всем частотам ν функция Планка; $a = \dfrac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^2} = 7{,}565\times 10^{-15}$ г/см сек^2 град^4– постоянная давления излучения.

При этом интегральные равновесные функция источника и интенсивность излучения соответственно равны: $\mathcal{S}^{eq}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{B}$ и $\mathcal{J}^{eq}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{B}$. При использовании этих равновесных функций «источниковый» член

$$4\pi\rho\kappa_{\boldsymbol{J}}\left(\mathcal{J} - \mathcal{S}\right) = 4\pi\rho\kappa_{\boldsymbol{F}}\theta(\mathcal{J} - \mathcal{B})$$

в уравнениях (3) и (9) исчезает. Кроме этого, в случае ЛТР удельные энтропия излучения $s_r(\boldsymbol{r},t)$ и теплоемкость при постоянном объеме $\mathcal{C}_{rV}(\boldsymbol{r},t)$ определяются выражениями (Ландау, Лифшиц, 1986):

$$s_r(\boldsymbol{r},t) := (4/3)aT^3/\rho + const, \quad \mathcal{C}_{rV}(\boldsymbol{r},t) := 4aT^3/\rho. \tag{14}$$

2. ОДНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

Далее в этой работе будем рассматривать малоамплитудные плоские волны, связанные с коротковолновыми термодинамическими возмущениями, первоначально приложенными к равновесному состоянию бесконечной намагниченной, излучающей и рассеивающей серой среды[1)]. Пусть движение происходит вдоль оси x. С целью упрощения задачи ограничимся в дальнейшем рассмотрением поперечного электромагнитного поля: $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$,

---

[1)] Рассматриваемая в работе среда представляет собой полностью ионизованную водородную плазму, в которой свободные и несвязанные переходы учитываются как непрозрачность, обусловленная истинным излучением.

$\boldsymbol{E}=(0,E,0)$ и $\boldsymbol{j}=\sigma(0,E-vB,0)$. Для исследования проблемы эволюции во времени начальных мелкомасштабных возмущений удобно линеаризовать исходную систему уравнений магнитной радиационной гидромеханики (1)-(6) и (9), (10). С этой целью представим структурные параметры излучающей гидродинамической среды в виде сумм невозмущенных v_0, ρ_0, $P_{g0}=const$, $\mathcal{F}_{r0}=0$, B_0 и возмущенных $v_1(x,t)$, с$\rho_1(x,t)$, $P_{g1}(x,t)$, $\mathcal{F}_{r1}(x,t)$, $B_1(x,t)$, $E_1(x,t)$ значений этих величин. Для равновесного состояния электромагнитного поля мы принимаем $E_0-v_0B_0=0$ (в последующем подстрочный индекс «0» у невозмущенных величин для простоты формул будем опускать).

Невозмущенные параметры описывают механически равновесную систему, находящуюся в состоянии ЛТР, а величины, описывающие возмущения структурных параметров равновесной среды, являются малыми пульсациями этих параметров (такими, что в линеаризованных уравнениях можно пренебречь членами порядка выше первого для этих величин и их производных слабо нарушающих невозмущенное состояние). Относительно равновесного излучения будем далее предполагать однородное и изотропное поле излучения, в приближении локально замороженного осредненного коэффициента непрозрачности[2)] ($\kappa_{\boldsymbol{F}}=const$), а ЛТР в возмущенном потоке плазмы может быть адекватно описано спектром излучения черного тела при температуре T

С учетом всех сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1)-(6), (9) и (10), при выполнении всех необходимых разложений, при удержании членов только порядка $1/c$ и первого порядка относительно малоамплитудных возмущений, принимают следующий линеаризованный вид (Kaneko и др., Ono, 1977):

[2)] Далее для простоты предполагается, что осредненное по частоте значение коэффициента непрозрачности является постоянным, что позволяет исключить из рассмотрения радиационно-гидродинамические неустойчивости, такие как странные режимы и механизмы связанных неустойчивостей, которые зависят от изменения коэффициента непрозрачности (Glatzel, 1994).

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{g1}}{\partial x} + \frac{B}{\mu\rho}\frac{\partial B_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{B}{\rho}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\kappa_{\boldsymbol{F}}}{c}\mathcal{F}_{r1}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial P_{g1}}{\partial t} + v\frac{\partial P_{g1}}{\partial x} + \gamma P_g\frac{\partial v_1}{\partial x} = 4\pi(\gamma - 1)\kappa_{\boldsymbol{F}}\theta\rho\left(\mathcal{J}_1 - \mathcal{S}_1\right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial t} + v\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_{r1r}}{\partial x} + (1+f)\mathcal{J}\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\kappa_{\boldsymbol{F}}\theta\rho\left(\mathcal{J}_1 - \mathcal{S}_1\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{r1}}{\partial t} + v\frac{\partial \mathcal{F}_{r1}}{\partial x} + \omega_{\boldsymbol{F}}\mathcal{F}_{r1} + cf\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial x} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_1}{\partial x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\left(E_1 - vB_1 - Bv_1\right). \tag{21}$$

Здесь

$$\mathcal{S}^{eq} = \mathcal{B} = \frac{ac}{4\pi}T^4, \quad \mathcal{S}_1 = 4\mathcal{S}^{eq}\left(\frac{P_{g1}}{P_g} - \frac{\rho_1}{\rho}\right) = \frac{3c}{\pi}\frac{1-\beta}{\beta}\left(P_{g1} - c_T^2\rho_1\right) \tag{22}$$

− функция источника и ее возмущение, обусловленная истинным излучением;

$$\omega_{\boldsymbol{F}}(x,t) := \kappa_{\boldsymbol{F}}\rho c \tag{23}$$

− *частота, характеризующая затухание потока энергии излучения*.

Заметим, что частота $\omega_{\boldsymbol{F}}$ связана со средним свободным пробегом фотона l_p или средним свободным временем пробега фотона t_p. Здесь величина $t_p = l_p / c = 1/\omega_{\boldsymbol{F}}$ − это шкала времени, характеризующая ослабление потока энергии излучения за счет непрозрачности, а величина $t_E = 1/\theta\omega_{\boldsymbol{F}}$ − это шкала времени, характеризующая ослабление плотности энергии излучения истинной эмиссией при нагревании.

С учетом соотношений (22) и (23) и дифференциальных операторов

$$\hat{\omega}(x,t) := \partial/\partial t + v\partial/\partial x, \quad \hat{k}(x,t) := \partial/\partial x, \quad \hat{\omega}_0(t) := \partial/\partial t \tag{24}$$

уравнения (15)-(21) могут быть переписаны в виде:

$$\hat{\omega}\rho_1 + \rho\hat{k}v_1 = 0, \tag{25}$$

$$\hat{\omega}v_1 + \frac{1}{\rho}\hat{k}P_{g1} + \frac{B}{\mu\rho}\hat{k}B_1 + \varepsilon\frac{B}{\rho}\hat{\omega}_0 E_1 = \frac{\kappa_{\boldsymbol{F}}}{c}\mathcal{F}_{r1}, \tag{26}$$

$$\left(\hat{\omega} + \theta\omega_{th}\right)P_{g1} + \gamma P_g\hat{k}v_1 - \theta\omega_{th}c_T^2\rho_1 = 4\pi(\gamma-1)\kappa_{\boldsymbol{F}}\theta\rho\mathcal{J}_1, \tag{27}$$

$$\left(\hat{\omega} + \kappa_{\boldsymbol{F}}\theta\rho\right)\mathcal{J}_1 + (1+f)\mathcal{J}_1\hat{k}v_1 + c\hat{k}\mathcal{F}_{r1} = \frac{\theta\omega_{th}}{4\pi(\gamma-1)}\left(P_{g1} - c_T^2\rho_1\right), \tag{28}$$

$$\left(\hat{\omega} + \omega_{\boldsymbol{F}}\right)\mathcal{F}_{r1} + cf\hat{k}\mathcal{J}_1 = 0, \tag{29}$$

$$\hat{\omega}_0 B_1 + \hat{k}E_1 = 0, \tag{30}$$

$$\hat{\omega}_0 E_1 + \frac{1}{\varepsilon\mu}\hat{k}B_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\left(E_1 - vB_1 - Bv_1\right). \tag{31}$$

Здесь

$c_T^2 := \left(\dfrac{\partial P_g}{\partial\rho}\right)_T = \dfrac{P_g}{\rho}$ – *изотермическая скорость звука в газе*;

$\omega_{th} := 12(\gamma-1)\dfrac{P_r}{P_g}\omega_{\boldsymbol{F}} = 12\dfrac{\gamma-1}{1+f}\dfrac{c_r^2}{c_T^2}\omega_{\boldsymbol{F}} = \omega_{\boldsymbol{F}}\Upsilon$ – *частота теплообмена*,

определяющая эволюцию и характер акустических волн;

$c_r^2 := (1+f)P_r/\rho$ – *радиационная адиабатическая скорость звука*;

$\Upsilon := 12(\gamma-1)\dfrac{P_r}{P_g} = \dfrac{12(\gamma-1)(1-\beta)}{\beta} = \dfrac{\mathcal{C}_{rV}}{\mathcal{C}_{gV}}$ – *отношение удельных теплоемкостей излучения и газа* (*плазмы*) *при постоянном объеме*;

$P := (P_g + P_r)$ и $S := (s_g + s_r) = \mathcal{C}_{Vg} \ln\left(P_g / \rho^{\gamma}\right) + 4aT^3/3\rho$ – соответственно полное давление и полная энтропия радиационной среды;

$\beta := \dfrac{P_g}{P} = \dfrac{12(\gamma-1)}{\Upsilon + 12(\gamma-1)} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_0}$ – коэффициент, характеризующий долю газа в полном давлении смеси вещества и чернотельного излучения.

3. УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКИ В НАМАГНИЧЕННОЙ СЕРОЙ СРЕДЕ

Получим здесь управляющее уравнение радиационной акустики для намагниченной серой среды путем последовательного исключения всех возмущенных величин из линеаризованных уравнений (25)-(31). В результате крайне трудоемких преобразований получим точное *управляющее уравнение* (седьмого порядка) радиационной акустики в намагниченной серой среде в следующем виде:

$$\left\{\boldsymbol{P}_7 + \omega_{\boldsymbol{F}}\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\boldsymbol{P}_6 + \omega_{\boldsymbol{F}}\Delta\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\boldsymbol{P}_5 + \omega_{\boldsymbol{F}}^2\Delta\left[\left(1+\Upsilon\right)\theta\right]\boldsymbol{P}_4\right\}\psi = 0, \quad (32)$$

где $\psi = \left\{\rho_1, v_1, P_{g1}, \mathcal{J}_1, \mathcal{F}_{r1}, B_1, E_1\right\}$ – возмущенные величины, а операторы $\boldsymbol{P}_7(x,t)$, $\boldsymbol{P}_6(x,t)$, $\boldsymbol{P}_5(x,t)$ и $\boldsymbol{P}_4(x,t)$ для волн седьмого, шестого, пятого и четвертого порядков, соответствующие высокочастотному, среднечастотному и низкочастотному режимам, задаются соотношениями:

$$\boldsymbol{P}_7 = \hat{\omega}\left(\hat{\omega}^2 - c_g^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}^2 - c_f^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}_0^2 - c^2\hat{k}^2\right), \quad (33)$$

$$\boldsymbol{P}_6 = \left(\hat{\omega}^2 - c_l^2\hat{k}^2\right)\left[\hat{\omega}^2 - (c_T^2 + c_A^2)\hat{k}^2\right] + $$

$$+ \frac{\Delta}{\omega_{\boldsymbol{F}}\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]}\hat{\omega}^2\left(\hat{\omega}^2 - c_f^2\hat{k}^2\right)\left[\hat{\omega}^2 - (c_g^2 + c_A^2)\hat{k}^2\right], \quad (34)$$

$$\boldsymbol{P}_5 = \hat{\omega}\left[\left(\hat{\omega}^2 - c_l^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}^2 - c_{ll}^2\hat{k}^2\right) + \frac{c_A^2}{c^2}\left(\hat{\omega}^2 - \frac{\Upsilon\theta}{1+(1+\Upsilon)\theta}c_f^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}_0^2 - c^2\hat{k}^2\right)\right] +$$

$$+\frac{\omega_F}{\Delta}\frac{(1+\Upsilon)\theta}{1+(1+\Upsilon)\theta}\hat{\omega}\left(\hat{\omega}^2-c_\Gamma^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}_0^2-c^2\hat{k}^2\right), \tag{35}$$

$$\boldsymbol{P}_4=\hat{\omega}^2\left[\hat{\omega}^2-\left(c_\Gamma^2+c_A^2\right)\hat{k}^2\right]. \tag{36}$$

Здесь

$c_g^2:=\left(\dfrac{\partial p_g}{\partial\rho}\right)_{S_g}=\gamma\dfrac{p_g}{\rho}$ – *адиабатическая скорость звука в газе*;

$c_\Gamma^2:=\left(\dfrac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S=\Gamma_1\dfrac{P}{\rho}=\Gamma_0\dfrac{P_g}{\rho}=\Gamma_0 c_T^2$ – *изоэнтропическая радиационно-акустическая скорость*;

$\Gamma_1:=\beta+\dfrac{(\gamma-1)(4-3\beta)^2}{\beta+12(\gamma-1)(1-\beta)}=\dfrac{4}{3}\dfrac{\Upsilon^2+(\gamma-1)(15\Upsilon+9\gamma)}{(\Upsilon+1)[\Upsilon+12(\gamma-1)]}$ – обобщенный показатель адиабаты для смеси вещества с излучением (Chandrasekhar, 1961);

$\Gamma_0:=\dfrac{\mathcal{C}_p^{(tot)}}{\mathcal{C}_V^{(tot)}}=\dfrac{\Upsilon^2+(\gamma-1)(15\Upsilon+9\gamma)}{9(\Upsilon+1)(\gamma-1)}=\dfrac{c_\Gamma^2}{c_g'^2}$ – отношение полных удельных теплоемкостей излучающего вещества при постоянном давлении $C_P^{(tot)}$ и постоянном объеме $\mathcal{C}_V^{(tot)}:=\mathcal{C}_{rV}+\mathcal{C}_{gV}$;

$\mathcal{C}_P^{(tot)}-\mathcal{C}_V^{(tot)}=\dfrac{\mathcal{R}}{\mu}\left(1+4\dfrac{P_r}{P_g}\right)^2$ – обобщенное соотношение Майера;

$c_{rg}^2:=c_r^2+c_g^2$ – *радиационная акустическая скорость*;

$c_A:=\sqrt{B/\mu\rho}$ – *групповая скорость волны Альфвена;*

$\Delta:=\sigma/\varepsilon=c^2\sigma\mu$.

Скорости c_I^2 и c_{II}^2 определяются выражением

$$c_I^2, c_{II}^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{37}$$

где

$$A := 1 + (1+\Upsilon)\theta, \quad B := c_{rg}^2 + \left[c_g^2 + 3(\gamma-1)c_r^2 + (c_f^2 + c_g'^2)\Upsilon \right]\theta, \quad C := c_f^2 c_g'^2 \theta\Upsilon. \tag{38}$$

В нерелятивистском приближении, когда справедливо неравенство $P/\rho c^2 \ll \beta^{-1}(1-\beta)\theta$, скорости c_I^2 и c_{II}^2 задаются соотношениями (Kaneko и др., 2005)

$$c_{II}^2 = c_T^2, \quad c_I^2 = \frac{\theta\Upsilon}{1+\theta\left(1+\Upsilon\right)} c_f^2 = \frac{12(\gamma-1)(1-\beta)\theta}{\beta + \left[\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)\right]\theta} c_f^2 \tag{38*}$$

– *уменьшенная скорость волны излучения* (не являющаяся, однако, реальной скоростью распространяющейся волны). Если $(1-\beta)\theta \gg \beta$, то $c_I^2 = c_f^2$, что соответствует р*адиационно-индуцированной волне,* которая возникает из радиационного возмущения со скоростью c_f; если $\theta = 1$, то $c_I^2 = c_f^2 \Upsilon(2+\Upsilon)^{-1}$; если $\theta = 0$, то $c_I^2 = 0$, $c_{II}^2 = c_{rg}^2$.

Уравнение (32) является фундаментальным акустическим уравнением для изучения поведения одномерных радиационных гидродинамических волн в намагниченной серой среде.

Чтобы несколько упростить структуру операторов $\boldsymbol{P}_6$ и $\boldsymbol{P}_5$, далее предположим, что

$$\omega_{\boldsymbol{F}} \ll \Delta = c^2\sigma\mu, \quad (B/\mu\rho)^2 / c^2 \ll 1. \tag{39}$$

Первое предположение является разумным, поскольку величины $l_p := c/\omega_{\boldsymbol{F}}$ и $l_d := c/\Delta$ являются, соответственно, средним свободным путем излучения и расстоянием затухания электромагнитной волны в проводящей среде, то первое неравенство (39) означает, что $l_p \gg l_d$. Второе неравенство (39) всегда выполняется в МГД. При последовательном исключении возмущенных величин из (15)-(21) с учетом предположения (39) можно получить используемое далее управляющее уравнение в равновесном случае

$$\left\{\boldsymbol{P}_7+\Delta\boldsymbol{P}_6'+\omega_{\boldsymbol{F}}\Delta\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\boldsymbol{P}_5'+\omega_{\boldsymbol{F}}^2\Delta\left[\left(1+\Upsilon\right)\theta\right]\boldsymbol{P}_4\right\}\psi=0, \tag{40}$$

где

$$\boldsymbol{P}_6'=\hat{\omega}^2\left(\hat{\omega}^2-c_f^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}^2-a_{Ag}^2\hat{k}^2\right),\quad \boldsymbol{P}_5'=\hat{\omega}\left(\hat{\omega}^2-c_l^2\hat{k}^2\right)\left(\hat{\omega}^2-a_{AT}^2\hat{k}^2\right). \tag{41}$$

Здесь

$$a_{Ag}^2:=c_g^2+(B/\mu\rho)^2,\quad a_{AT}^2:=c_T^2+(B/\mu\rho)^2,\quad a_{A\Gamma}^2:=c_\Gamma^2+(B/\mu\rho)^2 \tag{42}$$

− *адиабатическая, изотермическая и изоэнтропийная магнитоакустические скорости* соответственно.

Чтобы несколько упростить задачу, в этой работе будем предполагать, что в уравнении (40) равновесная скорость $v=0$. Тогда управляющее уравнение радиационной акустики в намагниченной серой среде примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_g^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+$$

$$+\Delta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{Ag}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+$$

$$+\omega_{\boldsymbol{F}}\Delta\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{AT}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+$$

$$+\omega_{\boldsymbol{F}}^2\Delta\left[\left(1+\Upsilon\right)\theta\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{A\Gamma}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0. \tag{43}$$

Наконец, с целью рассмотрения влияния магнитного поля на характер акустических явлений в намагниченной плазме, проигнорируем далее члены высшего порядка, включающие скорость света в уравнении (43); в результате будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{Ag}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+$$

$$+\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{AT}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+$$

$$+\omega_F^2\left[\left(1+\Upsilon\right)\theta\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{A\Gamma}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0. \quad (44)$$

В случае чистого рассеяния энергии $(\theta=0, c_l^2=0)$ из уравнения (44) следует еще более простое управляющее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{Ag}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+\omega_F\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{AT}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0. \quad (45)$$

4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В РАДИАЦИОННОЙ АКУСТИКЕ

Исследуем теперь гармонические решения уравнений низшего порядка, которые могут способствовать пониманию физических процессов, происходящих между намагниченным веществом и излучением, которое пока еще не является полностью удовлетворительным.

Рассмотри для этого плоскую коротковолновую моду возмущения равновесного фона и будем предполагать, что начальное возмущение термодинамических параметров является одномерным синусоидальным колебанием. Тогда все структурные параметры излучающей среды эволюционируют во времени по закону $\psi:=\alpha\exp\left[i(k\,x-\omega t)\right]$, где ω – *частота* гармонических колебаний[3)], а k – *волновое число*, т.е. все возмущения $\rho_1, v_1, P_{g1}, \mathcal{J}_1, \mathcal{F}_{r1}, B_1$ и E_1 зависят только от x и t. Легко убедиться, что в этом случае фундаментальному акустическому уравнению (44) соответствует следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega\left(\omega^2-c_f^2k^2\right)\left(\omega^2-a_{Ag}^2k^2\right)+i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\left(\omega^2-c_l^2k^2\right)\left(\omega^2-a_{AT}^2k^2\right)+$$

[3)] Действительная часть комплексной частоты ω связана с фазовой скоростью $V=\left|Re\,\omega\right|/k$, а обратная мнимая часть дает время затухания волны $t_d=1/\left|Im\,\omega\right|$.

$$+\omega_F^2\omega\left(1+\Upsilon\right)\theta\left(\omega^2-a_{A\Gamma}^2k^2\right)=0. \qquad (46)$$

В случае чистого рассеяния энергии $(\theta=0, c_l^2=0)$ из уравнения (46) следует более простое дисперсионное соотношение

$$\omega\left(\omega^2-c_f^2k^2\right)\left(\omega^2-a_{Ag}^2k^2\right)+i\omega_F\Delta\omega^2\left(\omega^2-a_{AT}^2k^2\right)=0\ , \qquad (47)$$

решение которого описывает частоты распространяющихся волновых мод, возникающих в результате обмена импульсами между намагниченным веществом и излучением.

Как уже упоминалось во Введении, у нас есть два различных способа анализа дисперсионного соотношения (46). Один из них – решить уравнение (46), выбрав волновой вектор k в качестве заданного вещественного параметра, в этом случае частота ω является комплексной величиной. Другой – решить уравнение (46), взяв ω в качестве заданного вещественного параметра, в этом случае k является комплексным числом.

Если уравнение (46) рассматривается как функция от комплексной частоты ω (при этом $Im k=0$), то его можно записать в виде уравнения пятого порядка

$$\omega^5+i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\omega^4-\left[(c_f^2+a_{Ag}^2)k^2+\omega_F^2(1+\Upsilon)\theta\right]\omega^3-$$

$$-i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\left[(c_l^2+a_{AT}^2)k^2\right]\omega^2+\left[c_f^2\,a_{Ag}^2k^4+\omega_F^2(1+\Upsilon)\theta a_{A\Gamma}^2k^2\right]\omega+$$

$$+i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]c_l^2a_{AT}^2k^4=0. \qquad (48)$$

Альтернативное выражение для уравнения (47) может быть записано в виде биквадратного уравнения относительно комплексного волнового числа k при заданном вещественном параметре ω

$$\left\{c_f^2\,a_{Ag}^2\omega+i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]c_l^2a_{AT}^2\right\}k^4-$$

$$-\left\{(c_f^2+a_{Ag}^2)\omega^3+i\omega_F\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right](c_l^2+a_{AT}^2)\omega^2-\omega_F^2(1+\Upsilon)\theta a_{A\Gamma}^2\omega\right\}k^2+$$

$$+\left\{\omega^5 + i\omega_{\boldsymbol{F}}\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\omega^4 - \omega_{\boldsymbol{F}}^2(1+\Upsilon)\theta\omega^3\right\} = 0. \qquad (49)$$

Для чистого рассеяния $(\theta = 0, c_l^2 = 0)$ соотношение (49) принимает более простой вид:

$$c_f^2\, a_{Ag}^2 k^4 - \left[(c_f^2 + a_{Ag}^2)\omega^2 + i\omega_{\boldsymbol{F}} a_{AT}^2 \omega\right] k^2 + \omega^4 + i\omega_{\boldsymbol{F}}\omega^3 = 0. \qquad (50)$$

Это уравнение играет важную роль при определении того, какие моды возникают в результате простого обмена импульсами между веществом и излучением.

Формальное решение. Как уже говорилось, в данной работе мы остановится на исследовании уравнения (49), поскольку уравнение (48) достаточно основательно изучено в литературе (см. Cogley, Vincenti,1969; Mihalas, Mihalas, 1983, 1999; Simmons, Mihalas, 2000; Kaneko и др., 2005; Kato, Fukue, 2020, Колесниченко, 2023). В этом случае наша задача заключается в анализе плоских волн, которые возникают от малоамплитудных начальных возмущений волнового числа k. Заметим, что действительная и мнимая части комплексного числа k задают фазовую скорость $V = \omega / |Re\, k|$ и длину затухания $d = 1/|Im\, k|$ соответственно.

Введем теперь безразмерные частоту $\overleftrightarrow{\omega}$ и волновое число $\overleftrightarrow{k}$

$$\overleftrightarrow{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{\boldsymbol{F}}} = 2\pi\left(\frac{l_p}{\lambda}\right)\left(\frac{V}{c}\right), \qquad \overleftrightarrow{k} = \frac{c}{\omega_{\boldsymbol{F}}} k = l_p k, \qquad (51)$$

где $\lambda = 2\pi V/\omega -$ длина волны возмущения частоты ω, распространяющегося с фазовой скоростью V. Действительная часть $\left|Re\,\overleftrightarrow{k}\right|$ также связана с τ оп-
ти-
ческой глубиной одной длины волны каждой моды частоты ω при ее скорости как $\tau/2\pi = 1/\left|Re\,\overleftrightarrow{k}\right|$

Уравнение (49) в безразмерной форме принимает вид:

$$L\overleftrightarrow{k}^4 - M\overleftrightarrow{k}^2 + N = 0, \qquad (52)$$

где

$$L=\left[\frac{c_f^2(c_g^2+c_A^2)}{c^4}\overset{\leftrightarrow}{\omega}+i\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\frac{c_l^2(c_T^2+c_A^2)}{c^4}\right],$$

$$M=\frac{c_f^2+c_g^2+c_A^2}{c^2}\overset{\leftrightarrow}{\omega}^3+i\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\frac{c_l^2+c_T^2+c_A^2}{c^2}\overset{\leftrightarrow}{\omega}^2-(1+\Upsilon)\theta\frac{c_\Gamma^2+c_A^2}{c^2}\overset{\leftrightarrow}{\omega}, \quad (53)$$

$$N=\overset{\leftrightarrow}{\omega}^5+i\left[1+(1+\Upsilon)\theta\right]\overset{\leftrightarrow}{\omega}^4-(1+\Upsilon)\theta\overset{\leftrightarrow}{\omega}^3.$$

Формальные решения уравнения (52) можно представить в виде:

$$\overset{\leftrightarrow}{k}^{(1)}=\pm\left[\frac{M-\sqrt{M^2-4LN}}{2L}\right]^{1/2}, \quad \overset{\leftrightarrow}{k}^{(2)}=\pm\left[\frac{M+\sqrt{M^2-4LN}}{2L}\right]^{1/2}, \quad (54$$

где $\overset{\leftrightarrow}{k}^{(1)}$ и $\overset{\leftrightarrow}{k}^{(2)}$ – волновые векторы для радиационно-индуцированных и модифицированных магнитным полем классических гидродинамических волн соответственно; а знаки перед квадратной скобкой обозначают два направления распространения. Таким образом, общее решение задается как линейная комбинация двух комплексных решений $\overset{\leftrightarrow}{k}^{(1)}$ и :

$$\psi=\alpha_1\exp\left[i\omega_F(c^{-1}\overset{\leftrightarrow}{k}_1 x-\overset{\leftrightarrow}{\omega}t)\right]+\alpha_2\exp\left[i\omega_F(c^{-1}\overset{\leftrightarrow}{k}_2 x-\overset{\leftrightarrow}{\omega}t)\right]. \quad (55)$$

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА УИТХЭМА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В РАДИАЦИОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Используемый в этом разделе метод Уитхэма (Whitham, 1959) приближенного решения задачи распространения акустических волн позволяет, как было указано во Введении, заменить точное управляющее уравнение набором приближенных уравнений низшего порядка, каждое из которых является частью достоверного приближения к точному уравнению в определенной области независимой временной переменной. Для каждой скорости распространения, входящей в точное уравнение, можно получить собственное управляющее уравнение низшего порядка. При этом решение уравнения низшего порядка, которое во многих случаях можно получить в замкнутой форме, представляет собой часть общего решения. Преимуществом данного метода является разделение задачи на физически значимые части, что дает возможность увидеть, каким образом развиваются во времени результирующие формы отдельных волн возмущения. В работе мы ограничимся только линейными задачами. Однако, как показал Уитхэм, линейные решения являются важным первым шагом в понимании соответствующих нелинейных явлений.

Добавим к сказанному, что относительно простая форма уравнений низшего порядка позволяет без формального решения полной задачи определить явно, какого типа отклика на возмущение равновесного фона системы можно ожидать. В радиационной акустике возможно появление так называемых вырожденных скоростей со значениями ноль и бесконечность. Эти вырожденные скорости могут представлять собой диффузионные механизмы, которые приводят к возникновению чисто диффузионных волн. Метод Уитхэма носит эвристический и приближенный характер и не претендует на математически строгую аргументацию. Поэтому его точность не приводится в качестве неотъемлемой части метода. Вместе с тем, как показало сравнение результатов, полученных подобным методом и полученных с помощью численного решения точного управляющего уравнения, их точность весьма высока в широком диапазоне частот для всех режимов радиационной акустики (см. Vincenti, Baldwin, 1962; Lick, 1964; Moore, 1966; Long, Vincenti, 1967; Cogley, Vincenti, 1969; Kaneko и др., 2005). Исключения возможны в небольших областях частот, при которых решение переходит от одного уравнения низшего порядка к другому, но и в этом случае аналитические результаты не имеют серьезных отклонений.

Продемонстрируем теперь возможности эвристического подхода Уитхэма на примере определения характерных черт для основных (но не всех) фундаментальных акустических мод в радиационной магнитной акустике.

5.1. Одномерные радиационные волны в высокочастотном режиме

В этом разделе поясним метод Уитхэма, рассмотрев в качестве простого примера высокочастотный *радиационно-волновой режим*. С этой целью положим в точном управляющем уравнении радиационной акустики (44)

$\partial^2/\partial t^2 \approx c_f^2\,\partial^2/\partial x^2$, что соответствует трактовке Уитхэма о том, что радиационная волновая мода со скоростью c_f аппроксимируется заданием $\partial/\partial t \approx \pm c_f\,\partial/\partial x$.

Поскольку радиационно-волновой режим излучения волн имеет пятый порядок, то можно пренебречь в уравнении (44) членом, описывающим волны третьего порядка P_3. В двух оставшихся частях уравнения (44) с помощью выбранного аппроксимационного соотношения для $\partial^2/\partial t^2$ в членах, включающих скорости a_{gA}^2, c_l^2 и a_{TA}^2, производную $\partial^2/\partial t^2$ заменим на $c_f^2\,\partial^2/\partial x^2$, а затем к обрезанному уравнению радиационной акустики применим очевидные неравенства $a_{gA}^2 \ll c_f^2$ и $a_{TA}^2 \ll c_f^2$. В результате получим следующее приближенное управляющее уравнение в виде радиационной части для возмущенных величин $\psi = \{E_{r1}, \mathcal{F}_{r1}\}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)\frac{\partial}{\partial t} - c_f^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi = 0, \qquad (56)$$

где для оценки c_l^2 было использовано соотношение $c_l^2 = \dfrac{c_f^2\theta\Upsilon}{1+\theta(1+\Upsilon)}$.

Подставляя гармоническое возмущение вида $\psi \sim \exp[i(kx - \omega t)]$, в уравнение (56), получим дисперсионное соотношение для режима распространения *волны-излучения*

$$\omega^2 + i\omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)\omega - c_f^2 k^2 = 0. \qquad (57)$$

Коэффициент $\omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)$ в этом уравнении означает, что затухание радиационно-волновой моды обусловлено как потерей потока энергии излучения из-за непрозрачности, так и потерей плотности энергии за счет реабсорбции. Уравнение (56) (или (57)) характеризуется следующей специфической частотой: $\omega_c(f) = \omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)/2$. При ограничении $\omega > \omega_c(f)$ уравнение (57) для радиационно-волновой моды имеет решение

$$\pm k_c(f) \simeq \frac{\omega}{c_f} + i\frac{\omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)}{2c_f}. \tag{58}$$

Обратная мнимая часть уравнения (58) дает длину затухания

$$d_f = \frac{1}{\left|Im\, k_c(f)\right|} = \frac{2c_f}{\omega_{\boldsymbol{F}}(1+\theta)} = \frac{2l_p}{\sqrt{3}(1+\theta)}. \tag{59}$$

Таким образом, величина d_f порядка длины среднего свободного пробега фотона l_p. Вместе с ограничением $\omega > \omega_c(f)$ это означает, что длина волны радиационно-волновой моды $\lambda = 2\pi c_f / \omega$ соответствует оптически тонкому режиму.

В случае рассеяния без обмена энергией между веществом и излучением, когда в приведенном выше результате $\theta = 0$, эффект истинного излучения отсутствует, и взаимодействие между ними происходит только за счет обмена импульсом. В этом случае дисперсионное соотношение (58) принимает вид:

$$\omega^2 + i\omega_{\boldsymbol{F}}\omega - c_f^2 k^2 = 0. \tag{57*}$$

Именно это уравнение определяет поведение радиационной моды при строго консервативном условии и, следовательно, отвечает *консервативной волне излучения.*

Итак, выполненное рассмотрение показало, что магнитное поле не оказывает влияния на скорость распространения *радиационной волны* со скоростью c_f.

5.2. Адиабатическая магнитно-звуковая мода

Для исследования адиабатического режима магнитно-звуковой волны положим в управляющем уравнении магнитно-радиационной акустики (44) $\partial^2/\partial t^2 \approx (c_g^2 + c_A^2)\partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2 \gg c_g^2 + c_A^2$ и $P_3 = 0$, уравнение (44) может быть аппроксимировано для возмущенных величин $\psi = \left\{\rho_1, v_1, P_{g1}\right\}$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-[c_g^2+(B/\mu\rho)^2]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi+\left(\omega_{\boldsymbol{F}}\frac{c_r^2}{c_f^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\omega_{th}\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \tag{60}$$

Поскольку член затухания из-за охлаждения $\theta\omega_{th}\dfrac{\gamma-1}{\gamma}=12\dfrac{\theta(\gamma-1)^2}{\gamma(1+f)}\dfrac{c_r^2}{c_T^2}\omega_{\boldsymbol{F}}$ намного больше, чем сила радиационного сопротивления $\omega_{\boldsymbol{F}}c_r^2/c_f^2$, то уравнение (60) может быть переписано в более простом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-[c_g^2+(B/\mu\rho)^2]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\omega_{th}\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0. \tag{61}$$

С другой стороны, в случае рассеяния из (60) следует уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-[c_g^2+(B/\mu\rho)^2]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega_{\boldsymbol{F}}\frac{c_r^2}{c_f^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0. \tag{62}$$

В следующем разделе будет показано, что в случае рассеяния не возникает магнитно-изотермической звуковой моды, а магнитно-адиабатическая звуковая мода занимает как высокочастотный, так и среднечастотный режимы.

Запишем теперь дисперсионное соотношение, соответствующее управляющему уравнению (61):

$$\omega^2+i\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\omega_{th}\theta\right)\omega-[c_g^2+(B/\mu\rho)^2]k^2=0. \tag{63}$$

Уравнение (61) (или (63)) имеет следующую характеристическую частот

$$\omega_c(\mathrm{gA})=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\omega_{th}\theta. \tag{64}$$

Принимая ограничение $\omega>\omega_c(\mathrm{gA})$ для магнитно-адиабатической звуковой моды, получим следующее решение уравнения (63) (Mihalas, Mihalas,1999):

$$\pm k_{gA} = \frac{\omega}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2} + i\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\omega_{th}\theta}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2}. \tag{65}$$

Из выражения (65) следует, что длина затухания магнитно-адиабатической звуковой волны, т.е. порядок расстояния, которое проходит волна за время охлаждения t_N, оценивается как

$$d_{gA} = \frac{1}{\left|Im\, k_{gA})\right|} = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega_{th}\theta}(c_g^2 + c_A^2) \sim (c_g^2 + c_A^2)\, t_N\,. \tag{66}$$

В случае рассеяния решение уравнения (62) принимает вид

$$\pm k'_{gA} = \frac{\omega}{c_g^2 + (B/\mu\rho)^2} + i\frac{\omega_F}{2[c_g^2 + (B/\mu\rho)^2]}\frac{c_r^2}{c_f^2}\ . \tag{67}$$

Ниже будет показано, что, когда обмен энергией между веществом и излучением мал, сила радиационного сопротивления управляет затуханием магнитно-адиабатического звукового режима как в высокочастотном, так и в среднечастотном режимах.

5.3. Изотермическая магнитно-звуковая мода

Для исследования изотермической магнитно-звуковой волны положим в управляющем уравнении (44) $\partial^2/\partial t^2 \approx [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]\partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_f^2, c_l^2 \gg a_{gA}^2, c_{TA}^2$, получим следующее уравнение для возмущенных величин $\psi = \left\{\rho_1, v_1, \delta P_{g1}\right\}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi + \omega_F\frac{c_r^2}{c_f^2}\left(1 + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{3c_r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3}. \tag{68}$$

Соответствующее дисперсионное соотношение для *изотермической магнитно-звуковой моды* принимает вид:

$$\omega^2 + i\left[\frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}}\omega^3 + \omega_{\boldsymbol{F}}\left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + c_A^2}{c}\right)\omega\right] - (c_T^2 + c_A^2)k^2 = 0. \qquad (69)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\pm k_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i\left[(\gamma-1)\frac{\omega^2}{\theta\omega_{th}} + \omega_{\boldsymbol{F}}\left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c}\right)\right]. \qquad (70)$$

Мнимая часть этого решения состоит из двух частей: одна часть пропорциональна величине $(\gamma-1)\omega^2/\theta\omega_{th}$, а другая – величине $\omega_{\boldsymbol{F}}[c_r^2/c_f^2 + (c_T^2 + c_A^2)/c]$. Вследствие различия в механизме демпфирования *магнитно-изотермический режим* звука может быть разделен на две подмоды.

Пренебрегая сначала вторым членом в левой части уравнения (68), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi - \frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3} = 0. \qquad (71)$$

Это уравнение описывает магнитно-изотермический акустический режим в наиболее высокочастотной части, которая называется *режимом охлаждения*. Решение уравнения (71) имеет вид:

$$\pm k_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i\frac{\gamma-1}{\theta\omega_{th}}\omega^2. \qquad (72)$$

Таким образом, этот режим можно назвать *изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием при охлаждении*. Уравнение (71) согласуется с решением изотермического звукового режима, полученным Михаласом и Михаласом (1999).

Уравнение (71) имеет характерную частоту

$$\omega_c(TA) = 2\omega_{th}\theta/(\gamma-1). \qquad (73)$$

Условие $\omega_c(TA) \sim \omega_{th}\theta$ накладывает более высокую степень блокировки на изотермичкий магнитно-звуковой режим. Длина затухания изотермической магнитно-звуковой моды с охлаждением находится из решения (72) и имеет вид:

$$d_{TA} = \frac{1}{|Im\, k_{TA})|} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{\omega_{th}\theta} \left(\frac{\omega_c(TA)}{\omega} \right)^2 . \qquad (74)$$

Эта длина оценивается как $\sim (c_T^2 + c_A^2) t_N$ при $\omega \sim \omega_c(TA)$. Сравнение с частотой (64) показывает, что справедливо неравенство $\omega_c(\mathrm{gA}) < \omega_c(TA)$. Это неравенство означает, что адиабатический магнитно-звуковой режим накладывается на изотермический магнитно-звуковой режим в диапазоне $\omega_c(\mathrm{gA}) < \omega < \omega_c(TA)$. Другими словами, можно считать, что адиабатический магнитно-звуковой режим и изотермический магнитно-звуковой режим с охлаждением взаимодействуют друг с другом в этой области перекрытия. Частоту перехода между этими двумя магнитно-звуковыми режимами можно определить как

$$\omega_c(\mathrm{gA}\text{–}TA) = \sqrt{\omega_c(\mathrm{gA})\omega_c(TA)} = \omega_{th}\theta / \gamma . \qquad (75)$$

Таким образом, адиабатическая магнитно-звуковая мода, возникающая в области $\omega > \omega_c(\mathrm{gA}\text{–}TA)$, гасится при $\omega \sim \omega_c(\mathrm{gA}\text{–}TA)$ радиационным охлаждением, за которым следует изотермическая магнитно-звуковая мода с охлаждением при $\omega < \omega_c(\mathrm{gA}\text{–}TA)$.

Возвращаясь теперь к уравнению (68) и пренебрегая его правой частью, в результате получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + \omega_F \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 . \qquad (76)$$

Очевидно, что второй член в левой части уравнения (76) возникает из-за силы сопротивления. Таким образом, частотный режим, в котором выполняется уравнение (76), можно назвать *режимом тяглового усилия*. Решение уравнения (76) дается выражением

$$\pm k'_{TA} = \frac{\omega}{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2} + i \frac{\omega_F}{2(c_T^2 + c_A^2)} \left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right). \qquad (77)$$

Этот режим может быть назван *изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием, вызванным силой сопротивления*.

В разд. 3.2. было показано, что величина $\omega_F c_r^2 / c_f^2$ является частью силы радиационного сопротивления. В случае рассеяния без обмена энергией между намагниченным веществом и излучением уравнение (75) заменяется уравнением (62), а решение (77) − уравнением (67), в котором только сила радиационного сопротивления появляется как член затухания. Это означает, что в случае рассеяния высокочастотный и среднечастотный режимы заняты адиабатической звуковой модой, затухание которой обусловлено только силой радиационного сопротивления.

В излучающей и рассеивающей среде сила сопротивления имеет более общий вид, приведенный выше. Фигурирующая в уравнении (76) величина $\omega_F (c_T^2 + c_A^2) / c^2$ может быть названа *тепловой частью силы сопротивления*, которая, очевидно, возникает в результате обмена энергией.

Таким образом, величину $\omega_F [c_r^2 / c_f^2 + (c_T^2 + c_A^2) / c^2]$ можно назвать полной *радиационной магнитно-тепловой силой сопротивления*. Когда намагниченное вещество и излучение взаимодействуют друг с другом посредством обмена энергией и импульсом, магнитно-акустическая мода, гасимая силой сопротивления, является не магнитно-адиабатической, а магнитно-изотермической звуковой модой, и ее затухание обусловлено радиационно-тепловой силой сопротивления.

Уравнение (75) имеет следующую характерную частоту:

$$\omega_c'(\mathrm{TA}) = \frac{\omega_F}{2}\left(\frac{c_r^2}{c_f^2} + \frac{c_T^2 + (B/\mu\rho)^2}{c^2} \right) = \frac{1}{t'_{\mathrm{TA}}}. \tag{78}$$

Неравенство $\omega > \omega_c(TA)$ для действительного параметра ω является ограничением для изотермической магнитно-звуковой моды с демпфированием силой сопротивления. Длина демпфирования составляет

$$d'_{TA} = \frac{1}{|Im k'_{TA})|} = \frac{2[c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]}{\omega_F} \frac{c_f^2}{c_r^2 + [c_T^2 + (B/\mu\rho)^2]/3} = (c_T^2 + c_A^2) t'_{TA}. \tag{79}$$

Определим теперь частоту $\omega_c''(TA)$, при которой возможен переход между изотермическим магнитно-звуковым режимом с затуханием охлаждением и с затуханием, вызванным силой сопротивления, таким образом, что

$$\omega_F\left(\frac{c_r^2}{c_f^2}+\frac{c_T^2+(B/\mu\rho)^2}{c^2}\right)=\frac{\gamma-1}{\omega_{th}\theta}[\omega_c''(TA)]^2. \tag{80}$$

Тогда величина

$$\omega_c''(TA)=\sqrt{\omega_c(TA)\omega_c'(TA)}=\sqrt{\frac{\omega_F\omega_{th}\theta}{\gamma-1}\left(\frac{c_r^2}{c_f^2}+\frac{c_T^2+(B/\mu\rho)^2}{c^2}\right)} \tag{81}$$

является той частотой, при которой эффект радиационного охлаждения уравновешивается эффектом радиационно-теплового сопротивления, как механизмом демпфирования. Таким образом, уравнение (71) справедливо в режиме охлаждения в диапазоне $\omega_c(TA)>\omega>\omega_c''(TA)$, а уравнение (76) справедливо в режиме демпфирования силой сопротивления, когда заданная частота ω удовлетворяет неравенству

$$\omega_c''(TA)>\omega>\omega_c(TA).$$

5.4. Радиационная изоэнтропийная магнитно-звуковая мода

Для исследования радиационного изоэнтропийного магнитно-акустического режима распространения одномерной волны возмущения в излучающем газе положим в управляющем уравнении (44) $\partial^2/\partial t^2\approx c_\Gamma^2\partial^2/\partial x^2$. В результате, при использовании предположений $c_l^2\gg c_\Gamma^2$ и $P_5=0$, получим следующее упрощенное управляющее уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c_\Gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\mathcal{G}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3}\ ,\quad \mathcal{G}:=\frac{c_f^2c_r^2}{\omega_F c_\Gamma^4}\left[\frac{\Upsilon}{1+\Upsilon}\left(1+\frac{c_T^2+(B/\mu\rho)^2}{3c_r^2}\right)\right]^2.$$

(82)

В случае рассеяния скорость c_Γ^2 заменяется на $c_{gr}^2+(B/\mu\rho)^2$ и коэффициент $\mathcal{G}$ – на

$$\mathcal{G}'=c_f^2 c_r^2 \,/\, \omega_{\boldsymbol{F}}\left(c_{gr}^2+(B/\,\mu\rho)^2\right)^2 \ . \tag{83}$$

Дисперсионное соотношение для управляющего уравнения (82) имеет вид:

$$\omega^2-c_\Gamma^2 k^2=-i\mathcal{G}\omega^3 \ . \tag{84}$$

Это уравнение характеризуется следующей частотой:

$$\omega_c(\Gamma)=\frac{\omega_{\boldsymbol{F}} c_\Gamma^4}{c_f^2 c_r^2}\left[\frac{1+\Upsilon}{\Upsilon}\frac{3c_r^2}{3c_r^2+c_T^2+(B/\,\mu\rho)^2}\right]^2=\frac{1}{t_\Gamma}. \tag{85}$$

Если справедливо неравенство $\omega<\omega_c(\Gamma)$, то решение уравнения (84) будет иметь вид:

$$\pm k_\Gamma=\frac{\omega}{c_\Gamma}+i\frac{\mathcal{G}}{2c_\Gamma}\omega^2=\frac{\omega}{c_\Gamma}+i\frac{c_f^2 c_r^2}{2\omega_{\boldsymbol{F}} c_\Gamma^5}\left[\frac{\Upsilon}{1+\Upsilon}\left(1+\frac{c_T^2+(B/\,\mu\rho)^2}{3c_r^2}\right)\right]^2\omega^2. \tag{86}$$

Сравним теперь характеристическую частоту $\omega_c(\Gamma)$ с частотой $\omega'_c(TA)$ (см. (78)). В случае с преобладанием излучения имеет место приближенное равенство $\omega_c(\Gamma)\simeq\omega'_c(TA)$. Это означает, что переход изотермической магнитно-звуковой моды в радиационную изоэнтропийную магнитно-акустическую происходит при $\omega\sim\omega'_c(TA)$.

С другой стороны, в случае с преобладанием намагниченной плазмы мы имеем $\omega_c(\Gamma)>\omega'_c(TA)$, то есть изотермическая магнитно-звуковая мода и радиационная изоэнтропическая магнитно-акустическая мода перекрываются в пределах $\omega_c(\Gamma)>\omega>\omega'_c(TA)$. Следовательно, можно определить частоту перехода между этими двумя модами как

$$\omega_c(T\!-\Gamma)=\sqrt{\omega_c(\Gamma)\omega'_c(TA)}=\omega_{\boldsymbol{F}}\frac{c_\Gamma^2}{c_f^2}\frac{1+\Upsilon}{\Upsilon}\sqrt{\frac{3c_r^2}{3c_r^2+c_T^2+(B/\,\mu\rho)^2}}\,. \tag{87}$$

Таким образом, в случае намагниченной материи изотермическая магнитно-звуковая мода сливается при $\omega\sim\omega_c(T\!-\Gamma)$ радиационную изоэнтропийную магнитно-акустическую моду, а диапазон частот для изотермического звука $\omega_c(gA{-}TA) > \omega > \omega_c(T{-}\Gamma)$ становится более узким с уменьшением интенсивности излучения. Если критическая частота $\omega_c(gA{-}TA)$ становится равной частоте $\omega_c(T{-}\Gamma)$, то изотермический режим звука исчезает, когда имеет место преобладание намагниченной плазмы.

В заключение этого раздела отметим, что уравнение (82) имеет ту же математическую форму, что и уравнение (71), управляющее магнитно-изотермическим режима звука в случае охлаждения. Как видно из вышеизложенного, радиационная изоэнтропийная магнитно-акустическая волна затухает при $\omega \sim \omega_c(\Gamma)$ за счет поглощения энергии волны. Между тем изотермическая магнитно-звуковая волна исчезает при $\omega \sim \omega_c(TA)$, поскольку эффект радиационного охлаждения становится недостаточным вблизи этой частоты для поддержания изотермического состояния. Магнитно-изотермическая звуковая волна гасится не за счет поглощения волновой энергии, а за счет неактивной роли радиационного охлаждения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многие современные исследования в области астрофизики требуют изучения динамики излучающих потоков. В данной работе проанализированы уравнения радиационной магнитной гидродинамики с целью понимания их математической структуры. Основная часть проведенных здесь исследований направлена на моделирование линейных явлений в потоке намагниченной плазмы, поскольку результаты линейного анализа часто дают фундаментальные представления и концептуальные рамки, в которых могут быть интерпретированы и поняты результаты нелинейных расчетов. В частности, анализ распространения одномерных волн играет центральную роль в процессе модификации численных схем Годунова высокого порядка, поскольку облегчают построение надежных алгоритмов для решения гиперболических уравнений радиационной акустики.

В работе рассматривается распространение линейных акустических возмущений в бесконечной однородной серой излучающей плазме, первоначально находящейся в радиационном равновесии. Во всех предыдущих работах по этой проблеме рассматривалось в основном влияние радиационного энергообмена на волновое движение излучающей жидкости, но при этом не учитывалось воздействие магнитного поля на распространение радиационных волн в намагниченной плазме. Кроме этого, часто пренебрегалось широко используемой в настоящей работе радиационной термодинамикой, которая оказалась весьма эффективной при анализе волновых явлений в радиационной гидродинамике.

В работе выведено управляющее уравнение радиационной акустики с учетом влияния поперечного магнитного поля и получены его приближенные решения. Соответствующие ему управляющие уравнения низкого порядка и их аналитические решения могут служить удобным математическим инструментом для исследования поведения акустических волн в различных физических условиях излучающей намагниченной плазмы. Проблема распространения линейных гармонических волн проанализирована в работе с использованием метода Уитхема, с помощью которого были установлены фундаментальные свойства этих волн с учетом влияния на их распространения поперечного магнитного поля.

Исходная система уравнений (1)-(6), (9) и (10) радиационной МГД для намагниченной излучающей серой среды описывает поведение как классических, так и различных радиационно-индуцированных мод, рассмотренных, в частности, в работе (Колесниченко, 2023). Единственное отличие состоит в том, что адиабатическая, изотермическая и изэнтропическая скорости звука и радиационно-акустическая скорость заменены на адиабатическую, изотермическую и изэнтропическую магнитно-акустическую скорость и радиационную магнитно-акустическую скорость, соответственно. При этом следует заметить, что важным отличием от классических результатов является то, что намагниченная плазма допускает и другие малоизученные в литературе простые волны. К ним, в частности относятся радиационно-диффузионная мода постоянного объема, моды с затуханием при непрозрачности и затуханием при охлаждении и некоторые другие. Однако на распространение этих волн поперечное магнитное поле влияния не оказывает.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бисноватый-Коган Г. С., Блинников С. И. Распространение волн в средах с высоким давлением излучения. I. Уравнения и случай однородной среды // Астрофизика. 1978. Т. 14. С. 563-577.

Колесниченко А.В. Простые волны и малоамплитудные возмущения в радиационной газодинамике // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № . 36 с.

Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах // М.: Изд.- во: Московский лицей. 1998. 412 с.

Курант Р., Фридрихс *К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны // Москва: Изд-во Ин. Лит. 1950. 426 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 733 с.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны // Изд-во Мир. 1977. 624 с.

Agol E., Krolik J. Photon Damping of Waves in Accretion Disks// The Astrophysical Journal, 1998. V. 507 №1. P. 304-315.

Balsara D. S. An analysis of the hyperbolic nature of the equations of radiation hydrodynamics // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1999. V. 61. No. 5. P. 617-527.

Balsara D. S.The eigen structure of the equations of radiation magnetohydrodynamics. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1998. V. 61. P. 637-646.

Buchler J.R. Radiation hydrodynamics in the fluid frame // J.Quant.Spectrosc. Radiat.Transfer/ 1979. V.22. P. 293-300.

Cogley A. C., Vincenti W. G. Application to radiative acoustics of Whitham's method for the analysis of non-equilibrium wave phenomena // J. Fluid. Mech.1969. V. 39. P. 641.

Cox J. P., Giuli R.T. Principles of Stellar Structure // New York: Gordon & Breach. 1968. 804 p.

Glatzel W. On the origin of strange modes and the mechanism of related instabilities // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1994. V. 271. P. 66-74.

Hsieh S.-H., Spiegel E.A. The equations of photohydrodynamis// The Astrophysical Journal. 1976. V. 207. P.244-252.

Jiang, Y-F., Stone J. M., Davi S. W. A Godunov method for multidimensional radiation magnetohydrodynamics based on a variable eddington tensor // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2012. V. 199. P. 14 (1-29).

Johnson B.M., Richard I. Klein R.I. Numerical tests and properties of waves in radiating fluids //Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2010. V. 111. P. 723–741.

Kaneko N., Habe A., 0no Y .Linear waves in a radiating and scattering grey medium. III. The effect of a non-transverse magnetic field // Astrophysics and Space Science. 1977. V. 50. P. 451-460.

Kaneko N., Morita K., Maekawa M. The comoving-frame equation of radiative transfer in a curvilinear coordinate system // Astrophysics and Space Science. 1984. V. 107. P. 333-346.

Kaneko N., Morita K., Satoh T., Hayasaki K. Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium II. Solutions of given real wave number *k* // Astrophysics and Space Science. 2005. V. 299. P. 263–306.

Kato S., Fukue J. Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics Hydrodynamics. Magnetohydrodynamics, and Radiation Hydrodynamics //Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2020. 625 p.

Lick, W. J. The propagation of small disturbances in a radiating gas // J. Fluid Mech.1964 V.18.P. 274.

Long H. R.,Vincenti W. G. Radiation-driven acoustic waves in a confined gas // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1365.

Lowrie R.B., More J.E. Issues with high-resolution Godunov methods for radiation hydrodynamics // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2001. V.69.P. 475-489.

Mihalas D., ***Mihalas B. W***. On the propagation of acoustic waves in a radiating fluid //Astroph. J. 1983. V. 273. P.355-362.

Mihalas D., Mihalas, B.W. Foundations of Radiation Hydrodynamics // New York:. Oxford Univ. Press 1999. 731 p.

Moore F.K. Effect of radiative transfer on a sound wave travelling in a gas having y near one. Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 70.

Simmons K. H., Mihalas D.A. Linearized analysis of the modified $P_{1/3}$ equations //Journal of Quantitative Spectroscopy &Radiative Transfer. 2000. V. 66 P. 263-269.

Vincenti W., ***Baldwin B***. Effect of thermal radiation on the propagation of plane acoustic waves //J. Fluid Mech. 1962. V. 12 P. 449-477.

Whitham G.B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics // Comm. Pure Appl. Math.1959. V. 12. P.113.

ОГЛАВЛЕНИЕ