



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.А. Таюрский](#)

Исследование влияния
неоднородности плазмы с
учётом тормозного и
фоторекомбинационного
излучений на поглощение
альфвеновской волны

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Таюрский А.А. Исследование влияния неоднородности плазмы с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений на поглощение альфвеновской волны // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 5. 16 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-5>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-5>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.А.Таюрский

**Исследование влияния неоднородности
плазмы с учётом тормозного
и фоторекомбинационного излучений
на поглощение альфвеновской волны**

Москва — 2023

Таюрский А.А.

Исследование влияния неоднородности плазмы с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений на поглощение альфвеновской волны

В работе численно исследовано нелинейное поглощение плоской альфвеновской волны, падающей на неподвижную границу диссипативной неоднородной плазмы, обусловленное диссипативными факторами, в том числе тормозным, фоторекомбинационным излучениями. Рассмотрены неоднородности по плотности, заданные при помощи гауссова распределения. В основу исследования положены уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики с полным учётом инерции электронов. Предложенная неявная разностная схема расчёта плоскопараллельных течений двухжидкостной плазмы позволила выявить ряд важных закономерностей поглощения. В частности, показано, что поглощение с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений для неоднородной плазмы приводит к запиранию альфвеновской волны в диссипативной плазме. Получены зависимости глубины проникания альфвеновской волны и максимальных температур электронов и ионов от размеров неоднородности по плотности.

Ключевые слова: классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), альфвеновская волна, тормозное излучение, фоторекомбинационное излучение

Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Investigation of the effect of plasma inhomogeneity with bremsstrahlung and photorecombination radiation on the absorption of an Alfvén wave

We numerically study the nonlinear absorption of a plane Alfvén wave incident on a fixed boundary of a dissipative inhomogeneous plasma, which is caused by dissipative factors, including bremsstrahlung and photorecombination radiation. Density inhomogeneities specified using a Gaussian distribution are considered. The study is based on the equations of two-fluid electromagnetic hydrodynamics with full allowance for the inertia of electrons. The proposed implicit difference scheme for calculating plane-parallel flows of a two-fluid plasma made it possible to reveal a number of important absorption patterns. In particular, it is shown that absorption with allowance for bremsstrahlung and photorecombination radiation for an inhomogeneous plasma leads to blocking of the Alfvén wave in a dissipative plasma. The dependences of the depth of penetration of the Alfvén wave and the maximum temperatures of electrons and ions on the size of the density inhomogeneity are obtained.

Key words: classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave, bremsstrahlung, photorecombination radiation

1. Введение

Как мы знаем [1], в МГД плазме могут существовать колебания, имеющие форму синусоиды, которые перемещаются вдоль магнитного поля. Поперечные компоненты векторных величин такой плазмы возмущаются, а термодинамические параметры и продольные компоненты остаются невозмущёнными. Эти волны были обнаружены Х. Альфвенем [2] в 1942 г. и впоследствии были названы альфвеновскими.

Темой данного исследования послужила попытка объяснить аномальный разогрев солнечной короны. В 2011 году было сделано допущение [3], что температура солнечной короны достигает нескольких миллионов градусов вследствие поглощения альфвеновской волны, образующейся в нижних солнечных слоях, температура которых несколько тысяч градусов.

Считается, что затухание альфвеновской волны происходит из-за диссипативных процессов. Огромную роль при этом имеют тормозное и фоторекомбинационное излучения. Плазма в работе предполагается квазинейтральной, состоящей из электронов и ионов.

Для исследования данной задачи использовались уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [4]. Альфвеновские волны, имеющие явное представление, при этом, так же как и в классической МГД, являются точными решениями [5] линеаризованных в окрестности однородного состояния уравнений и в то же время нелинейных уравнений динамики плазмы.

Согласно ранее проведённым исследованиям [5], плазму можно считать несжимаемой. При этом изучено влияние неоднородности плазмы по плотности на процесс поглощения альфвеновской волны диссипативной плазмой.

В проведенных ранее работах учитывались тормозное и фоторекомбинационное излучения при малых амплитудах альфвеновской волны при меняющейся неоднородности [6], что соответствует нескольким тысячам градусов. В данной работе амплитуды увеличены на порядок, и температуры при этом достигают несколько десятков тысяч градусов. Компьютерный расчёт при этом на процессоре Intel Core i5-7400 достигает в некоторых случаях 4 суток. Следующим шагом будет изучение температур в несколько сотен тысяч или миллионов градусов, для чего потребуется увеличить амплитуды на один-два порядка и использовать суперкомпьютерные вычисления.

Ниже неоднородность определяется гауссовым распределением $\rho(x)/\rho_0 = 1 + A \exp\left[-(x - x_0)^2 / D\right]$, $D > 0$, $x_0 > 0$. Для $A > 0$ функция $\rho(x)$ задаёт неоднородность типа вершины, а для $0 > A > -1$ – типа впадины. Все остальные возможные неоднородности являются комбинацией указанных гауссовых распределений.

2. Основные уравнения

Динамика электронов и ионов подчиняется уравнениям несжимаемой ЭМГД [4]:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} P,$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} W, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Тензоры плотности потока импульса Π , вязких напряжений P и “холловских слагаемых” W имеют вид

$$\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad P = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)},$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}, \quad (2)$$

$$\Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma I_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\dot{\mathbf{j}}}{\rho}.$$

Здесь и далее индексы \pm относятся к параметрам ионов и электронов $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$, I_3 – единичный трёхмерный тензор, σ – проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma D^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* D^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* D^c - \frac{2}{3} \mu^* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3,$$

$$\Pi_*^{(c)} = 2\mu_* D^c - \frac{2}{3} \mu_* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm D_\pm \mp \frac{2}{3} \mu_\pm \lambda_\pm \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3, \quad (3)$$

где $D^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$, $D^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$, $D_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$ – тензоры деформаций, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, μ_\pm – гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются равными нулю. Для плоских течений, которые рассматриваются ниже, $\mathbf{j} \cdot \nabla (1 / \rho) = 0$ и выражения (3) сильно упрощаются. Учитывая зависимость (см. ниже) проводимости плазмы σ , гидродинамических вязкостей μ_\pm и других коэффициентов переноса от температур электронов и ионов T_\pm , необходимо дополнить систему (1)–(3) уравнениями для температур [7]

$$\rho_{\pm} c_p^{\pm} \left[\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T_{\pm} \right] = \text{div}(\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \text{tr}(\Pi_{\pm} D_{\pm}) + \quad (4)$$

$$+ \frac{m_{\mp}}{m_{\pm}} \frac{j^2}{\sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) - p^{\pm},$$

где $p^{\pm} = p_T^{\pm} + p_{\text{фр}}^{\pm}$, $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$ – теплоёмкость при постоянном давлении, χ_{\pm} – теплопроводности электронов и ионов, $\pm b(T_{-} - T_{+})$ – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях, p_T^{\pm} , $p_{\text{фр}}^{\pm}$ – потери на тормозное и фоторекомбинационное излучения. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты γ имеем $c_p = \frac{k_B}{(\gamma - 1)m} = \text{const}$, где k_B – постоянная Больцмана, m – масса частицы газа.

Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая $c_p^{\pm} = k_B / ((\gamma - 1)m_{\pm})$.

При этом надо учесть выражения гидродинамических параметров электронов и ионов через ρ , U , j :

$$\mathbf{v}_{\pm} = U \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda_{\mp}} \rho. \quad (5)$$

С учётом зависимостей σ , μ_{\pm} , χ_{\pm} , b , p_T^{\pm} от остальных параметров плазмы, в первую очередь температур T_{\pm} , приводимых ниже, уравнения (1)–(4) образуют замкнутую определённую систему уравнений относительно ρ , p_{\pm} , T_{\pm} , U , \mathbf{H} , \mathbf{E} .

Коэффициенты переноса μ_{\pm} , χ_{\pm} , σ , b получаются приближённым решением кинетических уравнений [8] и для $Z = 1$ считаются равными [9–13]

$$\mu_{+} = 3.44 \cdot 10^{-18} \left(\frac{m_{+}}{m_{-}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2}, \quad \mu_{-} = 1.857 \cdot 10^{-18} T_{-}^{5/2}, \quad \sigma = 0.906 \cdot 10^7 T_{-}^{3/2},$$

$$b = 1.353 \cdot 10^{40} \left(\frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^3 \frac{\rho^2}{T_{-}^{3/2}},$$

$$\chi_{-} = 0.244 \cdot 10^{-5} T_{-}^{5/2}, \quad \chi_{+} = 0.429 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2},$$

$$p_T^{-} = 6.777 \cdot 10^{-21} n_{+} n_{-} T_{-}^{1/2},$$

где $p_T^+ = p_{\text{фр}}^+ = 0$, T_{\pm} вычисляются в кельвинах, p_T^- – в эрг / (с · см³), а $p_{\text{фр}}^- / p_T^-$ для $Z = 1$ вычисляется по формуле $p_{\text{фр}} = p_{\text{фр}}^-$, $p_T = p_T^-$,

$$\frac{p_{\text{фр}}}{p_T} = \frac{10^3 k_r}{T_- (\text{град})}.$$

Коэффициент k_r имеет следующие значения в зависимости от температур. Для нескольких тысяч градусов $k_r = 3.33$ [14], для $\sim 10^4 \div 10^6$ К $k_r = 371.2$ [13], при температуре $\geq 10^7$ К фоторекомбинационным излучением пренебрегаем [15].

Отметим также, что в представленных ниже результатах считалось $\mu_- = 0$, поскольку теоретическое значение электронной вязкости, приведённое в данном пункте, оказалось как минимум на 2-3 порядка завышенным. Поглощение альфвеновской волны для реального значения электронной вязкости μ_- требует дополнительных исследований.

Более подробные формулы для диссипативных коэффициентов см. в [4].

3. Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае и плоской геометрии ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида [4]

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0, \quad (6)$$

которые называются *плоскими альфвеновскими волнами*. В (6) $\kappa > 0$ – произвольное и использованы комплексные обозначения $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$. При этом $H_x = \text{const}$, а $e(t)$ выражается в явном виде через $u(t)$ и $h(t)$:

$$e(t) = \left(\frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) (1 + r^2)^{-1}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \Lambda = \sqrt{\lambda_+} - \sqrt{\lambda_-}, v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (7)$$

Функции $u(t)$, $h(t)$ имеют вид

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{ C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t} \}. \quad (8)$$

Здесь $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$ – плазменная частота, C_1 , C_2 – произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока $j_{\perp} = j_y + ij_z$ также изменяется по закону $j_{\perp} = j(t)e^{ikx}$, а $j_x = 0$, где $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$. Наконец,

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (9)$$

Обратная к формуле (9):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \cdot |\omega| \left(\frac{v_A^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda \omega - \omega^2 \right)^{-1/2}, \quad (10)$$

где $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$ для $H_x > 0$ и $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ для $H_x < 0$.

4. Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая в области $x < 0$ слева направо, набегаёт на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, которая заполняет полупространство $x > 0$. Далее альфвеновская волна, распространяясь в области $x > 0$, затухает в этой области, что и является предметом изучения. Из предыдущего пункта следует, что если продольное магнитное поле $H_x < 0$, то частота набегающей альфвеновской волны ω меняется в диапазоне $-\omega_c^- = \frac{H_x}{\lambda_c} < \omega < 0$, а если $H_x > 0$ – то в диапазоне $-\omega_c^+ = -\frac{H_x}{\lambda_c} < \omega < 0$. Ниже

рассматривается первый вариант. Плазма в области $x \geq 0$ считается замагниченной, покоящейся изотермической с заданным распределением плотности $\rho(x)$. Таким образом, в начальный момент времени в области $x > 0$ имеем

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho(x), \quad H_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

где распределение плотности $\rho(x)$ имеет конечный предел $\rho > 0$ при $x \rightarrow +\infty$, причём константа ρ и продольное магнитное поле $H_x = \text{const}$ те же, что и в области $x \leq 0$, откуда набегаёт альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе $x = 0$ и значения на границе $x = 0$ параметров альфвеновской волны совпадают. Согласно формулам (6)–(10), они определяются следующим образом:

$$U_{\perp}|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} \omega e^{i\omega t}, \quad (12)$$

$$E_{\perp}|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right) e^{i\omega t}, \quad j_{\perp}|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \quad (13)$$

Запишем систему (1)–(4) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), используя обозначения $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$, $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x}, \\ E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} &= \frac{2Z_{\pm}(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp} \xi \zeta}{m_{\Sigma} \sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{\mp} - T_{\pm}}{T_{\pm}^{3/2}} + \right. \\ &+ \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp} \xi^2}{\lambda_{\pm} \rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \overline{\frac{\partial j}{\partial x}} \right) \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{(1 \mp 1)}{2} \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) Z \rho T_{\pm}^{1/2} \left(1 + \frac{k_r}{T_{\pm}} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $Z_+ = Z$, $Z_- = 1$, $\mu_{\Sigma} = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} \mu_+ - (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} \mu_-$, $\mu^* = (\lambda_- / \lambda_+) \mu_+ + (\lambda_+ / \lambda_-) \mu_-$, $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}$, $\sigma = \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}$, $\chi_{\pm} = C_{\pm} (\xi / \zeta) T_{\pm}^{5/2}$, а значения σ_0 , C_0 , R_{\pm} , C_{\pm} равны:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 2,59, \quad C_0 = \frac{m_e}{m_i}, \quad R_+ = 1,108 \cdot \frac{\zeta}{\xi} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}, \quad R_- = 2,053 \cdot \frac{\zeta}{\xi}, \\ C_- &= 2,11 \frac{m_i}{m_e}, \quad C_+ = 3,7 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Наконец, ξ , ζ , ξ_T – числа подобия, равные

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c \sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\sqrt{4\pi \rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi \rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{c e^3}{m_+^2} L Z^3 \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+} \right)^{-3/2},$$

$$\xi_T = \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_+ m_-} \frac{64\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+}\right)^{-3/2},$$

где $\ell_c = c / \omega_p$ – скин-длина, L_0 , ρ_0 , H_0 и т.д. – характерные масштабы длины плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось $t_0 = L_0 / v_0$, $v_0 = v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, $E_0 = v_0 H_0 / c$, $j_0 = c H_0 / (4\pi L_0)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_\Sigma e / (2k_B)$.

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу для системы (14) на полупрямой $x \geq 0$: найти функции $H(t, x)$, $E(t, x)$, $U(t, x)$, $T_\pm(t, x)$, удовлетворяющие для $x \geq 0$, $t \geq 0$ уравнениям системы (14), при $t=0$ – безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_\pm|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (15)$$

а при $x=0$ и $x=+\infty$ – безразмерным краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$E|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}, \quad (16)$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_\pm|_{x=+\infty} = T^0,$$

причём при $H_x > 0$ имеем $-H_x (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega \xi < 0$, при $H_x < 0$ имеем $H_x (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega \xi < 0$. Здесь $\omega, \rho, H_x \in \mathbb{R}$, $U_0 \in \mathbb{C}$ – безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (14)–(16). Счётная область – отрезок $[0, L]$ с достаточно большим L , в котором выбраны две сетки узлов $x_\kappa = \kappa h$, $0 \leq \kappa \leq N$, $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$, $0 \leq \kappa < N$, $h = L/N$. В целых узлах аппроксимируются величины j , U , E , в дробных – H , T_\pm . Переход с нижнего на верхний временной слой $T_\pm^0, U^0, H^0 \rightarrow T_\pm^1, U^1, H^1$ за время τ , $t \rightarrow t + \tau$, реализуется неявной разностной схемой, где для простоты считаем $Z = 1$:

$$1) \rho_\kappa \frac{U_\kappa^1 - U_\kappa^0}{\tau} - \frac{1}{h} \left[\mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- H_x \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{\xi}{\rho_\kappa} \frac{1}{h} \left(\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right) = 0,$$

$$0 < \kappa < N,$$

$$U_N^1 = 0, \quad U_0^1 = U_0^0 e^{i\omega(t+\tau)}, \quad j_N^0 = 0, \quad j_0^0 = -\frac{\rho U_0^0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$j_k^0 = i \frac{H_{k+1/2}^0 - H_{k-1/2}^0}{h}, \quad 0 < k < N.$$

$$2) \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_\kappa}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N,$$

$$E_\kappa - \frac{\xi^2}{\rho_\kappa} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_\kappa + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\xi\xi}{\sigma_0(T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \cdot \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} + iH_x U_\kappa^1 +$$

$$+ \frac{\xi \Lambda H_x}{\rho_\kappa} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{\xi}{\rho_\kappa} \frac{1}{h} \left[\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- \frac{\xi^2}{\rho_\kappa^2} \frac{1}{h} \left[\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right],$$

$$0 < \kappa < N, \quad E_N = 0, \quad E_0 = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega(t+\tau/2)},$$

$$3) \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} = \frac{2(\gamma-1)}{\rho_\kappa} \left\{ \frac{1}{h} \left[\chi_{\kappa+1}^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \right. \right.$$

$$\left. - \chi_\kappa^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \frac{m_\mp}{m_\Sigma} \frac{\xi \zeta}{\sigma_0(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} \left| \frac{j_\kappa^1 + j_{\kappa+1}^1}{2} \right|^2 \pm$$

$$\pm \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho_\kappa^2 \frac{T_{-, \kappa+1/2}^0 - T_{+, \kappa+1/2}^0}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} + \frac{(T_{\pm, \kappa+1/2}^0)^{5/2}}{R_\pm} \left[\left| \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm} \frac{\xi^2}{\rho_\kappa^2} \left| \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_\kappa^1}{h} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho_\kappa^2} \sqrt{\lambda_\mp} \operatorname{Re} \left(\frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} \cdot \overline{\frac{j_{\kappa+1}^1 - j_\kappa^1}{h}} \right) \right] \left. \right\} - p_{k+1/2}^\pm,$$

$$p_{k+1/2}^+ = 0, \quad p_{k+1/2}^- = \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) \rho_\kappa (T_{-, \kappa+1/2}^0)^{1/2} \left(1 + \frac{k_r}{T_{-, \kappa+1/2}^0} \right),$$

$$0 \leq k < N, \quad T_{\pm, 1/2}^1 = T^0, \quad T_{\pm, N+1/2}^1 = T^0.$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости

$$\tau = kh / U_{эф}, \quad U_{эф} = \max_{0 \leq \kappa < N} \left(|H_{\kappa+1/2}^0|^2 / \rho_\kappa + T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где $0 < k < 1$ – коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по схеме 1)–3) следующий. Сначала из 1) прогонкой определяется величина U_κ^1 , $0 \leq \kappa \leq N$. После этого по формулам 2) находятся значения $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$, E_κ , $0 \leq \kappa \leq N$. Для этого посредством первого равенства 2) исключается из числа неизвестных $H_{\kappa+1/2}^1 = H_{\kappa+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h}(E_{\kappa+1} - E_\kappa)$, $0 \leq \kappa < N$, и полученные выражения подставляются во второе равенство 2), после чего величины E_κ , $0 \leq \kappa \leq N$, ищутся прогонкой и по найденным значениям восстанавливаются $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$. На завершающем этапе прогонками ищутся $T_{\mp, \kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$. При этом j_κ^1 вычисляются по очевидным формулам $j_\kappa^1 = i(H_{\kappa+1}^1 - H_{\kappa-1/2}^1)/h$, $0 < \kappa < N$, $j_N^1 = 0$, $j_0^1 = -\rho U_0 \omega H_x^{-1} e^{i\omega(t+\tau)}$. Значения χ_κ^\pm получаются интерполяцией $\chi_\kappa^\pm = (\chi_{\kappa+1/2}^\pm + \chi_{\kappa-1/2}^\pm) / 2$, $0 < \kappa < N$, $\chi_0^\pm = \chi_{1/2}^\pm$, $\chi_N^\pm = \chi_{N-1/2}^\pm$, при этом $\chi_{\kappa+1/2}^\pm$, $0 \leq \kappa < N$, берутся на нулевом слое.

6. Анализ результатов расчётов

Рассмотрим решение задачи нелинейного поглощения альфвеновской волны с учётом тормозного излучения и неоднородности по плотности применительно к параметрам солнечной короны $\rho_0 = 10^{-12} \text{ г / см}^3$, $H_0 = 1 \text{ Гс}$, $Z = 1$, тогда из п. 4 следует, что $\zeta = 3 \cdot 10^3$, $\xi_T = 3$, а скин-длина $\ell_c = c / \omega_p \approx 1 \text{ см}$. Учитывая мелкомасштабность ($\sim \ell_c$) процессов при поглощении альфвеновской волны, положим $L_0 = \ell_c$, тогда $\xi = 1$. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ см / с}$, $t_0 = L_0 / v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-} / H_0 = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $T_0 \approx 10^3 \text{ К}$. Дебаевский радиус $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см} \ll L_0$ и много меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью. Считаем, что $n_0 = \rho_0 / m_+$, $m_+ = 2m_p$.

Кроме того, амплитуда падающей альфвеновской волны предполагается равной $|U_0| = 1$ и считается $H_x = -1$. Частота волны ω изменяется в диапазоне

$-61 \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$. Вариант однородной плазмы $\rho(x) \equiv 1$ с тормозным и фоторекомбинационным излучениями был исследован в работе [15].

Теперь, учитывая распределение плотности диссипативной плазмы в области $x \geq 0$ в виде вершины, $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $x_0 = 8$, $D = 1$, $A = 5$, $\omega = -30$, как видно на графиках (рис. 1, 2), можно сделать следующие выводы. Во-первых, альфвеновская волна, как и в случае с однородной плазмой [15], проникает в диссипативную плазму на конечную глубину. Во-вторых, с течением времени параметры альфвеновской волны выходят на квазистационарный режим. В частности, наступает стабилизация профилей температур электронов и ионов со временем, причём для электронов стабилизация наступает гораздо быстрее, чем для ионов.

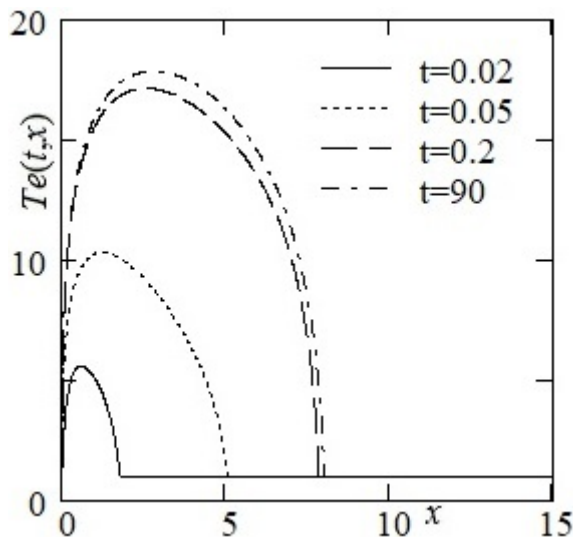


Рис. 1. Процесс установления температуры электронов с течением времени для неоднородности плотности типа вершины $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$, $\omega = -30$

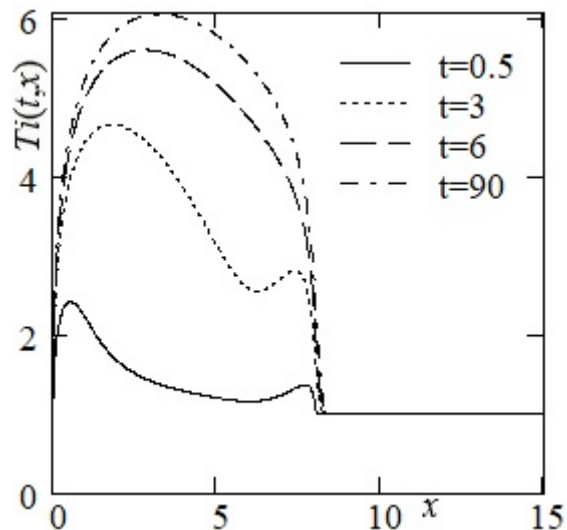


Рис. 2. Процесс установления температуры ионов с течением времени для неоднородности плотности типа вершины $\rho(x) = 1 + 5 \exp[-(x - 8)^2]$, $\omega = -30$

Далее проведём исследование профилей температур электронов и ионов в зависимости от амплитуды A для плотности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - 7)^2 / 3]$. Как видно из рис. 3, 4, в случае вершины ($A = 50$) происходит уменьшение глубины прогрева плазмы на 77% и максимальной температуры электронов и ионов на 18.5% и 28.3% соответственно по сравнению с $A = 0$ (однородная плазма). В случае впадины ($A = -0.9$, рис. 3, 4) происходит увеличение глубины прогрева на 18% и максимальной температуры электронов и ионов на 6.8% и 9.1% соответственно по сравнению с $A = 0$.

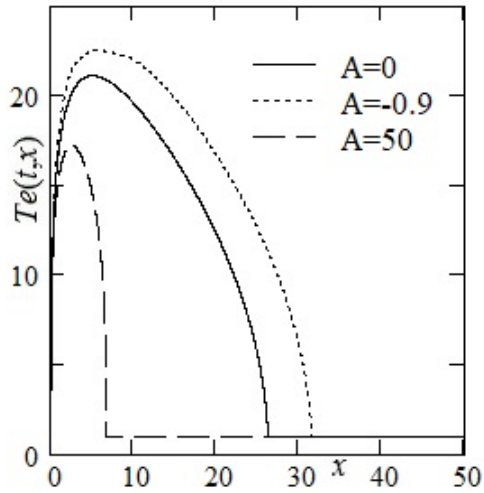


Рис. 3. Установившиеся температуры электронов в зависимости от A для неоднородности плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-7)^2/3]$

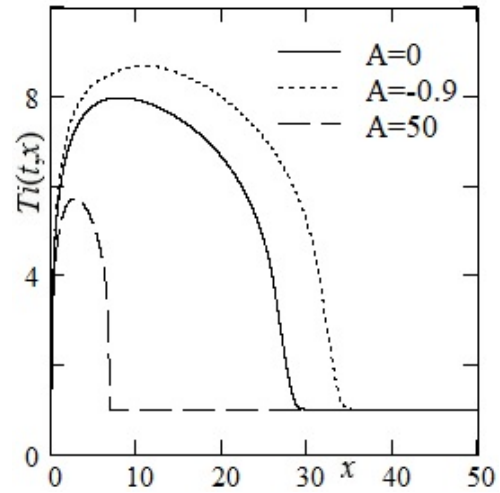


Рис. 4. Установившиеся температуры ионов в зависимости от A для неоднородности плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-7)^2/3]$

Ниже приведены графики установившихся температур электронов и ионов с увеличением амплитуды A для профиля плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$ (рис. 5, 6).

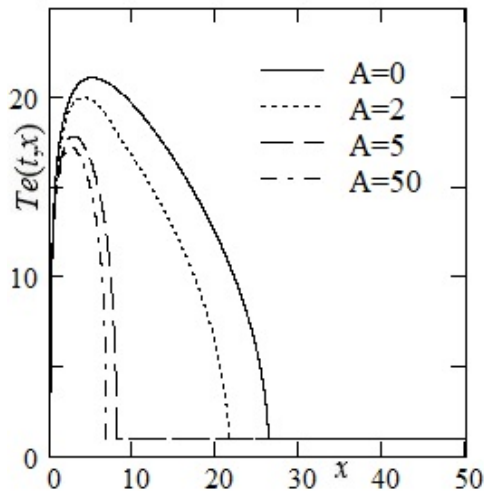


Рис. 5. Установившиеся температуры электронов в зависимости от A для неоднородности плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$

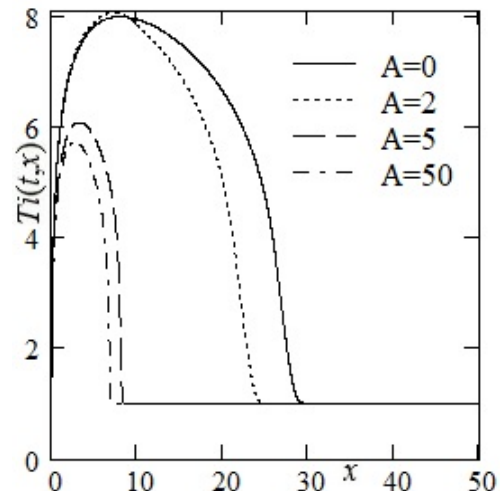


Рис. 6. Установившиеся температуры ионов в зависимости от A для неоднородности плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$

Проведённый анализ позволяет сделать вывод, что с уменьшением высоты вершины A глубина проникания d альфвеновской волны будет возрастать,

максимальные температуры электронов и ионов будут также увеличиваться. Этот вывод подтверждается результатами, более подробно отражёнными в Таблице 1 для неоднородности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x-8)^2]$.

Таблица 1

Глубина проникания и максимальные температуры электронов и ионов в зависимости от вершины

A	100	50	25	10	5	2	1	0
d	6.68	6.92	7.21	7.72	8.56	25.36	28.12	30.05
T_+	5.68	5.72	5.78	5.89	6.07	8.06	8.04	7.98
T_-	17.12	17.19	17.29	17.51	17.82	19.99	20.71	21.1

Ранее были проведены аналогичные исследования для неоднородной по плотности плазмы с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений с амплитудой падающей альфвеновской волны, равной $|U_0| = 0.1$ [6]. Качественно результаты и выводы совпадают. Отличие в том, что для большей амплитуды падающей волны значения температур и глубины проникания больше в несколько раз.

Отметим, что в проведённых исследованиях наблюдались некоторые вычислительные трудности. Увеличение амплитуды альфвеновской волны приводит к росту температуры и глубины проникания. Соответственно, происходит уменьшение временного шага, увеличение расчётной области и времени счёта. Некоторые варианты вычислений доходили до 4 суток на ПК с процессором Intel Core i5-7400. Таким образом, если мы хотим исследовать солнечную корону с температурами в несколько миллионов градусов, нам необходимо использовать суперкомпьютерные вычисления.

7. Заключение

Плазменные неоднородности по плотности и тормозное и фоторекомбинационное излучения существенно влияют на глубину проникания альфвеновской волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы. Так, неоднородности плотности типа вершины тормозят прохождение альфвеновской волны, уменьшая глубину проникания волны и степень прогрева ионов и электронов диссипативной плазмой. А неоднородность типа впадины увеличивает глубину проникания волны, а также степень прогрева электронов и ионов. Увеличение амплитуды на порядок падающей

альфвеновской волны приводит к росту температур электронов и ионов, а также глубины проникания альфвеновской волны в несколько раз.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
3. Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // Nature. 2011. v.475. p. 478–480.
4. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
5. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // Математическое моделирование, 2013, Т. 25, № 8, с. 65-79.
6. Mikhail Gavrikov, Aleksei Taiurskii. "The Influence of Plasma Inhomogeneity on the Nonlinear Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma with Photorecombination Radiation taken into account", 2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), 2020.
7. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект". 2008. 256 с.
8. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 1. С. 183-272.
9. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965, 212 с.
10. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
11. Имшенник В.С. О теплопроводности плазмы // Астрономический журнал, 1961, т.38, №4, с. 652-655.
12. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, т.7, №2, с. 203-209.
13. Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. Основы физики плазмы. Т. 1 – М.: Энергоатомиздат, 1983, 641 с.
14. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006 – 576 с.
15. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // Математическое моделирование, 2019. Т. 31. № 12. С. 71–85.

Оглавление

1. Введение	3
2. Основные уравнения	4
3. Альфвеновские волны в ЭМГД	6
4. Постановка задачи о пространственном поглощении	7
5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении	9
6. Анализ результатов расчётов	11
7. Заключение.....	14
Список литературы.....	15