



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 52 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.И. Аптекарев](#)

Гиперболический объём 3-д
многообразий, А-многочлены,
численные проверки гипотез

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И. Гиперболический объём 3-д многообразий, А-многочлены, числовые проверки гипотез // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 52. 36 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-52>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-52>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

А. И. Аптекарев

Гиперболический объём 3- d многообразий,
 A -многочлены, численные проверки гипотез

Москва — 2023

2010 Mathematics Subject Classification: 57N10; 57M25; 57M27; 11B65

Аптекарев А. И., Гиперболический объём 3- d многообразий, A -многочлены, численные проверки гипотез. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2023

Мы продолжаем наше знакомство со связями гиперболического объёма дополнения узла в трехмерной сфере с топологическими инвариантами узла. В этот раз мы уделим внимание $A(M, L)$ параметризации аффинного многообразия с каспом, порожденным узлом (т.н. A -многочленам). Затем, используя известные выражения A -многочленов для ряда узлов, мы приведем результаты численной проверки гипотез об асимптотике решений q -разностных уравнений, связанных с гиперболическим объемом этих узлов.

Ключевые слова: узлы, фундаментальная группа дополнения узла, SL_2 -представление, A -многочлен, WKB-асимптотика, q -разностное уравнение, Гипотеза Объёма.

Aptekarev A. I., Hyperbolic volume of 3- d manifolds, A -polynomials, numerical hypothesis testing. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2023

We continue our study of the connections between the hyperbolic volume of the complement of a knot in the three dimensional sphere with topological invariants of this knot. This time we pay attention to $A(M, L)$ parametrization for the affine variety with cusp, produced by a knot (so-called A -polynomials). Then, using the known expressions of A -polynomials for number of knots we present results of the numerical tests for the conjectures on asymptotics of solutions of q -difference equations connected with the hyperbolic volume of these knots.

Key words: knots, fundamental group of the complement of a knot, SL_2 -representation, A -polynomials, WKB-asymptotics, q -difference equation, Volume Conjecture.

1. Введение

В настоящем препринте мы продолжаем, начатое ранее (см. [1, 2, 3]), наше знакомство со связями гиперболического объёма $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ дополнения узла K в трехмерной сфере \mathbb{S}^3 с топологическими инвариантами узла K . Эти связи между *геометрической* характеристикой: $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ и *комбинаторными, алгебраическими* характеристиками узла K устанавливаются с помощью *аналитических* методов: асимптотического ВКБ анализа q -разностных уравнений для q -гипергеометрических функций.

На сей раз (см. раздел 2) мы уделим внимание известным *алгебраическим* понятиям: фундаментальной группе узла $\pi_1(K)$, её $\text{SL}_2(\mathbb{S}^3 \setminus K, \mathbb{C})$ представлению, и $A(M, L)$ параметризации SL_2 в виде аффинного многообразия с каспом, порожденным узлом K (т.н. A -многочлену).

Затем (см. раздел 3), используя известные A -многочлены для ряда узлов K , мы приведем результаты численной проверки гипотез об асимптотике решений q -разностных уравнений, связанных с $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$.

Теперь же, в продолжение введения, мы остановимся на постановке задачи и на основных моментах *аналитического* подхода к этой проблематике.

1.1. Инварианты узла и q -разностные уравнения. Знаменитая гипотеза Кашаева (см. [4, 5]) связывает гиперболический объем $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ с некоторым топологическим инвариантом узла K . Позднее (см. [6, Теорема 4.9]) этот инвариант Кашаева был выражен в терминах классического инварианта: многочлена Джонса $J(q)$ и его *окраски* n -мерными представлениями квантовой группы, т.н. *окрашенными* многочленами Джонса (см. [7, 8]):

$$\{J_n(q)\}_{n=1}^{\infty}, \quad J_1(q) = 1, \quad J_2(q) = J(q), \quad \dots. \quad (1.1)$$

В свою очередь, Гарофалидис и Лё (см. [9]) доказали, что окрашенные многочлены Джонса $\{J_n(q)\}_{n=1}^{\infty}$ являются q -гипергеометрическими функциями и, следовательно,¹ являются частными решениями q -разностных уравнений:

$$\sum_{j=0}^d A_j(q^n, q) Q_{n+j}(q) = 0, \quad (1.2)$$

удовлетворяющими начальным условиям из (1.1). Т.е., полагая, в (1.2)

$$Q_n(q) := J_n(q), \quad n = 1, \dots, d, \quad (1.3)$$

получаем всю последовательность (1.1). Мы будем использовать это свойство, как определение окрашенных многочленов Джонса.

¹подобно классическим ортогональным многочленам и их обобщениям - совместно ортогональным многочленам относительно классических весов, удовлетворяющих d -членным рекурентным соотношениям

Пример. Для узла *восьмерки* 4_1 начальные условия:

$$J_1(q) = 1, \quad J_2(q) = q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}$$

и коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0(q) &:= \frac{q^{1-n}(1+q^{n-1})(1-q^{2n-1})}{1-q^n}, & a_2(q) &:= -\frac{(1-q^{n-2})(1-q^{2n-1})}{(1-q^n)(1-q^{2n-3})}, \\ a_1(q) &:= \frac{q^{2-2n}(1-q^{n-1})^2(1+q^{n-1})(1+q^{4n-4}-q^{n-1}-q^{2n-3}-q^{2n-1}-q^{3n-3})}{(1-q^n)(1-q^{2n-3})} \end{aligned}$$

с помощью рекуррентных соотношений²

$$J_n(q) = \sum_{j=1}^2 a_j(q) J_{n-j}(q) + a_0(q), \quad n \geq 3, \quad (1.4)$$

определяют всю последовательность окрашенных многочленов Джонса.

1.2. Гипотеза объема – предельные режимы. Гипотеза Кашаева (VC) об объеме гиперболических узлов K гласит:

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |J_N(q = e^{2\pi i/N})| = \text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K). \quad (1.5)$$

Посмотрим на левую часть. Имеется конкретный узел K , и для него известны начальные окрашенные многочлены Джонса (1.1) и коэффициенты рекуррентных соотношений (1.2). Фиксируется большой номер N , и с помощью (1.3), (1.2) последовательно вычисляются многочлены $\{J_n(q)\}_{n=1}^N$. Затем в многочлене $J_N(q)$ делается замена $q = e^{2\pi i/N}$ и получившаяся величина, зависящая только от N , с ростом N растет экспоненциально, причем показатель ее роста пропорционален гиперболическому объему $\mathbb{S}^3 \setminus K$.

Итак, имеем два связных предела: $N \rightarrow \infty$ и $q = e^{2\pi i/N} \rightarrow 1$, вдоль дуги \mathbb{S}^1 в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ , что мотивирует нас рассматривать исходное q -разностное уравнение (1.2) в следующем двухмасштабном режиме:

$$\sum_{j=0}^d A_j(q^n, q) Q_{n+j}(q) = 0, \quad \begin{cases} N \rightarrow \infty, \\ \frac{n}{N} \rightarrow t \in [0,1], \quad q^n \rightarrow e^{2\pi it} =: z \in \mathbb{S}^1, \end{cases} \quad (1.6)$$

что в пределе дает алгебраическую функцию $\lambda(z)$ (*спектральную кривую*):

$$P(z, \lambda) := \sum_{j=0}^d A_j(z, 1) \lambda^j = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda(z) := \{\lambda_m(z)\}_{m=1}^d. \quad (1.7)$$

²неоднородная форма уравнения (1.4) легко приводится к однородной форме (1.2) с $d = 3$

1.3. ВКБ - асимптотика общего решения q -разностного уравнения.

На замкнутых дугах $I := \{z\} \subseteq \mathbb{S}^1$, где корни многочлена (1.7) *разделены*:

$$\exists \delta > 0 : \{|\lambda_m(z) - \lambda_k(z)|\} \geq \delta, \quad \forall z \in I \quad \text{and} \quad m \neq k, \quad (1.8)$$

имеются подходы (см. [12, 1, 2, 3]) к получению формальных (и асимптотических) разложений по малому параметру $1/N$ для общего (*фундаментального*) решения q -разностного уравнения (1.2). Если мы запишем рекуррентные соотношения (1.2) в матричном виде: $\vec{Q}_{n+1} = \mathcal{A}_n \vec{Q}_n$, где $d \times d$ матрица \mathcal{A}_n формируется коэффициентами $\{A_j(q^n, q)\}_{j=0}^d$ из (1.2), а вектор \vec{Q}_n обозначает

$$\vec{Q}_n \equiv \vec{Q}_n(q^n, q) := (Q_n, Q_{n+1}, \dots, Q_{n+d-1})^T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

то предельная матрица $\mathcal{A} := \mathcal{A}(q^n, q)|_{q=1, q^n=z}$ имеет *характеристический* многочлен $P(z, \lambda)$ и собственные значения $\{\lambda_m(z)\}_{m=1}^d$, те же, что и в (1.7).

В соответствии с общими теоремами (детали³ см. в [1, 3]) о разложении фундаментального решения (1.9) q -разностного уравнения (1.2) в зонах разделенных собственных значений (1.8) имеет место асимптотика:

$$\vec{Q}_n(q^n, q)|_{q=e^{2\pi i/N}, q^n=z} = \sum_{j=1}^d c_j e^{N\varphi_{-1}^{(j)}(z)} \left(\vec{F}_j(z) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad \text{где} \quad (1.10)$$

$$\vec{F}_j(z) := e^{\varphi_0^{(j)}(z)} (1, \lambda_j(z), \dots, \lambda_j^{d-1}(z))^T, \quad \varphi_{-1}^{(j)}(e^{2\pi it}) = \int_{t_1}^t \ln(\lambda_j(e^{2\pi i\tau})) d\tau.$$

Полагая максимизирующее (интеграл выше) $j := 1$, для частного решения Q_n в общем положении (т.е. все $c_j \neq 0$) в зоне (1.8) с концом в т. $z = 1$ имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow t} \frac{\ln |Q_n(e^{2\pi i/N})|}{N} = \operatorname{Re} \varphi_{-1}^{(1)}(e^{2\pi it}) = \int_0^t \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau. \quad (1.11)$$

Таким образом, если для какого-то узла K : 1) предельные с.з. *разделены* на всей \mathbb{S}^1 , и 2) частное решение $\{J_n(2\pi i/N)\}_{n=1}^N$ экспоненциально растет при $n := [tN]$, $t \in (0, 1)$, то (см. также [12]) для левой части в (1.5) имеем:

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln |J_N(e^{2\pi i/N})|}{N} = 2\pi \int_0^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau \stackrel{(1.5)}{=} \operatorname{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K). \quad (1.12)$$

1.4. ВКБ - асимптотика частных решений.

Обращаясь к условиям существования предела в левой части (1.12), заметим:

Все известные нам спектральные кривые $\lambda(z)$ имеют точки ветвления на \mathbb{S}^1 , т.е. случаи 1) - продолжения зоны (1.8) на всю окружность - не наблюдались⁴.

³ниже, в Приложении 1, мы приведем основные моменты и формулировки

⁴к концу работы над препринтом мы столкнулись со случаем 1), см. ниже пункт 3.10

В связи с этим возникает важная задача строгого обоснования возможности продолжения асимптотик вида (1.11) для частных решений из зоны I - разделения с.з. (1.8) в зону \tilde{I} - голоморфного продолжения ветви⁵ λ_1 , невзирая на наличие в зоне продолжения \tilde{I} точек ветвления других ветвей. Эта задача сложнее задачи об асимптотическом разложении в I фундаментального решения, и ее общее решение нам не известно. В частном случае 3 и 4 членных (обыкновенных, не " q -") рекуррентных соотношений она решена в [13].

Прежде чем продолжать обсуждения условий существования предела у окрашенных многочленов Джонса в левой части (1.12), остановимся на втором равенстве в правой части (1.12):

$$2\pi \int_0^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i \tau})| d\tau \stackrel{?}{=} \text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K). \quad (1.13)$$

В работе [3] мы численно исследовали выполнение равенства (1.13) на простейших узлах $4_1, 5_2$. К нашему удивлению, мы получили (с совпадением большого количества значащих цифр), что интеграл в левой части (1.13) в два раза больше известных объёмов, стоящих справа:

$$2\pi \int_0^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i \tau})| d\tau \approx \text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K) * 2 (!) \quad (1.14)$$

Этот факт, конечно, был известен и ранее, см. [15].

Теперь вернемся к условию 2) существования предела в левой части (1.12) для частного решения уравнения (1.2), (1.3) (которое предполагало экспоненциальный рост у $\{J_n(e^{\frac{2\pi i}{N}})\}_{n=1}^N$ при $n := [tN]$, $t \in (0, 1)$ и $N \rightarrow \infty$). Здесь отметим, что из известного соотношения, см [6], для $q := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ имеем

$$J_n(q) = \overline{J_{N-n}(q)}, \quad 1 \leq n < N \quad \Rightarrow \quad J_1(q) = J_{N-1}(q) = 1, \quad (1.15)$$

и более того, для узла 4_1 нетрудно доказать⁶, а для ряда других узлов убедиться численно, что для всех $n < N$ окрашенные многочлены Джонса (при $q := e^{\frac{2\pi i}{N}}$) ограничены и в то же время при $n = N$ экспоненциально растут, в соответствии с гипотезой Кашаева (1.5):

$$|J_n(e^{\frac{2\pi i}{N}})| \lesssim C, \quad 1 \leq n < N \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |J_N(e^{\frac{2\pi i}{N}})| = \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)}{2\pi}. \quad (1.16)$$

Тем самым мы видим, что частное решение (1.1), определяемое задачей Коши (1.3) для q -разностного уравнения (1.2) (т.е. окрашенные многочлены Джонса) непосредственно не могут с помощью ВКБ-анализа (1.11) выразить значение предела, стоящего в левой части гипотезы объёма (1.12).

⁵ветвь, задающая показатель роста этого частного решения в зоне I

⁶см. Приложение 2 ниже об оценке $\{J_n(e^{\frac{2\pi i}{N}})\}$ для скрученных узлов

В то же время отметим, что частное решение $\{J_n(e^{\frac{2\pi i}{N}})\}_{n=1}^N$ имеет в предельном режиме (1.6) очень интересную локальную сингулярность (1.16). Исследование этой сингулярности и нахождение в связи с ней объема представляется очень важной задачей, даже в простейшем частном случае узла 4₁.

Все-таки, вернемся к ВКБ асимптотикам (1.12) и попытаемся их "трудоустроить" для нахождения предела в левой части (1.12) и разобраться в конфликте (1.13) vs. (1.14).

Представим себе для $N \gg 1$ *континуализацию* частного решения (1.1):

$$\{J_n(e^{\frac{2\pi i}{N}})\}_{n=1}^N, \quad n := [tN], \quad t \in [0, 1] \quad \longrightarrow \quad \{J_{[tN]}(e^{\frac{2\pi i}{N}})\}_{t \in [0, 1]}.$$

Можно вообразить непрерывную от $t \in [0, 1]$ функцию $J_{[tN]}$, осциллирующую с большой частотой, с локальными (ограниченными при росте N) "минимумами" в точках $t_n := n/N$, $n = 1, \dots, N - 1$ и с чередующимися с ними локальными "максимумами", экспоненциально растущими с ростом N , по крайней мере, в левой окрестности максимума функции $J_{[tN]}$ при $t = 1$. Теперь, если бы мы наложили на функцию малое *возмущение*, сдвигающее окрестности локальных "максимумов" на точки *дискретизации* t_n , то показатель экспоненциального роста в $t = 1$ мог бы вычисляться с помощью ВКБ интеграла (1.11) вдоль зоны роста возмущенного частного решения.

Примером такого возмущения мог бы быть следующий трюк. Обозначим

$$f_n(q) := (1 - q^n)J_n(q) \quad \text{тогда} \quad J_n(q) = \frac{J_n(q)(1 - q^n)}{(1 - q^n)} = \frac{f_n(q)}{(1 - q^n)}. \quad (1.17)$$

Очевидно, правая часть здесь имеет неопределенность при $q \rightarrow e^{2\pi i/N}$, $n = N$, и, следовательно, по правилу Лопиталя имеем

$$J_N(q = e^{2\pi i/N}) = - \left. \frac{f'_n(q)}{nq^{n-1}} \right|_{n=N, q=e^{2\pi i/N}}, \quad \text{где} \quad f'_n(q) := \frac{d}{dq} f_n(q). \quad (1.18)$$

Справедливо утверждение (Доказательство см. в [3, Lemma 2]):

Спектральные кривые для J_n и для f'_n совпадают. Кроме того,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |f'_N(q = e^{2\pi i/N})| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |J_N(q = e^{2\pi i/N})|. \quad (1.19)$$

Проиллюстрируем справедливость этого предложения на примере узла 4₁. Преобразуем рекуррентные соотношения (1.4) к виду:

$$\begin{aligned} f_n &= \tilde{a}_1(n, q)f_{n-1} + \tilde{a}_2(n, q)f_{n-2} + \tilde{a}_0(n, q), \quad n \geq 3, \\ f_1 &:= 1 - q, \quad f_2 := (1 - q^2)(q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}) = -q^4 + q^3 - q^{-1} + q^{-2}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\tilde{a}_j(n, q) := \frac{a_j(n, q)(1 - q^n)}{1 - q^{n-j}}, \quad j = 0, 1, 2. \quad (1.21)$$

Далее, для производных f'_n эти рекуррентции принимают вид:

$$\begin{aligned} f'_n &= \tilde{a}_1(n, q)f'_{n-1} + \tilde{a}_2(n, q)f'_{n-2} + \tilde{A}_0(n, q), \quad n \geq 3, \\ f'_1 &:= -1, \quad f'_2 := -4q^3 + 3q^2 + q^{-2} - 2q^{-3}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где \tilde{a}_j , $j = 1, 2$, определены в (1.21),

$$\tilde{A}_0(n, q) := \frac{d}{dq}\tilde{a}_0 + f_{n-1}\frac{d}{dq}\tilde{a}_1 + f_{n-2}\frac{d}{dq}\tilde{a}_2.$$

Как видим, однородные части обоих рекуррентных соотношений (1.20) и (1.22) совпадают, и нетрудно проверить, что в предельном режиме (1.6) их спектральные кривые совпадают со спектральной кривой изначального рекуррентного соотношения (1.2) - (1.4).

Таким образом, для того, чтобы для предела в (1.19) получить формулу в виде ВКБ интеграла (1.12), необходимо проверить демонстрируют ли члены последовательности $\{f'_n(q)|_{q=e^{2\pi i/N}}\}_{n=1}^N$ при $N \rightarrow \infty$ и $n/N =: t \in [\tilde{t}, 1]$, $\tilde{t} < 1$, экспоненциальный рост. Строго доказать соответствующие нижние оценки нам пока не удалось, но численные расчеты для узлов 4_1 и 5_2 дают "положительный" ответ на этот вопрос для некоторых $\tilde{t} \in (1/2, 1)$. Таким образом, основываясь на этих численных расчетах, нами в [3] была предложена гипотеза о представлении предела в левой части (1.5) в виде ВКБ-интеграла:

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln |J_N(e^{2\pi i/N})|}{N} = 2\pi \int_{\tilde{t}}^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau \quad (1.23)$$

где $\tilde{t} \in (1/2, 1)$ задает ближайшую к точке (-1) на \mathbb{S}^1 точку ветвления $\tilde{z} := e^{2\pi i\tilde{t}}$ функции $\lambda(z)$, чья ветвь $\lambda_1 : (\exists, !)$ голоморфна и $|\lambda_1| > 1$ на дуге $(\tilde{z}, e^{2\pi i}) \subset \mathbb{S}^1$. Так как известные нам⁷ $\lambda(z)$, соответствующие узлам, имели для всех своих ветвей $\{\lambda_j(z)\}$ единичный модуль на дуге $(\bar{\tilde{z}}, \tilde{z}) \ni (-1)$, то интеграл в (1.23) можно (не изменяя значение) распространить на всю нижнюю полуокружность, а также, определив $(\exists, !)$ голоморфную ветвь $\lambda_1^* : |\lambda_1^*| > 1$ на дуге $[1, \bar{\tilde{z}}] \subset \mathbb{S}^1$, распространить и на верхнюю полуокружность:

$$\int_0^{1/2} \ln |\lambda_1^*(e^{2\pi i\tau})| d\tau = \int_{1/2}^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau = \int_{\tilde{t}}^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau, \quad (1.24)$$

что согласуется с (1.14).

⁷на момент публикования [3]

2. Получение A -многочленов

Наряду с многочленом $P(z, \lambda)$, характеризующим спектральную кривую (2.7) и связанным с (аналитической) левой частью гипотезы объёма (1.5), интерес представляют т.н. $A(M, L)$ -многочлены, введенные в [16] и осуществляющие параметризацию аффинного многообразия для $SL_2(\mathbb{S}^3 \setminus K, \mathbb{C})$ представления фундаментальной группы узла $\pi_1(K)$, где M – широта, L – долгота малого тора (каспа), заключающего в себе узел K , (т.е. $A(M, L)$ -многочлен связан с правой (алгебро-геометрической) частью (1.5)).

Интерес этот обусловлен тем, что в соответствии с **AJ гипотезой**⁸ Гарофалидиса [10, р.297] оба эти многочлена совпадают после сокращения у $A(M, L) := A(M, L)/\tilde{A}(M)$ некоторой степени L и множителя \tilde{A} , зависящего только от M , и отождествления $z \equiv M^2, \lambda \equiv L \Rightarrow :$

$$P(z, \lambda) \equiv A(M, L). \quad (2.1)$$

Более того, если обозначить через V объём многообразия, определяемого параметризацией $A(M, L) = 0$, то известна [11, C.D. Hodgson, 1986] формула:

$$dV = -2(\log |L| d(\arg M) - \log |M| d(\arg L)). \quad (2.2)$$

Если, используя (2.1), перейдем к переменным z, λ , то получим

$$dV = -\log |\lambda| d(\arg z) + \log |z| d(\arg \lambda),$$

при этом на граничном торе $z := \exp(it)$ имеем

$$dV = -\log |\lambda| dt. \quad (2.3)$$

Тем самым, формула объёма (2.2) в переменных (2.3) демонстрирует прямую связь ВКБ интегралов (1.12), (1.23), (1.24) с геометрической правой частью гипотезы объёма (1.5).

Этот раздел носит методический характер. В нем мы, используя известные источники, стартуя от простейших узлов, последовательно построим их фундаментальную группу $\pi_1(K)$, $SL_2(\mathbb{S}^3 \setminus K, \mathbb{C})$ -представления и получим явный вид соответствующих A -многочленов.

2.1. Фундаментальная группа $\pi_1(K)$ узла K . Определение $\pi_1(M, x_0)$ для многообразия M относительно точки $x_0 \in M$ см. в [17, стр. 534].

Нас интересуют многообразия $M := \mathbb{S}^3 \setminus K$, где $x_0 = \infty \in \mathbb{S}^3$, а K – узел. На примере узла $K := 3_1$, следя [17, стр. 655], мы построим образующие этой группы и получим связывающие их соотношения.

⁸AJ – начальные буквы A -многочлена и многочленов Джонса J

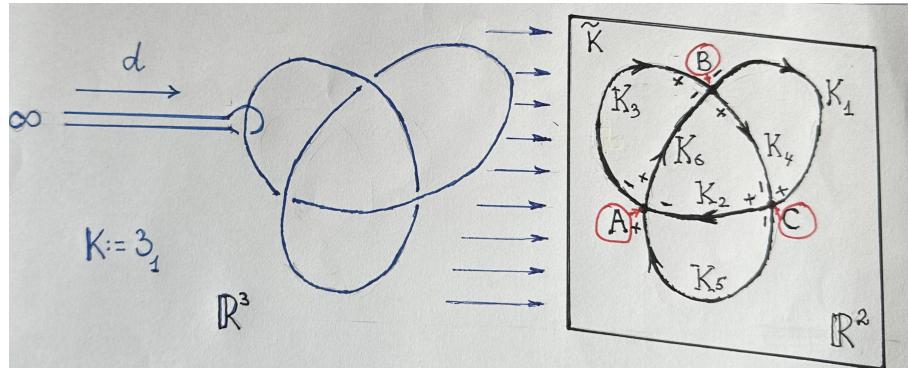


Рис. 1. Базисные пути группы $\pi_1(K)$ для узла “трилистника” Z_1

Рассмотрим \tilde{K} - проекцию K на \mathbb{R}^2 (направление “общего положения” d - проекции выбрано так, чтобы \tilde{K} представлял собой плоский граф с вершинами $\{A, B, \dots\}$ и ребрами $\{K_1, K_2, \dots\}$, и в каждой вершине сходятся ровно четыре ребра, концы которых помечены + или - в зависимости от расположения проектируемого участка узла K : (+) – “выше” или (-) – “ниже”. Направленность и нумерация ребер индуцируется зафиксированным направлением обхода $K \subset \mathbb{S}^3$. Например, для $K := Z_1$ график имеет вид, см. Рис. 1:

$$K = \{A, B, C\} \sqcup \{K_1, \dots, K_6\} : \quad K_1 := [B_{(-)}C_{(+)}], \quad K_2 := [C_{(+)}A_{(-)}], \\ K_3 := [A_{(-)}B_{(+)}], \quad K_4 := [B_{(+)}C_{(-)}], \quad K_5 := [C_{(-)}A_{(+)}], \quad K_6 := [A_{(+)}B_{(-)}].$$

Образующие (базисные) пути группы π_1 (обозначим $a_j \in \pi_1$) задаются так: путь a_j выходит из точки $\infty \in \mathbb{S}^3$ по направлению d , доходит до точки K , соответствующей середине ребра K_j , обходит K и возвращается назад в т. ∞ . Получим *соотношения*, связывающие образующие группы π_1 . Пусть в вершине сходятся 4 ребра: K_{j_1}, \dots, K_{j_K} , при этом в одной паре, скажем в (j_1, j_2) , концы ребер имеют одинаковый знак, а в другой – (j_3, j_4) – знак концов противоположен знаку у (j_1, j_2) . Если у (j_1, j_2) знак (+), то очевидно имеем:

$$a_{j_1} = a_{j_2}, \quad j_2 = j_1 + 1, \tag{2.4}$$

при этом у пары (j_3, j_4) знак (-), и для образующих получаем

$$a_{j_4} = a_{j_1}^{-1} a_{j_3} a_{j_1}. \tag{2.5}$$

Набор соотношений (2.4), (2.5) порождает все соотношения в группе $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, \infty)$. Для трилистника $K = Z_1$ имеем:

$$\begin{aligned} B \rightarrow a_3 = a_4 &=: x, & a_1 = a_3^{-1} a_6 a_3 &\Rightarrow y = x^{-1} w^{-1} x, \\ C \rightarrow a_1 = a_2 &=: y, & a_5 = a_1^{-1} a_4 a_1 &\Rightarrow w = y^{-1} x^{-1} y, \\ A \rightarrow a_5 = a_6 &=: w^{-1}, & a_3 = a_5^{-1} a_2 a_5 &\Rightarrow x = w y w^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, представление фундаментальной группы будет:

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 3_1, \infty) = \langle x, y : xw = wy, w = y^{-1}x^{-1}y \rangle. \quad (2.6)$$

Отметим широкий класс узлов (так называемых двухмостовых узлов, см. [18]), у которых фундаментальная группа порождена двумя образующими, и ее представление имеет вид (2.6):

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, \infty) = \langle x, y : xw = wy, w = W(x, y, x^{-1}, y^{-1}) \rangle, \quad (2.7)$$

где W – некоторые слова с буквами (x, y, x^{-1}, y^{-1}) . Например, для простейших гиперболических узлов 4_1 (узел “восьмерка”) и 5_2 , см. рис. 2, фундаментальная группа (2.7) определяется словами:

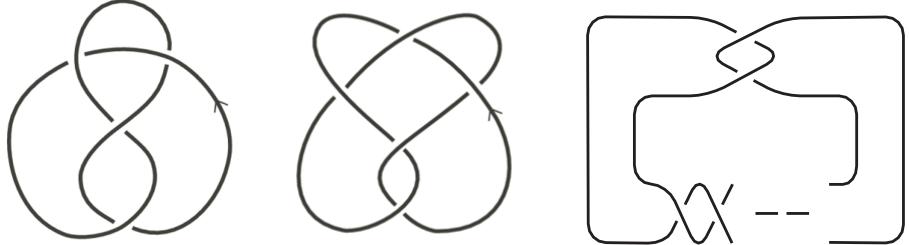
$$4_1 \rightarrow W_{4_1} := y^{-1} x y x^{-1}, \quad (2.8)$$

и

$$5_2 \rightarrow W_{5_2} := y x^{-1} y x y^{-1} x, \quad (2.9)$$

а также, см. рис. 2, так называемые скрученные (“twisted”) узлы K_p , имеют

$$K_p \rightarrow W_{K_p} := (x y^{-1} x^{-1} y)^p. \quad (2.10)$$



Ruc. 2. $K = 4_1$, $K := 5_2$ и $K := K_p$ – скрученные узлы

2.2. Представление $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, \infty) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и алгоритм построения А-многочлена. В работе [16] для ориентированного трехмерного многообразия $X \subset \mathbb{H}^3$, границу которого можно заключить внутрь тора, т.е. $\partial X \subset \mathbb{T}^2$ (например, $X = \mathbb{S}^2 \setminus K$), с помощью представления ρ фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в виде группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{U\}$ – унимодулярных ($\det U = 1$) матриц 2×2 , предложена изометрическая гиперболической метрике \mathbb{H}^3 параметризация (m, l) в виде алгебраической кривой $A(m, l) = 0$. При этом переменная m в многочлене A имеет четные степени и соответствует точкам окружности меридионального сечения граничного тора – широта, а l – точки трансверсального меридиану цикла L (пересекающего его в одной точке) – долгота.

Общая идея этого подхода состоит в следующем. Циклы M и L в многообразии X идентифицируются как произведения образующих (генераторов) группы $\pi_1(X)$. Затем для этих образующих определяются их представления из $SL_2(\mathbb{C})$ так, чтобы элементы соответствующих матриц содержали координаты $m \in M$ и $l \in L$. Наконец, рассматривая необходимое число нетривиальных представлений, соответствующих тривиальным циклам, все неопределенные параметры, кроме m и l , исключаются, оставляя полиномиальную зависимость $A(m, l) = 0$.

Опишем эту процедуру для двухмостовых узлов, приведенных выше, см. (2.7). Следуя [16], обращаемся к (2.7) и полагаем

$$M := x \quad \text{и} \quad L := x^n w w^*,$$

где слово w^* – зеркальная перестановка слова w , а n выбрано так, чтобы сумма показателей степеней у L равнялась нулю. Определяем представление генераторов

$$\rho(M) := \rho(x) := \begin{bmatrix} m & 1 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}, \quad \rho(y) := \begin{bmatrix} m & 0 \\ t & m^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Далее, подставляя в (2.7) конкретное слово w , соответствующее рассматриваемому узлу, генерируем матрицу

$$P(m, t) := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} := \rho(xw) - \rho(wy) = \rho(x)\rho(w) - \rho(w)\rho(y), \quad (2.12)$$

которая для гиперболических двухмостовых узлов должна иметь нулевую главную диагональ

$$p_{11} = p_{22} = 0. \quad (2.13)$$

Обозначим лорановский многочлен от t :

$$p(m, t) := p_{12},$$

генерируем матрицу

$$Q(m, t) := \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} := \rho(L) = \rho(x^n)\rho(w)\rho(w^*),$$

и обозначаем

$$q(m, t) := q_{11}. \quad (2.14)$$

Наконец, из системы уравнений

$$\begin{cases} p(m, t) = 0 \\ q(m, t) = l \end{cases} \quad (2.15)$$

исключаем t (подсчитав результатант многочленов $t^r p$ и $t^s(q-l)$ относительно t) и получаем искомый многочлен $A(m, l)$.

Проиллюстрируем эту процедуру на конкретных узлах (2.6), (2.7), (2.8), (2.9).

2.3. $A(m, l)$ многочлен для узла “трилистника” 3_1 . Подставляя в (2.6) представления (2.11) для y^{-1}, x^{-1}, y , получим $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ представление для w :

$$\rho(w) = \rho(y^{-1}x^{-1}y) = \rho(y^{-1}) \cdot \rho(x^{-1}) \cdot \rho(y) = \begin{bmatrix} m + tm^{-1} & m^{-2} \\ -tm^2 + (1-t)t & (1-t)m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Далее, согласно описанной выше процедуре, находим представление $\rho(xw) - \rho(wy)$ – матрицу $P(m, t)$. Здесь нас ожидает сюрприз⁹ – условие (2.13) не выполнено, но, хотя и $p_{22} = 0$, имеем

$$p_{11} = -(m^4 + m^2t - m^2 + 1) + m^{-2} \neq 0. \quad (2.16)$$

Поразмыслив немного над фундаментальной группой (2.6), имеем

$$y = w^{-1}xw = (y^{-1}xy)x(y^{-1}x^{-1}y) = (y^{-1}xyx^{-1})x(xy^{-1}x^{-1}y),$$

тем самым группы (2.6) и фундаментальная группа скрученного узла K_1 , см. (2.10), совпадают

$$\langle x, y : x\tilde{w} = \tilde{w}y, \tilde{w} = xy^{-1}x^{-1}y \rangle = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_1, \infty), \quad (2.17)$$

как и порождающие их узлы¹⁰ 3_1 и K_1 . Теперь, применяя описанную выше процедуру из [16] к группе (2.17), получаем для матриц $\rho(\tilde{w})$ и $\rho(\tilde{w})^*$ следующие выражения:

$$\begin{bmatrix} (t-1)^2 + tm^2 & (t-1)m^{-1} + m \\ (t-1)tm^{-1} + tm & tm^{-2} + 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} tm^2 + 1 & (t-1)m + m^{-1} \\ (t-1)tm + tm^{-1} & (t-1)^2 + tm^{-2} \end{bmatrix}.$$

Для матрицы $P(m, t)$, как и положено, имеем (2.13): $p_{11} = p_{22} = 0$, а для лорановского многочлена p_{12} получаем

$$p(m, t) := p_{12} = (m^4 + m^2t - m^2 + 1)m^{-2}. \quad (2.18)$$

Вычислив матрицу $Q(m, t) := \rho(\tilde{w}\tilde{w}^*) = \rho(\tilde{w})\rho(\tilde{w}^*)$, имеем для элемента q_{11} :

$$q(m, t) := q_{11} = (m^6t^2 + m^4t^3 - m^4t^2 + m^4t + m^2t^3 - m^2t^2 + m^2 + t^2 - t)m^2.$$

Таким образом, система (2.15) получена. Из первого уравнения сразу выражаем t :

$$p(m, t_0) = 0 \implies t_0 = 1 - m^2 - m^{-2}. \quad (2.19)$$

Подставляя полученное t во второе уравнение, получаем (после всех сокращений):

$$q(m, t)|_{t=t_0} = l \implies A(m, l) = -(m^6 + l). \quad (2.20)$$

⁹Узел 3_1 – не гиперболический, поэтому (2.13) не гарантировано

¹⁰В чем легко убедиться, сравнивая рис. 1 и K_n , $n = 1$ на рис. 2

2.4. $A(m, l)$ многочлен для узла “восьмерка” 4_1 . Подставляя в (2.8) представления (2.11) для x, y и их обратных, получим $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ представление для w и w^* :

$$\rho(w) = \rho(y^{-1})\rho(x)\rho(y)\rho(x^{-1}) = \begin{bmatrix} (t+m^2)m^{-2} & (1-t-m^2)m^{-1} \\ (t(1-t)-tm^2)m^{-1} & (1-t)^2+tm^2 \end{bmatrix}.$$

$$\rho(w^*) = \begin{bmatrix} ((1-t)^2 \cdot m^2 + t)m^{-2} & ((1-t)m^2 - 1)m^{-1} \\ ((1-t)m^2 t - t)m^{-1} & m^2 t + 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу $P(m, t) := \rho(xw) - \rho(wy)$. Тест $p_{11} = p_{22} = 0$ выполнен, а для лорановского многочлена p_{12} имеем:

$$p(m, t) := (m^4 t - m^4 + m^2 t^2 - 3m^2 t + 3m^2 + t - 1)m^{-2}.$$

Вычислив матрицу $Q(m, t) := \rho(ww^*)$, имеем для элемента q_{11} :

$$q(m, t) := q_{11} = (m^6 t^2 - m^6 t + m^4 t^2 - m^2 t^3 + m^4 - m^2 t^2 + m^2 t + t^2)m^{-4}.$$

Наконец, избавляемся от t в системе (2.15), вычисляя результатант многочленов $m^2 p$ и $m^4 q$ относительно t . Получаем искомый многочлен

$$A_{4_1}(m, l) := -lm^8 + lm^6 + l^2 m^4 + 2lm^4 + m^4 + lm^2 - l. \quad (2.21)$$

2.5. $A(m, l)$ многочлен для узла 5_2 . Как и ранее, стартуя с (2.9), получаем $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ представление для w и w^* :

$$\rho(w) := \begin{bmatrix} m^2 t^2 - 2m^2 t + m^2 + t & \frac{(t-1)(m^2 t - 2m^2 + 1)}{m} \\ \frac{t(m^2 t^2 - 3m^2 t + 2m^2 + t - 1)}{m} & \frac{m^2 t^3 - 4m^2 t^2 + 4m^2 t + t^2 - 2t + 1}{m^2} \end{bmatrix},$$

$$\rho(w^*) := \begin{bmatrix} m^2 t^2 - 2m^2 t + t^3 + m^2 - 4t^2 + 4t & \frac{m^2 t - m^2 + t^2 - 3t + 2}{m} \\ \frac{(t-1)t(m^2 + t - 2)}{m} & \frac{m^2 t + t^2 - 2t + 1}{m^2} \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу $P(m, t) := \rho(xw) - \rho(wy)$, и для p_{12} имеем:

$$p(m, t) := \frac{m^4 t^2 - 3m^4 t + m^2 t^3 + 2m^4 - 5m^2 t^2 + 8m^2 t - 3m^2 + t^2 - 3t + 2}{m^2}.$$

Далее для элемента q_{11} матрицы $Q(m, t) := \rho(ww^*)$, получим $q(m, t) :=$

$$\begin{aligned} & - (m^{12}t^5 - 5m^{12}t^4 + m^{10}t^6 + 9m^{12}t^3 - 5m^{10}t^5 - 7m^{12}t^2 + 9m^{10}t^4 + 2m^8t^6 \\ & + 2m^{12}t - 6m^{10}t^3 - 11m^8t^5 + 23m^8t^4 + 2m^6t^6 + m^{10}t - 21m^8t^3 - 10m^6t^5 \\ & + 7m^8t^2 + 17m^6t^4 + 2m^4t^6 - 8m^6t^3 - 12m^4t^5 - 6m^6t^2 + 28m^4t^4 + m^2t^6 \\ & + 6m^6t - 31m^4t^3 - 6m^2t^5 - m^6 + 16m^4t^2 + 14m^2t^4 - 3m^4t - 16m^2t^3 + t^5 \\ & + 10m^2t^2 - 6t^4 - 4m^2t + 13t^3 - 12t^2 + 4t)/m^6. \end{aligned}$$

Вычисляя результант $(m^2 \cdot p, m^6(q-l), t)$, получаем:

$$A_{5_2}(m, l) := l^3 m^{14} - l^2 (m^{14} + 2l m^{12} + 2m^{10} - m^6 + m^4) + l (m^{10} - m^8 + 2m^4 + 2m^2 - 1) + 1.$$

2.6. $A(m, l)$ многочлен для узла 7_4 . С помощью *MAPLE* мы провели вычисления A -многочленов и для других узлов. Например, для узла 7_4 известно представление (2.7) фундаментальной группы, где

$$7_4 \rightarrow W_{7_4} := y x^{-1} y \ x y^{-1} x y^{-1} x y^{-1} x y^{-1} x y^{-1} x.$$

Из него, как и ранее, приходим к результаントу $(p, (q-l), t)$, который оказывается, разлагается на множители: $A_{7_4}(m, l) := A_{7_4}(m, l)^{(1)} A_{7_4}(m, l)^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} A_{7_4}^{(1)}(m, l) := & l^3 m^{14} + (-2m^{14} + 6m^{12} + 2m^{10} - 7m^8 + 2m^6 + 3m^4 - 2m^2 + 1)l^2 \\ & + (m^{14} - 2m^{12} + 3m^{10} + 2m^8 - 7m^6 + 2m^4 + 6m^2 - 2)l + 1. \\ A_{7_4}^{(2)}(m, l) := & (l^2 m^8 + (-m^8 + m^6 + 2m^4 + m^2 - 1)l + 1)^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.7. Замечание об AJ - гипотезе. Эта гипотеза была доказана для узлов $3_1, 4_1, 7_4$ (см. Garoufalidis [10] и Koutschan–Garoufalidis [32]); для торических узлов (см. Hikami [33], Tran [34]), для некоторых классов двухмостовых узлов, включая все скрученные узлы и крендели (см. Le [35], [36], [37]).

Явный вид A -многочленов для различных узлов можно найти в [40, 39].

3. Корни $P(z, \lambda)$ при $|z| = 1$ и ВКБ интегралы

Этот раздел – центральный в нашем препринте. В нем мы приводим новый материал: для различных узлов с известными A -многочленами¹¹ и объемами проводим анализ ветвей $\{\lambda_j(z)\}$ при $|z| = 1$ алгебраической функции (1.7) и их численное интегрирование для проверки нашей гипотезы (1.23), (1.24) о $(\exists, !)$ голоморфной ветви $\lambda_1 : |\lambda_1| > 1$ на дуге верхней полуокружности \mathbb{S}_+^1 :

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln |J_N(e^{2\pi i/N})|}{N} = 2\pi \int_0^{(1/2)} \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau \stackrel{(1.5)}{=} \text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K). \quad (3.1)$$

¹¹в предположении справедливости **AJ**-гипотезы

3.1. Узел 6₁: ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Как мы уже отмечали, явный вид характеристических многочленов (1.7) берем из известных $A(M, L)$ -многочленов, полагая $z \equiv M^2, \lambda \equiv L$ в (2.1). Ввиду интереса к (3.1), мы изучаем при $|z|=1$ ветви $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^d$ алгебраической функции $\lambda(z)$, определяемой (1.7). Отметим общие свойства¹² корней (по λ) многочлена $P(z, \lambda)$ при $|z|=1$:

- 1) $\lambda(z) = \overline{\lambda(\bar{z})}$, т.е. множества $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^d$ и $\{\overline{\lambda_j(\bar{z})}\}_{j=1}^d$ совпадают;
- 2) $\forall j \exists k \neq j : |\lambda_j(z)\lambda_k(z)| = 1, j, k = 1, \dots, d, |z| = 1$.

Для узла 6₁ имеем:

$$P(z, \lambda) := \lambda^4 z^4 + \lambda^3(-2z^6 + 3z^5 + 3z^4 + z - 1) + \lambda(-z^8 + z^7 + 3z^4 + 3z^3 - 2z^2) + \lambda^2(z^8 - 3z^7 - z^6 + 3z^5 + 6z^4 + 3z^3 - z^2 - 3z + 1) + z^4 = 0, \quad (3.2)$$

причем, $P(-1, \lambda) = (\lambda - 1)^4, P(1, \lambda) = (\lambda + 1)^4$.

Анализ ветвей $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^4$ достаточно провести на \mathbb{S}_+^1 -верхней полуокружности. Дискриминант в (3.2) равен $D(z) := z^6(z - 1)^{12}(z + 1)^{12}\Delta$, где $\Delta :=$

$$5z^{12} - 32z^{11} + 56z^{10} - 118z^9 + 124z^8 + 32z^7 + 123z^6 + 32z^5 + 124z^4 - 118z^3 + 56z^2 - 32z + 5$$

Из всех нулей Δ на верхней полуокружности лежат две точки ветвлений $\lambda(z)$: $z_1 := -0.84.. + i 0.53.. =: e^{it_1}, t_1 = 2.57.., z_2 := 0.052.. + i 0.99.. =: e^{it_2}, t_2 = 1.51..$. Имеем $\lambda_j(-1) = 1, j = 1, 2, 3, 4$. Двигаясь из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке, вычисляем корни многочлена (3.2) и получаем, что $|\lambda_j(z)| = 1, j = 1, 2, 3, 4$ на дуге $\{z = e^{it}, t \in [\pi, t_1]\}$. В точке z_1 две ветви совпадают $\lambda_1(z_1) = \lambda_4(z_1)$, а для $z = e^{it}, t \in (t_1, t_2]$ имеем: $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| = 1 = |\lambda_3(z)| > |\lambda_4(z)|$.

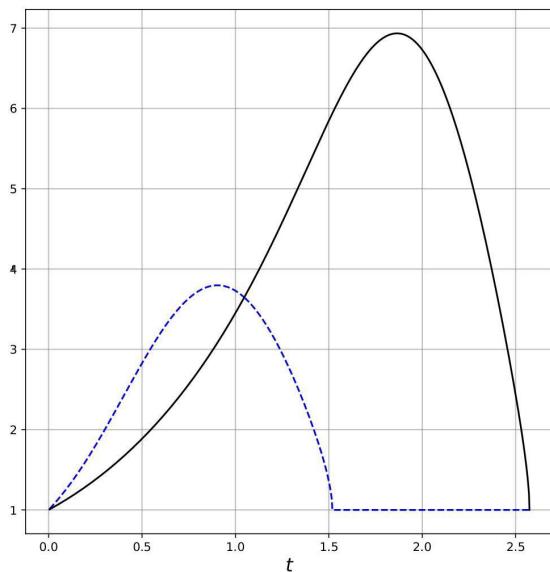


Рис. 3. $|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)| \geq 1$ при $z = e^{it}, t = 0, \dots, t_1$, для узла 6₁

¹²следуют из общих свойств корней окрашенных многочленов Джонса

В точке z_2 совпадают уже ветви $\lambda_2 = \lambda_3$, и на выходе (по часовой стрелке) из z_2 имеем: $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| > 1 > |\lambda_3(z)| > |\lambda_4(z)|$, $z = e^{it}, t \in (t_2, t^*]$. Отметим, что точка $t^* = 1.047\dots$ на дуге $(t_2, 0)$, в которой $|\lambda_1(z)| = |\lambda_2(z)| > 1 > |\lambda_3(z)| = |\lambda_4(z)|$ и затем при $z = e^{it}, t \in (t^*, 0)$ происходит перестройка порядка ветвей по величине модуля: $|\lambda_2(z)| > |\lambda_1(z)| > 1 > |\lambda_4(z)| > |\lambda_3(z)|$. Наконец, при $z = 1, \lambda_j(1) = -1, j = 1, 2, 3, 4$.

Заметим, что на верхней полуокружности справедливо $|\lambda_1(z)||\lambda_4(z)| = 1$ и $|\lambda_3(z)||\lambda_2(z)| = 1$. Также очевидно, что на нижней полуокружности (выходя из т. $z = -1$ против часовой стрелки) будет такая же структура ветвей алгебраической функции $\lambda(z)$.

Перейдем к вычислению интеграла¹³ в (3.1). Интегральная сумма дает:

$$\int_0^{t_1} \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx \sum_{k=0}^{99} \ln \left| \lambda_1(e^{ikt_1/100}) \right| \frac{t_1}{100} = 3.161001\dots$$

Известное значение объёма для узла 6_1 :

$$\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 6_1) = 3.16396322\dots$$

А.Б. Батхиным разработан специальный численный метод для выделения ветвей и подсчета интегралов (в окрестностях точек ветвления), позволяющий получать результаты с достаточно большой точностью (см. в [2] вычисления интеграла (3.1) для узла 5_2). Для узла 6_1 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 3.163963228883\dots$$

3.2. Узел 7_2 : ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Продолжаем численную проверку гипотезы (3.1) для различных узлов. Приведем характеристический многочлен (1.7), определяющий спектральную кривую $\lambda(z)$ для узла 7_2 :

$$\begin{aligned} P(z, \lambda) := & \lambda^5 + \lambda^4 a_4(z) + \lambda^3 a_3(z) + \lambda^2 a_2(z) + \lambda a_1(z) + z^{11} = 0, \\ a_1 := & z^4 - z^5 + 3z^9 + 4z^{10} - 2z^{11}; \\ a_2 := & -2z^2 + 5z^3 + z^4 - 4z^5 + 6z^7 + 5z^8 + 2z^9 - 4z^{10} + z^{11}; \\ a_3 := & 1 - 4z + 2z^2 + 5z^3 + 6z^4 - 4z^6 + z^7 + 5z^8 - 2z^9; \\ a_4 := & -2 + 4z + 3z^2 - z^6 + z^7. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим: $P(-1, \lambda) = (\lambda - 1)^4$, $P(1, \lambda) = (\lambda + 1)^4$.

¹³Т.к. $|\lambda| = 1$ на (t_1, π) , то верхний предел в интеграле может быть заменен на π

Дискриминант у многочлена $P(z, \lambda)$ равен $D(z) := z^{16} (z^2 - 1)^{20} \Delta$, где

$$\begin{aligned} \Delta := & 20z^{16} - 192z^{15} + 581z^{14} - 882z^{13} + 1649z^{12} - 2214z^{11} + \\ & 1146z^{10} + 730z^9 + 2733z^8 + 730z^7 + 1146z^6 - 2214z^5 + \\ & 1649z^4 - 882z^3 + 581z^2 - 192z + 20. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из 16 нулей Δ на окружности -8 , на \mathbb{S}_+^1 лежат две точки ветвления $\lambda(z)$: $z_1 := -0.89.. + i 0.45.. =: \mathbf{e}^{it_1}, t_1 = 2.67..$, $z_2 := -0.28.. + i 0.96.. =: \mathbf{e}^{it_2}, t_2 = 1.85..$

Ветви $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^5$ спектральной кривой (3.3) для узла 7_2 на окружности \mathbb{S}^1 ведут себя так же, как и ветви $\lambda(z)$ для 6_1 . Одно исключение: появилась дополнительная ветвь (обозначим ее $\lambda_3(z)$), голоморфная и по модулю равная единице на всей \mathbb{S}^1 . Двигаясь по \mathbb{S}_+^1 из $z = \mathbf{e}^{i\pi}$ по часовой стрелке, имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_j(-1) = 1, \quad |\lambda_j(z)| = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, & \quad z = \mathbf{e}^{it}, \quad t \in [\pi, t_1]; \\ \lambda_1(z_1) = \lambda_5(z_1), \quad |\lambda_1(z)| > 1 = |\lambda_j(z)| > |\lambda_5(z)|, \quad j = 2, 3, 4, & \quad t \in (t_1, t_2]; \\ \lambda_2(z_2) = \lambda_4(z_2), \quad |\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| > 1 = |\lambda_3(z)| > |\lambda_4(z)| > |\lambda_5(z)|, \quad t \in (t_2, t^*]; \\ |\lambda_1(z^*)| = |\lambda_2(z^*)| > 1 = |\lambda_3(z^*)| > |\lambda_4(z^*)| = |\lambda_5(z^*)|, \quad z^* = \mathbf{e}^{it^*}, \quad t^* = 1.45..; \\ |\lambda_2(z)| > |\lambda_1(z)| > 1 = |\lambda_3(z)| > |\lambda_5(z)| > |\lambda_4(z)|, & \quad t \in (t^*, 0]; \\ \lambda_j(1) = -1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. & \end{aligned}$$

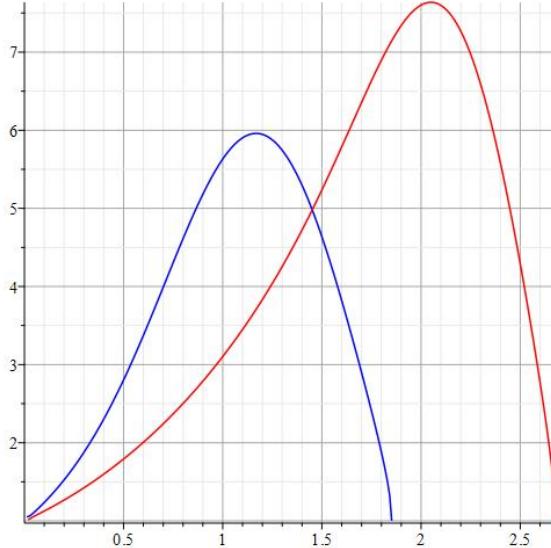


Рис. 4. $|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)| \geq 1$ при $z = \mathbf{e}^{it}, t = 0, \dots, t_1$, для узла 7_2

Известное значение объёма для узла 7_2 : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 7_2) = 3.331744232\dots$

Для узла 7_2 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 3.3317442316411\dots$$

3.3. Узел 7₄: ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Этот узел имеет особенность — его ха-

рактеристический многочлен факторизуется¹⁴ $P(z, \lambda) = P^{(1)}(z, \lambda)P^{(2)}(z, \lambda)$:

$$\deg_\lambda[P^{(1)}(z, \lambda)] = 3, \deg_z[P^{(1)}] = 7, \quad \deg_\lambda[P^{(2)}(z, \lambda)] = 2, \deg_z[P^{(2)}] = 4,$$

Это обстоятельство облегчает анализ структуры 5-ти ветвей спектральной кривой $\lambda(z)$, т.к. ветви сомножителей могут рассматриваться независимо.

Дискриминант многочлена $P_1(z, \lambda)$ равен $D_1(z) := z(z^2 - 1)^6\Delta_1$, где

$$\Delta_1 := (4z^6 + 12z^4 + 27z^3 + 12z^2 + 4)(2z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 5z + 2)^2,$$

а у $P_1(z, \lambda)$ дискриминант $D_2(z) := (z^2 - 1)^2\Delta_2$, $\Delta_2 := (z^2 + z + 1)(z^2 - 3z + 1)$.

На \mathbb{S}_+^1 у Δ_1 один 1-кратный нуль $z_1 := -0.94.. + i.032.. =: e^{it_1}, t_1 = 2.81..$

Там же, на \mathbb{S}_+^1 и у Δ_2 лишь один нуль $z_2 := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =: e^{it_2}, t_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Обозначим $\{\lambda_{2k-1}(z)\}_{k=1}^3$ ветви кривой $\lambda^{(1)}(z)$, определяемой уравнением $P^{(1)}(z, \lambda) = 0$, а $\{\lambda_{2k}(z)\}_{k=1}^2$ — ветви $\lambda^{(2)}(z)$: $P^{(2)}(z, \lambda) = 0$.

Двигаясь по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке, имеем для $\lambda^{(1)}(z)$:

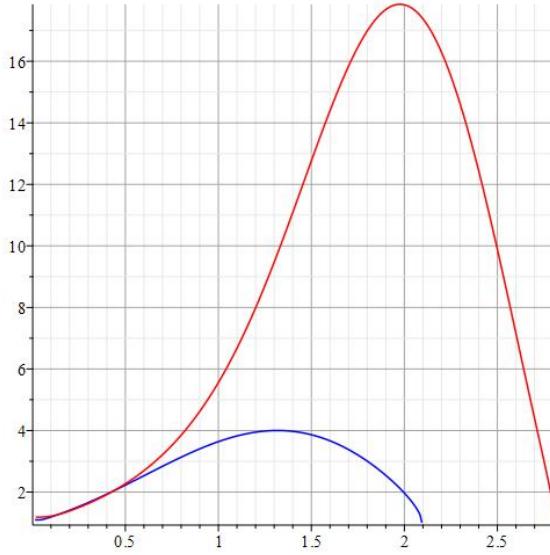


Рис. 5. $|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)| \geq 1$ при $z = e^{it}, t = 0, \dots, t_1$, для узла 7₄

$$\begin{cases} \lambda_j(-1) = 1, \quad j = 1, 3, 5, \quad |\lambda_j(z)| = 1, \quad z = e^{it}, \quad t \in [\pi, t_1], \quad \lambda_1(z_1) = \lambda_5(z_1); \\ |\lambda_1(z)| > 1 = |\lambda_3(z)| > |\lambda_5(z)|, \quad z = e^{it}, \quad t \in (t_1, 0), \quad \lambda_j(1) = -1, \quad j = 1, 3, 5; \end{cases}$$

Аналогично для $\lambda^{(2)}(z)$:

$$\begin{cases} \lambda_j(-1) = 1, \quad j = 2, 4, \quad |\lambda_j(z)| = 1, \quad z = e^{it}, \quad t \in [\pi, t_2], \quad \lambda_2(z_2) = \lambda_4(z_2); \\ |\lambda_2(z)| > 1 > |\lambda_4(z)|, \quad z = e^{it}, \quad t \in (t_2, 0), \quad \lambda_j(1) = -1, \quad j = 2, 4. \end{cases}$$

¹⁴См. (2.22), следуя [32] мы опускаем квадрат у $A_{7_4}^{(2)}$

Отметим, что в окрестности точки $z = 1$, $\exists z^* = e^{it^*}$:
 $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)|$ при $0 < t \in (t^*, 0)$, а при $\pi > t \in (\pi, t^*)$ имеем $|\lambda_1(z) < |\lambda_2(z)|$.

Известное значение объема для узла 7_4 : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 7_4) = 5.13794120\dots$

Для узла 7_4 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 5.137941201873417769\dots$$

3.4. Узел 7_5 : ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Начиная с этого пункта, мы не будем приводить в основном тексте¹⁵ явный вид многочленов $P(z, \lambda)$, определяющих в (1.7) спектральную кривую $\lambda(z)$. Для узла 7_5 , отметим лишь, что

$$\deg_\lambda[P(z, \lambda)] = 8, \deg_z[P(z, \lambda)] = 34, \quad P(\pm 1, \lambda) = (\lambda \pm 1)^8.$$

Дискриминант $P(z, \lambda)$ имеет степень 50, не считая нулей высокой четной кратности в точках $\pm 1, 0$. Однако, на верхнюю полуокружность \mathbb{S}_+^1 попадают лишь три точки ветвления $z_j := e^{it_j}, j=1,\dots,3$ и еще в одной точке $z_0 := e^{it_0} : t_0 := 2.237035759..; t_1 := 2.848733829..; t_2 := 2.233540134..; t_3 := 2.190746731..$, две ветви пересекаются голоморфно, и в окрестности т. z_0 их модуль равен 1.

У всех ветвей $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^8$ спектральной кривой узла 7_5 на окружности \mathbb{S}^1 в окрестности т. $e^{i\pi}$ модуль равен 1, причем две ветви сохраняют это свойство на всей \mathbb{S}^1 , а в окрестности т. 1 у трех других ветвей модули больше 1, и у трех оставшихся модули равны обратным величинам предыдущих модулей. Двигаясь по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке, выделим ветви по модулю

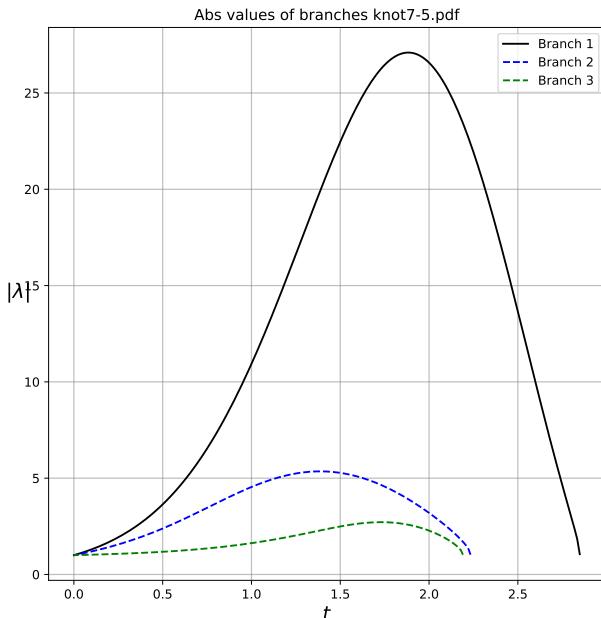


Рис. 6. $|\lambda_j(z)| \geq 1$, $j = 1, 2, 3$, при $z = e^{it}, t \in (0, \pi)$, для узла 7_5

¹⁵См. http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Data:7_5/A-polynomial

большие единицы. В точке z_1 ветвится единственная такая ветвь, обозначим $\lambda_1(z)$, остальные ветви остаются равными (или меньше) по модулю единице). Эта ветвь сохранит максимальный модуль на пути от z_1 до 1, на этом пути она голоморфна (не ветвится) и формирует ответ. Две другие ветви $\lambda_2(z)$ и $\lambda_3(z)$, ветвящиеся в т. z_2 и z_3 , соответственно, и имеющие модуль больше 1 на участках голоморфности от z_2 до 1 и от z_3 до 1, сохраняют на этих участках упорядоченность модулей: $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| > |\lambda_3(z)| > 1$.

Известное значение объёма для узла 7_5 : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 7_5) = 6.443537381\dots$

Для узла 7_5 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 6.4435373808505754761\dots$$

3.5. Узел 7_6 : ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Для многочленов $P(z, \lambda)$ ¹⁶, определяющих в (1.7) спектральную кривую $\lambda(z)$ узла 7_6 имеем

$$\deg_\lambda[P(z, \lambda)] = 9, \deg_z[P(z, \lambda)] = 27, \quad P(\pm 1, \lambda) = (\lambda \pm 1)^9.$$

Дискриминант $P(z, \lambda)$ имеет степень 84, не считая нулей высокой четной кратности в точках $\pm 1, 0$. Однако, на верхнюю полуокружность \mathbb{S}_+^1 попадают лишь четыре точки ветвления $z_j := e^{it_j}, j=1,\dots,4$:

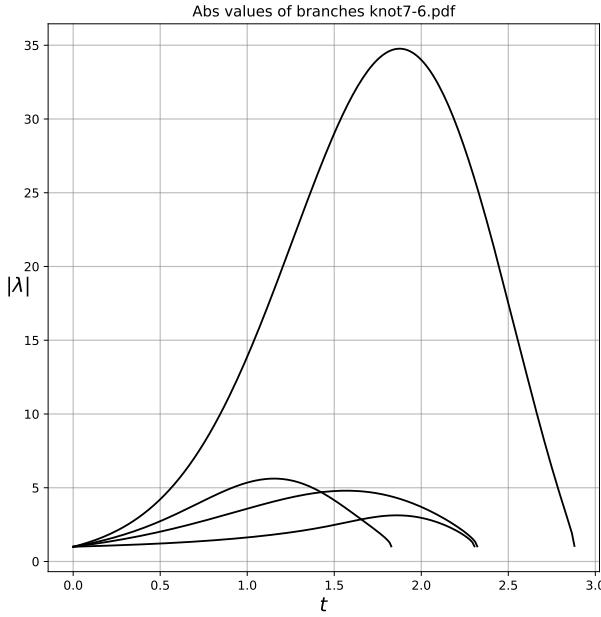
$t_1 := 2.880078732..; t_2 := 2.321655981..; t_3 := 2.305603863.., t_4 := 1.827810801$; и еще в двух точках $z_0j := e^{it_{0j}}$: $t_{01} := 2.3814402100..; t_{02} := 2.3464745745..$, пересекаются голоморфно по две ветви с равными 1 модулями.

У всех ветвей $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^9$ спектральной кривой узла 7_6 на окружности \mathbb{S}^1 в окрестности т. $e^{i\pi}$ модуль = 1, причем одна ветвь сохраняет это свойство на всей \mathbb{S}^1 , а в окрестности т. 1 у четырех других ветвей модули > 1 , и у четырех оставшихся модули равны обратным величинам предыдущих модулей, т.е. < 1 .

Двигаясь по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке, выделим ветви, по модулю больше единицы. В точке z_1 ветвится единственная такая ветвь, обозначим ее через $\lambda_1(z)$, остальные ветви остаются равными (или $<$) по модулю единице. Эта ветвь сохранит максимальный модуль на пути от z_1 до 1, на этом пути она голоморфна (не ветвится) и формирует ответ. Две другие ветви $\lambda_2(z)$ и $\lambda_3(z)$, ветвящиеся в т. z_2 и z_3 , соответственно, и имеющие модуль > 1 на участках голоморфности от z_2 до 1 и от z_3 до 1, сохраняют на этих участках упорядоченность модулей: $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| > |\lambda_3(z)| > 1$.

Наконец, ветвь $\lambda_4(z)$, ветвящаяся в т. z_4 , имеющая модуль > 1 на участке голоморфности от z_4 до 1, по мере продвижения (по часовой стрелке) наращивает свой модуль, так что сначала $|\lambda_1(z)| > |\lambda_2(z)| > |\lambda_4(z)| > |\lambda_3(z)| > 1$, а потом и $|\lambda_1(z)| > |\lambda_4(z)| > |\lambda_2(z)| > |\lambda_3(z)| > 1$, см. Рис.7.

¹⁶см. http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Data:7_6/A-polynomial



Puc. 7. $|\lambda_j(z)| \geq 1$, $j = 1, \dots, 4$, при $z = e^{it}$, $t \in (0, \pi)$, для узла 7_6

Известное значение объёма для узла 7_6 : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 7_6) = 7.084925954\dots$

Для узла 7_6 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 7.0849259535109686484\dots$$

3.6. Узел 7_7 : ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. У этого узла, как и у 7_4 , имеется факторизация характеристического многочлена¹⁷ $P(z, \lambda) = P^{(1)}(z, \lambda)P^{(2)}(z, \lambda)$: $\deg_\lambda[P^{(1)}(z, \lambda)] = 4$, $\deg_z[P^{(1)}] = 14$, $\deg_\lambda[P^{(2)}(z, \lambda)] = 3$, $\deg_z[P^{(2)}] = 5$, Это обстоятельство облегчает анализ 7-ми ветвей спектральной кривой $\lambda(z)$, т.к. ветви $\lambda^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$ сомножителей P могут рассматриваться независимо.

Дискриминант многочлена $P^{(1)}(z, \lambda)$ равен $D_1(z) := z^{16}(z^2 - 1)^{12}\Delta_1$, где $\Delta_1 := (16z^8 - 68z^7 + 44z^6 + 120z^5 + 33z^4 + 120z^3 + 44z^2 - 68z + 16)(2z^{10} - 22z^9 + 91z^8 - 176z^7 + 163z^6 - 108z^5 + 163z^4 - 176z^3 + 91z^2 - 22z + 2)^2$; а у $P^{(2)}(z, \lambda)$ дискриминант $D_2(z) := (z^2 - 1)^6\Delta_2$, где $\Delta_2 := z^8 - 6z^7 + 11z^6 - 12z^5 - 11z^4 - 12z^3 + 11z^2 - 6z + 1$.

На \mathbb{S}_+^1 у Δ_1 два 1-кратных нуля (точки ветвления) в точках: $e^{it_1^{(1)}}, e^{it_2^{(1)}}$ и один 2-кратный нуль в т. $e^{it_0^{(1)}}$. У Δ_2 на \mathbb{S}_+^1 один 1-кратный нуль в т. $e^{it_1^{(2)}}$: $t_1^{(1)} := 2.905300\dots, t_1^{(2)} := 2.407169\dots, t_2^{(1)} := 1.535100\dots, t_0^{(1)} := 2.216967\dots$. В точке $e^{it_0^{(1)}}$ пересекаются голоморфно две ветви кривой $\lambda^{(1)}(z)$ с равными 1 модулями, а также в каждой из точек $e^{it_{01}^{(12)}}, t_{01}^{(12)} := 2.408663\dots$ и $e^{it_{02}^{(12)}}, t_{02}^{(12)} := 1.700625\dots$ пересекаются ветвь $\lambda^{(2)}(z)$ и ветвь $\lambda^{(1)}(z)$ с равными 1 модулями.

¹⁷ Имеем $P(\pm 1, \lambda) = (\lambda \pm 1)^7$; А-многочлен в http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Data:7_7/A-polynomial

У всех ветвей $\{\lambda_j^{(1)}(z)\}_{j=1}^4$ и $\{\lambda_j^{(2)}(z)\}_{j=1}^3$ спектральной кривой узла 7_7 на окружности \mathbb{S}^1 в окрестности т. $e^{i\pi}$ модуль = 1, причем одна ветвь кривой $\lambda^{(2)}(z)$ сохраняет это свойство на всей \mathbb{S}^1 , а в окрестности т. 1 на \mathbb{S}_+^1 у другой ветви $\lambda^{(2)}(z)$ и двух ветвей $\lambda^{(1)}(z)$ модули > 1 , и у трех оставшихся ветвей $\lambda(z)$ модули равны обратным величинам предыдущих модулей () .

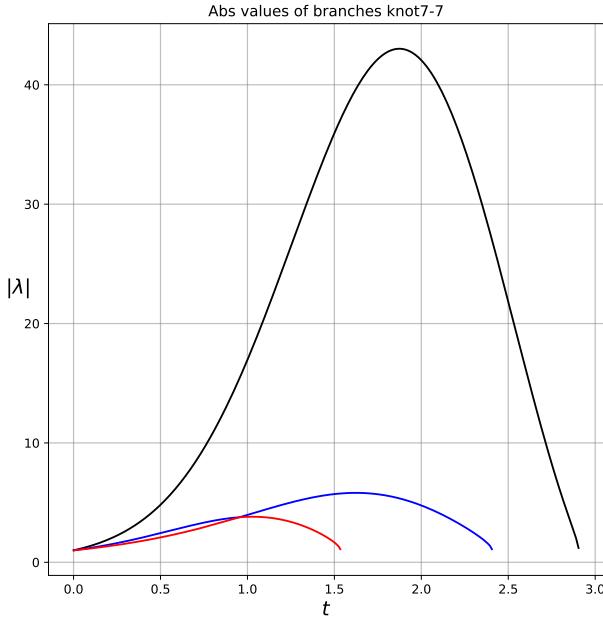


Рис. 8. $|\lambda_j(z)| \geq 1$, $j = 1, 2, 3$, при $z = e^{it}$, $t \in (0, \pi)$, для узла 7_7

Двигаясь по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке, выделим ветви, по модулю большие единицы. В точке $z_1 := e^{it_1^{(1)}}$ ветвится единственная такая ветвь, обозначим $\lambda_1(z) := \lambda_1^{(1)}(z)$, остальные ветви остаются равными (или $<$) по модулю единице. Эта ветвь сохранит максимальный модуль на пути от z_1 до 1, на этом пути она голоморфна (не ветвится) и формирует ответ.

Зафиксируем две другие ветви $\lambda_2(z) := \lambda_1^{(2)}(z)$ и $\lambda_3(z) := \lambda_2^{(1)}(z)$, ветвящиеся в т. $z_2 := e^{it_1^{(2)}}$ и $z_3 := e^{it_2^{(1)}}$, соответственно, и имеющие модуль > 1 на участках голоморфности от z_2 до 1 и от z_3 до 1. Причем там их модуль меньше модуля ветви $\lambda_1(z)$. Добавим, что на дуге \mathbb{S}_+^1 от z_3 до 1 $\exists z_* : |\lambda_2(z)| > |\lambda_3(z)|$ от z_3 до z_* , но $|\lambda_2(z)| < |\lambda_3(z)|$ от z_* до 1.

Известное значение объёма для узла 7_7 : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 7_7) = 7.643375172\dots$

Для узла 7_7 численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 7.643375172359955\dots$$

3.7. ВКБ интегралы и меры Малера. Прежде чем перейти к заключительной серии рассмотренных узлов, отметим, что связь между ВКБ интегралами в (1.12) и специальными функциями, выражающими гиперболические объемы, была замечена в работах Д.Бойда, см. [14, 15], посвященных мерам Малера. *Логарифмической мерой Малера многочлена* $P(x_1, \dots, x_n)$ называют

$$m(P) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |P(e(t_1), \dots, e(t_n))| dt_1 \cdots dt_n, \quad e(t) := \exp(2\pi i t).$$

Соответственно, просто *мера Малера многочлена* есть $\exp(m(P))$.

Для многочлена двух переменных $P(z, \lambda)$ мера Малера есть $m(P) :=$

$$\int_0^1 \int_0^1 \log |P(e(t_1), e(t_2))| dt_2 dt_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \log \prod_{j=1}^n |(e(t_2)) - \lambda_j(e(t_1))| dt_2 \right) dt_1.$$

Применив к внутреннему интегралу формулу Йенсена,

$$m(P) := \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \log |e(t_2) - \lambda_j(e(t_1))| dt_2 \right) dt_1 = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \log^+ |\lambda_j(e^{2\pi i t_1})| dt_1,$$

получаем сумму интегралов (1.12) по всем ветвям $\lambda_k(z) : |\lambda_k| \geq 1, z \in \mathbb{S}^1$.

В работе Д.Бойда [15] в качестве многочленов двух переменных рассмотрены $A(M, L)$ -многочлены. Приведены примеры трех узлов: $k5_{15}$, $k5_7$ и 10_{125} , для которых вычислены интегралы логарифмов модулей ветвей алгебраических функций $A(M, L) = 0^{18}$. В следующих трех пунктах мы тоже проанализируем эти примеры в предположении справедливости **AJ**-гипотезы (2.1).

3.8. Узел 10_{125} : ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Этот узел рассмотрен в [15, Example 3]. Кроме номера 10_{125} в классификации Ролфсена, его также называют узел $k6_{20}$ и крендель $K(-2, 3, -5)$. Для многочленов $P(z, \lambda)^{19}$, определяющих в (1.7) спектральную кривую $\lambda(z)$ узла 10_{125} , имеем $\deg_\lambda[P(z, \lambda)] = 9$, $\deg_z[P] = 27$,

$$P(1, \lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^7, \quad P(-1, \lambda) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda - 1)^5.$$

Дискриминант $P(z, \lambda)$, не считая нулей высокой четной кратности в точках $\pm 1, 0$, имеет 28 однократных нулей, 32 двукратных нуля, и четырехкратные нули в корнях уравнения $(Z^4 + 1)^4 = 0$. При этом, на верхнюю полуокружность $\mathbb{S}_+ = 1$, кроме половины упомянутых четырехкратных нулей и трех двукратных нулей в точках голоморфного пересечения ветвей $z_{0j} := e^{it_{0j}} : t_{01} := 2.6551684954..; t_{02} := 1.4920790567.., t_{03} := 1.0826837985..,$

¹⁸К сожалению в [15] ни явного вида, ни четкой ссылки откуда взяты $A(M, L)$ многочлены для этих узлов не приведено.

¹⁹см. http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Data:10_125/A-polynomial

попадают пять точек ветвления (однократные нули): $z_j := e^{it_j}$, $j=1,\dots,5$: $t_1 := 3.126927230..; t_2 := 2.347421331..; t_3 := 2.342125309..; t_4 := 1.094478093..; t_5 := 0.328860611..$.

В окрестности т. $e^{i\pi}$ (точнее на дуге $[t_1, 2\pi - t_1]$ окружности \mathbb{S}^1) у всех $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^9$ модуль = 1, причем одна ветвь²⁰ сохраняет это свойство на всей \mathbb{S}^1 , а из т. 1 выходят три ветви с модулями > 1 , три с модулями, равными обратным величинам предыдущих модулей, т.е. < 1 , и у трех оставшихся модули = 1.

Двигаемся по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке. В точке ветвления z_1 две ветви с модулем = 1 разветвляются на ветви $\lambda_1 : |\lambda_1| > 1$ ²¹ и $\lambda_9 : |\lambda_9| = |\lambda_1| = 1$. Аналогично, в точках ветвления z_j , $j = 2,3,4$, формируются ветви $\lambda_j : |\lambda_j| > 1$, $j = 2,3,4$, и их партнеры : $\lambda_j : |\lambda_j| < 1$, $j = 8,7,6$. Напомним, что остается одна ветвь $\lambda_5 : |\lambda_5| = 1$ на всей \mathbb{S}^1 . Таким образом, все ветви $\{\lambda_j(z)\}_{j=1}^9$ на \mathbb{S}_+^1 зафиксированы.²² Обратим внимание на близость точек t_2, t_3 и t_{03}, t_4 .

Самое интересное происходит на дуге $[t_4, 0]$. Сначала здесь в точке t_{03} происходит голоморфное пересечение ветви $\lambda_3 : |\lambda_3(e^{it})| > 1$, $t \in (t_4, t_{03})$ с её партнером $\lambda_7 : |\lambda_7| = |\lambda_3|^{-1}$. Таким образом, на дуге (t_{03}, t_5) имеем $|\lambda_j| > 1$, $j = 1,2,4,7$. В т. t_5 ветвится λ_7 со своим партнером λ_3 и затем на дуге $(t_5, 0]$ имеем $|\lambda_7| = |\lambda_3| = 1$, а для остальных ветвей $|\lambda_2| > |\lambda_1| > |\lambda_4| > 1$. На Рис.9.-2) можно проследить смену порядка модулей $|\lambda_j| > 1$, $j = 1,2,4,7$.

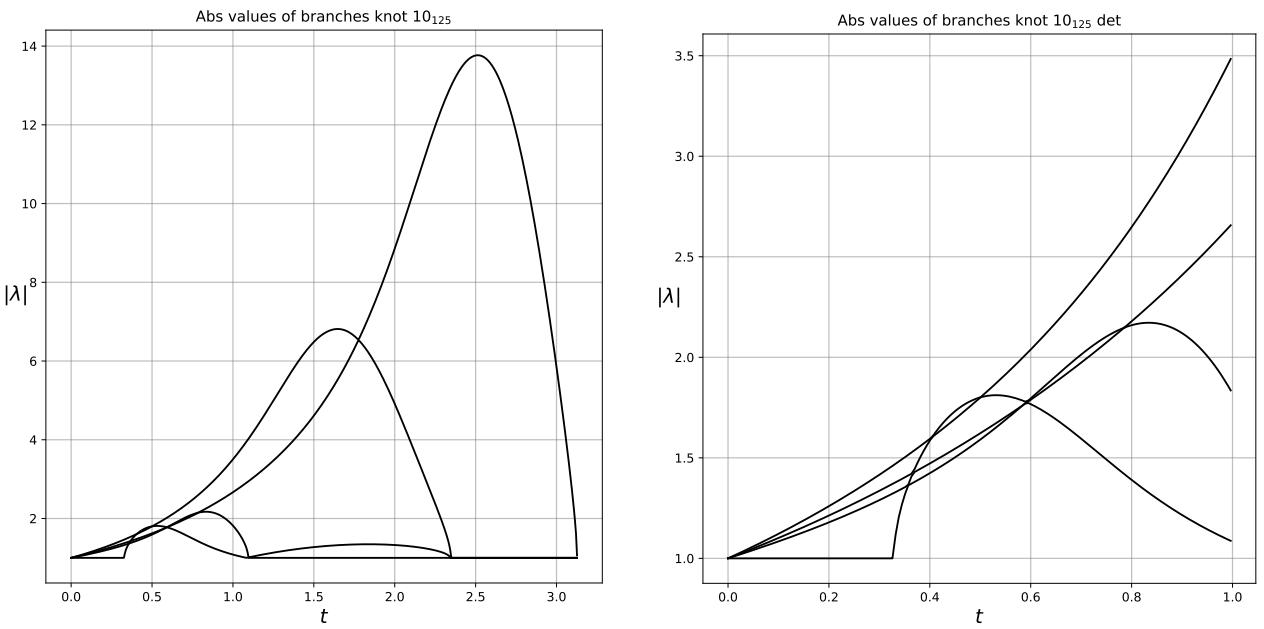


Рис. 9. 1) $|\lambda_j(z)| \geq 1$, $j = 1, \dots, 5$ при $z = e^{it}$, $t \in (0, \pi)$ для узла 10_{125}
2) масштабирование: $t \in (0, 1)$; $|\lambda_4| = |\lambda_1| = |\lambda_7|$ в т. $t^* = 0.59\dots$

²⁰обозначим её λ_5

²¹эта ветвь сохранит голоморфность на дуге $[t_1, 0]$ и сформирует ответ.

²²Заметим, что на рассмотренном участке $[t_3, t_4]$ происходит смена: $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ меняется на $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Известное значение объёма для узла 10_{125} : $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus 10_{125}) = 4.611961375\dots$.

Для узла 10_{125} численное значение интеграла равно:

$$\int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 4.61196.$$

Сравнивая результаты этого пункта с [15] отметим несовпадение величин $\deg_z[P]$ и несогласие с утверждением в [15], что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 \in \mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$.

3.9. Узел $k5_{15}$: ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Этот узел рассмотрен в [15, Example 1]. Для многочленов $P(z, \lambda)$ ²³, определяющих в (1.7) спектральную кривую $\lambda(z)$ узла $k5_{15}$, имеем $\deg_\lambda[P(z, \lambda)] = 16$, $\deg_z[P] = 291$, $P(1, \lambda) = (\lambda - 1)^7(\lambda + 1)^9$, $P(-1, \lambda) = (\lambda^{14} + 8\lambda^{13} + 39\lambda^{12} + 24\lambda^{11} + 5\lambda^{10} - 40\lambda^9 + 19\lambda^8 + 16\lambda^7 + 19\lambda^6 - 40\lambda^5 + 5\lambda^4 + 24\lambda^3 + 39\lambda^2 + 8\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$. При этом среди корней $P(-1, \lambda)$ имеются $\lambda_j : |\lambda_j(-1)| = 5.80909\dots, j = 1, 2$, и $|\lambda_j(-1)| = 0.17214\dots, j = 15, 16$, у остальных $|\lambda_j(-1)| = 1, j = 3, \dots, 14$.

Дискриминант $P(z, \lambda)$, не считая нулей высокой четной кратности в точках 1, 0, имеет 26 однократных нулей, и 1 двукратный нуль в т. -1 . При этом, кроме двукратного нуля в $e^{i\pi}$ - точке голоморфного пересечения ветвей равных по модулю единице, на верхнюю полуокружность \mathbb{S}_+^1 попадает одна точка ветвления (однократный нуль): $z_3 := e^{it_3} : t_3 := 3.1098279565\dots$

Двигаемся по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке. Напомним: в этой точке сопряжены две голоморфные ветви. Фиксируем λ_1 с растущим модулем, λ_2 - с убывающим. В точке ветвления z_3 две ветви с модулем = 1 разветвляются на голоморфные при $(t_3, 0]$ ветви $\lambda_3 : |\lambda_3| > 1$ и $\lambda_{14} : |\lambda_{14}| |\lambda_3| = 1$.

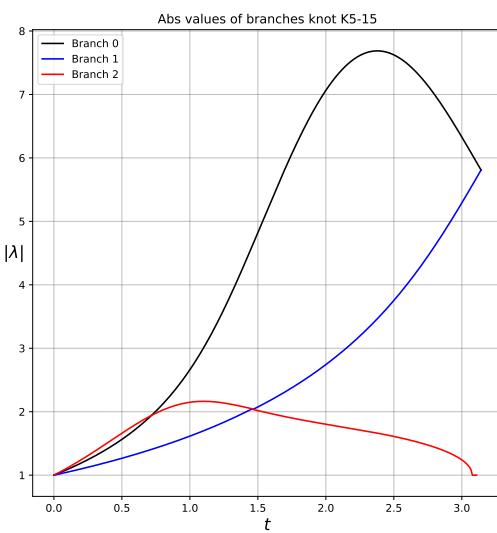


Рис. 10. $|\lambda_j(z)| \geq 1, j = 1, 2, 3$, при $z = e^{it}, t \in (0, \pi)$, для узла $k5_{15}$

²³А - многочлены для узла $k5_{15}$ будут приведены в Приложении, см. пункт 4.3

Итак, нам впервые попался пример узла, у которого спектральная кривая $\lambda(e^{it})$ имеет ветви (корни A -многочлена), голоморфные на всей окружности и не равные по модулю единице: $\lambda_j(e^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$, $|\lambda_j(e^{it})| > 1$, $j = 1, 2$. При этом $\lambda_1(z) = \overline{\lambda_2(\bar{z})}$. Также имеются 12 голоморфных на всей окружности ветвей $\{\lambda_j\}$: $|\lambda_j| = 1$, $j = 4, \dots, 13$. Оставшиеся две ветви $\lambda_3, \lambda_{14} \in \mathcal{H}(\mathbb{S}^1) \setminus \{z_3, \bar{z}_3\}$. Здесь также $\lambda_3(z) = \overline{\lambda_{14}(\bar{z})}$, причем $|\lambda_3(e^{it})| > 1 > |\lambda_{14}(e^{it})|$ на дуге $t \in (t_3, 0, 2\pi - t_3)$ и $|\lambda_3(e^{it})| = 1 = |\lambda_{14}(e^{it})|$ на дуге $t \in (2\pi - t_3, 2\pi, t_3)$.

Известное значение объёма для узла $k5_{15}$: $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus k5_{15}) = 4.1885842865\dots$

Для ветвей $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ узла $k5_{15}$ численное значение интегралов равно:

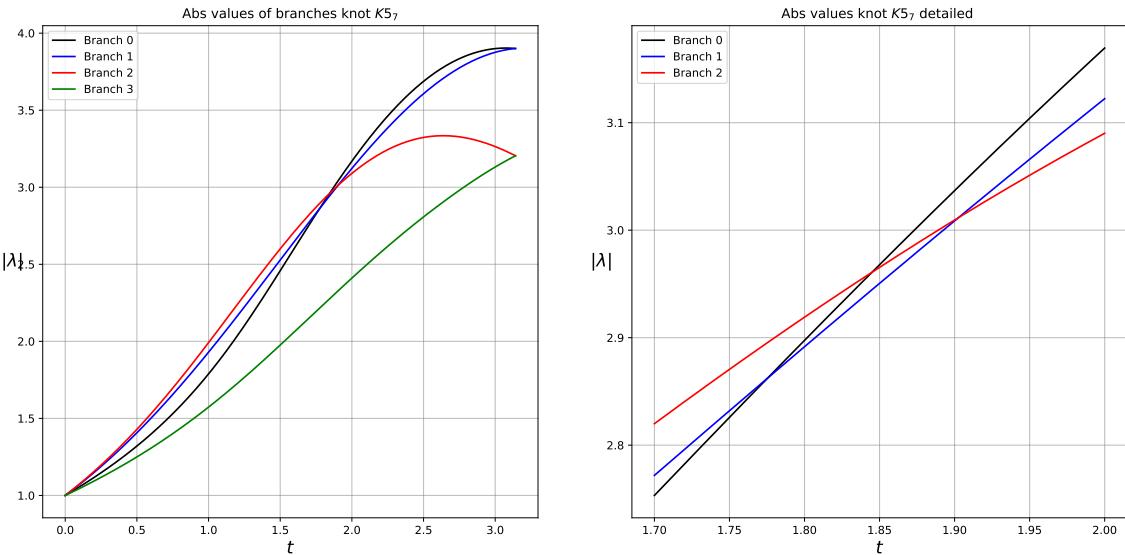
$$I_1 := \int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 4.239491778, \quad I_2 := \int_0^\pi \ln |\lambda_2(e^{it})| dt \approx 2.538974570,$$

$$I_3 := \int_0^\pi \ln |\lambda_3(e^{it})| dt \approx 1.649603.$$

3.10. Узел $k5_7$: ветви $\{\lambda_j\}$ и объем. Этот узел рассмотрен в [15, Example 2]. Для многочленов $P(z, \lambda)$ ²⁴, определяющих в (1.7) спектральную кривую $\lambda(z)$ узла $k5_{15}$, имеем $\deg_\lambda[P(z, \lambda)] = 17$, $\deg_z[P] = 325$,

$$P(1, \lambda) = (\lambda - 1)^8(\lambda + 1)^9, \quad P(-1, \lambda) = L(\lambda)(\lambda - 1), \quad \deg[L(\lambda)] = 16.$$

При этом среди корней $P(-1, \lambda)$ имеются $\lambda_j : |\lambda_j(-1)| = 3.900505\dots, j = 1, 2$ и $|\lambda_j(-1)| = 3.2043057\dots, j = 3, 4$, а также их партнеры $\lambda_{17-j}, j = 1, 2, 3, 4 : |\lambda_{17-j}(-1)| = |\lambda_j(-1)|^{-1}$, у остальных же $|\lambda_j(-1)| = 1, j = 5, \dots, 13$.



*Puc. 11. 1) $|\lambda_j(z)| \geq 1, j = 1, \dots, 4$ при $z = e^{it}, t \in (0, \pi)$ для узла $k5_7$
2) масштабирование: $t \in (1.7, 2.0)$*

²⁴ A - многочлены для узла $k5_{15}$ будут приведены в Приложении, см. пункт 4.3

Дискриминант $P(z, \lambda)$, не считая нулей высокой четной кратности в точках 1, 0, имеет 28 однократных нулей, и 8 двукратных нулей. При этом, кроме 2 двукратных нулей в e^{it_0} , $t_0 := \pm 2.46535\dots$ - точках голоморфного пересечения ветвей, равных по модулю единице, на окружность \mathbb{S}^1 нули не попадают.

Двигаемся по \mathbb{S}_+^1 из $z = e^{i\pi}$ по часовой стрелке. Напомним: в этой точке сопряжены две $k = 1, 2$ пары голоморфных ветвей с модулем > 1 : $\lambda_{2k-1}(-1) = \overline{\lambda_{2k}(-1)}$ (фиксируем λ_{2k-1} ветвь с растущим модулем, λ_{2k} с убывающим). Тем самым, также зафиксированы их партнеры: $\lambda_j \in \mathcal{H}(\mathbb{S}^1)$ с модулем < 1 . Фиксация остальных ветвей (с модулем = 1) для нас не важна. Итак, для узла $k5_7$ все ветви спектральной кривой $\lambda(z) = \{\lambda(z)\}_{j=1}^{17}$ голоморфны на \mathbb{S}^1 . Нас интересуют ветви $\{\lambda(z)\}_{j=1}^4$ по модулю > 1 на всей дуге $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Отметим точки $e^{it_{j,k}} \in \mathbb{S}_+^1$ совпадения модулей у ветвей λ_j и λ_k : $t_{1,2} \approx 1.7752568285336$, $t_{1,3} \approx 1.84493232546964$, $t_{2,3} \approx 1.9025733709708$. На \mathbb{S}_+^1 имеем следующий порядок модулей для ветвей $|\lambda_j| > 1$ (см. Рис.11-2):
 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4|$ на $(t_{2,3}, 0)$; $|\lambda_1| > |\lambda_3| > |\lambda_2| > |\lambda_4|$ на $(t_{1,3}, t_{2,3})$;
 $|\lambda_3| > |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_4|$ на $(t_{1,2}, t_{1,3})$; $|\lambda_3| > |\lambda_2| > |\lambda_1| > |\lambda_4|$ на $(\pi, t_{1,3})$.

Для ветвей $\lambda_j, j = 1, \dots, 4$ узла $k5_7$ численное значение интегралов по \mathbb{S}_+^1 равно:

$$I_1 := \int_0^\pi \ln |\lambda_1(e^{it})| dt \approx 2.652510600, \quad I_2 := \int_0^\pi \ln |\lambda_2(e^{it})| dt \approx 2.717740319,$$

$$I_3 := \int_0^\pi \ln |\lambda_3(e^{it})| dt \approx 2.644672858, \quad I_4 := \int_0^\pi \ln |\lambda_4(e^{it})| dt \approx 2.088765966.$$

Известное значение объёма для узла $k5_7$: $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus k5_7) = 4.0545040273\dots$

3.11. Узлы $k5_7, k5_{15}$: сравнение с [15]. Надо признать очевидное: для последних двух узлов вычисленные нами значения интегралов I_j никак не похожи на известные значения объемов, взятые нами из [7]. К тому же в [15] аналогичные интегралы (обозначены там V_j) посчитаны и со многими знаками совпадают с известными объемами. Для узла $k5_7$ в [15] приведено:
 $[V1; V2] = [4.054504027..; 1.315746892..]$ $[V3; V4] = [2.436059319..; 2.297379506..]$. Тем не менее, если мы возьмем интегралы по всей области голоморфности, то
 $I_1 + I_2 \approx 2.652510600 + 2.717740319 = 4.733438824 = 4.054504027 + 1.315746892 \approx V1 + V2$
 $I_3 + I_4 \approx 2.644672858 + 2.088765966 = 5.370250919 = 2.436059319 + 2.297379506 \approx V3 + V4$

Для узла $k5_{15}$ в [15] приведено: $[V1; V2] = [4.188584286..; 2.589882062..]$ ²⁵
Аналогично имеем:

$$I_1 + I_2 \approx 4.239491778 + 2.538974570 = 6.778466348 = [4.188584286 + 2.589882062] \approx V1 + V2$$

²⁵и $V3 = 1.64960971..$

4. Приложения

4.1. ВКБ базис решений q -рекуррентий (детали). Разложения фундаментальных решений разностных уравнений (рекуррентных соотношений) – классический раздел асимптотического анализа, заложенный работами Пуанкаре, Перрона, Биркгофа. Из современных исследований выделим работу Костиных [25] и упоминавшуюся выше статью С. Гарофалидиса и Д. Геронимо [12], из которой приведем цитату:

«This subject is classical and has been reinvented over the past hundred years by several groups, often unaware of each others results. ... Our results are hardly new and are contained or can be obtained by minor modifications from results of Costin–Costin or from work of Birkhoff and collaborators ... ».

Наша «группа» (с Д.Н. Туляковым) развивала свою модификацию подхода к этой проблематике (см. [26] – [30], [13], [31]), которую впоследствии (с «подачи» С. Гарофалидиса и с активным участием Т. Дудниковой), адаптировала к q -рекуррентным соотношениям (см. [1]–[3]).

Для рекуррентных соотношений (1.2), записанных в матричном виде²⁶:

$$\vec{Q}_{n+1} = \mathcal{A}_n \vec{Q}_n, \quad (4.1)$$

ищутся разложения базисных решений в перекрывающихся зонах: *зонах разделенных с.з.* матриц \mathcal{A}_n , см. (1.8), и *в зонах сближения некоторых с.з.*. Согласование базисов в зонах перекрытия позволяет получать глобальные представления частных решений.

В зоне разделенных с.з. основным техническим моментом подхода является нахождение диагонализующего преобразования («диагонализатора») V_n , такого, что матрица $V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n$ близка к диагональной матрице

$$D_n := \text{diag}[V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n] \approx V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n. \quad (4.2)$$

Формально базисные вектора являются столбцами матрицы

$$B_n := V_n \prod_{k=k_0}^{n-1} D_k =: V_n \Pi_n. \quad (4.3)$$

Действительно,

$$\mathcal{A}_n B_n = V_{n+1} V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n \Pi_n = V_{n+1} \Pi_{n+1} = B_{n+1}.$$

Таким образом, задача построения асимптотического базиса решений (1.10) сводится к нахождению разложений «диагонализаторов» V_n (главная задача) и произведения $\Pi^{(n)}$ диагональных операторов (решение следует из главной).

В результате в этой зоне имеет место

²⁶где $d \times d$ матрица \mathcal{A}_n формируется коэффициентами $\{A_j(q^n, q)\}_{j=0}^d$ из (1.2), а \vec{Q}_n введено в (1.9).

Теорема 4.1. Пусть q -разностные уравнения (1.2), (1.9) имеют в предельном масштабе (1.6) спектральную кривую (1.7). Тогда для базиса $B_n := V_n \text{diag} \left\{ \pi_n^{(j)} \right\}_{j=1}^d$ их общих решений справедливы следующие утверждения.

(i) В зоне разделенных собственных значений существуют формальные разложения:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(N, t) := V_n(q^n, q)|_{n=Nt, q=e^{2\pi it}} = \mathbf{V}_0(t) + \frac{1}{N} \mathbf{V}_1(t) + \dots \\ \pi_n^{(j)} = \exp \left\{ \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(j)}(z)}{N^i} \right\}, \quad z = e^{2\pi it}. \end{cases} \quad (4.4)$$

(ii) Элементы матриц $\mathbf{V}_0(t), \mathbf{V}_1(t), \dots$ являются алгебраическими функциями, и

$$\mathbf{V}_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(z) & \lambda_2(z) & \dots & \lambda_d(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{d-1}(z) & \lambda_2^{d-1}(z) & \dots & \lambda_d^{d-1}(z) \end{pmatrix}, \quad z = e^{2\pi it}, \quad \det \mathbf{V}_0(t) \neq 0. \quad (4.5)$$

(iii) Элементы диагональной матрицы $\text{diag}\{\varphi_i^{(j)}\}_{j=1}^d$ являются абелевыми интегралами, и

$$\frac{d}{dt} \varphi_{-1}^{(j)}(e^{2\pi it}) = \ln \lambda_j(e^{2\pi it}).$$

Еще раз отметим, что получаемые здесь коэффициенты разложения для V_n – алгебраические функции, а для $\varphi_i^{(j)}$ – абелевы интегралы. Используя дополнительную информацию об асимптотике коэффициентов $A_j(q^n, q)$ рекуррентных соотношений (1.2) или (1.9), можно доказать, что формальные ряды (4.4) оказываются асимптотическими.

Отметим деталь, касающуюся коэффициентов $\{c_j\}$ в (1.10) разложения по базису фундаментальных решений (4.3). Вообще говоря, эти константы могут меняться при прохождении внутри зоны I - разделенных с.з. точек, где меняется порядок их (с.з.) модулей. Т.е. пусть $I = \sqcup_p I_p : \exists$ перестановка σ_p множества $\{1, \dots, d\} : |\lambda_{\sigma_p(1)}(z)| \geq |\lambda_{\sigma_p(2)}(z)| \geq \dots \geq |\lambda_{\sigma_p(d)}(z)|, \forall z \in I_p$. Тогда $c_j := c_{\sigma_p(j)}^p, z \in I_p$.

В зоне близких с.з. используются другие подходы (см. [26, 27, 28]). Здесь дополнительный малый параметр (близость с.з.) при стремлении к нулю преображает разностную задачу (4.1) в дифференциальную, и получаемые коэффициенты асимптотического разложения для V_n являются уже решениями уравнений: гипергеометрического, Бесселя, Айри, Пенлеве.

4.2. О росте частных решений: оценки для скрученных узлов. Вернемся к пункту 1.4 и напомним, что численные расчеты для узлов $4_1, 5_2$ (см. в [3]) показали, что, несмотря на демонстрацию экспоненциального роста²⁷ у $J_N(e^{2\pi i/N})$ при $N \rightarrow \infty$, соответствующего роста у $J_n(e^{2\pi i/N})$ в двухмасштабном режиме (1.11): $N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow t \in \mathcal{K} \Subset (0, 1)$ не наблюдалось. Это делало невозможным применение ВКБ-анализа для доказательства равенства показателя роста интегралу в (1.12). Кроме того, интеграл в (1.12) для частного решения в общем положении оказался в два раза больше соответствующего объема. Однако, возмущение последовательности $\{J_n(q)\}$ вида $\{f'_n(q)\} : f_n(q) := (1 - q^n)J_n(q)$, см. (1.17), (1.18), имеющее те же спектральную кривую и асимптотику при $n = N, q := e^{2\pi i/N}, N \rightarrow \infty$, и демонстрирующее (в численных расчетах) экспоненциальный рост в режиме $N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow t \in \mathcal{K} \Subset (1/2, 1)$, давало возможность использовать ВКБ–анализ при $t \in (1/2, 1)$ и надежду на уменьшение в два раза интеграла в (1.12).

Таким образом, для строгого обоснования (1.23), (1.24) (даже для конкретных узлов) нам необходимо уметь доказывать для последовательности

$$\{f'_n(q)\} \quad \text{в предельном режиме } N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow t \in (0, 1) : \quad (4.6)$$

- a) отсутствие экспоненциального роста и убывания при $t \in (0, 1/2)$;
- б) наличие $\tilde{t} \in [1/2, 1] :$ экспоненциальный рост имеет место $\forall t \in \mathcal{K} \Subset (\tilde{t}, 1)$.

Следующее, доказанное Т. Дудниковой утверждение содержит положительный ответ по части пункта а) для всех скрученных узлов.

Лемма 4.1. Пусть K – скрученный узел $K_p, p \in \mathbb{N}$, и

$$n_p(N) := N \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \right], \quad (4.7)$$

где $[a]$ – целая часть числа a .

Тогда для $q = e^{2\pi i/N}$ и $n = 1, \dots, n_p(N)$, справедливы следующие оценки,

$$|J_n(q)| \leq n \quad \text{и} \quad |f'_n(q)| \leq C'_p n^2, \quad (4.8)$$

где $C'_p := 1 + 2C_p + 2\sqrt{4p-1}$, $C_p := (9p-1)/(4p)$.

²⁷с показателем $\approx Vol(K)/(2\pi)$, по доказанной для этих узлов гипотезе

4.3. Явный вид A-многочленов для узлов k_{515}, k_{57} . Одна из распространенных классификаций узлов - это классификация Ролфсена [38], за основу которой берется число пересечений в проекции узла на сферу. Например, узел 3_1 - первый (и единственный) в ряду узлов с тремя пересечениями, а узел 10_{125} в списке узлов с 10-ю пересечениями - на 125-ом месте. Другая классификация (census manifolds) берет за основу число правильных тетраэдров, на которые разбивается дополнение этого узла в \mathbb{S}^3 . Например, многообразие $\mathbb{S}^3 \setminus 10_{125}$ разбивается на 6 тетраэдров и по величине гиперболического объема стоит 20-ом месте (среди 6-ти тетраэдральных многообразий), поэтому узел 10_{125} в этой классификации имеет номер k_{620} . Бывает, что узел, дополнение к которому состоит из небольшого числа тетраэдров, имеет в своей проекции очень большое число пересечений и тем самым не описан в классификации Ролфсена. К таким узлам относятся узлы k_{515}, k_{57} .

Для узлов классификации Ролфсена точное и численное значение объема их дополнения, а также явный вид A -многочлена легко находится на сайте [39]. Для узлов классификации (census manifolds), в частности k_{515}, k_{57} , соответствующие объемы можно найти в классической статье [7], а явный вид A -многочленов лежит в другом месте: на сайте [40]. Ввиду несовпадения наших численных расчетов интегралов (1.24) с точными значениями из [7], мы приведем ниже, использованные нами выражения A -многочленов из [40], в надежде на разрешение возникшего диссонанса.

$$A_{k_{515}} := (M^{570})(-1 * M^{12}) + (L^1 * M^{534})(1 * M^{10} - 5 * M^{12} + 2 * M^{14} + 1 * M^{16} - 1 * M^{18}) + (L^2 * M^{498}) * (1 * M^8 + 3 * M^{10} - 5 * M^{12} + 12 * M^{14} - 5 * M^{16}) + (L^3 * M^{462}) * (-1 * M^6 + 6 * M^8 - 6 * M^{10} + 21 * M^{10} - 9 * M^{14} + 3 * M^{16}) + (L^4 * M^{426}) * (-3 * M^6 + 4 * M^8 - 7 * M^{10} - 12 * M^{12} + 1 * M^{14} + 3 * M^{16}) + (L^5 * M^{390}) * (-4 * M^6 + 1 * M^8 - 25 * M^{10} - 12 * M^{12} - 5 * M^{14} + 3 * M^{16}) + (L^6 * M^{354}) * (2 * M^6 - 11 * M^8 + 50 * M^{10} - 34 * M^{12} + 7 * M^{14}) + (L^7 * M^{318}) * (3 * M^4 - 8 * M^6 + 38 * M^8 + 19 * M^{10} + 25 * M^{12} - 7 * M^{14}) + (L^8 * M^{282}) * (6 * M^4 - 9 * M^6 - 18 * M^8 + 18 * M^{10} + 9 * M^{12} - 6 * M^{14}) + (L^9 * M^{246}) * (7 * M^4 - 25 * M^6 - 19 * M^8 - 38 * M^{10} + 8 * M^{12} - 3 * M^{14}) + (L^{10} * M^{210}) * (-7 * M^4 + 34 * M^6 - 50 * M^8 + 11 * M^{10} - 2 * M^{12}) + (L^{11} * M^{174}) * (-3 * M^2 + 5 * M^4 + 12 * M^6 + 25 * M^8 - 1 * M^{10} + 4 * M^{12}) + (L^{12} * M^{138}) * (-3 * M^2 - 1 * M^4 + 12 * M^6 + 7 * M^8 - 4 * M^{10} + 3 * M^{12}) + (L^{13} * M^{102}) * (-3 * M^2 + 9 * M^4 - 21 * M^6 + 6 * M^8 - 6 * M^{10} + 1 * M^{12}) + (L^{14} * M^{66}) * (5 * M^2 - 12 * M^4 + 5 * M^6 - 3 * M^8 - 1 * M^{10}) + (L^{15} * M^{30}) * (1 - 1 * M^2 - 2 * M^4 + 5 * M^6 - 1 * M^8) + (L^{16} * M^{(-6)}) * (1 * M^6);$$

$$A_{k_{57}} := (M^{(-8)}) * (1 * M^8) + (L^1 * M^{30}) * (1 * M^8) + (L^2 * M^{68}) * (-2 * M^4 + 6 * M^6 - 12 * M^8) + (L^3 * M^{106}) * (-3 * M^4 + 8 * M^6 - 12 * M^8 - 2 * M^{10} + 1 * M^{12}) + (L^4 * M^{144}) * (1 - 8 * M^2 + 28 * M^4 - 47 * M^6 + 54 * M^8 - 4 * M^{10} + 5 * M^{12} - 1 * M^{14}) + (L^5 * M^{182}) * (-1 * M^2 + 10 * M^4 - 13 * M^6 + 5 * M^8 + 35 * M^{10} - 7 * M^{12} - 1 * M^{14}) + (L^6 * M^{220}) * (4 * M^4 - 15 * M^6 - 40 * M^{10} - 6 * M^{12} + 1 * M^{14}) + (L^7 * M^{258}) * (1 * M^2 - 6 * M^4 - 4 * M^6 + 5 * M^8 - 35 * M^{10} - 32 * M^{12} + 16 * M^{14} - 1 * M^{16}) + (L^8 * M^{296}) * (-1 * M^4 - 15 * M^6 + 65 * M^8 - 10 * M^{10} + 30 * M^{12} + 1 * M^{14}) + (L^9 * M^{334}) * (1 * M^6 + 30 * M^8 - 10 * M^{10} + 65 * M^{12} - 15 * M^{14} - 1 * M^{16}) + (L^{10} * M^{372}) * (-1 * M^4 + 16 * M^6 - 32 * M^8 - 35 * M^{10} + 5 * M^{12} - 4 * M^{14} - 6 * M^{16} + 1 * M^{18}) + (L^{11} * M^{410}) * (1 * M^6 - 6 * M^8 - 40 * M^{10} - 15 * M^{14} + 4 * M^{16}) + (L^{12} * M^{448}) * (-1 * M^6 - 7 * M^8 + 35 * M^{10} + 5 * M^{12} - 13 * M^{14} + 10 * M^{16} - 1 * M^{18}) + (L^{13} * M^{486}) * (-1 * M^6 + 5 * M^8 - 4 * M^{10} + 54 * M^{12} - 47 * M^{14} + 28 * M^{16} - 8 * M^{18} + 1 * M^{20}) + (L^{14} * M^{524}) * (1 * M^8 - 2 * M^{10} - 12 * M^{12} + 8 * M^{14} - 3 * M^{16}) + (L^{15} * M^{562}) * (-12 * M^{12} + 6 * M^{14} - 2 * M^{16}) + (L^{16} * M^{600}) * (1 * M^{12}) + (L^{17} * M^{638}) * (1 * M^{12})$$

Напомним связь (2.1) между многочленами $P(z, \lambda)$ и $A(M, L)$:

$$z \equiv M^2, \lambda \equiv L : \Rightarrow P(z, \lambda) \equiv A(M, L).$$

Также отметим, что $A(M, L)$ многочлены для 10_{125} , которые мы использовали в пункте 3.8 совпадают с приведенными и в [39], и в [40].

4.4. Заключительные замечания. В итоге отметим, что

1) Наша цель – найти предел в левой части (1.5) **VC** (гипотезы объема), исходя из факта, что q -многочлены $J_n(q)$ являются решением задачи Коши (т.е. частным решением) однородного q -разностного уравнения (1.2).

2) В качестве подхода к цели мы рассматриваем ВКБ-асимптотики фундаментальных решений этого уравнения, главные члены которых имеют экспоненциальный рост (убывание) с показателями вида (1.10), определяемыми интегралами логарифмов модулей ветвей $\lambda(z)$ – спектральной кривой (1.7).

3) Однако, стоящие в левой части **VC** - (1.5) для \forall узла K -многочлены $J_n(q)|_{q=e^{2\pi i/N}}$ при $n \rightarrow N$ (слева) ограничены, ввиду свойства симметрии (1.15), при том что $J_N(q)|_{q=e^{2\pi i/N}}$ экспоненциально растут, ввиду **VC**. Поэтому, непосредственно, экспоненциально растущие асимптотики вида (1.10), (1.11) не применимы.

Тем не менее, в (1.17) - (1.19) предложены частные решения (1.2), не обладающие симметрией (1.15) и, следовательно, имеющие возможность экспоненциального роста для $J_n(q)|_{q=e^{2\pi i/N}}$ при $n \rightarrow N$ (слева) и при $n = N$ достигнуть показатель роста равный пределу в левой части **VC** - (1.5).

4) Последнее обстоятельство привело к гипотезе, что $\exists!$ ветвь $\lambda_1(z)$ спектральной кривой $\lambda(z)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi \frac{1}{N} \ln |J_N(e^{\frac{2\pi i}{N}})| = 2\pi \int_{1/2}^1 \ln |\lambda_1(e^{2\pi i\tau})| d\tau \quad (4.9)$$

5) В настоящем препринте мы не ставим перед собой задачу проверить гипотезу (4.9), а просто смотрим, как (в предположении справедливости **AJ** - гипотезы для узла K) правая часть в (4.9) соотносится с правой частью **VC** - (1.5), т.е. с гиперболическим объёмом $\mathbb{S}^3 \setminus K$.

6) В разделе 4 мы численно проводим анализ поведения ветвей спектральной кривой $\lambda(z)$ и приводим значения интегралов (для ряда узлов K), стоящих в правой части (4.9). Отметим совпадение (в пределах точности, применяемого нами численного метода) этих значений с известными значениями с объёмами $\mathbb{S}^3 \setminus K$ для узлов $6_1, 7_2, 7_4, 7_5, 7_6, 7_7$ и 10_{125} .

7) Мы уверены, что наши вычисления для узлов $k5_{15}, k5_7$ адекватно отражают введенные исходные данные, но при этом не думаем, что несовпадение проверяемых значений может привести к контрпримерам к **AJ** или **VC** гипотезам. Скорее речь идет о нестыковке A -многочленов, использованных нами, с известными объёмами $\text{vol}(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ для $K := k5_{15}, k5_7$.

В заключение автор выражает благодарность Т. Дудниковой и А. Батхину.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev and D. N. Tulyakov, *Asymptotical basis of solutions of q -recurrence relations outside of the zone of clustering eigenvalues* (in Russian), Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, **159**, 24 pages (2018) [Russian]: <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-159>
- [2] A. I. Aptekarev, T. V. Dudnikova and D. N. Tulyakov, *Recurrence relations and asymptotics of colored Jones polynomials*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **42** (11), 2580-2595 (2021).
- [3] A. I. Aptekarev, T. V. Dudnikova and D. N. Tulyakov, *Volume Conjecture and WKB asymptotics*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **43** (8), 2057-2079 (2022).
- [4] R. M. Kashaev, *A link invariant from quantum dilogarithm*, Modern Phys. Lett. A **10**, 1409-1418 (1995).
- [5] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39**, 269–275 (1997).
- [6] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186**, 85-104 (2001).
- [7] P. J. Callahan, J. C. Dean and J. R. Weeks, *The Simplest hyperbolic knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **8** (3), 279-297 (1999).
- [8] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (3), 351–399 (1989).
- [9] S. Garoufalidis and T.T.Q. Le, *The colored Jones function is q -holonomic*, Geom. Topol. **9**, 1253-1293 (2005).
- [10] S. Garoufalidis, *On the characteristic and deformation varieties of a knot*, Proceedings of the CassonFest, Geometry and Topology Monographs **7**, 291-309 (2004).
- [11] N.M. Dunfield, *Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifold*, Invent. Math. **136**, 623-657 (1999).
- [12] S. Garoufalidis and J. S. Geronimo, “Asymptotics of q -difference equations,” from: *Primes and knots* (Eds. T. Kohno, M. Morishita), Contemp. Math. **416**, Amer. Math. Soc., 83-114 (2006).

- [13] А. И. Аптекарев и Д. Н. Туляков, *Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений*, Матем. сб., **205** (12), 17-40 (2014); англ. пер.: A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *The leading term of the Plancherel-Rotach asymptotic formula for solutions of recurrence relations*, Sb. Math., **205** (12), 1696-1719 (2014).
- [14] D.W. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experiment. Math. **7** (1), 37-82 (1998).
- [15] D.W. Boyd, *Mahler's measure and invariants of hyperbolic manifolds*, Number theory for the millennium, **I** (Urbana, IL, 2000), 127-143, A K Peters, Natick, 2002.
- [16] D. Cooper, D.M. Culler, H. Gillet, D. Long, P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118**, 47-84 (1994).
- [17] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: методы и приложения*, М.: Наука, 1979.
- [18] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhauser-Verlag, Basel, Boston, and Berlin, 1996.
- [19] H. Murakami and Y. Yokota, *Volume Conjecture for Knots*, Springer Briefs in Mathematical Physics **30** (Springer, 2018).
- [20] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39**, 265-269 (1997), arXiv: q-alg/9601025v2.
- [21] Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, (2003), arXiv: math/0303109v1.
- [22] W.P. Thurston, *Three dimensional manifolds, kleinian groups, and hyperbolic geometry*, Bull. AMS **6** (3), 357-381 (1982).
- [23] T. Dimofte and S. Gukov, *Quantum Field Theory and the Volume Conjecture*, Contemporary Mathematics, **541**, 41-67 (2011).
- [24] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Modern Phys. Lett. **A9** (5), 427-434 (1994), arXiv: hep-th/9310070v1.
- [25] O. Costin, R. Costin, *Rigorous WKB for finite-order linear recurrence relations with smooth coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1), 110-134 (1996).
- [26] A.I. Aptekarev, *Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality*, Sb. Math. **76** (1), 35-50 (1993).

- [27] D.N. Tulyakov, *Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure*, Sb. Math. **192** (2), 299-321 (2001).
- [28] D.N. Tulyakov, *Difference equations having bases with powerlike growth which are perturbed by a spectral parameter*, Sb. Math. **200**:5, 753-781 (2009).
- [29] D.N. Tulyakov, *Plancherel-Rotach type asymptotics for solutions of linear recurrence relations with rational coefficients*, Sb. Math. **201** (9), 1355–1402 (2010).
- [30] A.I. Aptekarev, D.N. Tulyakov, *Asymptotics of Meixner polynomials and Christoffel-Darboux kernels*, Trans. Moscow Math. Soc. **73**, 67–106 (2012).
- [31] A.I. Aptekarev, S.Yu. Dobrokhotov, D.N. Tulyakov, and A.V. Tsvetkova, *Plancherel-Rotach type asymptotic formulae for multiple orthogonal Hermite polynomials and recurrence relations*, Izv. Math., **86** (1), 32–91 (2022).
- [32] S. Garoufalidis and C. Koutschan, *Irreducibility of q -difference operators and the knot 7_4* , Algebr. Geom. Topol. **13** (6), 3261-3286 (2013).
- [33] K. Hikami, *Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot*, Internat. J. Math. **15** (9), 959-965 (2004).
- [34] A. Tran, *Proof of a stronger version of the AJ conjecture for torus knots*, Algebr. Geom. Topol. **13** (1), 609-624 (2013).
- [35] T. Le, *The colored Jones polynomial and the A-polynomial of knots*, Adv. Math. **207** (2), 782-804 (2006).
- [36] T. Le and A. Tran, *On the AJ conjecture for knots*, Indiana Univ. Math. J. **64** (4), 1103-1151 (2015).
- [37] T. Le and X. Zhang, *Character varieties, A-polynomials, and the AJ conjecture*, Algebr. Geom. Topol. **17** (1), 157-188 (2017).
- [38] D. Rolfsen, *Knots and Links* (Mathematics Lecture Series, vol. 7, Publish or Perish, Inc., Houston, 1990).
- [39] <http://katlas.math.toronto.edu/wiki/>
- [40] <https://homepages.math.uic.edu/~culler/Apolynomials/census1by1.html>

Alexander I. Aptekarev (aptekaa@keldysh.ru)
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science,
Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation