

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 54 за 2023 г.</u>



<u>А.С. Родин</u>

ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

Семейство математических моделей для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Родин А.С. Семейство математических моделей для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 54. 32 с. <u>https://doi.org/10.20948/prepr-2023-54</u> <u>https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-54</u>

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша Российской академии наук

А.С. Родин

Семейство математических моделей для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле

Родин А.С.

Семейство математических моделей для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле

Выполнено моделирование ускорения металлических проводников в электромагнитном поле в двумерном приближении. Представлено семейство математических моделей для описания движения тела: модель термоупругопластического тела (для случая больших деформаций), модель вязкой сжимаемой жидкости и смешанная модель, включающая в себя две предыдущие модели для разных фазовых состояний вещества. Приведена математическая модель электромагнитных процессов, позволяющая обеспечить сечениям проводников. Представлены протекание заданных токов по численные алгоритмы, основанные на методе конечных элементов. Описанные применены модели для решения задачи ускорения алюминиевой цилиндрической оболочки до скорости около 8 км/с. Проведено сравнение результатов, полученных для различных моделей, друг с другом, а также с расчетными экспериментальными известными И результатами, опубликованными в литературе.

Ключевые слова: термомеханика, большие деформации, упругопластическое тело, сжимаемая вязкая жидкость, электромагнитное ускорение

Aleksandr Sergeevich Rodin

The family of mathematical models to describe the metal conductors motion in an electromagnetic field

The modeling of metal conductors acceleration in an electromagnetic field in a two-dimensional approximation is executed. A family of mathematical models for describing the motion of a body is presented: a model of a thermoelastoplastic body (for the case of large deformations), a model of a viscous compressible liquid and a mixed model that includes two previous models for different phase states of matter. A mathematical model of electromagnetic processes is presented, which allows to ensure the flow of total currents along the cross-sections of conductors. Numerical algorithms based on the finite element method are presented. The described models are used to solve the problem of accelerating the aluminum cylindrical shell to a speed of about 8 km/s. The results obtained for different models were compared with each other, as well as with known calculated and experimental results published in the literature.

Key words: thermomechanics, large deformations, elastoplastic body, compressible viscous liquid, electromagnetic acceleration

Введение

Электромагнитное ускорение проводящих тел до высоких скоростей представляет большой интерес и часто используется для исследования поведения вещества при экстремальных условиях. Например, подобные эксперименты проводятся на установках в ГНЦ РФ ТРИНИТИ [1, 2].

Для описания движения ускоряемых тел обычно используют модель жидкости [3, 4], но в ряде экспериментов часть вещества в теле длительное время остается в твердом состоянии. В [5] предложена модель сквозного расчета гидродинамических и упругопластических волновых процессов в полимерных материалах под воздействием интенсивных потоков энергии. В [1, применены различные математические 6. 7] автором модели учетом больших деформаций (упругопластического тела С И вязкой жидкости) описания деформирования несжимаемой для алюминиевой пластины, разогнанной до скорости порядка 1 км/с. В проведенных расчетах использовался подход, основанный на применении подвижных лагранжевых выполнено дальнейшее развитие сеток. В данной работе семейства математических и численных моделей, позволяющих описать ускорение проводящих металлических пластин в электромагнитном поле до скорости порядка 10 км/с в двумерном приближении.

Считаем, что в моделируемой системе находятся проводники, разделенные диэлектрическими подобластями. По проводникам текут заданные токи, которые создают электромагнитное поле, под действием которого проводники начинают деформироваться и двигаться. В телах возникают высокие температуры, которые приводят к фазовым переходам в веществе. Для описания тел будем использовать следующие математические модели: модель термоупругопластического тела (определяющие соотношения основаны на соотношениях гиперупругости), модель вязкой сжимаемой жидкости и смешанную модель, включающую в себя переход от модели твердого деформируемого тела к модели жидкости.

1. Математическая модель

1.1 Модель термоупругопластического тела

Рассмотрим законы сохранения (изменения) массы, импульса и внутренней энергии, которые являются общепринятыми в механике сплошной среды как для твердого тела, так и для жидкости (газа).

Закон сохранения массы (уравнение неразрывности) в лагранжевых координатах может быть записан так [8]:

 $^{0}\rho = \rho J$,

где ${}^{0}\rho$ – плотность, отнесенная к начальной конфигурации тела (в нулевой момент времени тело занимает область ${}^{0}B$), ρ – плотность, отнесенная к текущей конфигурации тела (в рассматриваемый момент времени тело

занимает область *B*), *J* – якобиан перехода от первой конфигурации ко второй [9].

Из закона баланса количества движения можно получить следующие уравнения [8, 9]:

в текущей конфигурации (в эйлеровых переменных)

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_x)\mathbf{v}) = \nabla_x \cdot \mathbf{s} + \mathbf{f} , \qquad (1.1)$$

в начальной конфигурации (в общих лагранжевых переменных)

$${}^{0}\rho \frac{\partial^{2} \mathbf{u}(\mathbf{a},t)}{\partial t^{2}} = \nabla_{a} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{a} \mathbf{u}) + {}^{0}\rho / \rho \mathbf{f} = \nabla_{a} \cdot \mathbf{L} + {}^{0}\rho / \rho \mathbf{f} .$$
(1.2)

Опишем граничные условия: на участке границы тела⁰ Г_и в начальной конфигурации или Г_и в текущей конфигурации заданы кинематические граничные условия, на участке границы 0 Г_s (в начальной конфигурации) или Г_s (в текущей конфигурации) заданы поверхностные силы **f**^{*}. В текущей конфигурации выбранные условия можно записать следующим образом:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \mid_{\Gamma_s} = \mathbf{f}^*,$$

$$\mathbf{u} \mid_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^*.$$
 (1.3)

в начальной конфигурации:

$$(\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{a} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{0} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}|_{0} = \mathbf{f}^{*},$$

$$\mathbf{u}|_{0} = \mathbf{u}^{*}.$$
 (1.4)

В проводимых расчетах считаем, что на тело не действуют поверхностные силы, поэтому $\mathbf{f}^* = 0$.

Перечислим использованные в (1.1)-(1.4) переменные и обозначения [8, 9]:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{k}_j$$
 – оператор дифференцирования по эйлеровым координатам,
 $\nabla_a = \frac{\partial}{\partial a_j} \mathbf{k}_j$ – оператор дифференцирования по лагранжевым координатам,

u, **v** – вектор перемещений и вектор скорости среды, **f** – вектор объемных сил, действующий на тело (в рассматриваемой задаче – это сила Лоренца, $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$),

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_x)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{a},t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{a},t)}{\partial t^2} - \text{вектор ускорения,}$$

s, S – тензор истинных напряжений Коши и второй тензор условных напряжений Пиолы-Кирхгоффа, L – тензор напряжений Лагранжа.

Для замыкания системы уравнений (1.1)-(1.4) нужно задать определяющее соотношение, которое будет обеспечивать связь между напряжениями и деформациями.

В дальнейшем нам понадобятся тензор скорости деформаций **d** (с компонентами $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$), полярное разложение тензора градиента деформации **F** (с компонентами $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$) и правый тензор логарифимических деформаций (тензор деформаций Генки) **E**⁽⁰⁾ [9, 10]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} ,$$
$$\mathbf{E}^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \ln \lambda_i \mathbf{U}_i ,$$

где **R** – тензор ротации, **U** – правый тензор искажения, λ_i – собственные значения (главные удлинения) тензора **U**, **U**_{*i*} – собственные проекции тензора **U**, **m** – количество различных собственных значений.

Для случая больших деформаций существует большое количество различных вариантов определяющих соотношений. Для начала ограничимся случаем упругого тела и рассмотрим следующее определяющее соотношение для гиперупругого материала в терминах скоростей [10]:

 $\overline{\boldsymbol{\tau}}^{D} = \mathbf{C}^{E} : \mathbf{D} \,. \tag{1.5}$

Здесь использованы следующие величины [10]:

стандартный тензор коэффициентов упругости для изотропного тела С^{*E*},

лагранжев тензор скорости деформаций с исключенным поворотом $\mathbf{D} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{R}$,

тензор напряжений Кирхгофа $\tau = Js$,

тензор напряжений Кирхгофа с исключенным поворотом $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$

и его коротационная D-скорость $\overline{\tau}^{D} = \dot{\overline{\tau}} - \Omega^{D} \cdot \overline{\tau} + \overline{\tau} \cdot \Omega^{D}$.

Вид компонент тензора $\Omega^{\bar{D}}$, которые зависят от собственных значений λ_i и компонент тензора **D**, приведен в [11].

Отметим, что тензор **D** равен D-скорости тензора $\mathbf{E}^{(0)}$, т.е. справедливо следующее равенство [10]:

 $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{(0)D} = \dot{\mathbf{E}}^{(0)} - \mathbf{\Omega}^D \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{\Omega}^D.$

В [11] показано, что соотношение (1.5) является эквивалентной формой записи (для случая постоянных коэффициентов упругости) следующих определяющих соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\tau}} &= \mathbf{C}^{E} : \dot{\mathbf{E}}^{(0)}, \\ \overline{\overline{\tau}} &= \mathbf{C}^{E} : \mathbf{E}^{(0)}, \\ \overline{\overline{\tau}} &= \frac{dW_{H}(\mathbf{E}^{(0)})}{d\mathbf{E}^{(0)}}, \\ W_{H} &= \frac{1}{2}\lambda (E_{ii}^{(0)})^{2} + \mu \mathbf{E}^{(0)} : \mathbf{E}^{(0)}. \end{aligned}$$
(1.6)

Здесь $W_{\!_{H}}$ – упругий потенциал, λ и μ – постоянные Ламе.

Принципиально важным является тот факт, что пара тензоров напряжений и деформаций $(\bar{\tau}, E^{(0)})$ являются сопряженными по мощности, т.е. для них

выполнено следующее равенство (E – тензор деформаций Грина-Лагранжа) [10]:

$$\dot{W}(\mathbf{U}) = \omega = 1/{^{0}}\rho \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = 1/{^{0}}\rho \overline{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D}.$$
(1.7)

Здесь ω – мощность внутренних сил единицы массы деформированного тела, $W(\mathbf{U})$ – удельная потенциальная энергия деформаций тела (упругий потенциал).

Уравнение движение (1.2), записанное в лагранжевых координатах, является достаточно простым и удобным для построения вычислительных алгоритмов. Но возникает ситуация, когда в (1.2) фигурирует один тензор напряжений (S), а в определяющих соотношениях (1.5)-(1.6) используется другой тензор напряжений ($\bar{\tau}$) и его производные. Для эффективной работы с данной моделью нужны удобные формулы, позволяющие вычислять компоненты тензора S с использованием в том числе компоненты тензора $\bar{\tau}$.

В [11] показано, что, применяя различные преобразования, можно свести первое уравнение (1.6) к следующему уравнению:

 $\dot{S} = C : \dot{E}$, (1.8) где компоненты тензора упругости C зависят в том числе от собственных значений и собственных проекций тензора U, а также от собственных значений тензора напряжений $\bar{\tau}$.

Определяющее соотношение в форме (1.8) представляет собой удобную формулу связи напряжений и деформаций, которую легко использовать вместе с уравнением движения (1.2).

Обобщим полученные соотношения для случая термоупругопластического тела. Предполагаем аддитивное разделение тензора скорости деформаций **D** на упругую, пластическую и температурную составляющие [9]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(e)} + \mathbf{D}^{(p)} + \mathbf{D}^{(th)}.$$
(1.9)

Тогда определяющее соотношение (1.5) можно переписать в виде:

$$\overline{\boldsymbol{\tau}}^{D} = \mathbf{C}^{E} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{(p)} - \mathbf{D}^{(th)}\right).$$
(1.10)

(1.11)

Можно преобразовать (1.10) к формуле, аналогичной (1.8): $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{C}_1 : \mathbf{D}^{(p)} - \mathbf{C}_2 : \mathbf{D}^{(th)}$.

Пластическая составляющая тензора скорости деформаций определена по ассоциативному закону пластического течения [9]:

$$\mathbf{D}^{(p)} = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \overline{\mathbf{\tau}}'} = \tilde{\lambda} \overline{\mathbf{\tau}}', \qquad (1.12)$$

где $\overline{\tau}'$ – девиатор соответствующего тензора напряжений.

Введем удельную плотность внутренней энергии *є*. Закон изменения внутренней энергии может быть записан в следующих видах [8]:

в начальной конфигурации

$${}^{0}\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = S_{ji}\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a_{i}}(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial a_{i}}) + {}^{0}\rho/\rho\phi(T), \qquad (1.13)$$

в текущей конфигурации

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = s_{ji} d_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\kappa(T) \ \frac{\partial T}{\partial x_i}) + \phi(T).$$
(1.14)

В дальнейшем используем предположение, что внутреннюю энергию деформируемого тела можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\varepsilon = \varepsilon_T(T) + \varepsilon_U(\mathbf{U}), \qquad (1.15)$$

где слагаемое ε_T описывает изменение энергии за счет температуры, а слагаемое ε_U – за счет деформации тела.

Слагаемое ε_{T} будем вычислять по формуле (c_{v} – удельная теплоемкость при постоянном объеме):

$$\mathcal{E}_T(T) = \int_0^T c_v(T) dT, \qquad (1.16)$$

а слагаемое ε_{U} будем определять из мощности внутренних сил ω :

$$\varepsilon_{U}(t,\mathbf{U}) = 1/{}^{0}\rho \int_{0}^{t} \overline{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D}dt .$$
(1.17)

Рассмотрим закон изменения кинетической энергии. Умножим каждое из уравнений движения (1.2) на компоненту скорости v_i и проинтегрируем по

$$\int_{0}^{0} \frac{1}{B^2} \rho \frac{\partial(v_i^2)}{\partial t} dG = \int_{0}^{0} \frac{L_{ji}}{B} v_i n_j dG - \int_{0}^{0} \frac{L_{ji}}{B} \frac{\partial v_i}{\partial a_j} dG + \int_{0}^{0} \frac{\rho}{B} \rho / \rho f_i v_i dG$$

С учетом условия свободных границ полученное уравнение можно переписать следующим образом ($L_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial a_i} = S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t}$):

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \frac{1}{2} \rho \upsilon_{i}^{2} dG = -\int_{0} S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dG + \int_{B} f_{i} \upsilon_{i} dG.$$
(1.18)

Если проинтегрировать уравнение (1.13) по области ⁰*B*, то получим:

$$\int_{0}^{0} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dG = \int_{0}^{0} \kappa(T) \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{i}} n_{i} dG + \int_{0}^{0} S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dG + \int_{0}^{0} \rho / \rho \phi(T) dG$$

С учетом условия теплоизоляции полученное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \rho \varepsilon dG = \int_{B} S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dG + \int_{B} \phi(T) dG.$$
(1.19)

Сложив уравнения (1.19) и (1.20), получим уравнение изменения полной механической энергии рассматриваемого тела:

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \frac{1}{2} \rho v_i^2 dG + \frac{d}{dt} \int_{B} \rho \varepsilon dG = \int_{B} f_i v_i dG + \int_{B} \phi(T) dG.$$
(1.20)

1.2. Модель сжимаемой жидкости (газа)

Для описания движения сжимаемой жидкости используется эйлерова система координат.

Тензор напряжений может быть представлен в следующем виде [8]:

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + \tilde{p}_{ij},$$
 (1.21)

где $s_{ij}^0 = -p\delta_{ij}$ – часть тензора напряжений, не зависящая в явном виде от скорости (δ_{ij} – символ Кронекера). Тензор $\tilde{p}_{ij} = \lambda_D d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_D d_{ij}$ обычно называют тензором вязких напряжений. Если коэффициенты вязкости λ_D , μ_D равны нулю, то такая жидкость называется идеальной.

С учетом (1.21) для жидкости можно записать уравнения движения, аналогичные (1.1):

$$o(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_x)\mathbf{v}) = \nabla_x \cdot \mathbf{s} + \mathbf{f} = -\nabla_x p + \nabla_x \cdot \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{f} , \qquad (1.22)$$

которые нужно дополнить уравнением состояния для давления

$$p = p(T, \nu). \tag{1.23}$$

Граничные условия можно также записать в виде (1.3).

Закон изменения внутренней энергии в дифференциальной форме может быть записан в виде (1.14).

Интегральный закон изменения кинетической энергии задается формулой, аналогичной (1.18) [8]:

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \frac{1}{2} \rho v_i^2 dG = -\int_{B} s_{ji} d_{ij} dG + \int_{B} f_i v_i dG.$$
(1.24)

Интегральный закон изменения внутренней энергии принимает вид, аналогичный (1.19):

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \rho \varepsilon dG = \int_{B} s_{ji} d_{ij} dG + \int_{B} \phi(T) dG.$$
(1.25)

Закон изменения полной энергии рассматриваемого тела совпадает с (1.20).

1.3. Смешанная модель

Будем считать, что область *B* можно представить в виде объединения двух подобластей $B = B_1 \cup B_2$, где B_1 – подобласть, занимаемая твердым веществом, а B_2 – подобласть, занимаемая жидким и газообразным веществом.

В области *B*₁ используем модель термоупругопластического тела, записанную в лагранжевых координатах и включающую в себя уравнения движения (1.2), граничные условия (1.4), модель пластичности (1.9)-(1.12) и дифференциальное уравнение энергии в форме (1.13).

В области B_2 используем модель вязкой сжимаемой жидкости, записанную в эйлеровых координатах и включающую в себя уравнения движения (1.22), граничные условия (1.3), уравнение состояния (1.23) и дифференциальное уравнение внутренней энергии в форме (1.14).

На данном этапе будем считать, что на внутренней границе ∂B_{12} между областями B_1 и B_2 выполнено условие непрерывности скорости и температуры,

равенство направленных по нормали к границе поверхностных сил и тепловых потоков.

Считаем, что для твердого тела функция массовой плотности внутренней энергии ε_1 определена формулами (1.15)-(1.17), а для жидкости функция $\varepsilon_2(T, v)$ является заданной во всем рассматриваемом диапазоне изменения температуры и удельного объема (v). Критерий перехода от одной модели к другой связан с сопоставлением величин ε_1 и ε_2 и будет описан ниже.

Тогда интегральный закон изменения кинетической энергии для областей *B*₁ и *B*₂ принимает вид:

$$\int_{0}^{0} \frac{1}{B_{1}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho \frac{\partial(\upsilon_{i}^{2})}{\partial t} dG = \int_{0}^{0} \frac{\partial}{B_{12}} L_{ij} n_{j} \upsilon_{i} dG - \int_{0}^{0} \frac{\partial}{B_{1}} L_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{j}} dG + \int_{0}^{1} \frac{f_{i}}{B_{1}} \upsilon_{i} dG,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{2} \rho \frac{d(\upsilon_{i}^{2})}{dt} dG = \int_{0}^{1} \frac{s_{ji}}{B_{12}} n_{j} \upsilon_{i} dG - \int_{0}^{1} \frac{s_{ji}}{B_{2}} dG + \int_{0}^{1} \frac{f_{i}}{D_{i}} \upsilon_{i} dG.$$

Если сложить эти два уравнения, учесть, что

$$\int_{0}^{0} \frac{1}{2} {}^{0}\rho \frac{\partial(v_{i}^{2})}{\partial t} dG + \int_{B_{2}}^{1} \frac{1}{2}\rho \frac{d(v_{i}^{2})}{dt} dG = \int_{0}^{0} \frac{1}{B_{1}} {}^{0}\rho \frac{\partial(v_{i}^{2})}{\partial t} d^{0}G + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} {}^{0}\rho \frac{\partial(v_{i}^{2})}{\partial t} d^{0}G =$$
$$= \int_{0}^{0} \frac{1}{B} {}^{0}\rho \frac{\partial(v_{i}^{2})}{\partial t} d^{0}G = \frac{d}{dt} \int_{0}^{1} \frac{1}{2} {}^{0}\rho v_{i}^{2} d^{0}G = \frac{d}{dt} \int_{0}^{1} \frac{1}{2} {}^{0}\rho v_{i}^{2} dG,$$

и сделать допущение, что

$$\int_{\partial} {}^{0}B_{12} L_{ij}n_{j}\upsilon_{i}dG + \int_{\partial} {}^{0}B_{12} s_{ji}n_{j}\upsilon_{i}dG = 0,$$

то закон изменения кинетической энергии примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \frac{1}{2} \rho \upsilon_{i}^{2} dG = -\int_{0} S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dG - \int_{B_{2}} S_{ji} d_{ij} dG + \int_{B} f_{i} \upsilon_{i} dG$$
(1.26)

Аналогичные рассуждения можно провести для интегрального закона изменения внутренней энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_{B} \rho \varepsilon dG = \int_{B_1} S_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dG + \int_{B_2} S_{ji} d_{ij} dG + \int_{B} \phi(T) dG.$$
(1.27)

Закон изменения полной энергии рассматриваемого тела совпадает с (1.20).

1.4. Модель электромагнитных полей

Электромагнитные поля описываются системой уравнений Максвелла в квазистационарном приближении, которая в безразмерном виде принимает следующий вид [12]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}([\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \mathbf{E}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$
(1.28)

Здесь **E** и **H** – напряженности электрического и магнитного полей, σ – проводимость, **j** – плотность тока.

Для решения системы (1.28) введем векторный потенциал A: H = rot A.

Будем рассматривать область *G*, соответствующую сечению устройства плоскостью ОХҮ. Считаем, что $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 – подобласть, занимаемая N-проводниками, $(G_1 = \bigcup_{k=1}^N S^k)$, G_2 – подобласть, занимаемая диэлектриками. Выберем следующий вид векторных переменных [6, 12]: $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)^T$, $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)^T$, $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)^T$, $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)^T$ (в дальнейшем будем обозначать A_z через *A*). Таким образом, векторы напряженности магнитного поля и скорости лежат в плоскости рассматриваемого сечения, а векторы напряженности электрического поля, плотности тока и векторный потенциал магнитного поля направлены перпендикулярно данной плоскости.

Учитывая структуры используемых векторов, преобразуем систему (1.28) в следующую:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

$$-4\pi\sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \operatorname{rotrot} \mathbf{A}.$$
(1.29)

Уравнения (1.29) записаны в эйлеровой системе координат. Для производной по времени справедливо выражение:

 $\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_x) \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{a},t)}{\partial t}.$

Одним из главных требований к конструируемой модели является сохранение полных токов, текущих по каждому проводнику в расчетной области:

$$\int_{S^{k}} \sigma E_{z} dS = I_{k}, \ k = 1, ..., N.$$
(1.30)

Для выполнения (1.30) нужно разрешить скачок напряженности электрического поля E_z при переходе через границу проводника ∂S^k на некоторую величину χ_k , подлежащую определению. В итоге на границе ∂S^k поставлены следующие условия [12]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0 , \quad \begin{bmatrix} E_z \end{bmatrix} = E_z^e - E_z^i = \chi_k(t) , \quad 4\pi \int_{S^k} j_z dS = \oint_{\partial S^k} (\mathbf{H}, d\mathbf{I}) = 4\pi I_k .$$
(1.31)

Здесь E_z^e – напряженность электрического поля в диэлектрике, а E_z^i – в проводниках. Величина χ_k играет роль плотности поверхностных магнитных токов.

При использовании векторного потенциала ограниченность **H** сразу ведет к условию непрерывности **A** при переходе через ∂S_k . Отсюда следует, что для обеспечения скачка (1.31) необходимо взять

$$E_z = -\frac{dA}{dt} - \chi_k(t),$$
внутри S^k . (1.32)

Если домножить (1.32) на σ и проинтегрировать по S^k , то можно получить следующее выражение:

$$\chi_{k} = -\left(\int_{S^{k}} \sigma \frac{dA}{dt} dS + I_{k}\right) / \int_{S^{k}} \sigma dS .$$
(1.33)

Приходим к задаче:

$$4\pi\sigma \left[\frac{DA}{Dt} - \left(\int_{S^{k}} \sigma \frac{dA}{dt} dS + I_{k}\right) / \int_{S^{k}} \sigma dS \right] = \Delta A \quad B \quad S^{k},$$

$$\Delta A = 0 \quad B \quad G_{2},$$

$$A|_{t=0} = 0, [A] = 0 \quad \text{Ha} \quad \partial S^{k}, \left[\frac{\partial A}{\partial n}\right] = 0 \quad \text{Ha} \quad \partial S^{k}, A|_{\partial G} = 0,$$

(1.34)

то есть уравнения замыкаются нулевыми начальными данными, условиями непрерывности A и ее производной по нормали при переходе через ∂S^k и нулевыми граничными условиями для случая области G, ограниченной идеально проводящим кожухом. Левая часть первого уравнения (1.34) представляет собой $4\pi j_z$, откуда получаем, что решение (1.34) удовлетворяет последнему условию (1.31), то есть обеспечивает протекание заданного тока.

Если выполнить цепочку преобразований, то можно получим следующее уравнение закона изменения электромагнитной энергии внутри области [12]:

$$\frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 dS + \int_{G} \mathbf{j} \mathbf{E} dS + \sum_{k=1}^{N} I_k \chi_k + \int_{G} \mathbf{v} \mathbf{f} dS = 0.$$
(1.35)

Считаем, что тепловыделение в телах обусловлено только джоулевым теплом ($\phi = \mathbf{j}\mathbf{E}$), поэтому, сложив (1.35) и (1.20), получим следующий закон изменения полной энергии внутри рассматриваемой системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{2} \rho \upsilon_{i}^{2} dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \rho \varepsilon dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^{2} dS = -\sum_{k=1}^{N} I_{k} \chi_{k} .$$
(1.36)

2. Численная модель

Численная модель основана на расщеплении исходной полной системы уравнений по физическим процессам. На каждом шаге по времени выполняется цикл внешних итераций. На каждой итерации происходит последовательное решение системы уравнений, описывающих электромагнитную задачу, затем – системы уравнений для определения внутренней энергии и температуры, затем – системы уравнений, описывающей движение вещества. В конце итерации происходит сдвиг лагранжевых сеток в проводниках в соответствии с

вычисленным полем перемещений, сетка в диэлектрических подобластях перестраивается таким образом, чтобы сохранить приемлемое качество элементов сетки. После чего происходит переход к следующей итерации.

Численная модель электромагнитной задачи основана на применении метода Галеркина-Петрова с использованием кусочно-постоянных и кусочнолинейных функций. Она подробно описана в [6].

Для нахождения значений внутренний энергии из уравнений (1.13)-(1.14) сделано предположение, что на рассматриваемых временах теплопроводность незначительно влияет на итоговый результат, поэтому слагаемым $\frac{\partial}{\partial a_i}(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial a_i})$ можно на данном этапе пренебречь. Тогда, используя для внутренней энергии кусочно-постоянную аппроксимацию в элементе, ее значение на новом шаге по времени в элементе (*e*)($\hat{\varepsilon}^{(e)}$) вычислено с использованием формул (для начальной и текущей конфигураций):

$${}^{0}\rho^{(e)} \frac{\hat{\varepsilon}^{(e)} - \varepsilon^{(e)}}{\tau} \Delta_{0}^{(e)} = \left(\hat{S}_{ji} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t}\right)^{(e)} \Delta_{0}^{(e)} + \hat{\phi}^{(e)} \Delta^{(e)}, \qquad (2.1)$$

$${}^{0}\rho^{(e)}\frac{\hat{\varepsilon}^{(e)}-\varepsilon^{(e)}}{\tau}\Delta_{0}^{(e)} = \left(s_{ji}d_{ij}\right)^{(e)}\Delta^{(e)} + \hat{\phi}^{(e)}\Delta^{(e)}.$$
(2.2)

Здесь $\Delta_0^{(e)}$ – площадь элемента (*e*) в начальной конфигурации, $\Delta^{(e)}$ – площадь элемента (*e*) в текущей конфигурации.

Для вычисления значения текущей температуры в элементе $(e)(\hat{T}^{(e)})$ для модели жидкости использовано заданное в виде таблицы уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(T, v)$. Для известных значений $\hat{\varepsilon}^{(e)}$ и $\hat{v}^{(e)} = 1/\hat{\rho}^{(e)}$ определено $\hat{T}^{(e)}$ (считалось, что для фиксированной плотности функция $\varepsilon(T, \hat{v}^{(e)})$ является монотонной).

Для модели твердого деформируемого тела сначала определена величина $\hat{\varepsilon}_{T}^{(e)} = \hat{\varepsilon}_{U}^{(e)} - \hat{\varepsilon}_{U}^{(e)}$ ($\hat{\varepsilon}_{U}^{(e)} = \varepsilon_{U}^{(e)} + \tau(\overline{\tau}:\mathbf{D})^{(e)} / {}^{0}\rho^{(e)}$), а потом, используя (16), вычислено значение $\hat{T}^{(e)}$.

Закон сохранения массы обеспечен за счет связи изменения плотности вещества в каждом элементе (*e*) с изменением площади данного элемента:

 ${}^{0}\rho^{(e)}\Delta_{0}^{(e)} = \hat{\rho}^{(e)}\Delta^{(e)}.$

Для численного решения поставленной механической задачи использован принцип возможных перемещений. Относительно начальной конфигурации данный принцип выражается равенством [9]:

$$\int_{^{0}G} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - {^{0}\rho} / \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dG = \int_{^{0}G} \nabla_{a} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{a} \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} dG,$$

где $\delta \mathbf{u}$ – возможные перемещения. Если применить к правой части равенства формулу Остроградского-Гаусса, то можно получить следующее соотношение:

$$\int_{{}^{0}G} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - {}^{0}\rho / \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} d {}^{0}G + \int_{{}^{0}\Gamma_{T}} \mathbf{f}^{*} \cdot \delta \mathbf{u} d {}^{0}\Gamma = \int_{{}^{0}G} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d {}^{0}G, \qquad (2.3)$$

где вариация тензора деформаций Грина-Лагранжа определена следующим образом:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla_a (\delta \mathbf{u}) + \nabla_a (\delta \mathbf{u})^T + \nabla_a (\delta \mathbf{u}) \cdot \nabla_a \mathbf{u}^T + \nabla_a \mathbf{u} \cdot \nabla_a (\delta \mathbf{u})^T].$$

Уравнение (2.3) в момент времени $t + \Delta t$, записанное с использованием лагранжевой системы координат, можно представить в следующем виде:

$$\int_{^{0}G} \hat{S}_{ij} \delta \hat{E}_{ij} d^{0}G = \hat{R}, \qquad (2.4)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = \int_{{}^{0}G} ({}^{0}\rho\ddot{u}_{i} - \hat{f}_{i})\delta\hat{u}_{i}d{}^{0}G + \int_{{}^{0}\Gamma_{T}} \hat{f}_{i}^{*} \cdot \delta\hat{u}_{i}d{}^{0}G.$$
(2.5)

Представим приращение тензора деформаций Грина-Лагранжа в виде суммы линейной и нелинейной частей [9]:

$$\Delta E_{ij} = E_{ij} - E_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij}, \qquad (2.6)$$

где

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} u_{k,j}),$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}.$$

Компоненты Δe_{ij} являются инкрементальным аналогом компонент материальной производной по времени тензора деформаций Грина \dot{E}_{ij} :

$$\Delta e_{ij} \approx dE_{ij}$$
.

Для определяющего соотношения (1.11) значение 2-го тензора напряжений Пиолы-Кирхгоффа в момент времени *t* + Δ*t* задано формулой

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} + \Delta S_{ij} = \tilde{S}_{ij} + C_{ijkl} \Delta E_{kl},$$

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij} - C^{1}_{ijkl} \Delta E^{(p)}_{kl} - C^{2}_{ijkl} \Delta E^{(th)}_{kl}.$$
(2.7)

Если подставить (2.6) и (2.7) в (2.3), учесть, что $\delta E_{ij} = 0$, и ограничиться линейными слагаемыми, то получим следующее равенство:

$$\int_{O_G} C_{ijkl} \Delta e_{kl} \delta \Delta e_{kl} d^0 G + \int_{O_G} \tilde{S}_{ij} \delta \Delta \eta_{kl} d^0 G = \hat{R} - \int_{O_G} \tilde{S}_{ij} \delta \Delta e_{ij} d^0 G.$$
(2.8)

Введем следующие векторы и матрицы (аналоги соответствующих тензоров) [9]:

$$\Delta \mathbf{e} = \{\Delta e\} = \{\Delta e_{xx}, \ \Delta e_{yy}, \ 2\Delta e_{xy}\}^{T}, \Delta \mathbf{u}_{\mathbf{g}} = \{\Delta u_{g}\} = \{\Delta u_{x,x}, \ \Delta u_{x,y}, \Delta u_{y,x}, \ \Delta u_{y,y}\}^{T}, \overline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \ \widehat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_{xx} & \overline{\mathbf{S}}_{xy} \\ \overline{\mathbf{S}}_{xy} & \overline{\mathbf{S}}_{yy} \end{bmatrix}.$$
(2.9)

С их помощью выражения (2.8) можно переписать в следующем виде:

$$\int_{O_{G}} \left\{ \delta \Delta e \right\}^{T} \left[C \right] \left\{ \Delta e \right\} d^{0}G + \int_{O_{G}} \left\{ \delta \Delta u_{g} \right\}^{T} \left[\overline{S} \right] \left\{ \Delta u_{g} \right\} d^{0}G = \hat{R} - \int_{O_{G}} \left\{ \delta \Delta e \right\}^{T} \left\{ \tilde{S} \right\} d^{0}G .$$
(2.10)

После дискретизации по пространству с помощью метода конечных элементов[9, 13] введем вектор приращения узловых перемещений в конечном элементе $\Delta U^{(e)}$, который связан с векторами $\left\{ \Delta e^{(e)} \right\}$ и $\left\{ \Delta u_g^{(e)} \right\}$ следующими равенствами:

$$\left\{ \Delta e^{(e)} \right\} = \left[B_L^{(e)} \right] \left\{ \Delta U^{(e)} \right\},$$

$$\left\{ \Delta u_g^{(e)} \right\} = \left[B_{NL}^{(e)} \right] \left\{ \Delta U^{(e)} \right\},$$

$$(2.11)$$

где $[B_L^{(e)}]$, $[B_{NL}^{(e)}]$ – блочные матрицы, их структура описана в [9].

Введем следующие локальные матрицы и векторы для одного элемента (е):

$$\begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{{}^{0}G^{(e)}} {}^{0}\rho \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix} d^{0}G - \text{локальная матрица масс,}$$
$$\begin{bmatrix} K_{L}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{{}^{0}G^{(e)}} \begin{bmatrix} B_{L}^{(e)} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} C^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{L}^{(e)} \end{bmatrix} d^{0}G - \text{линейная касательная матрица}$$

жесткости элемента,

 $\begin{bmatrix} K_{NL}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{{}^{0}G^{(e)}} \begin{bmatrix} B_{NL}^{(e)} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \overline{S}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{NL}^{(e)} \end{bmatrix} d^{0}G -$ нелинейная касательная матрица

жесткости элемента,

$$\begin{bmatrix} \hat{K}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_L^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{NL}^{(e)} \end{bmatrix} - \text{касательная матрица жесткости элемента,} \\ \left\{ \hat{F}^{(e)} \right\} = \int_{0}^{G^{(e)}} \begin{bmatrix} B_L^{(e)} \end{bmatrix}^T \left\{ \tilde{S}^{(e)} \right\} d^0 G - \text{вектор внутренних сил элемента,} \\ \left\{ \hat{R}^{(e)} \right\} = \int_{0}^{G^{(e)}} \frac{0}{G} \rho / \rho \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}^T \left\{ \hat{f} \right\} dG = \int_{G^{(e)}} \begin{bmatrix} N^{(e)} \end{bmatrix}^T \left\{ \hat{f} \right\} dG - \text{вектор внешних сил} \end{cases}$$

элемента.

Если ввести глобальные векторы и матрицы (как суммы локальных матриц по всем элементам сетки), то получим итоговое дифференциальное матричное уравнение [9]

$$[M]\{\ddot{U}\}+[\hat{K}]\{\Delta U\}=\{\hat{R}\}-\{\hat{F}\}.$$
(2.12)

Будем его решать в терминах вектора узловых скоростей $\{\hat{v}\}$, используя следующие разностные соотношения:

$$\left\{ \ddot{U} \right\} = rac{1}{ au} \left\{ \left\{ \hat{\upsilon} \right\} - \left\{ \upsilon \right\} \right),$$

 $\left\{ \Delta U \right\} = rac{1}{ au} \left\{ \hat{\upsilon} \right\}.$

Тогда дифференциальное уравнение (2.12) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{1}{\tau}[M] + \tau[\hat{K}]\right)\{\hat{\upsilon}\} = \{\hat{R}\} - \{\hat{F}\} + \frac{1}{\tau}[M]\{\upsilon\}.$$
(2.13)

Уравнение (2.13) является нелинейным, поскольку матрицы $[C^{(e)}], [\bar{S}^{(e)}]$ и векторы $\{\tilde{S}^{(e)}\}$ зависят от напряжений и деформаций на текущий момент времени. Для линеаризации (2.13) используем метод простой итерации. Тогда на і-й итерации получим следующее матричное линейное уравнение:

$$\left(\frac{1}{\tau}[M] + \tau[\hat{K}^{(i-1)}]\right) \left\{\hat{\upsilon}^{(i)}\right\} = \left\{\hat{R}\right\} - \left\{\hat{F}^{(i-1)}\right\} + \frac{1}{\tau}[M] \left\{\upsilon\right\}.$$
(2.14)

Для получения дискретных уравнений для модели жидкости можно проделать аналогичную процедуру, рассматривая вместо начальной текущую конфигурацию.

Соответствующие локальные матрицы и векторы для одного элемента (*e*) будут иметь вид:

$$\left[M^{(e)}\right] = \int_{G^{(e)}} \rho \left[N^{(e)}\right]^T \left[N^{(e)}\right] dG = \int_{{}^0G^{(e)}} {}^0\rho \left[N^{(e)}\right]^T \left[N^{(e)}\right] d{}^0G -$$
локальная матрица

масс,

 $\begin{bmatrix} K^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{G^{(e)}} \begin{bmatrix} B^{(e)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_D^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{(e)} \end{bmatrix} dG$ – касательная матрица жесткости элемента

(матрица $\begin{bmatrix} C_D^{(e)} \end{bmatrix}$ включает в себя коэффициенты λ_D , μ_D),

 $\left\{\hat{F}_{p}^{(e)}\right\} = \int_{G^{(e)}} \left[B^{(e)}\right]^{T} \left\{\hat{p}^{(e)}\right\} dG$ – вектор внутренних сил элемента (учитывает

давление).

Давление $\hat{p}^{(e)}$ считалось постоянным внутри элемента (*e*) и вычислялось с использованием заданного в виде таблицы уравнения состояния $\hat{p}^{(e)} = p(\hat{T}^{(e)}, \hat{v}^{(e)})$.

Если ввести глобальные векторы и матрицы, то получим итоговое дифференциальное матричное уравнение (для записи матрицы масс и вектора ускорения используем лагранжеву систему координат):

$$[M]\left\{\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\} + [K]\left\{\hat{\upsilon}\right\} = \left\{\hat{R}\right\} - \left\{\hat{F}\right\}.$$
(2.15)

Заменим производную по времени разностным соотношением и выполним линеаризацию с помощью метода простой итерации. Тогда на і-й итерации получим следующее матричное линейное уравнение:

$$\left\{\frac{1}{\tau}[M] + [K]\right)\left\{\hat{\upsilon}^{(i)}\right\} = \left\{\hat{R}\right\} - \left\{\hat{F}_{p}^{(i-1)}\right\} + \frac{1}{\tau}[M]\left\{\upsilon\right\}.$$
(2.16)

Для смешанной модели итоговое матричное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} K_{eff}^{(i-1)} \end{bmatrix} \left\{ \hat{\upsilon}^{(i)} \right\} = \left\{ \hat{R}_{eff}^{(i-1)} \right\}.$$
 (2.17)

Глобальная эффективная матрица жесткости и глобальный эффективный вектор сил получаются суммированием соответствующих локальных величин по всем элементам сетки.

Если в элементе (е) используется модель твердого тела, то

$$\begin{bmatrix} K_{eff}^{(i-1)(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} \hat{K}^{(i-1)(e)} \end{bmatrix},$$

$$\{ \hat{R}_{eff}^{(i-1)(e)} \} = \{ \hat{R}^{(e)} \} - \{ \hat{F}^{(i-1)(e)} \} + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} \{ \upsilon^{(e)} \}.$$
 (2.18)

Если в элементе (е) используется модель жидкости, то

$$\begin{bmatrix} K_{eff}^{(i-1)(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{(e)} \end{bmatrix},$$

$$\{ \hat{R}_{eff}^{(i-1)(e)} \} = \{ \hat{R}^{(e)} \} - \{ \hat{F}_{p}^{(i-1)} \} + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} M^{(e)} \end{bmatrix} \{ \upsilon^{(e)} \}.$$
 (2.19)

В дальнейшем для расчетов применялись линейные конечные элементы, заданные на треугольной сетке.

Поскольку при движении проводников в них возникали большие градиенты скоростей и температур, то в численном решении (на использованных сетках) наблюдались заметные осцилляции. Для погашения осцилляций в численный алгоритм введена искусственная вязкость в виде добавки к физическим тензорам напряжений дополнительного тензора **о**^{vise} :

 $\mathbf{s} \rightarrow \widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{\sigma}^{visc}, \ \mathbf{L} \rightarrow \widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{\sigma}^{visc},$ компоненты которого задаются равенствами

 $\sigma_{ii}^{\scriptscriptstyle visc} = \mu_{ik}^{\scriptscriptstyle visc} d_{ki}$.

Здесь использован тензор коэффициентов искусственной вязкости, который в системе координат (τ , **n**) имеет только одну ненулевую компоненту $\mu_{\tau\tau}^{visc}$ (ось τ направлена вдоль вектора скорости). В каждом элементе сетки определялся усредненный (по узлам) вектор скорости, после чего определялись компоненты тензора σ^{visc} в декартовой системе координат. Учет искусственной вязкости приводит к добавлению к стандартной матрице $\left[K_{eff}^{(i-1)}\right]$ в (2.17) дополнительной матрицы $\left[K_{visc}^{(i-1)}\right]$.

Искусственная вязкость вводилась только в тех элементах, где возникали большие градиенты скорости или наблюдалась немонотонность по скорости. Искусственная вязкость учитывалась в балансах внутренней, кинетической и полной механической энергий (как дополнительный вклад в соответствующие тензоры напряжений).

3. Результаты расчетов

Для исследования применимости описанных моделей рассмотрена задача об ускорении цилиндрической алюминиевой оболочки в магнитном поле [3]. В использованной постановке задачи расчетная область включала в себя 2 проводника, разделенных диэлектрической подобластью. Катод – цилиндр с внешним радиусом 6.7 мм, выполнен из стали; анод – полый цилиндр с внутренним радиусом 7.5 мм и толщиной 0.925 мм, выполнен из алюминия. В [3] также рассмотрен 3-й проводник – мишень, в которую врезается часть анода, но в наших расчетах мишень не учитывается. В [3] при проведении

расчетов использована одномерная МГД модель. В данной работе двумерная расчетная область соответствует 1/4 части поперечного сечения устройства. По проводникам протекает заданный ток (в аноде он течет в противоположном направлении по сравнению с катодом) с максимальной амплитудой 16.5 МА, представленный на рис. 1.а. Здесь и далее время нормировано на 1 мкс, координаты – на 10 см.



б – магнитного давления

Под воздействием токов, текущих по проводникам, в диэлектрической подобласти между катодом и анодом возникает магнитное поле. График расчетной зависимости давления магнитного поля от времени (в Мбар) на движущейся внутренней поверхности анода представлен на рис. 1.б. В целом он соответствует расчетному графику магнитного давления (штриховая линия), полученному в [3] (рис. 2, время приведено в мкс). Для большего совпадения магнитного давления в данной работе амплитуда тока увеличена с 15.1 МА (как в [3]) до 16.5 МА. Также на рис. 2 приведен график полного тока (сплошная линия), использованного в расчетах [3]. Нулевой момент времени на рис. 1 соответствует моменту времени 2.47 мкс на рис. 2.

сравнительного проведения анализа Для проведены расчеты с использованием трех представленных выше моделей для описания движения анода (катод предполагался неподвижным): модели упругопластического тела (модель 1), модели вязкой сжимаемой жидкости (газа) (модель 2) и смешанной модели: в одной подобласти – модель термоупругопластического тела, в другой подобласти – модель вязкой сжимаемой жидкости (модель 3). Рассмотрен интервал времени 680 нс, использованы следующие параметры ПО коэффициентов вязкости: $\lambda_D = 0$, $\mu_D = 10^{-5}$, коэффициент искусственной Вязкости $\mu_{\tau\tau}^{visc} = 2 \ 10^{-3}$.

В расчетах учтена зависимость проводимости алюминия от плотности и температуры (заданная в виде таблицы) [14], для модели жидкости (газа) –

зависимости давления и внутренней энергии от плотности, и температуры брались из широкодиапазонного уравнения состояния [15].



Рис. 2. Зависимости от времени полного тока и магнитного давления в [3]

Для модели твердого тела использовано плоское приближение: $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0.$ В качестве базовых параметров упругости выбраны модуль всестороннего сжатия К и модуль сдвига G. Все остальные параметры упругости можно выразить через них (при этом формулы для плоской модели могут отличаться от стандартных формул для трехмерного случая). Например, параметры Ламе λ, μ выражаются так:

$$\lambda = K - G, \ \mu = G.$$

В модели принято, что упругие параметры зависят от плотности вещества (для больших значений плотности параметры могут изменяться на десятки процентов), использованы зависимости из [16].

В расчетах для модели 1 учтены скачки внутренней энергии при фазовых переходах твердое тело/жидкость и жидкость/газ (без смены модели на модель жидкости). Выбрана следующая зависимость плотности внутренней энергии ε_T от температуры:

$$\begin{split} & \mathcal{E}_{T}(T) = \int_{T_{0}}^{T} c_{v1}(\xi) d\xi, \ T < T_{1}, \\ & \mathcal{E}_{T}(T) = \int_{T_{0}}^{T_{1}} c_{v1}(\xi) d\xi + L_{1} + \int_{T_{1}}^{T} c_{v2}(\xi) d\xi, \ T_{1} \leq T < T_{2}, \\ & \mathcal{E}_{T}(T) = \int_{T_{0}}^{T_{1}} c_{v1}(\xi) d\xi + L_{1} + \int_{T_{1}}^{T_{2}} c_{v2}(\xi) d\xi + L_{2} + \int_{T_{2}}^{T} c_{v3}(\xi) d\xi, \ T \geq T_{2}. \end{split}$$

Здесь *T*₁ – температура, при которой происходит фазовый переход твердое вещество/жидкость, *T*₂ – температура, при которой происходит фазовый

переход жидкость/газ, L_1 – удельная теплота плавления, L_2 – удельная теплота испарения, $c_{v1}(T)$, $c_{v2}(T)$, $c_{v3}(T)$ – удельные теплоемкости при постоянном объеме для твердого, жидкого и газообразного вещества. В расчетах использованы следующие значения характеристик алюминия [17]: T_1 =933 K, T_2 =2972 K, L_1 = 3.9 10⁵ Дж/кг, L_2 = 1.05 10⁷ Дж/кг, $c_{v1}(T)$ = 897 Дж/(кг K), $c_{v2}(T)$ = 1176 Дж/(кг K).



Рис.3. Диаграмма значений параметра, задающего номер фазового состояния вещества

На самом деле фазовый переход от твердого тела к жидкости не привязан к одному значению температуры плавления, соответствующая температура существенно зависит от плотности. В уравнении состояния [15] в табличном виде задан параметр, характеризующий фазу, в которой находится вещество: 1 – твердое тело, 2 – твердое тело + жидкость (область плавления), 3 – жидкость, 4 – жидкость + газ, 5 – газ, 6 – твердое тело + газ (область сублимации). На рис. 3 приведена диаграмма значений данного параметра для различных температур (К) и плотностей (г/см3).

В модели 3 использован следующий критерий перехода от модели 1 к модели 2 для рассматриваемого элемента (*e*): для текущей плотности $\hat{\rho}^{(e)}$ рассматривались величина внутренней энергии $\varepsilon_2(\rho)$, соответствующая фазовому переходу для уравнения состояния (из области 1 на рис. 3 в соседние области) и величина $\hat{\varepsilon}_1^{(e)} = \hat{\varepsilon}_T^{(e)} + \hat{\varepsilon}_U^{(e)}$ (принято, что $\hat{\varepsilon}_T^{(e)} = c_{v1}(\hat{T}^{(e)} - T_0)$). При выполнении неравенства $\hat{\varepsilon}_1^{(e)} \ge \varepsilon_2(\hat{\rho}^{(e)})$ происходил переход к модели жидкости.

Для всех расчетов использовались лагранжевые сетки.

На рис. 4-6 показаны двумерные распределения модуля скорости (нормирована на 100 м/с) и плотности (г/см3) в аноде в момент времени 680 нс в расчетах с моделями 1, 2, 3.



Рис. 4. Распределения плотности и скорости в аноде при t = 680 нс (модель 1)



Рис. 5. Распределения плотности и скорости в аноде при t = 680 нс (модель 2)

Из приведенных рисунков видно, что во всех расчетах анод разогнался до скорости приблизительно 8 км/с (отдельные участки), внешняя поверхность сдвинулась относительно своего начального положения (8.425 мм) почти на 3 мм. Для модели 1 толщина анода уменьшилась по сравнению с начальной, а плотность материала находится в диапазоне 2.15-2.55 г/см3. Для моделей 2 и 3 толщина анода увеличилась почти в 4 раза, плотность материала находится в диапазоне от 0.05 г/см3 (уменьшилась в 54 раза, следовательно, площадь ячейки сетки увеличилась в 54 раза) до 2.5 г/см3.

20



Рис. 6. Распределения плотности и скорости в аноде при t = 680 нс (модель 3)

Выполним сравнение различных характеристик анода, полученных при использовании разных моделей, друг с другом, а также со значениями, приведенными в [3].

На рис. 7 приведены графики скорости движения внешней поверхности анода (в км/с), взятые из [3]: сплошной график соответствует экспериментальным данным, штриховой график – расчету по одномерному МГД коду.

На рис. 8 показаны графики скорости движения внешней поверхности анода (в км/с), полученные с использованием моделей 1, 2, 3 (моменты времени t = 2.65, t = 3.15 мкс на рис. 7 соответствуют моментам времени t = 0.18, t = 0.68 на рис. 8).



Рис. 7. Зависимость от времени скорости движения поверхности, представленная в [3]

21

Графики демонстрируют, что после того, как до внешней поверхности анода доходит волна возмущения, она достаточно быстро приобретает скорость около 4.5–6 км/с (для модели 2 возрастание скорости происходит более стремительно, для моделей 1 и 3 процесс нарастания носит более затянутый по времени характер). После этого в течение определенного времени скорость поверхности меняется относительно медленно, а потом до поверхности доходит отраженная волна возмущения, которая приводит к следующему этапу увеличения скорости. Для модели 1 под действием упругих сил в конце расчета скорость начинает уменьшаться (до значения 6.6 км/с). В момент времени 680 нс для модели 2 скорость движения внешней поверхности анода составила приблизительно 8.6 км/с, а для модели 3–8.5 км/с. Данные значения близки к скорости, полученной в [3] (8.5 км/с).



Рис. 8. Зависимости от времени скорости движения поверхности: а – модель 1, б – модель 2, в – модель 3, г – для трех моделей

На рис. 9 показаны графики распределения магнитного (штриховая линия) и гидродинамического (штрихпунктирная линия) давления (в мегабарах) и

плотности (в г/см3) на моменты времени 360 нс и 440 нс, полученные в расчете по одномерному МГД коду в [3]. Координаты приведены в см.



На рис. 10 показаны графики распределения по сечению у = 0 магнитного давления (в мегабарах) в моменты времени 360 нс (красные графики) и 440 нс (синие графики), полученные в расчетах с моделями 2 и 3. Скачки на графиках магнитных давлений соответствуют переходу от области, занятой алюминием, к диэлектрической области.



Рис. 10. Распределения давления магнитного поля при t = 360 нс, 440 нс: модели 2 (а) и 3 (б)

На рис. 11 показаны аналогичные графики для плотности (в г/см3).

Сравнение полученных графиков показывает, что качественно результаты, полученные для моделей 2 и 3, достаточно близки друг к другу, но количественно результаты модели 3 ближе к значениям, полученным в [3].



На рис. 12 показаны графики распределения плотности (сплошная линия, в $\Gamma/cm3$) и температуры (штриховая линия, в логарифмическом масштабе в K) на момент времени t = 630 нс, полученные в расчете по одномерному МГД коду в [3]. На графиках также показаны распределения соответствующих величин в мишени (область $x \ge 1.14$), но в рассматриваемый момент столкновения анода с мишенью еще не произошло, поэтому наличие мишени слабо влияет на приведенные результаты.



Рис. 12. Графики распределения по пространству плотности и температуры, полученные в [3], в момент времени 630 нс

На рис. 13 показаны графики плотности и температуры (в логарифмическом масштабе) в моменты времени 630 нс, полученные в расчетах с моделями 2 (синие графики) и 3 (красные графики).

В [3] указывается, что в момент времени 630 нс участок, примыкающий к внешней поверхности флаера, толщиной приблизительно 0.14 мм имеет плотность и температуру, соответствующие твердому состоянию вещества. Для модели 3 в момент времени 630 нс участок, примыкающий к внешней поверхности флаера, толщиной приблизительно 0.12 мм соответствует твердому телу (считается по модели 1).



Рис. 13. Распределения по сечению при t = 630 нс плотности (а) и логарифма температуры (б)

Сравнение графиков температуры на рис. 12 и 13 показывает, что полученные в расчетах значения для тыловой части анода существенно отличаются от значений в [3]. Это может быть связано с тем, что в проведенных расчетах лагранжевые сетки в тыловой части анода увеличиваются в десятки раз по сравнению с начальным размером, что может приводить к искажениям численных результатов в данной области.

В целом проведенное сравнение демонстрирует, что результаты, полученные в ходе расчета участка двумерного поперечного сечения ускорителя с использованием модели 3, достаточно близки к результатам, полученным в [3] с использованием одномерной МГД модели.

Приведем другие результаты расчетов с использованием различных моделей. На рис. 14 приведены графики зависимости от времени плотности (14.а) и температуры (14.б) на внешней поверхности анода, а также максимальной плотности (14.в) и максимальной температуры (14.г) во всем аноде при применении модели 1 (красные графики), модели 2 (синие графики) и модели 3 (черные графики). Отметим, что в модели 3 в момент времени 680 нс температура внешней поверхности составляла приблизительно 500 К, а

для моделей 1 и 2 – больше 900 К. Максимальная температура во всех расчетах соответствовала внутренней поверхности анода.





Рис. 15. Зависимости от времени различных видов энергии (а) и производных по времени различных видов энергии (б)

Приведем более подробные данные о расчете с использованием модели 3.

На рис. 15.а показаны зависимости от времени энергии магнитного поля (красный график), кинетической энергии (синий график) и внутренней энергии системы (черный график). На рис. 15.б показаны аналогичные графики производной по времени данных видов энергии (мощности).

На рис. 16 показаны зависимости от времени погрешностей выполнения дискретных аналогов законов изменения кинетической полной механической энергии (для анода) для трех расчетов с шагами по времени 2 нс (красный график), 1 нс (синий график) и 0.5 нс (черный график):



Рис. 16. Зависимости от времени погрешности выполнения закона изменения кинетической энергии (а) и механической энергии (б)

На рис. 17 показаны зависимости от времени абсолютной и относительной (в логарифмическом масштабе) погрешностей выполнения дискретного аналога закона изменения полной энергии для расчетов с разными шагами по времени:

$$err_{1}E = \left| \frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{2} \rho \upsilon_{i}^{2} dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \rho \varepsilon dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^{2} dS + \sum_{k=1}^{N} I_{k} \chi_{k} \right|,$$
$$err_{2}E = err_{1}E / \left| \frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{2} \rho \upsilon_{i}^{2} dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \rho \varepsilon dG + \frac{d}{dt} \int_{G} \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^{2} dS \right|.$$

Из приведенных графиков видно, что хотя использованные численные схемы не являются полностью консервативными, при уменьшении шага по времени наблюдается уменьшение погрешностей выполнения законов изменения различных видов энергии (их дискретных аналогов). На рис. 18 показаны распределения скорости Vx (нормирована на 100 м/с) в сечении анода у = 0 в различные моменты времени.



Рис. 17. Зависимости от времени абсолютной (а) и относительной (в логарифмическом масштабе) (б) погрешностей выполнения закона изменения полной энергии



Рис. 18. Распределения скорости Vx в сечении y = 0

На рис. 19 показаны распределения плотности тока (нормирована на 2 10^8 A/m²) в сечении у = 0 в различные моменты времени.



в различные моменты времени

На рис. 20 показаны распределения плотности алюминия в сечении у = 0 в различные моменты времени.



Рис. 20. Распределения плотности в сечении у = 0 в различные моменты времени

На рис. 21 показаны распределения давления (1-й инвариант тензора напряжений: $\overline{\tau}_{kk}$ – для модели 1 и s_{kk} – для модели 2, в Мбар) в сечении у = 0 в различные моменты времени. Если сравнивать значения механического давления со значениями магнитного давления на рис. 1.б, то видно, что они сопоставимы. Начиная с момента времени 500 нс кривые показывают, что в твердом слое

вблизи внешней поверхности анода возникают растягивающие напряжения (соответствующее значение инварианта больше нуля).



Рис. 21. Распределения давления в сечении y = 0 в различные моменты времени

На рис. 22 показаны графики, указывающие положения подобластей с твердой (номер модели равен 1) и нетвердой (номер модели равен 2) фазами в сечении анода у = 0 в различные моменты времени. Из графиков видно, что в момент времени 680 нс вблизи внешней поверхности анода остается слой, толщиной приблизительно 0.12 мм, который находится в твердом состоянии.



Рис. 22. Положения подобластей с твердой и нетвердой фазами в сечении у = 0 в различные моменты времени

Заключение

Построены математические и численные модели, предназначенные для описания движения металлических проводников в электромагнитном поле. Модели обеспечивают протекание по проводникам заданных токов, для расчета деформирования тел использованы различные математические модели: модель термоупругопластического тела (для случая больших деформаций), модель вязкой сжимаемой жидкости и смешанная модель, включающая в себя переход деформируемого тела к модели модели твердого жидкости. OT Для представленных моделей проведена серия расчетов движения цилиндрического алюминиевого проводника, ускоренного электромагнитными силами до скорости около 8 км/с. Выполнено сравнение результатов, полученных с помощью различных моделей, друг с другом, а также с результатами, полученными в [3] при использовании одномерной МГД модели. Сравнение показало, что применение смешанной модели позволило получить значения различных характеристик близкие к значениям, полученным в [3].

Автор выражает глубокую благодарность Галанину М. П., Грабовскому Е. В., Лотоцкому А. П., Олейнику Г. М., Плеханову А. В., Ткаченко С. И. за предоставленную информацию, плодотворные идеи и активное обсуждение применимости различных моделей.

Список литературы

[1] Исследования работы импульсного магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера / Грабовский Е.В. [и др.] // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. № 7. С. 126-135.

[2] Плазмообразование на токонесущих электродах установки Ангара-5-1 /Александров В.В. [и др.] // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 2. С. 121-130.

[3] Characterization of magnetically accelerated flyer plates / Lemke R.W. [et al] // Physics of plasmas. 2003. V. 10. No 4. P. 1092-1099.

[4] Tkachenko S.I., Khishchenko K.V. and Levashov P.R. Homogeneity in a Metal Wire under Melting // International Journal of Thermophysics. 2005. V. 26. N_{2} . 4. P. 1167-1179.

[5] Бойков Д.С., Ольховская О.Г., Гасилов В.А. Моделирование газодинамических и упругопластических явлений при интенсивном энерговкладе в твердый материал // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 12. С. 82–102.

[6] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Решение интегродифференциального уравнения, описывающего распределение электромагнитного поля в магнитном компрессоре // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 927-936.

[7] Бахтин В.П., Галанин М.П., Житлухин А.М., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Динамика течения концевых элементов цилиндрического лайнера для

импульсного сжатия плазмы // Вопросы атомной науки и техники: серия термоядерный синтез. 2019. № 4. С. 61-71.

[8] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит. 2002. 168 с.

[9] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: изд-во СО РАН. 2000. 262 с.

[10] Коробейников С.Н, Олейников А.А., Ларичкин А.Ю., Бабичев А.В., Алехин В.В. Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13. № 2. С. 222-249.

[11] Коробейников С.Н, Олейников А.А. Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки // Дальневосточный математический журнал. 2011. Т. 11. № 2. С. 155-180.

[12] Галанин М.П, Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с.

[13] Kojic M., Bathe K.-J. Inelastic Analysis of Solids and structures. New-York: Springer-Verlag. 2005. 414 p.

[14] Перегревные неустойчивости при электрическом взрыве проводников / Орешкин В.И. [и др.] // Журн. техн. физ. 2004. Т. 74. В. 7. С. 38-43.

[15] Wide-range multi-phase equations of state for metals / Fortov V.E. [et al] // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1998. A415.P. 604-608.

[16] Воробьев А.А., Дремин А.Н., Канель Г.И. Зависимость коэффициентов упругости алюминия от степени сжатия в ударной волне // ПМТФ. 1974. № 5. С. 94-100.

[17] Физические величины. Справочник / Под ред. Григорьева И.С., Мейлахова Е.З. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.

Оглавление

Введение	3
1. Математическая модель	3
1.1 Модель термоупругопластического тела	3
1.2. Модель сжимаемой жидкости (газа)	7
1.3. Смешанная модель	8
1.4. Модель электромагнитных полей	9
2. Численная модель	11
3. Результаты расчетов	16
Заключение	31