



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.Г. Афендикова

Научное творчество
Н.Д.Введенской, связанное с
работой в ИПМ им. М.В.
Келдыша

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Афендикова Н.Г. Научное творчество Н.Д.Введенской, связанное с работой в ИПМ им. М.В. Келдыша // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 55. 10 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-55>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-55>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Н.Г. Афондикова

**Научное творчество Н.Д. Введенской,
связанное с работой
в ИПМ им. М.В. Келдыша**

Москва — 2023

Афендикова Н.Г.

Научное творчество Н.Д. Введенской, связанное с работой в ИПМ им. М.В. Келдыша

Работа посвящена Никите Дмитриевне Введенской, математику, известному человеку в математических кругах Москвы, прожившей долгую и продуктивную жизнь. Описана та часть вклада Н.Д.Введенской в науку, которая связана с ее работой в ИПМ имени М.В.Келдыша. Введенской были предложены в 1960-е годы вычислительные алгоритмы решения задач теории ламинарного пограничного слоя. Полученные результаты стали широко цитируемой классикой. Ее работы с соавторами из ИПМ по задаче обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью и по течениям, моделирующим атмосферные процессы, являются базой для дальнейших исследований и пользуются мировой известностью.

Ключевые слова: конечная разность, гиперболические уравнения, численное моделирование, течение вязкой жидкости, пограничный слой, сингулярное решение, локализованная завихренность.

Nadezhda Gennadievna Afendikova

Scientific achievements of N.D. Vvedenskaya, related to the work at Keldysh Institute of Applied Mathematics

The work is dedicated to Nikita Dmitrievna Vvedenskaya, a mathematician, a well-known person in the mathematical circles of Moscow, who lived a long and productive life. The part of Vvedenskaya's contribution to science related to her work at the Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM) is described. Vvedenskaya proposed in the 1960s computational algorithms for solving problems of the theory of the laminar boundary layer. The results obtained have become widely cited classics. Her work with co-authors from KIAM on the problem of flowing around bodies with a viscous incompressible fluid and along currents modeling atmospheric processes is the basis for further research and is world famous.

Keywords: finite difference, hyperbolic equations, numerical simulations, viscous fluid flows, boundary layer, singular solution, localized vorticity.



В прошлом году ушла из жизни Никита Дмитриевна Введенская, замечательный математик и человек, широко известный в математических кругах Москвы. В ИПМ, тогда он назывался ОПМ МИАН, она работала в должности младшего научного сотрудника с 1957 по 1964 год. В 1964 году, будучи избрана по конкурсу на должность старшего научного сотрудника, она перешла на работу в Институт проблем передачи информации АН СССР. В этом институте Никита Дмитриевна работала до конца жизни. После ее кончины было принято решение увековечить ее память выпуском специального номера журнала «Markov Processes and Related Fields», посвященного творчеству Никиты Дмитриевны. Предлагаемый ниже текст представляет собой русский вариант статьи, опубликованной во 2 номере журнала за 2023 год, в томе 29. Мы дополнили текст документами из ее личного дела из архива ИПМ: фотографией и двумя характеристиками. В первой из них, написанной в 1956 году, перед приходом Введенской в ОПМ, указано еще двойное имя – Наталья-Никита. Обратим внимание, как второй документ кратко и четко характеризует высокий математический уровень Введенской как специалиста в проведении сложных вычислений.

ХАРАКТЕРИСТИКА	ХАРАКТЕРИСТИКА
<p>ВВЕДЕНСКАЯ Никита-Наталья Дмитриевна, 1930 г. рождения, семья, член ВЛКСМ с 1949г.</p> <p>В аспирантуру Математического института поступила осенью 53г. Успешно сдала кандидатский минимум; сейчас занимается работой над диссертацией. Принимала активное участие в работе научных семинаров. Принимает участие в общественной жизни Института: была комсоргом комсомольской группы, агитатором, старшей делового семинара. Принимает активное участие в работе философского семинара.</p> <p>Дата или представления в ОИМ.</p> <p>д.и. Директор Математического института АН СССР, академик И.М. Виноградов.</p> <p>д.и. Председатель местного Д.Н. Зубарев</p> <p>п.п. Секретарь комсомольской организации Н.С. Назлынинова</p> <p>д.и. Математического института АН СССР</p> <p><i>24/10/56</i></p>	<p>Никита Дмитриевна ВВЕДЕНСКАЯ работает в Отделении прикладной математики Математического института им.В.А. Стеклова Академии наук СССР с 1957 года.</p> <p>Н.Д.Введенская является научным сотрудником высокой математической культуры. Она в состоянии руководить решением весьма сложных вычислительных задач и разбирать возникающие при этом математические вопросы.</p> <p>Н.Д.Введенская относилась добросовестно к исполнению общественных поручений, которые ей когда-либо давались.</p> <p>Зам. директора ОИМ Кандидат тех. наук <i>В.В. Русанов</i> (В.В. Русанов)</p> <p>Председатель Месткома Кандидат физ.мат. наук <i>В.А. Саричев</i> (В.А. Саричев)</p> <p>« октября 1964 г.</p>

Время учебы Натальи–Никиты Дмитриевны Введенской на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и в аспирантуре МИАН под научным руководством О. А. Олейник завершилось в декабре 1956 года успешной защитой кандидатской диссертации «Применение метода конечных разностей к построению обобщенных решений нелинейных уравнений» [1].

Это было время проведения работ по решению задач атомного проекта, для которых были использованы первые вычислительные машины. Академик И. Г. Петровский (учитель О. А. Олейник) был одним из руководителей этих работ [2] и посодействовал приходу талантливого молодого математика в Отделение прикладной математики МИАН (тогдашнее название ИПМ). Актуальными в ту пору были исследования свойств решений используемых уравнений (напр., квазилинейных), осмысления точности примененных методов (напр., разностных). Так, сама О. А. Олейник рассматривала вопросы определения обобщенных решений нелинейных уравнений, их существования и единственности. Одной из используемых техник для исследования обобщенных решений рассматриваемых уравнений были разностные схемы.

Диссертация Н. Д. Введенской лежит в русле этой деятельности. В частности, была рассмотрена задача Коши для $x \in \mathbb{R}^1$ и начально-краевая задача на отрезке для квазилинейного уравнения

$$\partial u / \partial t + \partial \phi(t, x, u(t, x)) / \partial x + \psi(t, x, u(t, x)) = 0$$

при условии выполнения неравенства $\varphi''_{uu}(t, x, u) \geq 0$, моделирующего условие Бете-Вейля для уравнения состояния в газовой динамике. Для таких задач нет надежды на сохранение гладкости начальных данных на конечных временах. Поэтому на основе интегрального тождества было дано определение обобщенного решения и исследованы существование и единственность. В частности, решение конструктивно строилось на основе конечно-разностной схемы Лакса и далее доказывалась сходимости к обобщенному решению. Исследование носило теоретический характер и о численном решении речь не шла.

Введенская была принята в отдел замечательного математика и механика Константина Ивановича Бабенко, незадолго до этого выделившийся из теоретического отдела И. М. Гельфанда. Основными в отделе были гидрогазодинамические расчеты, проводимые на ЭВМ «Стрела». Эти работы назывались производственными и были секретными. Тем не менее не запрещалось заниматься и «чистой математикой», что прослеживается по опубликованным работам самого К. И. Бабенко.

Введенская также не оставляла тематику своей диссертации. В 1961 году она построила контрпример [3] к некоторой гипотезе, высказанной И. М. Гельфандом относительно квазилинейных гиперболических систем в его известной статье [4]. В этой и параллельно опубликованных работах С. К. Годунова и В. Ф. Дьяченко были построены контрпримеры к некоторым гипотезам о возможности переноса теории с одного уравнения на системы. В отличие от современных работ по гиперболизации уравнений, связанных с параллелизацией алгоритмов, основанных на явных схемах, там речь шла о сглаживании решений с помощью параболизации.

Свойствам параболических систем посвящена ее работа [5], а в 1971 году вышла статья [6], посвященная зависимости гладкости решения вырожденного параболического уравнения от размеров области. Заметим здесь, что Никиту Дмитриевну отличали широта математических интересов и поразительное трудолюбие. Это вместе с её коммуникабельностью приводило к тому, что она продолжала исследования по прежним темам, легко включалась в работы по новым для себя задачам и вела очень активную математическую жизнь.

Конечно же, в институте, в котором решались прикладные задачи с использованием вычислительных машин, она занималась и численными методами. «Введением» в вычислительную математику для Введенской явилась задача о способах ускорения итерационных методов наименьших квадратов и скорейшего спуска для решения линейных алгебраических систем [7]. Работа была совместной с Э. Э. Шнолем, а в том, что для построения итерационного

процесса второго порядка, оптимального на каждом шаге, была сформулирована экстремальная задача, решение которой выражалась через многочлены Чебышева, можно усмотреть несомненное влияние К. И. Бабенко. В отчете приведены и результаты тестовых расчетов на ЭВМ «Стрела», подтверждающих эффективность предложенных методов. Гораздо позже, вспоминая Э. Э. Шноля, Никита Дмитриевна назвала его своим учителем в вычислительной математике и так характеризовала работу в институте: «Был уже большой опытный материал, стала создаваться теория, так сказать, вычислительной математики. Нас учили, что главное – это понять математическую суть задачи, понять, какой вопрос задается, что надо получить в ответе, какие данные вывести и как их интерпретировать» [8].

Следующей совместной работой Н. Д. Введенской и Э. Э. Шноля стал расчет осесимметричного распределения напряжений в круговом цилиндре [9] (нетипичная для отдела Бабенко задача), отчет по которой датирован 1959 годом. Никита Дмитриевна назвала эту работу своей первой вычислительной задачей [8]. Метод решения этой не совсем стандартной краевой задачи был подсказан Бабенко: соединение разложений искомым функций в ряды Фурье и разностные схемы. В этой сложной задаче, как и в своей диссертации, Н. Д. Введенская проявила себя как мастер аналитических преобразований.

Также вместе с Э. Э. Шнолем в начале 60-х годов была начата работа по расчету пограничного слоя, возникающего при обтекании тел вязким газом. Но Шноль позже отошел от этой тематики, и отчет 1964 года [10] был выпущен уже вместе с Л. Н. Евграфовой, которая программировала и проводила вычислительную работу. Через два года вышла статья [11] по материалам отчета, в которой Никита Дмитриевна пишет, что задача была поставлена автору К. И. Бабенко и Э. Э. Шнолем, а в процессе работы проходили обсуждения с ними. Ею рассматривалась задача об обтекании бесконечного кругового конуса газом, а для численного моделирования течения вблизи обтекаемого тела привлекались уравнения пограничного слоя Прандтля.

Вопрос о моделях обтекания вязким газом заостренных тел актуален и сейчас. А тогда вряд ли имелось представление, что описывают в окрестности вершины конуса уравнения Прандтля. Расчеты автомодельных решений ясно продемонстрировали, что модель не вполне соответствует физической картине явления и в окрестности острия, и на подветренной стороне конуса. Для отыскания автомодельного решения в этой задаче был использован конечно-разностный метод. Расчеты показали, что при малых углах атаки получаются гладкие решения, а при больших – нет. Возникают разрывы первых производных от компонент скорости и от плотности на подветренной стороне конуса.

В конце 1964 года Н. Д. Введенская была избрана по конкурсу на должность старшего научного сотрудника в ИППИ (Институте проблем передачи информации) АН и перешла на работу в этот институт. Но, как математик, глубоко погруженный в разрабатываемую тему, она продолжила

свои исследования по пограничному слою. В 1966 году вышла статья [12], в которой рассматривался трехмерный ламинарный пограничный слой в рамках модели Прандтля, возникающий при стационарном обтекании затупленного конуса под углом атаки. Качественные результаты проведенных расчетов подтвердили, что уравнения Прандтля пригодны для описания течения, но не во всей области пограничного слоя. На подветренной стороне решения становятся негладкими, что противоречит предположениям, при которых эти уравнения выводятся. Моделирование же обтекания газом на основе уравнений Эйлера недостаточно для прикладных задач. Важно учитывать влияние вязкости вблизи тела и на возникновение вихревых структур в следе за обтекаемым телом. Вполне возможно, что эта задача и побудила Введенскую обратиться к уравнениям Навье-Стокса. Примерно с конца 60-х годов она совместно с К. И. Бабенко начала заниматься задачами обтекания тел несжимаемой вязкой жидкостью.

Рассматривается внешняя задача для уравнений Навье-Стокса.

$$(u \cdot \nabla)u + \text{grad } p = \frac{1}{2\lambda} \Delta u$$

$$\text{div } u = 0,$$

где u, p — безразмерные вектор скорости и давления, плотность равна 1, а число Рейнольдса 2λ . Предполагается, что рассматривается обтекание ограниченного тела T с границей S , удовлетворяющей условию Гельдера. За единицу длины принимается $l = \text{diam} T$, а оси направлены так, что $u_\infty = (1, 0, 0)$. Тогда задаются граничные условия на теле и в бесконечно удаленной точке:

$$u|_S = u_0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = u_\infty.$$

Сотрудники отдела К. И. Бабенко вспоминали, что именно Никита Дмитриевна обратила его внимание на работы Р. Финна, Д. Р. Смита, посвященные этой тематике, где были введены «физически осмысленные решения» PR (physically reasonable) задачи обтекания. Для них постулировалось, что в двумерном варианте они удовлетворяют условию $u(x) - u_\infty = O(|x|^{-\alpha})$, $|x| \rightarrow \infty$ для некоторого $\alpha > 1/4$, и для них были получены асимптотики вихря вдали от обтекаемого тела. Как известно [13], развивая результаты этих и ряда других работ выдающихся математиков, К. И. Бабенко получил замечательные результаты о существовании, единственности и бифуркациях стационарных решений задачи обтекания, до сих пор играющие важную роль в этом круге задач.

Совместные работы Н. Д. Введенской с К. И. Бабенко [14-19] посвящены построению алгоритмов для численного исследования задач обтекания. В них

рассматривалась дискретизация задачи о стационарном обтекании кругового цилиндра вязкой жидкостью.

Уже в первой из этих работ, вышедшей в 1969 году, указывались основные сложности задачи, связанные как с общей вычислительной проблемой работы с бездивергентными векторными полями, так и с заданием искусственной внешней границы и краевых условий на ней. Дело в том, что введение искусственной границы вдали от тела порождает второй пространственный масштаб и второе число Рейнольдса, существенно большее первоначального, определяемого через диаметр обтекаемого тела. По этой причине на искусственной границе может возникать резко выраженный паразитический погранслой, влияющий на всю картину течения. Для нахождения стационарных решений ими был разработан вычислительный алгоритм, основанный на двуслойном итерационном методе, типа метода установления, где нелинейные члены были вынесены на нижний слой. Для решения линейной задачи были предложен метод, использующий сочетание элементов проекционного и разностного подходов. Фактически на каждом шаге использовался проектор на пространство бездивергентных векторных полей. Впоследствии они дополнили алгоритм введением асимптотики Озееновского типа в дальнем следе и удачным вариантом постановки мягких граничных условий на внешней границе с помощью дифференциального оператора второго порядка. Эти работы были пионерскими, и их значение невозможно переоценить.

Полученный большой опыт численного решения системы уравнений Навье-Стокса был использован Никитой Дмитриевной при расчете течений жидкости в слоях между вращающимися сферами [20], представляющих большой интерес для проблем астро- и геофизики. Эта работа примечательна тем, что полученные результаты соотносились с результатами экспериментов, проведенных группой И. М. Яворской в Институте механики МГУ. Эти результаты многократно докладывались на международных конференциях и пользуются заслуженной известностью.

В дальнейшем Н. Д. Введенская совместно с Л. Р. Волевичем вернулась к задаче о течении жидкости на сфере в рамках исследования вихревого движения идеальной жидкости на поверхности шара [21-23], моделирующего крупномасштабную динамику атмосферы планет. Речь идет о сверхактуальной задаче динамики ураганов, что в рамках этой теории описывается движением изолированных вихрей на поверхности вращающейся сферы. Эта задача требует глубокого проникновения в самые современные достижения математической физики. Ими была предложена модель движения сингулярных вихрей, основанная на моделировании вращательного движения большим количеством изолированных вихрей и их влиянием на вихрь большей интенсивности. Кроме того, была рассмотрена регуляризация самих уравнений и в соболевских классах была установлена локальная разрешимость задачи Коши о переносе вихря. Математическая теория сингулярных решений

уравнений Эйлера совсем не проста и по настоящее время до конца не разработана. В работах [21-23] численно исследовались как задачи о динамике локализованной завихренности, так и о движении сингулярного вихря. Ими были получены результаты и высказаны гипотезы, остающиеся актуальными и в настоящее время.

В этой задаче, как и во многих других, Никита Дмитриевна не стремилась довести работу до формальной защиты и получения следующей научной степени. Несложно проследить истоки многих дальнейших исследований в области вычислительной гидродинамики в пионерских работах Введенской с соавторами. Она же до конца жизни оставалась верной своим друзьям и безграничному математическому любопытству.

Литература

1. Введенская Н.Д. Применение метода конечных разностей к построению обобщенных решений нелинейных уравнений // Кандидатская диссертация. Москва. 1956. Библиотека Математического института им. В.А.Стеклова РАН.
2. Афендикова Н.Г. Руководитель работ по математическому моделированию в атомном проекте. К 100-летию со дня рождения академика М. В. Келдыша // Вестник РАН, 2021. **91**:2, 100-104.
3. Введенская Н.Д. Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений // Докл. АН СССР, 1961, **136**:3, 532–533.
4. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 1959, **14**:2, 87-158.
5. Введенская Н.Д. Некоторые примеры параболических систем уравнений // УМН, 1961, **16**:5(101), 218–219.
6. Введенская Н.Д. О зависимости гладкости решения вырожденного параболического уравнения от размеров области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**:6, 1453–1461.
7. Введенская Н.Д., Шноль Э.Э. Итерационные методы решения систем. // Научный отчет. 1958. Архив РАН. Ф. 1939. Оп. 2. Д. 25.
8. Московский математик Эммануил Шноль. / Составители Я.Э. Юдович, Е.А. Ермакова, Сыктывкар: Коми республиканская типография, 2022, с. 222-223.
9. Введенская Н.Д., Шноль Э.Э. О численных методах расчета осесимметричного распределения напряжений в круговом цилиндре // Научный отчет. 1959. Архив РАН. Ф. 1939. Оп. 2. Д. 33.
10. Введенская Н.Д., Евграфова Л.Н. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки // Научный отчет. 1964. Архив РАН. Ф. 1939. Оп. 2. Д. 108.

11. Введенская Н.Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**:2, 304–312.
12. Введенская Н.Д. О трехмерном ламинарном пограничном слое на затупленном теле // Механика жидкости и газа, 1966, №5, 36–40.
13. Аптекарев А.И., Афендикова Н.Г. О работах К.И. Бабенко в области механики и прикладной математики // Прикладная математика и механика. 2019, **84**:1, 3–12.
14. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. О стационарном обтекании кругового цилиндра вязкой жидкостью // Препринт ИПМ, 1969, №4.
15. Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M. On stationary flow of viscous fluid past a circular cylinder // Fluid dynamics transactions, 1970, vol. 5, no. 11, pp. 37–49.
16. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. Результаты расчета обтекания бесконечного кругового цилиндра вязкой жидкостью // Препринт ИПМ, 1971, № 38.
17. Бабенко К.И., Введенская Н. Д., Орлова М.Г. Краевая задача для уравнений Навье-Стокса в плоской задаче обтекания // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 1971, № 39.
18. Бабенко К.И., Введенская Н. Д. О численном решении краевой задачи для уравнений Навье-Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, **12**:5, 329–339.
19. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, **15**:1, 183–196.
20. Яворская И.М., Астафьева Н.М, Введенская Н.Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях // Докл. АН СССР, 1978, **241**:1, 52–55.
21. Введенская Н.Д., Волевич Л.Р. Движение идеальной жидкости с локализованной завихренностью на поверхности на вращающейся сферы // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 1984, № 68.
22. Введенская Н.Д., Волевич Л.Р. Расчеты движения изолированного вихря на вращающейся сфере // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 1986, № 77.
23. Введенская Н.Д., Волевич Л.Р. Движение локализованной завихренности на поверхности вращающейся сферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1987, **51**:9, 1000–1003.