



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.В. Ершов, В.А. Фролов,
А.А. Николаев, А.Г. Волобой

**Динамика Ланжевена в
стохастической трассировке
лучей: вычислительные
эксперименты**

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Динамика Ланжевена в стохастической трассировке лучей: вычислительные эксперименты / С.В. Ершов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 65. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-65>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-65>

О р д е н а Л е н и н а
И Н С Т И Т У Т П Р И К Л А Д Н О Й М А Т Е М А Т И К И
и м е н и М . В . К е л д ы ш а
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

С . В . Е р ш о в , В . А . Ф р о л о в , А . А . Н и к о л а е в ,
А . Г . В о л о б о й

Д и н а м и к а Л а н ж е в е н а
в с т о х а с т и ч е с к о й т р а с с и р о в к е
л у ч е й : в ы ч и с л и т е л ь н ы е
э к с п е р и м е н т ы

М о с к в а — 2023

С.В. Ершов, В.А. Фролов, А.А. Николаев, А.Г. Волобой
**Динамика Ланжевена в стохастической трассировке
лучей: вычислительные эксперименты**

Основная вычислительно емкая задача реалистичной компьютерной графики — расчет глобальной освещенности. В работе проводится исследование скорости сходимости расчета освещения при помощи интегрирования методом Монте-Карло на основе уравнения Ланжевена. В статье представлена третья часть работы, в которой описываются проведенные вычислительные эксперименты с различными модификациями метода. На основе анализа результатов сделан вывод: наибольшее значение для сходимости имеет матрица предварительной обработки, которая не требует вычисления градиента функции потенциала. Это позволяет существенно ускорить метод.

Ключевые слова: глобальная освещенность, стохастическая трассировка лучей, марковские цепи, уравнение Ланжевена.

S.V. Ershov, V.A. Frolov, A.A. Nikolaev, A.G. Voloboy
**Langevin dynamics in stochastic ray tracing: computational
experiments**

The main computationally expensive task of realistic computer graphics is the calculation of global illumination. The work investigates the speed of the convergence of lighting simulation using Monte Carlo integration based on the Langevin equation. The paper presents the third part of the study. It describes the computational experiments performed with various modifications of the method. Based on the analysis of the results, it was concluded that the preconditioning matrix, which does not require calculation of the gradient of the potential, has the greatest importance for convergence. This allows one to significantly accelerate calculations.

Key words: global illumination, stochastic ray tracing, Markov chain, Langevin equation.

1 Введение

Современная реалистичная компьютерная графика базируется на физически корректном моделировании распространения света, в основе которого лежит расчет глобальной освещенности. Расчет освещенности описывается уравнением рендеринга [1], ядром которого является интегрирование значений света, приходящего со всех возможных направлений. Большинство решений этой задачи основываются на стохастической (Монте-Карло) трассировке лучей света. Среди них методы Монте-Карло на основе марковских цепей МСМС (Markov Chain Monte Carlo) [2] становятся все более популярными. В МСМС выборки имеют корреляции между собой. Эта особенность позволяет эффективно использовать информацию об областях функции, имеющих высокую значимость. Один из наиболее распространенных вариантов МСМС — это алгоритм Метрополиса-Гастингса [3]. Основная цель всех алгоритмов МСМС заключается в построении распределения выборок, пропорционального произвольной целевой функции.

В работе [4] говорится о перспективности Монте-Карло методов на основе уравнений Гамильтона и Ланжевена, т.к. эти методы обладают лучшей сходимостью при росте размерности пространства интегрирования. Однако эти методы новые, и многие их аспекты, включая вопросы эффективного применения, остаются неисследованными. Это и послужило мотивацией наших исследований, результаты которых изложены в трех препринтах [5–7].

В первой части работы [5] мы описали общие соображения, касающиеся использования уравнения Ланжевена для генерации случайных трасс лучей. Эффективность этого метода существенно повышается при использовании обобщенного уравнения Ланжевена, включающего матрицу предобработки для учета ограничений на ход луча в сцене. Это позволяет траектории двигаться по разрешенным направлениям с большими смещениями, что дает больше независимых выборок, и точность оценки яркости пикселя достигается быстрее. В первой части мы предложили универсальный метод вычисления матрицы предобработки по ограничениям на ход лучей. Все это зави-

сит от выбора фазового пространства, который был подробно описан во второй части работы [6]. Также во второй части был представлен расчет плотности вероятности предложения прямого и обратного перехода для выбранного фазового пространства и разобраны ограничения на вариацию трассы луча.

В данной работе мы представим и проанализируем результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие выводы наших исследований.

2 Модельная сцена

В большинстве случаев зеркальную трассу мутировать нельзя: в ее окрестности нет других зеркальных трасс. Тогда для поверхностей, близких к зеркальным, рельеф функции значимости — это очень маленькая, достаточно изотропная область. Такой простой случай неудачен для изучения работы Монте-Карло трассировки лучей, использующей динамику Ланжевена, с ограничениями из-за BDF (Bidirectional scattering Distribution Function), описывающей оптические свойства объекта или поверхности сцены.

Подобное поведение нарушается в классических телескопах-рефлекторах или рефракторах, когда все лучи из точки «предмета» попадают в одну и ту же точку изображения. Поэтому в качестве тестового примера мы выбрали сцену, где два эллипсоида вращения перенаправляют все лучи точечного источника на виртуальный детектор, который регистрирует свет, приходящий с произвольного направления (по всей сфере).

Другим типичным источником ограничений/связей является прохождение света сквозь малое отверстие. Поэтому мы включили в нашу модельную сцену диафрагму с маленькой круглой дырочкой: свет может достичь детектор только через нее. Этот элемент напоминает использование полевой диафрагмы в телескопах и подзорных трубах.

Получившаяся сцена показана на Рисунке 1. Луч, вышедший из источника, может попасть на детектор прямо, идя вдоль оси слева

направо и образуя таким образом путь из одного сегмента. Однако он также может попасть по трехсегментному пути (первый сегмент: из источника света на поверхность зеркала №1, второй: сквозь диафрагму на поверхность зеркала №2, третий от зеркала №2 на детектор). При наличии диффузной составляющей у поверхности зеркал (то есть если их BDF имеет достаточно широкий лепесток) луч может даже испытать переотражения и достичь детектора через, скажем, 7 сегментов. Однако трасса из трех сегментов присутствует всегда — и когда поверхности идеально зеркальные, и когда они совершенно диффузные. Мы использовали уравнение Ланжевена и алгоритм MALA (Metropolis Adjusted Langevin Algorithm) [8–10] для случая именно трехсегментных трасс.

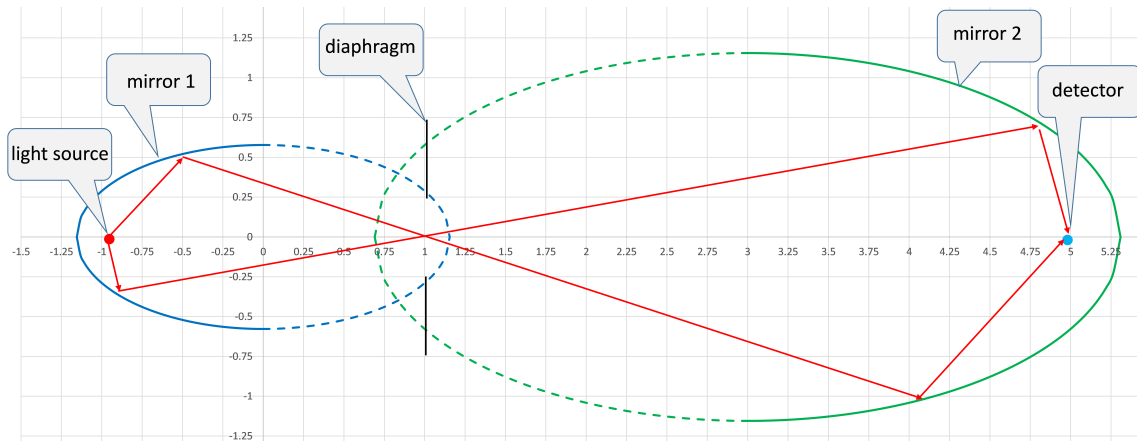


Рис. 1. Сцена, использованная нами для вычислительных экспериментов. Показана проекция в плоскости Oxz , ось z направлена вправо. Синим и зеленым показаны эллиптические зеркала №1 и №2 соответственно. Синий и зеленый пунктиры — те части эллипсоидов, которых в сцене нет. Правый фокус левого эллипсоида и левый фокус правого эллипсоида совпадают. Толстая черная линия — диафрагма с отверстием посередине, ее плоскость проходит через совпадающие фокусы. Точечный источник света находится в отмеченной красной точкой левом фокусе эллипсоида №1, а точечный детектор — в отмеченной синей точкой правом фокусе эллипсоида №2. Красными стрелками показаны возможные трехсегментные трассы света.

Оптические свойства поверхностей эллипсоидов описываются BDF в гауссовой форме:

$$f = C \frac{(\cos \vartheta)^{g_s}}{\sqrt{\cos \sigma \cos \gamma}},$$

где σ — угол падения, γ — угол наблюдения (между направлением рассеяния и нормалью), ϑ — угол между направлением рассеяния и зеркальным отражением падающего луча, g_s — коэффициент глянцевого, C — масштабный множитель. Множитель на самом деле не оказывает влияния на распределение трасс, так как оно *пропорционально* функции значимости, содержащей произведение BDF в узлах трассы, но *нормировано*, т.е. его интеграл равен 1. В формуле появляется несколько неожиданный знаменатель для того, чтобы при узком лепестке интеграл BDF почти не зависел от угла падения. Можно было бы взять просто $\frac{1}{\cos \sigma}$, но тогда BDF не удовлетворял бы Гельмгольцевской обратимости. Поэтому взято симметричное по направлениям падения и рассеяния выражение $\frac{1}{\sqrt{\cos \sigma \cos \gamma}}$; для узкого лепестка $\gamma \approx \sigma$, так что $\frac{1}{\sqrt{\cos \sigma \cos \gamma}} \approx \frac{1}{\cos \sigma}$, зато обратимость соблюдена.

Чем больше g_s , тем более глянцевой является поверхность, становясь зеркальной в пределе $g_s \rightarrow \infty$. При большом g_s BDF приближенно выглядит следующим образом:

$$f \approx C \frac{(1 - \frac{\vartheta^2}{2})^{g_s}}{\sqrt{\cos \sigma \cos \gamma}} \approx C \frac{e^{-\frac{g_s \vartheta^2}{2}}}{\sqrt{\cos \sigma \cos \gamma}},$$

так что BDF почти обращается в ноль при $\vartheta > 3\sqrt{1/g_s}$ (как обычно, множитель «3» возникает из-за «правила 3σ »). Для надежности мы разрешим даже вдвое большие отклонения луча от зеркального направления, положив входящий в ограничения (13), (14) и (16) из работы [6]

$$\max \vartheta = 6\sqrt{1/g_s}.$$

Очевидно, в общем случае для разных поверхностей сцены (у нас их две) получатся разные значения этой величины.

Диафрагма с отверстием радиуса r_a помещена в плоскости, проходящей через совпадающие фокусы эллипсоидов. При очень малом r_a возможны только трассы, проходящие через фокусы эллипсоидов, т.е. те же, что и для зеркальных поверхностей. При большом же r_a и не слишком глянцевых поверхностях становятся возможны новые трассы.

Для ясности и лучшей интерпретируемости результатов экспериментов свойства поверхности обоих эллипсоидов положены одинаковыми $g_{s,1} = g_{s,2} = g_s$. Итак, в нашей сцене есть следующие важные управляющие параметры:

1. Ширина BDF эллипсоидов g_s ;
2. Радиус диафрагмы r_a .

Изменяя их, можно манипулировать *ограничениями*: с возрастанием g_s основную роль начинают играть угловые ограничения из-за BDF, а при $r_a \rightarrow 0$ — пространственные ограничения из-за диафрагмы. При этом в обоих случаях в пределе остаются только зеркальные трассы, проходящие через совпадающие фокусы, т.е. центр диафрагмы. Поэтому распределение при $r_a \rightarrow 0$ и при $g_s \rightarrow \infty$ сходится к одному и тому же пределу.

3 Описание эксперимента

Вычислительные эксперименты были проведены с описанной выше сцены. Использовался изотропный источник. Он и детектор находятся в фокусах эллипсоидов (Рис. 1). Плоскость диафрагмы проходит через совмещенные фокусы. Виртуальный детектор регистрирует плотность углового распределения приходящих в него лучей, т.е. направлений последнего, третьего, сегмента трассы. Плотность пропорциональна числу лучей, приходящихся на элемент телесного угла. Это распределение аксиально симметрично, т.е. зависит только от угла между третьим сегментом трассы и осью Oz.

Расчеты были проделаны для 2x2 комбинаций параметров сцены:

| | большое отверстие | маленькое отверстие |
|--------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| умеренно глянцевая поверхность | $g_s = 100, r_a = 0.25$ | $g_s = 100, r_a = 0.025$ |
| очень глянцевая поверхность | $g_s = 10000, r_a = 0.25$ | $g_s = 100, r_a = 0.025$ |

Функция значимости для нашей трехсегментной трассы — это произведение двух BDF в двух точках отражения и направляющих косинусов. Поэтому она определяется направлениями сегментов. Следовательно, для вычисления градиента потенциала требуются производные направлений сегментов (в том числе последнего) и нормалей по вектору состояния $\mathbf{X} = \{\mathbf{v}_1, \Omega_1\}$ в фазовом пространстве, определенном в [6]. Эти производные можно вычислить аналитически, однако формулы достаточно громоздки.

Для упрощения эксперимента мы применили численное дифференцирование по четырем переменным (2 для смещения \mathbf{v}_1 по двум перпендикулярным к нему направлениям $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$ и 2 для смещения Ω_1 по двум направлениям $\mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1$, перпендикулярным к зеркальному лучу \mathbf{s}_1 , см. Главу 2 из [6]). Для данного эксперимента это допустимо, т.к. современные методы автоматического дифференцирования дают оценку стоимости вычисления градиента $4X$, где X — стоимость вычисления исходной функции [11]. В нашем 4-мерном фазовом пространстве численное дифференцирование стоит столько же, поэтому результаты эксперимента обобщаются на многомерный случай.

При вычислении матриц ограничений нужны производные углов ϑ_1, ϑ_2 и точки пересечения второго сегмента и плоскости диафрагмы \mathbf{x}_a , формулы (15) и (18) из [6]. Они также находились численным дифференцированием по все тем же четырем переменным, образующим $d\mathbf{X}$. Наконец, дивергентный член включает в себя производные $\hat{T}\hat{T}^*$ (раздел 2.2 в [5]). И их мы тоже вычисляли численным дифференцированием.

3.1 Построение трасс

Для каждого набора параметров сцены мы строили первичную разрешенную трассу методом Монте-Карло трассировки лучей. Она не обязательно оказывалась “зеркальной”, т.е. когда все отражения от поверхностей эллипсоидов подчиняются закону зеркального отражения. Эта трасса использовалась как стартовая точка траектории марковской цепи МСМС с использованием динамики Ланжевена. Были также варианты вычислений просто численного интегрирования Ланжевена с малым δt без использования правила Гастингса. Траектория эта считалась для очень большого числа шагов по времени (обычно 10^{10}), и накапливалась гистограмма углового распределения направления последнего сегмента луча. Из-за аксиальной симметрии сцены она зависит только от угла между этим сегментом и осью системы в диапазоне от 0° до 180° . Направление нулевого угла детектора совпадает с направлением на источник света.

Каждые 10000 шагов по накопленной гистограмме вычислялась оценка *плотности* распределения делением частоты посещения ячеек на их площадь и сравнивалась с эталонной плотностью, вычисленной альтернативным методом Монте-Карло. Временной ряд относительного среднеквадратичного отклонения этой плотности от эталонного распределения показывает *скорость сходимости* и достигнутую точность воспроизведения желаемого распределения. На графиках с результатами показано итоговое распределение в конце расчета. Это позволяет увидеть, есть ли отклонение, и если да, то в каких областях.

3.2 Варианты тестируемых МСМС алгоритмов

Построение трасс и расчет, описанный выше, были проведены для нескольких алгоритмов, большинство из которых (варианты 1-6) представляют собой модификации и иногда упрощения Монте-Карло трассировки лучей с использованием динамики Ланжевена MALA (Metropolis Adjusted Langevin Algorithm). Также проводились эксперименты с алгоритмом Метрополиса-Гастингса [12] (уравнение (7) в

[5], что является, по сути, Ланжевеном без сносового члена) и разностной схемой без правила Гастингса. Следующие модификации алгоритмов участвовали в экспериментах:

1. Полный вариант уравнения Ланжевена (уравнение (2) в [5]), градиент, дивергентный член, матрицы преобразования координат (она же матрица предварительной обработки, или *preconditioning matrix*) присутствуют. Адаптивный шаг по времени выбирается на основе уравнения (9) в [5]. В **результатах** этот вариант называется «**full**».
2. Полный вариант уравнения Ланжевена (уравнение (2) в [5]), градиент, дивергентный член, матрицы преобразования присутствуют. Фиксированный шаг по времени $\delta t = 0.01$. В **результатах** этот вариант называется «**full, fix dt**».
3. Усеченный вариант уравнения Ланжевена без дивергентного члена. Адаптивный шаг по времени на основе уравнения (9) в [5]. В **результатах** этот вариант называется «**no div**».
4. Усеченный вариант уравнения Ланжевена без градиента потенциала. Адаптивный шаг по времени на основе уравнения (9) в [5]. В **результатах** этот вариант называется «**no grad**».
5. Усеченный вариант уравнения Ланжевена без градиента и без дивергентного члена, т.е. фактически это алгоритм Метрополиса с броуновской мутацией (уравнение (7) в [5]). Шаг по времени фиксирован, так как при отсутствии сносового члена ограничений на шаг нет (уравнение (9) в [5]). В **результатах** этот вариант называется «**metropolis**».
6. Полный вариант уравнения Ланжевена (уравнение (2) в [5]), градиент и дивергентный член присутствуют, но без матрицы преобразования (*preconditioning matrix*), т.е. для $\hat{T} = 1$. Адаптивный шаг по времени на основе уравнения (9) в [5]. В **результатах** этот вариант называется «**var dt, T=1**».

7. Алгоритм Метрополиса с броуновской мутацией (уравнение (7) в [5]) *и без матрицы преобразования*, т.е. для $\hat{T} = 1$. Шаг по времени фиксирован, так как при отсутствии сносового члена ограничений на шаг нет (уравнение (9) в [5]). В **результатах** этот вариант называется «metropolis, T=1».
8. Разностная схема (уравнение (4) в [5]) без правила Гастингса и без матрицы преобразования (т.е. $\hat{T} = 1$). Поскольку сама по себе она не блокирует выхода траектории в запрещенную область, что в нашем случае означает просто перекрытие трассы луча другими предметами сцены, то все-таки небольшая добавка необходима: если после смещения на $\delta\mathbf{X}$ трасса оказывается невозможной, то положение точки *не меняется*. Это не является полным правилом Гастингса, так как принятие шага — детерминированное решение, и, главное, количественное сравнение плотностей не производится. В **результатах** этот вариант называется «no MALA, T=1».
9. Разностная схема (уравнение (4) в [5]) без правила Гастингса. Также используется дополнение: если после смещения на $\delta\mathbf{X}$ трасса оказывается невозможной, то положение точки не меняется. В **результатах** этот вариант называется «no MALA».

4 Результаты

Мы проанализировали плотность углового распределения направлений последнего сегмента трассы луча, падающего на детектор. Направление нулевого угла — это лучи, приходящие по прямой от источника света. Мы исследовали только случаи трехсегментных трасс. Как показано на рис. 1, эллипсоиды в сцене урезанные, поэтому в некоторой окрестности нулевого угла таких трехсегментных трасс не существует, и здесь мы получаем нулевые значения плотности. На рис. 2 показана эталонная плотность углового распределения и плотность для методов 1-7. Видно, что для этих методов плотность углового распределения $\rho(\alpha)$ почти совпадает с эталонной.

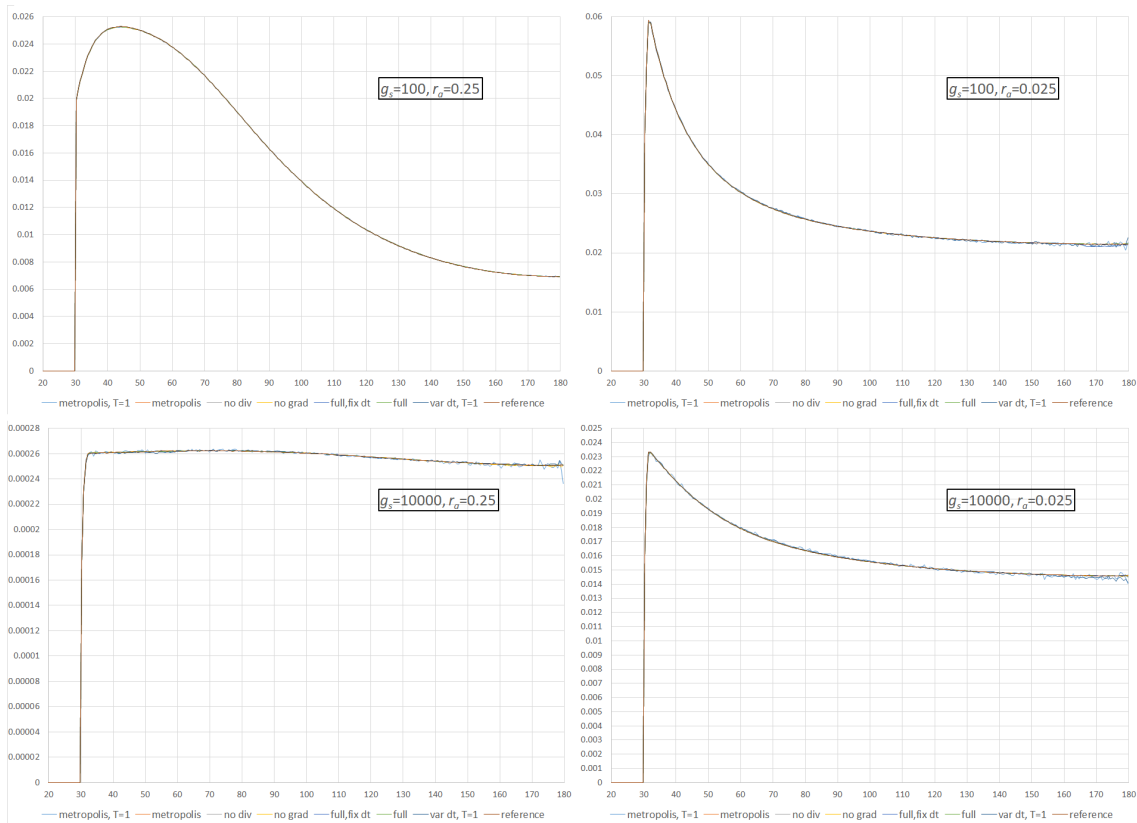


Рис. 2. Плотность углового распределения направлений последнего сегмента для методов 1-7 группы MALA и Metropolis по итогам 10^{10} шагов в сравнении с эталонным распределением «reference».

Чтобы отклонение от эталонного распределения было лучше видно, на рис. 3 оно искусственно увеличено в 10 раз, то есть эталонное распределение $\rho_{\text{ref}}(\alpha)$ показано как есть, а для всех методов 1-7 вместо $\rho(\alpha)$ показано

$$\rho(\alpha) \mapsto \rho_{\text{ref}}(\alpha) + 10 \times (\rho(\alpha) - \rho_{\text{ref}}(\alpha)).$$

Теперь уже видно (рис. 3), что отклонение представляет собой случайные осцилляции, вызванные шумом недостаточной выборки. Выделяется случай $r_a = 0.025$ и фиксированного шага по времени δt («full, fix dt»; показано жирной линией), когда для углов больше 170° мы наблюдаем систематическую ошибку.

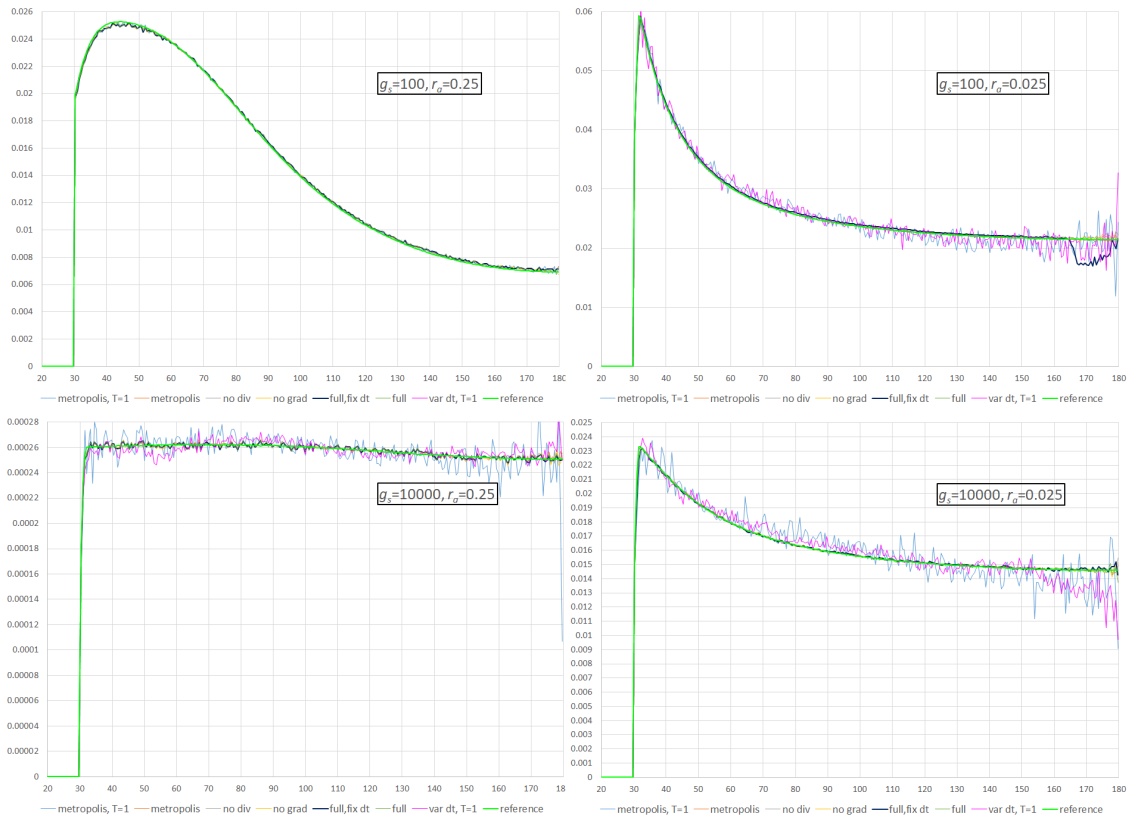


Рис. 3. Плотность углового распределения направлений последнего сегмента для методов 1-7 по итогам 10^{10} шагов с увеличенным в десять раз отклонением от эталонного.

На рис. 4 показана плотность углового распределения направления последнего сегмента $\rho(\alpha)$ для разностных схем без правила Гастингса в сравнении с эталонным $\rho_{\text{ref}}(\alpha)$. Как видно из графиков, использование разностной схемы без правила Гастингса в случае широких и плавных оврагов, что соответствует небольшой глянцеваемости и широкой диафрагме, дает приемлемое приближение (левый верхний график на рис. 4), а в других — очень большое отклонение (остальные графики там же).

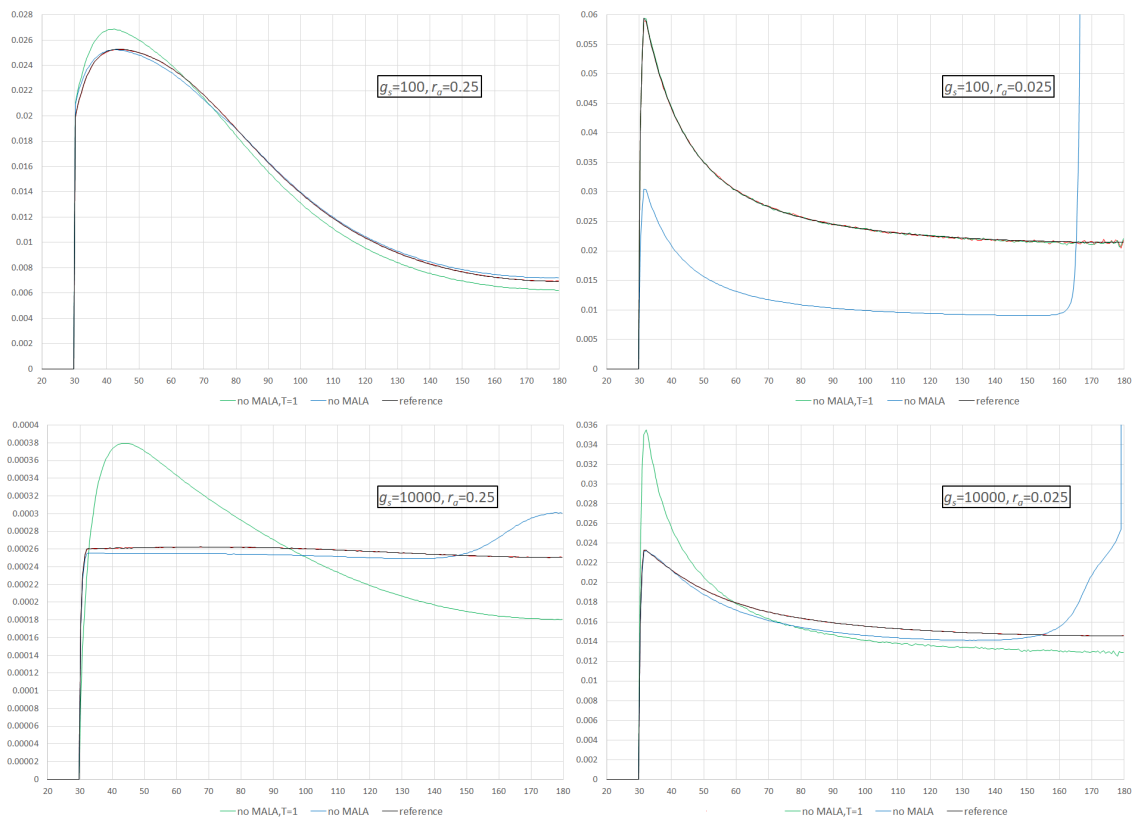


Рис. 4. Плотность углового распределения направления последнего сегмента для разностной схемы без Гастингса (методы 8-9), по итогам 10^{10} шагов в сравнении с эталонным распределением «reference».

На рис. 5 приведена зависимость разности накопленной и эталонной гистограмм от числа сделанных шагов и от затраченного процессорного времени (в секундах) для всех методов, кроме двух последних разностных схем без Гастингса, т.е. для методов 1-7. Заметим, что эталонное распределение было получено *численно* и потому само имеет неточность порядка 0.0003, что дает нижний предел отклонения. Для большинства методов отклонение от эталонного решения со временем снижается. Исключение составляет вариант полного уравнения Ланжевена при фиксированном шаге по времени («full, fix dt»): для варианта $g_s = 100, r_a = 0.025$ его ошибка выходит на насыщение и перестает убывать (рис. 5, верхний ряд). Это показывает, что систематическая ошибка для этого метода для углов больше 170° (рис. 3) не уходит даже с течением времени.

А вот при отбрасывании дивергентного члена можно считать и с фиксированным шагом по времени. Метод «metropolis» не выбирает δt адаптивно, так как в нем нет сносового члена, и отклонение постепенно исчезает. Это связано с тем, что именно дивергентный член может достигать очень больших величин (подчас $O(10^4)$), в то время как градиент — порядка единицы. Учет градиента не дает заметного выигрыша в точности за заданное время, как видно из сравнения поведения «no grad» с «full». Отбрасывание дивергентного члена (его одного или всего сносового члена вообще) улучшает сходимость: примерно та же точность достигается за существенно меньшее *время счета* за счет упрощения вычислений, как видно из сравнения поведения графиков для методов «no div» и «metropolis» с «full». Отбрасывание матрицы преобразования (когда $\hat{T} = 1$) сильно ухудшает сходимость, как видно из сравнения поведения «var dt, T=1» с «full» и «metropolis, T=1» с «metropolis».

При сравнении на рис. 5 правых (зависимость от числа шагов) и левых (зависимость от времени счета) графиков можно увидеть, что при близкой скорости сходимости по числу шагов один метод может выполняться быстрее другого по времени выполнения, что обусловлено его вычислительной сложностью. Это отчетливо видно, например, для методов «var dt, T=1» и «metropolis, T=1» в последнем ряду графиков для $r_a = 0.25$ и $g_s = 10000$.

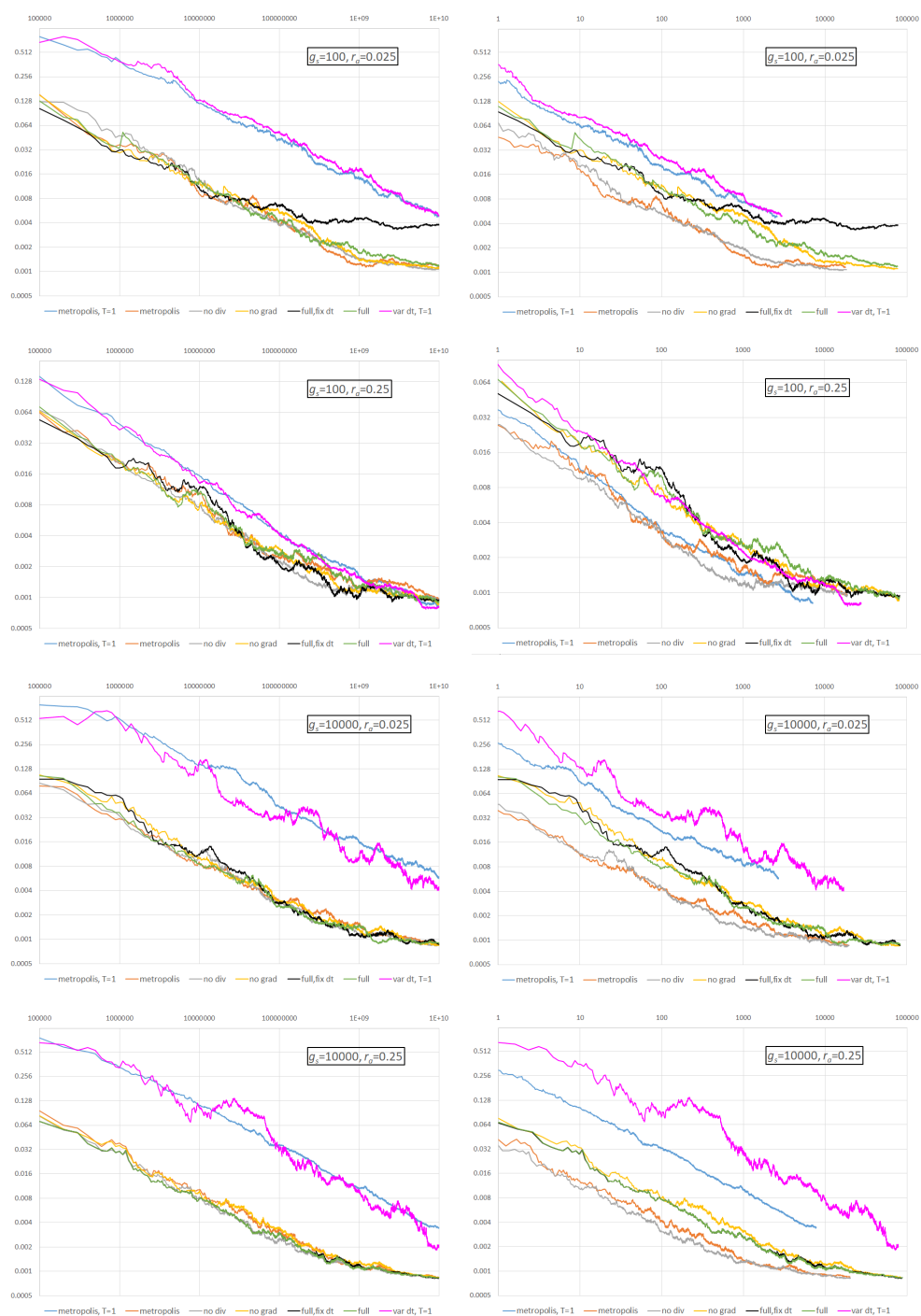


Рис. 5. Зависимость от числа сделанных шагов (слева) и от времени счета в секундах (справа) отклонения накопленного распределения от эталонного для методов 1-7.

На рис. 6 приведена зависимость разности накопленного и эталонного распределения от числа сделанных шагов для разностной схемы без правила Гастингса (методы 8-9). Для сравнения также добавлен график сходимости метода Метрополиса-Гастингса. Как и ожидалось, точность существенно хуже, чем при использовании правила Гастингса. Предельное отклонение достигается быстро и после этого перестает уже убывать. Однако даже на малых временах счета ошибка все равно больше, чем для методов с использованием правила Гастингса, представленных на рис. 5.

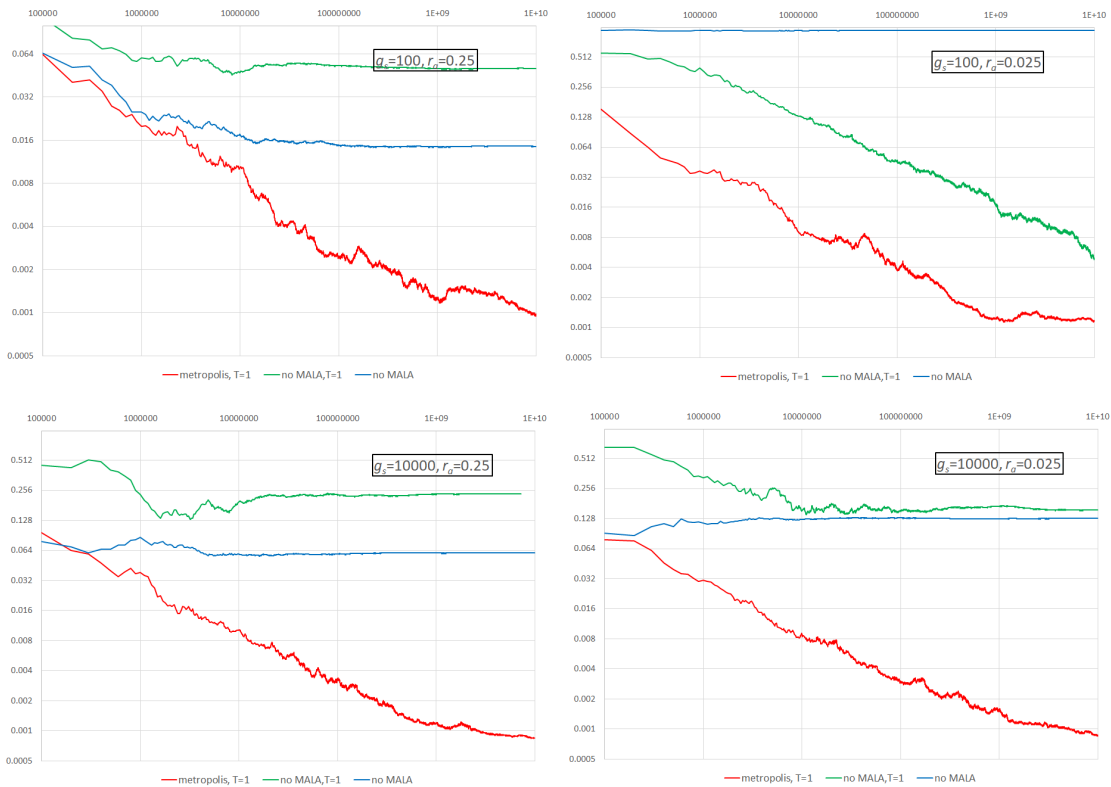


Рис. 6. Зависимость разницы накопленного и эталонного распределения от числа сделанных шагов для разностной схемы без Гастингса.

Так как методы 8 и 9 имеют одну вычислительную сложность, то их графики зависимости от времени счета близки с графиками зависимости от числа сделанных шагов и поэтому здесь не приводятся.

5 Заключение

Стохастическая трассировка лучей с использованием динамики Ланжевена (MALA) выглядит весьма перспективным методом для расчёта глобальной освещенности виртуальной сцены. Однако на сегодняшний день этот метод остается малоисследованным, в то время как его анализ может привести к его оптимизации. Это позволит значительно ускорить вычисления без потери качества получаемого результата.

В двух предыдущих работах [5] и [6] были проанализированы наиболее вычислительно емкие операции этого метода. В данной работе мы провели ряд вычислительных экспериментов со сценой, позволяющей проявить достоинства Монте-Карло трассировки лучей, использующей динамику Ланжевена для генерации случайных световых путей. Были протестированы на точность результата и на скорость сходимости семь модификаций алгоритма MALA, в которых мы последовательно отключали те или иные операции. Это дало нам возможность выделить вклад каждой из них в скорость сходимости метода. Также результаты показали, что все модификации алгоритма MALA дают приемлемую точность.

Кроме того, были проведены эксперименты с двумя модификациями разностных схем без правила Гастингса. Обе модификации показали неудовлетворительную точность и сходимость. Поэтому они не могут быть использованы для моделирования освещенности.

Вычислительные эксперименты позволили сделать следующие выводы:

1. Матрица преобразования (preconditioning matrix) обязательна. Без нее сходимость заметно медленнее.
2. Матрицы преобразования, вычисленные по *ограничениям* на трассу в сцене, без использования потенциала, вполне достаточны и обеспечивают хорошую скорость сходимости.
3. А вот сносовый член можно выбросить, при этом сходимость углового распределения как функция от *числа шагов* остается

примерно той же. Так как при этом вычисления упрощаются, потому что шаг делается заметно быстрее, то сходимость как функция от *времени счета* улучшается.

4. Адаптивный выбор шага по времени δt весьма важен. А при наличии дивергентного члена он просто обязателен, так как градиентный член, как оказалось, в нашей сцене может достигать величин более 10,000, в то время как остальные члены уравнения все порядка 1 и меньше.

Главный же наш вывод оказался весьма неожиданным — наибольший вклад в улучшение сходимости вносит матрица предварительной обработки (preconditioning matrix), которая, в отличие от остальных членов уравнения, не требует вычисления градиента функции потенциала. Это позволяет существенно ускорить метод.

Список литературы

- [1] Kajiya J.T. The rendering equation // Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (ACM SIGGRAPH 86). 1986. 20(4), pp. 143-150.
- [2] Sik M., Krivanek J. Survey of Markov Chain Monte Carlo Methods in Light Transport Simulation // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2018. Т. 26. № 4. pp. 1821-1840.
- [3] Brooks S., Gelman A., Jones G., Meng X. Handbook of Markov Chain Monte Carlo. CRC press. 2011.
- [4] Фролов В.А., Волобой А.Г., Ершов С.В., Галактионов В.А. Современное состояние методов расчета глобальной освещенности в задачах реалистичной компьютерной графики // Труды Института системного программирования РАН. 2021. Т. 33. № 2. С. 7-48. [http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33\(2\)-1](http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33(2)-1)

- [5] Ершов С.В., Фролов В.А., Николаев А.А., Волобой А.Г. Динамика Ланжевена в стохастической трассировке лучей: вычисление матрицы предобработки по ограничениям и выбор шага по времени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 63. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-63>
- [6] Ершов С.В., Фролов В.А., Николаев А.А., Волобой А.Г. Динамика Ланжевена в стохастической трассировке лучей: выбор фазового пространства и ограничения на вариацию трассы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 64. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-64>
- [7] Ершов С.В., Фролов В.А., Николаев А.А., Волобой А.Г. Динамика Ланжевена в стохастической трассировке лучей: вычислительные эксперименты // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 65. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-65>
- [8] Xifara T., Sherlock C., Livingstone S., Byrne S., Girolami M. Langevin diffusions and the Metropolis-adjusted Langevin algorithm // *Statistics & Probability Letters*. 2014. Т. 91. С. 14-19. arXiv preprint arXiv:1309.2983.
- [9] Luan F., Zhao S., Bala K., Gkioulekas I. Langevin Monte Carlo rendering with gradient-based adaptation // *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. 2020. Т. 39. № 4. Article 140. 16 pages.
- [10] Luan F. Forward and inverse rendering with gradient based optimizations. — Ph.D. Thesis. Cornell University. 2021.
- [11] Vassilev V., Vassilev M., Penev A., Moneta L., Ilieva V. Clad — Automatic Differentiation Using Clang and LLVM // *Journal of Physics: Conference Series*. — IOP Publishing. 2015. Т. 608. № 1. С. 012055. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/608/1/012055>
- [12] Veach E., Guibas L.J. Metropolis Light Transport // *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques SIGGRAPH'97*. 1997. pp. 65-76.