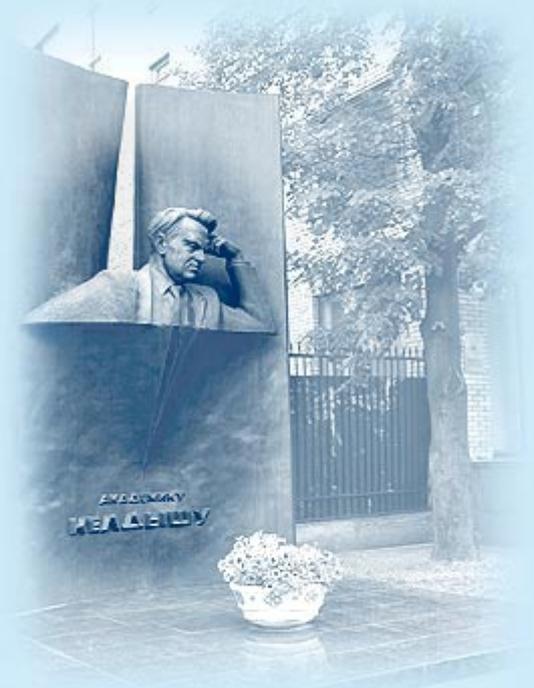




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 68 за 2023 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[К.С. Сулов](#)

Приближенное решение  
задачи двух тел,  
возмущённой периодическим  
ускорением

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сулов К.С. Приближенное решение задачи двух тел, возмущённой периодическим ускорением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 68. 17 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-68>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-68>

О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К.С. Суслов

Приближенное решение задачи двух тел,  
возмущённой периодическим ускорением

Москва — 2023

*К.С. Суслов*

## **Приближенное решение задачи двух тел, возмущённой периодическим ускорением**

В работе предлагается подход к аппроксимации орбитальной динамики в модели возмущённой задачи двух тел, который приводит к системе уравнений, имеющей решение в явном виде. Подход основан на представлении компонент возмущающего ускорения в виде рядов Фурье по эксцентрической долготе с постоянными коэффициентами, интерпретации возмущённой задачи двух тел в терминах модифицированных равноденственных элементов и усреднении правых частей уравнений движения по средней долготе на одном витке. Обнаружено, что влияние возмущающего ускорения на полученные усреднённые уравнения параметризуется конечным набором скалярных параметров, которыми являются коэффициенты разложения в ряды Фурье. Найдены решения усреднённых уравнений в явном виде в случае орбит с малым эксцентриситетом.

*Ключевые слова:* орбитальное движение, малая тяга, метод усреднения

*K.S. Suslov*

## **Approximate solution to the Two-Body problem perturbed by periodic acceleration**

In this paper, author proposes an approach to approximate orbital dynamics in the model of a perturbed Two-Body problem, which leads to a system of equations with a closed-form solution. The approach is based on representing the components of the disturbing acceleration by Fourier series in eccentric longitude with constant coefficients, writing out the equations of the perturbed two-body problem in terms of modified equinoctial elements, and averaging the right-hand sides of the equations of motion over the mean longitude on one orbit. It is discovered that the influence of disturbing acceleration on the resulting averaged equations can be parameterized by a finite set of scalar parameters, which are the coefficients of the Fourier series. Solutions of the averaged equations are found in a closed form in case of orbits with low eccentricity.

*Key words:* orbital motion, low thrust, averaging method

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 19-11-00256.

## 1. Введение

Приближенные аналитические модели орбитального движения космического аппарата (КА) являются полезным инструментом на предварительном этапе проектирования миссии. Они позволяют получить информацию об особенностях динамики в задаче и строить начальные приближения для методов оптимизации, что особенно полезно при проектировании многовитковых перелётов, когда получение оптимальной спиральной траектории КА без достаточно близкого начального приближения практически невозможно.

В данной работе в качестве модели движения КА рассматривается возмущённая задача двух тел. Эта модель широко используется в задачах орбитальной динамики, так как с её помощью удобно описывать движение небесных тел и космических аппаратов. Учёт возмущающих ускорений, связанных с несферичностью центрального тела, притяжением других небесных тел, солнечным радиационным давлением, сопротивлением атмосферы, реактивной тягой и другими эффектами, приводит к тому, что уравнения движения не имеют решения в явном виде. Во многих классических и современных работах были получены аналитические выражения для эволюции орбиты КА в различных частных случаях: возмущающей силе, постоянной по величине и направлению [1, 2, 3], постоянного радиального [4] или непрерывного касательного [5, 6, 7, 8] ускорения.

Однако, если возмущение представлено в более общем виде, решения уравнений движения не могут быть найдены в явном виде, и их необходимо искать с помощью численных или приближенных методов. К примеру, в работах [9, 10, 11] авторами предлагается замена компонент вектора возмущающего ускорения на суммы их тригонометрических рядов Фурье по эксцентриситетной аномалии. Такой подход позволяет аналитически усреднить уравнения движения и параметризовать влияние возмущающего ускорения на среднюю динамику конечным набором коэффициентов разложения [9]. Данное свойство используется в решении задач оптимизации перелётов КА с малой тягой [10, 12, 13]. К сожалению, усреднённые уравнения, полученные в [9], вырождаются в случае нулевых значений эксцентриситета или наклона, так как записаны в терминах классических орбитальных элементов. Эта особенность затрудняет работу с орбитами, близкими к экваториальным или круговым.

Цель данной работы – применение аналогичного подхода для получения приближенного аналитического решения задачи двух тел, возмущённой периодическим по эксцентриситетной долготе ускорением. В разделе 2 представлена математическая формулировка возмущённой задачи двух тел и преобразование Фурье возмущающего ускорения. Каждая из трёх компонент вектора ускорения

представляется в виде суммы тригонометрического ряда Фурье по эксцентрической долготе. В разделе 3 представлена схема усреднения уравнений движения по времени и выведена усреднённая система дифференциальных уравнений. Затем в разделе 4 усреднённые уравнения аппроксимируются в предположении малости эксцентриситета орбиты и величины возмущающего ускорения. Наконец, в разделе 5 представлены некоторые результаты сравнения рассматриваемых приближенных решений с решениями исходных уравнений движения возмущённой задачи двух тел.

## 2. Модель движения

Рассматривается движение космического аппарата под действием гравитационного притяжения точечной массы, расположенной в начале инерциальной системы координат, и некоторого возмущающего ускорения. Уравнения движения запишем в терминах модифицированных равноденственных элементов  $p$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $i_x$ ,  $i_y$  и  $\Lambda$  [14]:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \cdot f_c, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L \cdot f_r - e_y \frac{i_x \sin L - i_y \cos L}{\sigma} \cdot f_n + \right. \\ \left. + \left( \cos L + \frac{e_x + \cos L}{\sigma} \right) \cdot f_c \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L \cdot f_r + e_x \frac{i_x \sin L - i_y \cos L}{\sigma} \cdot f_n + \right. \\ \left. + \left( \sin L + \frac{e_y + \sin L}{\sigma} \right) \cdot f_c \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{di_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \cos L \cdot f_n, \quad (4)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2\sigma} \sin L \cdot f_n, \quad (5)$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\frac{2\sqrt{1-e_x^2-e_y^2}}{\sigma} \cdot f_r + \frac{i_x \sin L - i_y \cos L}{\sigma} \cdot f_n - \right. \\ \left. - \frac{1 - \sqrt{1-e_x^2-e_y^2}}{e_x^2 + e_y^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) (e_y \cos L - e_x \sin L) \cdot f_c \right\}, \quad (6)$$

где  $L = \theta + \omega + \Omega$  – истинная долгота,  $\sigma = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$ . Модифицированные равноденственные элементы связаны с большой полуосью  $a$ , эксцентриситетом  $e$ , наклоном  $i$ , долготой восходящего узла  $\Omega$ , аргументом перицентра  $\omega$  и средней аномалией  $M$  следующим образом [14]:

$$p = a(1 - e^2), \quad (7)$$

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega), \quad (8)$$

$$e_y = e \sin(\omega + \Omega), \quad (9)$$

$$i_x = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad (10)$$

$$i_y = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega, \quad (11)$$

$$\Lambda = M + \omega + \Omega - \int \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt. \quad (12)$$

Возмущающее ускорение представлено тремя своими компонентами  $f_r, f_c, f_n$  в орбитальной системе координат.

В данной работе компоненты возмущающего ускорения считаются периодическими функциями эксцентрической долготы  $F = E + \Omega + \omega$ , где  $E$  – эксцентрическая аномалия. Представим функции  $f_r(F)$ ,  $f_c(F)$  и  $f_n(F)$  в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$\alpha_0^i + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^i \cos kF + \beta_k^i \sin kF), \quad (13)$$

где коэффициенты разложения  $a_0^i, a_k^i, b_k^i$  ( $k \in \mathbf{N}, i \in \{r, c, n\}$ ) определяются вы-

ражениями

$$\begin{aligned}\alpha_0^i &= \int_0^{2\pi} \frac{f_i(F)}{2\pi} dF, \\ \alpha_k^i &= \int_0^{2\pi} \frac{f_i(F) \cos(kF)}{\pi} dF, \\ \beta_k^i &= \int_0^{2\pi} \frac{f_i(F) \sin(kF)}{\pi} dF.\end{aligned}\tag{14}$$

Правые части уравнений движения (1)–(6) зависят от быстро меняющихся угловых переменных  $L$  и  $F$ , что приводит к осцилляциям модифицированных равноденственных элементов. Классическим инструментом избавления от осцилляций в системах дифференциальных уравнений является метод усреднения, применение которого рассматривается в следующем разделе.

### 3. Усреднённые уравнения движения

В данном разделе предлагается схема аналитического усреднения уравнений движения (1)–(6). Усреднение производится с помощью интегрирования по средней долготе  $\lambda$  на одном витке:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{x}}{dt} d\lambda,\tag{15}$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор модифицированных равноденственных элементов

$\mathbf{x} = [p, e_x, e_y, i_x, i_y, \Lambda]^T$ . Воспользовавшись зависимостью средней долготы  $\lambda$  от эксцентрической долготы  $F$

$$\lambda = F + e_y \cos F - e_x \sin F,\tag{16}$$

перепишем выражение (15) в терминах  $F$ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{x}}{dt} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \bar{e}_x \cos F - \bar{e}_y \sin F) \frac{d\mathbf{x}}{dt} dF.\tag{17}$$

Для того чтобы проинтегрировать выражения в (17), правые части уравнений (1)–(5) должны быть переписаны в терминах  $F$  с использованием следующих отношений:

$$\sin L = \frac{(1 - e_x^2 b) \sin F + e_x e_y b \cos F - e_y}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F},\tag{18}$$

$$\cos L = \frac{(1 - e_y^2 b) \cos F + e_x e_y b \sin F - e_x}{1 - e_x \cos F - e_y \sin F},\tag{19}$$

где

$$b = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}. \quad (20)$$

В итоге усредненные уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{\phi^2} \left\{ (2 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2)\alpha_0^c - 2\bar{e}_x\alpha_1^c - 2\bar{e}_y\beta_1^c + \frac{\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}{2}\alpha_2^c + \bar{e}_x\bar{e}_y\beta_2^c \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}^3}{\mu}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_x}{dt} = & \left\{ -\bar{e}_y\alpha_0^r + \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{1-\phi}{2\bar{e}^2}\alpha_1^r + \frac{\phi\bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}{2\bar{e}^2}\beta_1^r - \frac{3\bar{e}_x}{2}\alpha_0^c - \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{(1-\phi)^2}{2\bar{e}^2\phi}\beta_1^c + \right. \\ & + \frac{\bar{e}_y^2(1+\phi^2) + 2\phi\bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2\phi}\alpha_1^c - \bar{e}_x\frac{(\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)\phi + 2\bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2\phi}\alpha_2^c - \bar{e}_y\frac{2\bar{e}_x\phi - \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2\phi}\beta_2^c + \\ & + 3\bar{e}_y\frac{\bar{e}_y\bar{i}_x - \bar{e}_x\bar{i}_y}{2\phi^2}\alpha_0^n + \bar{e}_y\frac{(\bar{e}_x\bar{i}_y - \bar{e}_y\bar{i}_x)(2+\phi)\bar{e}_x + \phi(1+\phi)\bar{i}_y}{2(1+\phi)\phi^2}\alpha_1^n - \\ & - \bar{e}_y\frac{(\bar{e}_y\bar{i}_x - \bar{e}_x\bar{i}_y)(2+\phi)\bar{e}_y + \phi(1+\phi)\bar{i}_x}{2(1+\phi)\phi^2}\beta_1^n - \\ & - \bar{e}_y\frac{(\bar{e}_x\bar{i}_y + \bar{e}_y\bar{i}_x)(1+\phi) - 2\bar{e}_x\bar{e}_y(\bar{e}_x\bar{i}_x + \bar{e}_y\bar{i}_y)}{4(1+\phi)\phi^2}\alpha_2^n + \\ & \left. + \bar{e}_y\frac{\phi(1+\phi)(\bar{e}_x\bar{i}_x - \bar{e}_y\bar{i}_y) + 2\bar{e}_x\bar{e}_y(\bar{e}_y\bar{i}_x - \bar{e}_x\bar{i}_y)}{4(1+\phi)\phi^2}\beta_2^n \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_y}{dt} = & \left\{ \bar{e}_x\alpha_0^r - \frac{\phi\bar{e}_y^2 + \bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2}\alpha_1^r + \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{\phi-1}{2\bar{e}^2}\beta_1^r - \frac{3\bar{e}_y}{2}\alpha_0^c - \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{(1-\phi)^2}{2\bar{e}^2\phi}\alpha_1^c + \right. \\ & + \frac{2\phi\bar{e}_y^2 + (1+\phi^2)\bar{e}_x^2}{2\bar{e}^2\phi}\beta_1^c + \bar{e}_y\frac{(\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2)\phi + 2\bar{e}_x^2}{4\bar{e}^2\phi}\alpha_2^c - \bar{e}_x\frac{2\bar{e}_y\phi + \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}{4\bar{e}^2\phi}\beta_2^c + \\ & + 3\bar{e}_x\frac{\bar{e}_x\bar{i}_y - \bar{e}_y\bar{i}_x}{2\phi^2}\alpha_0^n - \bar{e}_x\frac{(\bar{e}_x\bar{i}_y - \bar{e}_y\bar{i}_x)(2+\phi)\bar{e}_x + \phi(1+\phi)\bar{i}_y}{2(1+\phi)\phi^2}\alpha_1^n + \\ & + \bar{e}_x\frac{(\bar{e}_y\bar{i}_x - \bar{e}_x\bar{i}_y)(2+\phi)\bar{e}_y + \phi(1+\phi)\bar{i}_x}{2(1+\phi)\phi^2}\beta_1^n + \\ & + \bar{e}_x\frac{(\bar{e}_x\bar{i}_y + \bar{e}_y\bar{i}_x)(1+\phi) - 2\bar{e}_x\bar{e}_y(\bar{e}_x\bar{i}_x + \bar{e}_y\bar{i}_y)}{4(1+\phi)\phi^2}\alpha_2^n - \\ & \left. - \bar{e}_x\frac{(\bar{e}_x\bar{i}_x - \bar{e}_y\bar{i}_y)\phi(1+\phi) + 2\bar{e}_x\bar{e}_y(\bar{e}_y\bar{i}_x - \bar{e}_x\bar{i}_y)}{4(1+\phi)\phi^2}\beta_2^n \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_x}{dt} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} & \left\{ -\frac{3\bar{e}_x}{2\phi^2}\alpha_0^n + \frac{\bar{e}_x^2(2 - \phi^2) + \phi\bar{e}_y^2}{\bar{e}^2\phi^2}\alpha_1^n + \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{2 - \phi^2 - \phi}{\bar{e}^2\phi^2}\beta_1^n + \right. \\ & \left. + \bar{e}_x\frac{\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2 - 2\phi\bar{e}_y^2}{2\bar{e}^2\phi^2}\alpha_2^n - \bar{e}_y\frac{2\bar{e}_x^2 - (\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)\phi}{2\bar{e}^2\phi^2}\beta_2^n \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_y}{dt} = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} & \left\{ -\frac{3\bar{e}_y}{2\phi^2}\alpha_0^n + \bar{e}_x\bar{e}_y\frac{2 - \phi - \phi^2}{\bar{e}^2\phi^2}\alpha_1^n + \frac{\bar{e}_y^2(2 - \phi^2) + \bar{e}_x^2\phi}{\bar{e}^2\phi^2}\beta_1^n - \right. \\ & \left. - \bar{e}_y\frac{\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2 - 2\bar{e}_x^2\phi}{2\bar{e}^2\phi^2}\alpha_2^n - \bar{e}_x\frac{2\bar{e}_y^2 + (\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2)\phi}{2\bar{e}^2\phi^2}\beta_2^n \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Lambda}}{dt} = & \left\{ \left(1 - \frac{3}{\phi}\right)\alpha_0^r + \bar{e}_x\frac{4 - \phi - 3\phi^2}{2\bar{e}^2\phi}\alpha_1^r + \bar{e}_y\frac{4 - \phi - 3\phi^2}{2\bar{e}^2\phi}\beta_1^r - \frac{\bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}{2\phi}\alpha_2^r - \right. \\ & - \frac{\bar{e}_x\bar{e}_y}{\phi}\beta_2^r - \bar{e}_y\frac{(1 - \phi^2)}{2\bar{e}^2\phi}\alpha_1^c + \bar{e}_x\frac{(1 - \phi^2)}{2\bar{e}^2\phi}\beta_1^c + \\ & + \frac{\bar{e}_x\bar{e}_y(1 - \phi)}{2\bar{e}^2\phi}\alpha_2^c + \frac{(\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2)(1 - \phi)}{4\bar{e}^2\phi}\beta_2^c + \frac{3(\bar{e}_x\bar{i}_y - \bar{e}_y\bar{i}_x)}{2\phi^2}\alpha_0^n + \\ & + \frac{\bar{e}_x\bar{e}_y\bar{i}_x(1 + b) + \bar{i}_y(b\bar{e}_y^2 - 1 - \bar{e}_x^2)}{2\phi^2}\alpha_1^n - \frac{\bar{e}_x\bar{e}_y\bar{i}_y(1 + b) + \bar{i}_x(b\bar{e}_x^2 - 1 - \bar{e}_y^2)}{2\phi^2}\beta_1^n + \\ & + \frac{\bar{i}_x\bar{e}_y + \bar{i}_y\bar{e}_x - 2b\bar{e}_x\bar{e}_y(\bar{i}_x\bar{e}_x + \bar{i}_y\bar{e}_y)}{4\phi^2}\alpha_2^n - \\ & \left. - \frac{\bar{i}_x\bar{e}_x - \bar{i}_y\bar{e}_y + b(\bar{i}_x\bar{e}_x + \bar{i}_y\bar{e}_y)(\bar{e}_y^2 - \bar{e}_x^2)}{4\phi^2}\beta_2^n \right\} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\bar{e} = \sqrt{\bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2}$ ,  $\phi = \sqrt{1 - \bar{e}^2}$ . Из результатов классических работ по методу усреднения [15, 16] можно сделать вывод, что в безразмерной системе единиц (с единицей длины, равной среднему радиусу Земли  $R_E = 6371$  км, и единицей ускорения, равной ускорению свободного падения на её поверхности  $g_n = 9.8067$  м/с<sup>2</sup>) решение усреднённых уравнений (21)–(26) аппроксимирует решение исходной задачи (1)–(6) с погрешностью порядка  $|\mathbf{f}|$  на промежутке времени порядка  $1/|\mathbf{f}|$ . Заметим также, что влияние возмущающего ускорения на правые части усреднённых уравнений движения параметризуется конечным набором из 15 коэффициентов разложения в ряды Фурье:  $\alpha_0^r, \alpha_1^r, \beta_1^r, \alpha_2^r, \beta_2^r, \alpha_0^c, \alpha_1^c, \beta_1^c, \alpha_2^c, \beta_2^c, \alpha_0^n, \alpha_1^n, \beta_1^n, \alpha_2^n, \beta_2^n$ .

Полученные усреднённые уравнения имеют достаточно громоздкий вид, и их решение необходимо проводить численными методами. В следующей главе показано, что в случае орбит с малым эксцентриситетом и возмущающих ускорений малой величины уравнения можно упростить и решить аналитически.

#### 4. Аппроксимация усреднённых уравнений движения в случае малого эксцентриситета

Перейдём к аппроксимации полученных в предыдущей главе усреднённых уравнений движения. Зависимость ошибки  $|\Delta\bar{\mathbf{x}}|$  решения уравнений (21)–(26) от ошибки  $|\Delta\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}|$  вычисления их правых частей уравнений может быть приближена следующим соотношением:

$$|\Delta\bar{\mathbf{x}}| \approx \left| \Delta\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right| (t - t_0), \quad (27)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени. Таким образом, если необходимо определить значения модифицированных равноденственных элементов с точностью  $|\Delta\bar{\mathbf{x}}| \approx 10^{-3}$  на промежутке времени до нескольких сотен витков ( $t - t_0 = 2\pi \cdot 160 \approx 10^3$ ), достаточно вычислять правые части усреднённых уравнений движения с точностью порядка  $10^{-6}$ . Этот факт позволяет упростить уравнения (21)–(26) в случае, когда эксцентриситет орбиты и амплитуда возмущающего ускорения остаются малыми величинами ( $e \leq 10^{-3}$ ,  $f \leq 10^{-4}$ ). Исходя из принципа, описанного выше, можно отбросить слагаемые, пропорциональные  $\bar{e}_x$  и  $\bar{e}_y$ , из правых частей уравнений (21)–(26) ввиду того, что их величина меньше  $10^{-6}$ . В результате получим уравнения, которые далее будем называть нулевым приближением:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = 2\sqrt{\frac{\bar{p}^3}{\mu}} \alpha_0^c, \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{e}_x}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c \right), \quad (29)$$

$$\frac{d\bar{e}_y}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} \right), \quad (30)$$

$$\frac{d\bar{i}_x}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \alpha_1^n, \quad (31)$$

$$\frac{d\bar{i}_y}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \beta_1^n, \quad (32)$$

$$\frac{d\bar{\Lambda}}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}} \left( -2\alpha_0^r + \frac{\beta_1^n \bar{i}_x - \alpha_1^n \bar{i}_y}{2} \right). \quad (33)$$

Приступим к решению данной системы. Для начала заменим независимую переменную  $t$  на новую переменную  $\tau$ , определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\mu}}. \quad (34)$$

Производную по  $\tau$  обозначим как  $d\mathbf{x}/d\tau \equiv \mathbf{x}'$ . Тогда нулевое приближение запишется в виде

$$\bar{p}' = 2\bar{p} \alpha_0^c, \quad (35)$$

$$\bar{e}'_x = \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c, \quad (36)$$

$$\bar{e}'_y = \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2}, \quad (37)$$

$$\bar{i}'_x = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \alpha_1^n, \quad (38)$$

$$\bar{i}'_y = \frac{1 + \bar{i}_x^2 + \bar{i}_y^2}{4} \beta_1^n, \quad (39)$$

$$\bar{\Lambda}' = -2\alpha_0^r + \frac{\beta_1^n \bar{i}_x - \alpha_1^n \bar{i}_y}{2}. \quad (40)$$

Заметим, что уравнения (35)–(37) отделяются от системы и могут быть решены в явном виде:

$$\bar{p}(\tau) = \bar{p}(\tau_0) \exp(2\alpha_0^c(\tau - \tau_0)), \quad (41)$$

$$\bar{e}_x(\tau) = \bar{e}_x(\tau_0) + \left( \frac{\beta_1^r}{2} + \alpha_1^c \right) (\tau - \tau_0), \quad (42)$$

$$\bar{e}_y(\tau) = \bar{e}_y(\tau_0) + \left( \beta_1^c - \frac{\alpha_1^r}{2} \right) (\tau - \tau_0). \quad (43)$$

В свою очередь, уравнения (38)–(39) обладают первым интегралом  $K = \beta_1^n \bar{i}_x - \alpha_1^n \bar{i}_y$ . Используя его, разобьём (38) и (39) на два независимых уравнения:

$$\frac{d\bar{i}_x}{d\tau} = \frac{\alpha_1^n}{4} \left( 1 + \bar{i}_x^2 + \left( \frac{\beta_1^n \bar{i}_x - K}{\alpha_1^n} \right)^2 \right), \quad (44)$$

$$\frac{d\bar{i}_y}{d\tau} = \frac{\beta_1^n}{4} \left( 1 + \bar{i}_y^2 + \left( \frac{\alpha_1^n \bar{i}_y + K}{\beta_1^n} \right)^2 \right), \quad (45)$$

которые решим независимо. Если  $\alpha_1^n$  и  $\beta_1^n$  одновременно не равны нулю, решение системы (45) следующее:

$$\bar{i}_x(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left( \alpha_1^n \rho \operatorname{tg} \left( \gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) + \beta_1^n K \right), \quad (46)$$

$$\bar{i}_y(\tau) = \frac{1}{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2} \left( \beta_1^n \rho \operatorname{tg} \left( \gamma + \frac{\rho}{4}(\tau - \tau_0) \right) - \alpha_1^n K \right), \quad (47)$$

где

$$\rho = \sqrt{(\alpha_1^n)^2 + (\beta_1^n)^2 + K^2}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha_1^n \bar{i}_x(\tau_0) + \beta_1^n \bar{i}_y(\tau_0)}{\rho} \right). \quad (48)$$

Если  $\alpha_1^n = \beta_1^n = 0$ , значения  $\bar{i}_x$  и  $\bar{i}_y$  будут постоянными. И, наконец, решение уравнения (40) имеет вид

$$\bar{\Lambda}(\tau) = \bar{\Lambda}(\tau_0) + \frac{K - 4\alpha_0^r}{2}(\tau - \tau_0). \quad (49)$$

Решение уравнения на  $\tau$  получаем из (34) и (41):

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau(t_0) - \frac{1}{\alpha_0^c} \ln \left( 1 - \alpha_0^c \sqrt{\frac{\bar{p}(t_0)}{\mu}}(t - t_0) \right), & \alpha_0^c \neq 0; \\ \tau(t_0) + \sqrt{\frac{\bar{p}(t_0)}{\mu}}(t - t_0), & \alpha_0^c = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Как видим, нулевое приближение усреднённых уравнений движения имеет решение в явном виде, что позволяет найти значения модифицированных равноденственных элементов орбиты без использования численного интегрирования.

## 5. Сравнение приближенных решений с решениями неусреднённой задачи

В данной главе представлено несколько примеров, показывающих применимость полученных приближенных выражений (21)–(26) и (41)–(50). Во-первых, рассмотрим поведение высокоэллиптической орбиты под действием возмущения большой амплитуды. В качестве начальных значений модифицированных равноденственных элементов выбраны  $p_0 = 20000$  км,  $e_0 = 0.1$ ,  $i_0 = 51.6^\circ$ ,  $\Omega_0 = 45^\circ$  и  $\omega_0 = 45^\circ$ . Коэффициенты разложения выбраны случайно в диапазоне от  $-10$  до  $10$  мм/с<sup>2</sup>. Время моделирования соответствует 50 оборотам вокруг Земли. Сравнение решения неусреднённой задачи с решением усреднённых уравнений представлено на рисунке 1. Оба решения получены численным интегрированием уравнений (1)–(6) и (21)–(26) соответственно с помощью метода Рунге–Кутты порядка 5(4) с относительной и абсолютной точностью  $10^{-12}$ .

В качестве второго примера рассмотрим манёвр с использованием малой тяги вблизи геостационарной орбиты:  $p_0 = 42164$  км,  $e_0 = 0$  и  $i_0 = 0^\circ$ . Управляющее ускорение представлено 15 коэффициентами разложения в ряды Фурье, случайно взятыми в диапазоне от  $-0.1$  до  $0.1$  мм/с<sup>2</sup>. Время моделирования соответствует 50 оборотам вокруг Земли. Рисунок 2 демонстрирует эволюцию модифицированных равноденственных элементов, полученную из неусреднённой динамики и нулевого приближения усреднённых уравнений. Чтобы получить решение неусреднённой задачи, уравнения (1)–(6) были проинтегрированы численно методом Рунге–Кутты порядка 5(4) с абсолютной и относительной точностью  $10^{-12}$ . Нулевое приближение было вычислено явно с помощью выражений (41)–(43) и (46)–(50).

Из рисунков 1 и 2 можно сделать вывод, что в рассмотренных примерах приближенные решения аппроксимируют решения исходных уравнений с необходимой точностью  $|\Delta \mathbf{x}| \approx 10^{-3}$ : в случае высокоэллиптической орбиты  $|\Delta \mathbf{x}| \leq 5 \cdot 10^{-3}$ , а в случае геостационарной орбиты  $|\Delta \mathbf{x}| \leq 3 \cdot 10^{-5}$ . Таким образом, усреднённые уравнения и их приближенное решение в явном виде с высокой точностью отображают среднюю динамику орбиты КА в неусреднённой модели, отбрасывая быстро осциллирующую составляющую её эволюции.

## 6. Заключение

В данной работе был предложен новый подход к аппроксимации орбитальной динамики при возмущениях малой величины. Правые части уравнений движения были усреднены по времени, что позволило параметризовать влияние возмущения на усреднённую динамику 15 параметрами, которые являются коэффициентами разложения возмущения в тригонометрические ряды Фурье. В случае малого эксцентриситета усредненная динамика может быть аппроксимирована более простыми уравнениями, которые, как было показано, имеют решение в явном виде. Показано, что как полные усредненные уравнения, так и их аппроксимации описывают среднюю эволюцию различных орбит на десятках витков с погрешностью менее  $|\Delta \mathbf{x}| \approx 10^{-3}$ .

В слабо возмущённой задаче орбитального движения вековой дрейф элементов орбиты невелик в течение некоторого конечного интервала времени. В этом случае возмущающее ускорение, являющееся функцией вектора состояния КА, можно аппроксимировать функцией с постоянным спектром. Таким образом, представленная методика аппроксимации усреднённых уравнений движения может быть применима к широкому спектру задач возмущённой орбитальной динамики, включая как анализ эффектов естественных возмущений, так и оптимизацию перелётов с малой тягой.

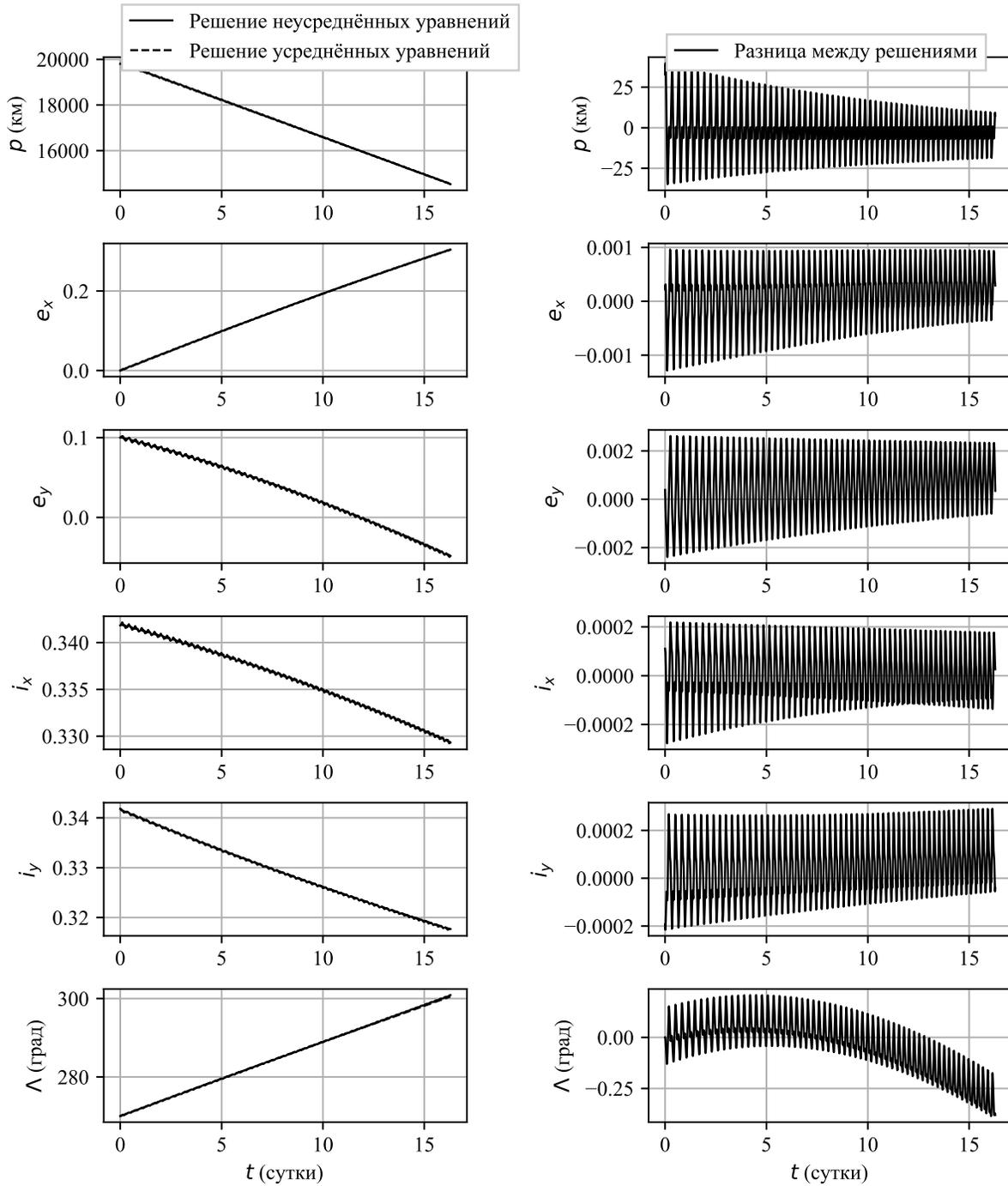


Рис. 1. Сравнение решений неусреднённых и усреднённых уравнений движения при моделировании эволюции высокоэллиптической орбиты

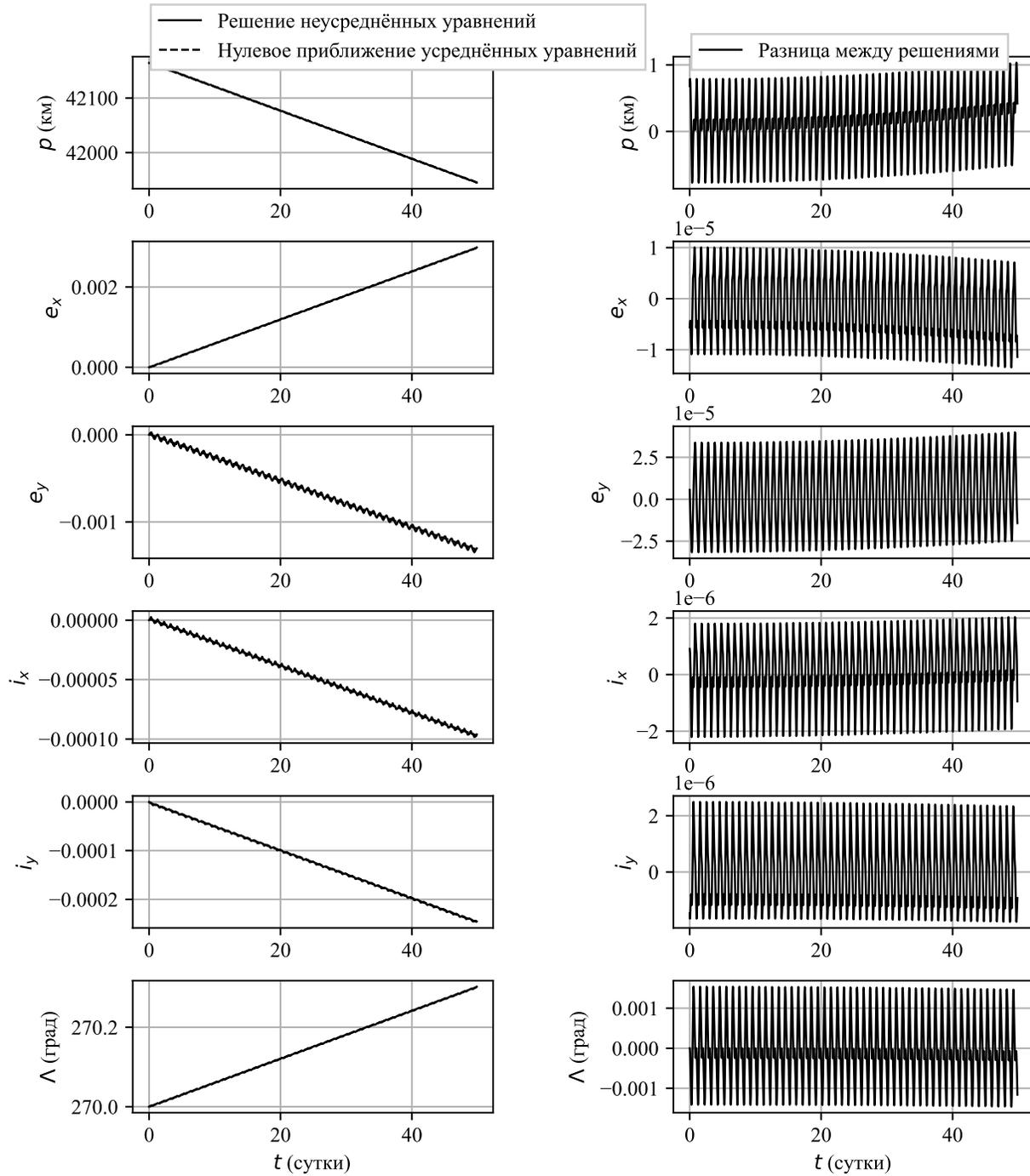


Рис. 2. Сравнение неусреднённой эволюции и нулевого приближения при моделировании динамики в окрестности геостационарной орбиты

## 7. Список литературы

- [1] Biscani F., Izzo D. The Stark problem in the Weierstrassian formalism // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. 439(1), pp. 810–822, <https://doi.org/10.1093/mnras/stt2501>.
- [2] Dankowicz H. Some special orbits in the two-body problem with radiation pressure // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. 58, pp. 353–370, <https://doi.org/10.1007/BF00692010>.
- [3] Zuiani F., Vasile M. Extended analytical formulas for the perturbed Keplerian motion under a constant control acceleration // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2015. 121, pp. 275–300, <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9600-5>.
- [4] Izzo D., Biscani F. Explicit Solution to the Constant Radial Acceleration Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. 38(4), pp. 733–739, <https://doi.org/10.2514/1.G000116>.
- [5] Охоцимский Д.Е. Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космические исследования. 1964. 2(6), с. 817–842, <https://istina.msu.ru/publications/article/64660208/>.
- [6] Bombardelli C., Baù G. Asymptotic solution for the two-body problem with constant tangential thrust acceleration // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. 110, pp. 239–256, <https://doi.org/10.1007/s10569-011-9353-3>.
- [7] Евтушенко Ю.Г. Влияние касательного ускорения на движение спутника // Прикладная математика и механика. 1966. 30(3), с. 594–598, [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90109-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90109-8).
- [8] Curzi G., Modeninititle D. Analytic solution for perturbed Keplerian motion under small acceleration using averaging theory // Advances in Space Research. 2022. 72(7), pp. 2445–2459, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.10.007>.
- [9] Hudson J.S., Scheeres D.J. Reduction of low-thrust continuous controls for trajectory dynamics // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009. 32(3), pp. 780–787, <https://doi.org/10.2514/1.40619>.

- [10] Hudson J.S., Scheeres, D.J. Orbital targeting using reduced eccentric anomaly low-thrust coefficients // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2011. 34(3), pp. 820–831, <https://doi.org/10.2514/1.51336>.
- [11] Hudson J.S., Scheeres, D.J. Fourier Coefficient Selection for Low-Thrust Control Shaping // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. 36(6), pp. 1783–1786, <https://doi.org/10.2514/1.58737>.
- [12] das Chagas Carvalho F., da Silva Fernandes S., de Moraes R.V. A numerical study for optimal low-thrust limited power transfers between coplanar orbits with small eccentricities // *Comp. Appl. Math*. 2016. 35, pp. 907–936, <https://doi.org/10.1007/s40314-016-0325-9>.
- [13] Nie T., Gurfil P. Resonant Control of Satellite Orbits // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2021. 44(12), pp. 2126–2142, <https://doi.org/10.2514/1.G006040>.
- [14] Walker M.J.H., Ireland B., Owens J. A set of modified equinoctial orbit elements // *Celestial mechanics*. 1985. 36(4), pp. 409–419, <https://doi.org/10.1007/BF01227493>.
- [15] Волосов В.М. О методе усреднения // Доклад Академии Наук. 1961. 137(1), с. 21–24, <https://www.mathnet.ru/links/44db4ba4fae72a2995a1cbfd9c7b42aa/dan24690.pdf>.
- [16] Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. 1962. 17(6), с. 3–126, <https://doi.org/10.1070/RM1962v017n06ABEH001130>.

## Оглавление

1. Введение . . . . .	3
2. Модель движения . . . . .	4
3. Усреднённые уравнения движения . . . . .	6
4. Аппроксимация усреднённых уравнений движения в случае малого эксцентриситета . . . . .	9
5. Сравнение приближенных решений с решениями неусреднённой задачи . . . . .	11
6. Заключение . . . . .	12
7. Список литературы . . . . .	15