



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.А. Бочев, В.Т. Жуков

Экспоненциальная и неявная
схемы Эйлера для решения
нелинейных задач
теплопроводности

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бочев М.А., Жуков В.Т. Экспоненциальная и неявная схемы Эйлера для решения нелинейных задач теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 69. 16 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-69>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-69>

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук**

М.А. Бочев, В.Т. Жуков

**Экспоненциальная и неявная схемы Эйлера
для решения нелинейных задач теплопроводности**

Москва — 2023

Бочев М.А., Жуков В.Т.

Экспоненциальная и неявная схемы Эйлера для решения нелинейных задач теплопроводности

Для решения нелинейных задач теплопроводности предлагается вариант нелинейной экспоненциальной схемы Эйлера. Метод основан на нелинейных итерациях, где на каждой итерации решается линейная задача Коши. Предложенный метод сравнивается с неявным методом Эйлера (чисто неявной схемой) в комбинации со специальными нелинейными итерациями. Показано, что оба метода обладают свойствами монотонности и ограниченности решения. Получены условия сходимости нелинейных итераций в обоих методах. Для обеих схем представлены результаты численных тестов. Предложенный нелинейный экспоненциальный метод Эйлера реализован на основе полиномиальных крыловских подпространств и, таким образом, является явной схемой (требует только вычисления матрично-векторных умножений).

Ключевые слова: нелинейные уравнения теплопроводности, экспоненциальное интегрирование по времени, матричная экспонента, подпространства Крылова

Mikhail A. Botchev, Victor T. Zhukov

Exponential Euler and backward Euler methods for nonlinear heat conduction problems

In this paper a variant of nonlinear exponential Euler scheme is proposed for solving nonlinear heat conduction problems. The method is based on nonlinear iterations where at each iteration a linear initial-value problem has to be solved. We compare this method to the backward Euler method combined with nonlinear iterations. For both methods we show monotonicity and boundedness of the solutions and give sufficient conditions for convergence of the nonlinear iterations. Numerical tests are presented to examine performance of the two schemes. The presented exponential Euler scheme is implemented based on restarted Krylov subspace methods and, hence, is essentially explicit (involves only matrix-vector products).

Key words: nonlinear heat conduction, exponential time integration, matrix exponential, Krylov subspace methods

Оглавление

1	Постановка задачи	3
2	Методы решения	4
3	Численные тесты	12
4	Выводы и перспективы дальнейшей работы	15
	Список литературы	16

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая нелинейная задача теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot (k(u)\nabla u(\mathbf{x}, t)) + g(\mathbf{x}, t), \quad u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad u(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = b(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, $t \in [0, T]$, ∇u обозначает градиент $u(\mathbf{x}, t)$, $\nabla \cdot$ — оператор дивергенции, а функции $u^0(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x}, t)$ и $g(\mathbf{x}, t)$ заданы. Кроме того, известно, что

$$k(u) = k_0 u^\sigma, \quad (2)$$

где константы $k_0 > 0$ и $\sigma > 0$ заданы, и

$$b(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad g(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad u^0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Мы предполагаем, что применена дискретизация по пространству, сводящая начально-краевую задачу (1) к задаче Коши

$$y'(t) = -A(y(t))y(t) + g(t), \quad y(0) = v, \quad \text{with } v \geq 0, \quad (4)$$

где для любого вектора $y \in \mathbb{R}^N$ $A(y) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — симметричная неотрицательно определённая матрица с неположительными внедиагональными элементами,

$$a_{ij}(y) \leq 0, \quad i \neq j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \quad (5)$$

В (4) и повсюду в статье мы понимаем векторные неравенства поэлементно, т.е. $v \geq 0$ означает, что все элементы вектора $v \in \mathbb{R}^N$ неотрицательны. Заметим, что функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ в задаче (4) содержит значения функции источника $g(\mathbf{x}, t)$ на сетке и может содержать также вклады дискретизированных краевых условий. Эти вклады обычно имеют вид $-a_{ij}(y)b(\mathbf{x}, t)$ для некоторых $i \neq j$ и $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Учитывая (3),(5), предположим, что значения функции $g(t)$ — неотрицательные векторы в \mathbb{R}^N , т.е.

$$g(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Кроме того, условимся, что $(x, y) = y^T x$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ — это обычное скалярное произведение и, если не оговорено иначе, $\|\cdot\|$ — евклидова векторная или матричная норма. Мы также предполагаем, что задача Коши (4) имеет единственное решение и существует такая константа $L > 0$, что

$$\|A(u) - A(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N. \quad (7)$$

Утверждение 1. Пусть выполняются условия (5) и (6). Тогда решение $y(t)$ задачи Коши (4) поэлементно неотрицательное, т.е.

$$y(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Результат следует из рассмотрения явной схемы Эйлера для задачи (4)

$$y^{n+1} = y^n - \Delta t A(y^n) y^n + g^n,$$

где верхний индекс \cdot^n обозначает номер шага по времени, а $\Delta t > 0$ — длина шага по времени. Запишем это соотношение по-элементно, для каждого элемента y_i^{n+1} , $i = 1, \dots, N$, вектора y^{n+1} :

$$y_i^{n+1} = (1 - \Delta t a_{ii}(y^n)) y_i^n - \sum_{j \neq i} a_{ij}(y^n) y_j^n + g_i^n.$$

Поскольку $1 - \Delta t a_{ii}(y^n) \geq 0$ для достаточно малых $\Delta t > 0$, и в силу (5) и (6) мы получаем $y_i^{n+1} \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Для $\Delta t \rightarrow 0$ это неотрицательное численное решение сходится к единственному решению задачи (4). \square

2. Методы решения

2.1. Неявный метод Эйлера. Рассмотрим неявный метод Эйлера для решения задачи (4):

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} &= -A(y^{n+1}) y^{n+1} + g^{n+1} \Leftrightarrow \\ (I + \Delta t A(y^{n+1})) y^{n+1} &= y^n + \Delta t g^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Так как матрица $A(y)$ — симметричная неотрицательно определённая для любого $y \in \mathbb{R}^N$, имеем

$$\|(I + \Delta t A(y))^{-1}\| = \frac{1}{1 + \Delta t \lambda_{\min}(y)} \leq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad (9)$$

где $\lambda_{\min}(y) \geq 0$ — наименьшее собственное значение матрицы $A(y)$. Следовательно, записывая схему в виде $y^{n+1} = (I + \Delta t A(y^{n+1}))^{-1} (y^n + \Delta t g^{n+1})$ и беря в этом соотношении норму, видим, что схема (8) для любого $\Delta t > 0$ даёт ограниченное решение, т.е.

$$\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\| + \Delta t \|g^{n+1}\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Замечание 1. Для линейных задач указанное свойство ограниченности решения означает устойчивость. Обсуждение устойчивости для нелинейных задач можно найти, например, в [1, гл. I.2.3, I.2.8] и в цитируемых там источниках.

Соотношение (8) представляет собой систему нелинейных уравнений с неизвестным y^{n+1} . Для решения этой системы в [2, прил. 1, гл. 2.11] предложена итерационная схема

$$(I + \Delta t A(y^{(m)})) y^{(m+1)} = y^n + \Delta t g^{n+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где верхний индекс $\cdot^{(m)}$ обозначает номер итерации и обычно берётся начальное приближение $y^{(0)} := y^n$. Как утверждается в [2, прил. 1], схема монотонна для определённой конечно-разностной схемы одномерного уравнения теплопроводности (1). Докажем монотонность и сходимости этих итераций для общих, необязательно одномерных, уравнений теплопроводности.

Утверждение 2. Пусть для решения задачи Коши (4) используется неявная схема Эйлера (8) в сочетании с итерациями (11) с начальным приближением $y^{(0)} = y^n$. Пусть также выполняются условия (5), (6). Тогда на каждом шаге по времени $n = 0, 1, \dots$ итерации (8), (11)

1. монотонны, т.е. для любого шага по шага по времени $\Delta t > 0$ на каждой итерации $m = 0, 1, \dots$

$$y^{(m+1)} \geq 0, \quad (12)$$

2. дают последовательность решений $y^{(m)}$, сходящуюся к решению y^{n+1} системы (8), т.е. $\|y^{n+1} - y^{(m)}\| \rightarrow 0$ для $m \rightarrow \infty$, при условии, что шаг по времени Δt удовлетворяет ограничению

$$0 < \Delta t < \frac{1}{L(\|y^n\| + \Delta t \|g^{n+1}\|)}, \quad (13)$$

3. дают ограниченные решения, т.е. для любого шага по шага по времени $\Delta t > 0$ на каждой итерации $m = 0, 1, \dots$

$$\|y^{(m+1)}\| \leq \|y^n\| + \Delta t \|g^{n+1}\|. \quad (14)$$

Доказательство. Чтобы показать монотонность (12), заметим, что матрица с неположительными внедиагональными элементами является неотрицательно определённой тогда и только тогда, когда она является (возможно вырожденной) M -матрицей [3, гл. 2.5]. Поэтому для любого $\Delta t > 0$ и любого $y \in \mathbb{R}^N$ матрица $I + \Delta t A(y)$ — невырожденная M -матрица, а следовательно, её обратная поэлементно неотрицательна, $(I + \Delta t A(y))^{-1} \geq 0$.

Чтобы показать сходимости итераций (соотношение (11)), вычтем соотношение (11) из (8) и определим вектор ошибки $e^{(m)} \equiv y^{n+1} - y^{(m)}$. Тогда

$$\begin{aligned} (I + \Delta t A(y^{n+1}))y^{n+1} - (I + \Delta t A(y^{(m)}))y^{(m+1)} &= 0, \\ e^{(m+1)} - \Delta t A(y^{(m)})y^{(m+1)} &= -\Delta t A(y^{n+1})y^{n+1}, \end{aligned}$$

и, прибавляя $\Delta t A(y^{(m)})y^{n+1}$ к обеим частям последнего уравнения, получим

$$\begin{aligned} e^{(m+1)} + \Delta t A(y^{(m)})y^{n+1} - \Delta t A(y^{(m)})y^{(m+1)} &= \Delta t A(y^{(m)})y^{n+1} - \Delta t A(y^{n+1})y^{n+1}, \\ (I + \Delta t A(y^{(m)}))e^{(m+1)} &= \Delta t (A(y^{(m)}) - A(y^{n+1}))y^{n+1}. \end{aligned}$$

Учитывая (9), (7) и (10), оценим

$$\begin{aligned} \|e^{(m+1)}\| &\leq \Delta t \|(A(y^{(m)}) - A(y^{n+1}))y^{n+1}\| \leq \Delta t \|A(y^{(m)}) - A(y^{n+1})\| \|y^{n+1}\| \\ &\leq \Delta t L \|e^{(m)}\| \|y^{n+1}\| \leq \Delta t L \|e^{(m)}\| (\|y^n\| + \Delta t \|g^{n+1}\|), \end{aligned}$$

откуда, как нетрудно видеть, при выполнении условия (13) следует соотношение (11).

Оценку (14) на норму решения можно получить так же, как и оценку (10), беря норму в соотношениях (11), (9). \square

На практике итерации (11) останавливаются при условии, что $m > 0$ (т.е. выполнена по крайней мере одна итерация) и невязка решения $y^{(m)}$ по отношению к нелинейной системе (8)

$$r^{(m)} = y^n + \Delta t g^{n+1} - (I + \Delta t A(y^{(m)}))y^{(m)}$$

удовлетворяет оценке

$$\|r^{(m)}\| \leq \text{tol} \cdot \|y^n + \Delta t g^{n+1}\|, \quad (15)$$

где $\text{tol} > 0$ — заданная допустимая точность. Подчеркнём, что матрица в выражении для невязки вычисляется в $y^{(m)}$.

2.2. Нелинейная экспоненциальная эйлерова схема. В этом методе численное решение $y^{n+1} \approx y(t_{n+1})$, являющееся приближением решения $y(t)$ задачи (4) в $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, вычисляется так:

$$\text{решить задачу Коши} \quad \begin{cases} \tilde{y}'(t) = -A(\tilde{y}(t))\tilde{y}(t) + g^{n+1}, \\ \tilde{y}(t_n) = y^n, \quad t \in [t_n, t_n + \Delta t], \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{положить} \quad y^{n+1} := \tilde{y}(t_n + \Delta t),$$

где $g^{n+1} = g(t_{n+1})$, а $y^0 = v$. Мы решаем задачу Коши в (16) итерационно, полагая $\tilde{y}^{(0)}(t) \equiv y^n$, $t \in [t_n, t_n + \Delta t]$, и вычисляя $\tilde{y}^{(m)}(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $t \in [t_n, t_n + \Delta t]$. На каждой итерации $m = 0, 1, \dots$ мы решаем задачу Коши

$$\begin{aligned} (\tilde{y}^{(m+1)}(t))' &= -\tilde{A}_m(t)\tilde{y}^{(m+1)}(t) + g^{n+1}, \quad t \in [t_n, t_n + \Delta t], \\ \tilde{y}^{(m+1)}(t_n) &= y^n, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tilde{A}_m(t) = A(\tilde{y}^{(m)}(t))$. Заметим, что на первой итерации $m = 0$ матрица \tilde{A}_0 постоянна, поскольку начальное приближение $\tilde{y}^{(0)}(t)$ не зависит от времени ($\tilde{y}^{(0)}(t) \equiv y^n$). Метод (16) можно рассматривать как нелинейный вариант экспоненциальной схемы Эйлера, см. [4, формула (1.6)].

Мы контролируем сходимость итераций (17), вычисляя невязку $\tilde{y}^{(m+1)}(t)$ по отношению к системе дифференциальных уравнений $\tilde{y}'(t) = -A(\tilde{y}(t))\tilde{y}(t) + g^{n+1}$:

$$\begin{aligned}\tilde{r}^{(m+1)}(t) &= -A(\tilde{y}^{(m+1)}(t))\tilde{y}^{(m+1)}(t) + g^{n+1} - (\tilde{y}^{(m+1)}(t))' \\ &= -\tilde{A}_{m+1}(t)\tilde{y}^{(m+1)}(t) + g^{n+1} + \tilde{A}_m(t)\tilde{y}^{(m+1)}(t) - g^{n+1} \\ &= [\tilde{A}_m(t) - \tilde{A}_{m+1}(t)]\tilde{y}^{(m+1)}(t).\end{aligned}$$

Итерации (17) останавливаются, как только невязка мала по норме в конечной точке временного шага $t = t_{n+1}$:

$$\|\tilde{r}^{(m+1)}(t_{n+1})\| \leq \text{tol} \cdot \|\tilde{A}_{m+1}(t_{n+1})\tilde{y}^{(m+1)}(t_{n+1})\|, \quad (18)$$

для заданной допустимой точности $\text{tol} > 0$.

Как оказывается на практике, для обычных значений шага по времени Δt решение $\tilde{y}^{(m+1)}(t)$ задачи (17) очень хорошо приближается решением $y^{(m+1)}(t)$ более простой задачи Коши

$$\begin{aligned}(y^{(m+1)}(t))' &= -A_m y^{(m+1)}(t) + g^{n+1}, \quad t \in [t_n, t_n + \Delta t], \\ y^{(m+1)}(t_n) &= y^n,\end{aligned} \quad (19)$$

где матрица вычисляется в $t = t_{n+1}$ и остаётся постоянной, $A_m = A(y^{(m)}(t_{n+1}))$. Как следует из утверждения 3, приводимого ниже, отклонение $\|\tilde{y}^{(m+1)}(t) - y^{(m+1)}(t)\|$ между решениями задач (17) и (19) легко оценивается и вычисляется на практике. Чтобы доказать это, сначала введём целую функцию

$$\varphi(z) \equiv \frac{e^z - 1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

где положим $\varphi(0) = 1$, и сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. [1, гл. I.2.3] *Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами*

$$y'(t) = -A(t)y(t) + g(t).$$

Пусть существует такая константа $\omega \in \mathbb{R}$, что для матричной экспоненты $\exp(-sA(s))$ выполняется $\|\exp(-sA(s))\| \leq e^{-s\omega}$, $s \in [0, T]$. Тогда

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq e^{-t\omega}\|y(0)\| + \int_0^t e^{-(t-s)\omega}\|g(s)\|ds \\ &\leq e^{-t\omega}\|y(0)\| + t\varphi(-t\omega) \max_{s \in [0, t]}\|g(s)\|, \quad t \in [0, T].\end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Смотрите последнее соотношение в [1, гл. I.2.3]. \square

Заметим, что оценка $\|\exp(-sA(s))\| \leq e^{-s\omega}$, $s \in [0, T]$, выполняется для симметричных матриц $A(s)$, если ω — нижняя граница минимальных собственных значений матриц $A(s)$, см., например, [5, гл. 1.5],[1, гл. I.2]. Кроме того, для $t \geq 0$

$$t\varphi(-t\omega) = \begin{cases} t, & \omega = 0, \\ \frac{1 - e^{-t\omega}}{\omega}, & \omega > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Теперь докажем утверждение о близости решений задач (17) и (19).

Утверждение 3. На каждом шаге по времени $n = 0, 1, \dots$ и для всех итераций $m = 0, 1, \dots$ для решения $\tilde{y}^{(m+1)}(t)$ задачи (17) и решения $y^{(m+1)}(t)$ задачи (19) выполняется

$$\begin{aligned} & \|\tilde{y}^{(m+1)}(t_n + \tau) - y^{(m+1)}(t_n + \tau)\| \leq \\ & \leq \tau\varphi(-\tau\omega) \max_{s \in [t_n, t_n + \tau]} \left\| \left[A_m - \tilde{A}_m(s) \right] y^{(m+1)}(s) \right\|, \quad \tau \in [0, \Delta t], \end{aligned} \quad (23)$$

где константа ω такая, что

$$\min_{(x,x)=1, x \in \mathbb{R}^N} (\tilde{A}_m(t)x, x) \geq \omega \geq 0, \quad \forall t \in [t_n, t_n + \Delta t]. \quad (24)$$

Заметим, что $\omega \geq 0$ в силу предположения, что $A(y)$ неотрицательно определена для всех $y \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство. Очевидно, что для $m = 0$ матрица $\tilde{A}_m(t)$ постоянна и равна A_m , так что задачи Коши (17) и (19) совпадают и оценка (23) выполняется тривиально. Рассмотрим случай $m > 0$. Без потери общности приведём доказательство для первого шага по времени $n = 0$, $t \in [0, \Delta t]$. Подставляя $y^{(m+1)}(t)$ в систему дифференциальных уравнений $(\tilde{y}^{(m+1)}(t))' = -\tilde{A}_m(t)\tilde{y}^{(m+1)}(t) + g^{n+1}$, получим невязку $\tilde{r}(t)$ of $y^{(m+1)}(t)$,

$$\tilde{r}(t) = -\tilde{A}_m(t)y^{(m+1)}(t) + g^{n+1} - (y^{(m+1)}(t))' = \left[A_m - \tilde{A}_m(t) \right] y^{(m+1)}(t),$$

и заметим, что $y^{(m+1)}(t)$ решает возмущённую систему дифференциальных уравнений

$$(y^{(m+1)}(t))' = -\tilde{A}_m(t)y^{(m+1)}(t) + g^{n+1} - \tilde{r}(t), \quad t \in [0, \Delta t].$$

Вычитая это уравнение из системы дифференциальных уравнений (17), получаем задачу Коши для функции ошибки $\tilde{e}(t) = \tilde{y}^{(m+1)}(t) - y^{(m+1)}(t)$:

$$\tilde{e}'(t) = -\tilde{A}_m(t)\tilde{e}(t) + \tilde{r}(t), \quad \tilde{e}(t) = 0, \quad t \in [0, \Delta t]. \quad (25)$$

Условие (24) эквивалентно оценке [5, гл. 1.5],[1, гл. I.2.3]

$$\|\exp(-t\tilde{A}_m(t))\| \leq e^{-t\omega}, \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Применяя оценку (21) к (25), получаем

$$\|\tilde{e}(\tau)\| \leq \tau\varphi(-\tau\omega) \max_{s \in [0, \tau]} \left\| \left[A_m - \tilde{A}_m(s) \right] y^{(m+1)}(s) \right\|, \quad \tau \in [0, \Delta t],$$

а это и есть искомая оценка (23) для первого шага по времени $[0, \Delta t]$. \square

Заметим, что норма ошибки в (23) равна нулю в $t = t_n$, а невязка $\tilde{r}(t)$ равна нулю в $t = t_{n+1}$. Поэтому, чтобы примерно оценить правую часть оценки (23) на практике, мы можем вычислить $(s - t_n) \|[A_m - \tilde{A}_m(s)]y^{(m+1)}(s)\|$ в некоторой точке s между t_n и $t_n + \Delta t$, скажем, в $s = t_n + \Delta t/2$. Для реально используемых шагов по времени $\Delta t > 0$ эта величина часто оказывается пренебрежимо малой. Если это не так, можно уменьшить шаг по времени Δt или решить (19) последовательно на меньших подинтервалах, покрывающих $[t_n, t_n + \Delta t]$, так, что $\tilde{A}_m(t)$ «замораживается» на этих меньших подинтервалах и отклонение $\|\tilde{y}^{(m+1)}(t) - y^{(m+1)}(t)\|$ становится меньше. Как показывает опыт, можно и пренебречь большими значениями $(s - t_n) \|[A_m - \tilde{A}_m(s)]y^{(m+1)}(s)\|$, обычно это приводит только к увеличению числа нелинейных итераций m . В дальнейшем мы предполагаем, что шаг $\Delta t > 0$ выбран так, что норма $\|\tilde{y}^{(m+1)}(t) - y^{(m+1)}(t)\|$ достаточно мала.

Поскольку матрица A_m и функция источника g^{n+1} постоянны в (19), итерации (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$y^{(m+1)}(t_n + \tau) = y^n + \tau\varphi(-\tau A_m)(g^{n+1} - A_m y^n), \quad \tau \in [0, \Delta t]. \quad (27)$$

Здесь $\varphi(-\tau A)$ — это матричная функция определённая функцией φ в (20), см., например, [6, 7]. На практике мы решаем задачу Коши (19), вычисляя $y^{(m+1)}(t_n + \Delta t)$ в (27) методом подпространства Крылова с перезапуском, представленным в [8].

Следующий результат показывает монотонность и сходимость итерационной экспоненциальной эйлеровой схемы (16),(17).

Утверждение 4. Пусть для решения задачи Коши (4) используется нелинейная экспоненциальная схема Эйлера (8) в сочетании с итерациями (11). Пусть также выполняются условия (5),(6),(24). Тогда на каждом шаге по времени $n = 0, 1, \dots$ итерации (8),(11)

1. монотонны, т.е. для любого шага по шага по времени $\Delta t > 0$ на каждой итерации $m = 0, 1, \dots$

$$\tilde{y}^{(m+1)}(t) \geq 0, \quad t \in [t_n, t_n + \Delta t], \quad (28)$$

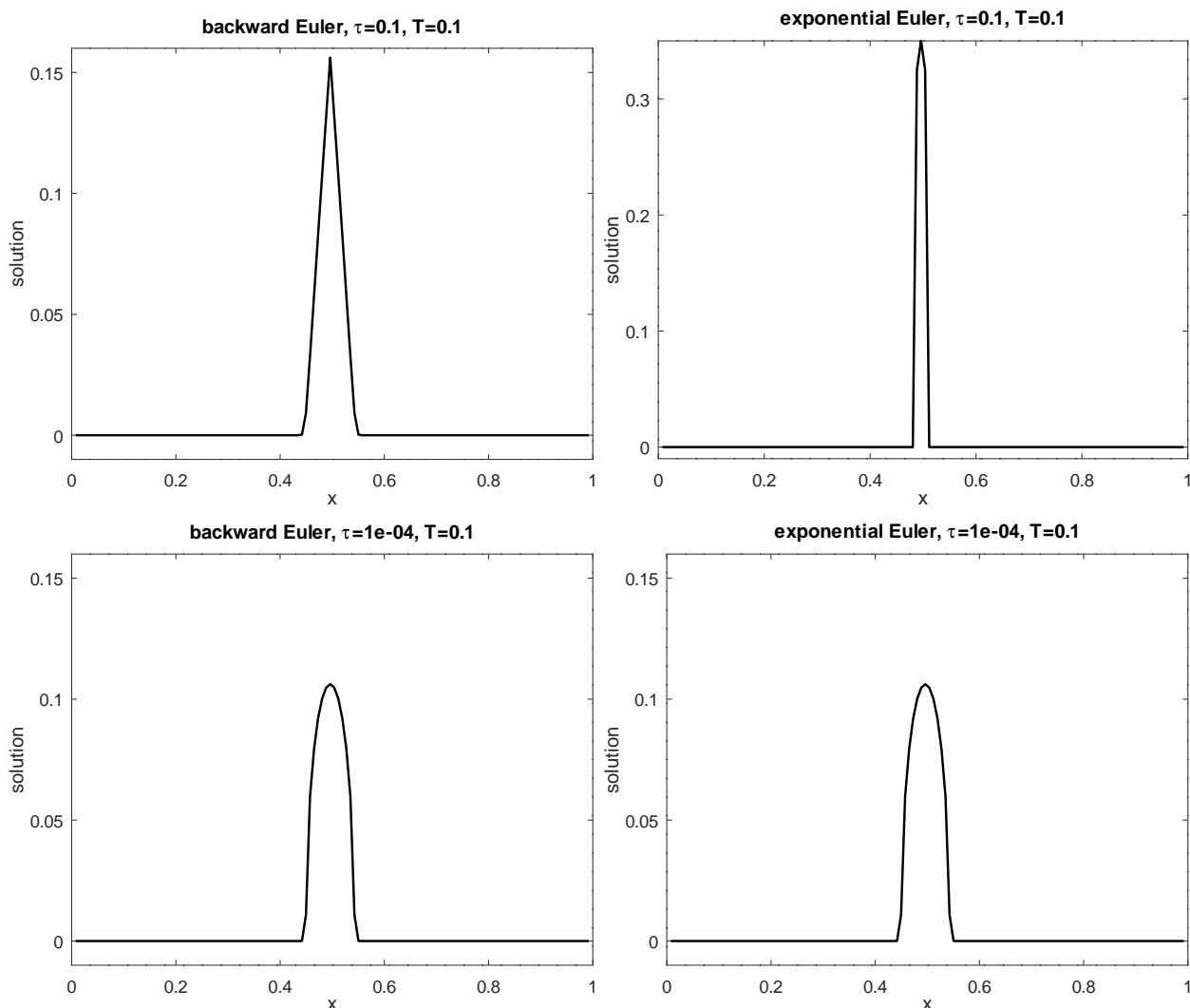


Рис. 1. Численная функция Грина неявной (левые графики) и экспоненциальной (правые графики) схем Эйлера в момент времени $T = 0.1$, вычисленные с шагами по времени $\Delta t = T$ (верхние графики) и $\Delta t = T/1000$ (нижние графики) на однородной пространственной сетке с $N = 128$ узлами

2. дают последовательность решений $\tilde{y}^{(m)}(t)$, сходящуюся к решению $\tilde{y}(t)$ системы (16), т.е. $\max_{s \in [t_n, t_n + \Delta t]} \|\tilde{y}(s) - y^{(m)}(s)\| \rightarrow 0$ для $m \rightarrow \infty$, при условии, что шаг по времени Δt удовлетворяет ограничению

$$0 < \Delta t \varphi(-\Delta t \omega) L \max_{s \in [t_n, t_n + \Delta t]} \|\tilde{y}(s)\| < 1, \quad (29)$$

где функция φ определена в (20), (22), а ω — в (24),

3. дают ограниченные решения, т.е. для любого шага по времени $\Delta t > 0$ на каждой итерации $m = 0, 1, \dots$

$$\|y^{(m+1)}(t_n + \tau)\| \leq e^{-\tau \omega} \|y^n\| + \tau \varphi(-\tau \omega) \|g^{n+1}\|, \quad \tau \in [0, \Delta t]. \quad (30)$$

Доказательство. Не нарушая общности, докажем утверждение для $n = 0$, т.е. для первого интервала по времени $[0, \Delta t]$ ($t_n = 0$). Однако, чтобы ясно видеть связь между выкладками доказательства и доказываемым утверждением, продолжим писать верхние индексы, содержащие n .

Чтобы показать монотонность итераций (17), заметим, что каждое итерационное приближение $\tilde{y}^{(m)}(t)$ является решением задачи Коши (17). Для этой задачи неотрицательность решения устанавливается так же, как в доказательстве утверждения 1.

Для доказательства сходимости итераций вычитаем систему дифференциальных уравнений (17) из системы (16) и, определив функцию ошибки $\epsilon^{(m+1)}(t) \equiv \tilde{y}(t) - y^{(m+1)}(t)$, получаем:

$$\begin{aligned} (\epsilon^{(m+1)}(t))' &= -A(\tilde{y}(t))\tilde{y}(t) + \tilde{A}_m(t)y^{(m+1)}(t), \\ (\epsilon^{(m+1)}(t))' &= -A(\tilde{y}(t))\tilde{y}(t) + \tilde{A}_m(t)y^{(m+1)}(t) - \tilde{A}_m(t)\tilde{y}(t) + \tilde{A}_m(t)\tilde{y}(t), \\ (\epsilon^{(m+1)}(t))' &= -\tilde{A}_m(t)\epsilon^{(m+1)}(t) + \left[\tilde{A}_m(t) - A(\tilde{y}(t)) \right] \tilde{y}(t), \quad t \in [0, \Delta t]. \end{aligned}$$

Применяя к этой системе дифференциальных уравнений оценку (21), учитывая начальное условие $\epsilon^{(m+1)}(0) = 0$ и соотношения (24), (26), оценим

$$\begin{aligned} \|\epsilon^{(m+1)}(t)\| &\leq t\varphi(-t\omega) \max_{s \in [0, t]} \left\| \left[\tilde{A}_m(s) - A(\tilde{y}(s)) \right] \tilde{y}(s) \right\| \\ &= t\varphi(-t\omega) \max_{s \in [0, t]} \left\| \left[A(y^{(m)}(s)) - A(\tilde{y}(s)) \right] \tilde{y}(s) \right\| \\ &\leq t\varphi(-t\omega)L \max_{s \in [0, t]} \underbrace{\|y^{(m)}(s) - \tilde{y}(s)\|}_{\epsilon^{(m)}(s)} \max_{s \in [0, t]} \|\tilde{y}(s)\|, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (31) \end{aligned}$$

где используются определение $\tilde{A}_m(t)$ и свойство (7). Поскольку $t\varphi(-t\omega)$ — монотонно возрастающая функция от t ,

$$\max_{s \in [0, \Delta t]} \|\epsilon^{(m+1)}(s)\| \leq \Delta t\varphi(-\Delta t\omega)L \max_{s \in [0, \Delta t]} \|\epsilon^{(m)}(s)\| \max_{s \in [0, \Delta t]} \|\tilde{y}(s)\|,$$

откуда следует $\max_{s \in [0, \Delta t]} \|\epsilon^{(m+1)}(s)\| < \max_{s \in [0, \Delta t]} \|\epsilon^{(m)}(s)\|$ при условии (29).

Неравенство (30) можно получить, применяя оценку (21) к задаче (17). \square

Замечание 2. Принимая во внимание соотношение (22), мы видим, что условия сходимости (13) и (29) для неявной и экспоненциальной схем Эйлера весьма схожи. Условие сходимости для экспоненциальной схемы Эйлера менее строгое при $\omega > 0$, т.е. для положительно определённых $A(y)$.

3. Численные тесты

3.1. Одномерное уравнение теплопроводности. Этот тест рассмотрен в [2, прил. 1, гл. 2.11]. Решается одномерная задача (1) в области $\Omega = [0, 1]$ с $k_0 = 0.5$, $\sigma = 2$ и точным решением

$$u_{\text{exact}}(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma c}{k_0} (ct - x) \right)^{1/\sigma}, & \text{при } x \leq ct, \\ 0, & \text{при } x > ct, \end{cases} \quad (32)$$

где берётся скорость тепловой волны $c = 1$. Начальное и краевые условия в (1) задаются по точному решению, задача решается для $0 \leq t \leq T = 0.5$. Приводимые ниже значения ошибки вычисляются как

$$\frac{\|y^n - y_{\text{exact}}(T)\|}{\|y_{\text{exact}}(T)\|}, \quad n\Delta t = T, \quad (33)$$

где вектор $y_{\text{exact}}(T)$ содержит сеточные значения функции точного решения в конечный момент времени T . Допустимая точность в (15) и (18) задаётся $\text{tol} = 10^{-2}$, а допустимая точность для вычисления произведений матричной функции φ на вектор берётся равной 10 tol . Взятие более строгих (меньших) допустимых значений для точности не приводит к уменьшению ошибки, так как ошибка определяется главным образом дискретизацией по пространству. Крыловский решатель с перезапуском для вычисления произведений матричной функции φ на вектор применялся с максимальной размерностью подпространства Крылова равной 30 (при этом в большинстве случаев перезапуск не требовался).

Сначала протестируем монотонность обеих схем, оценивая их численные решения для однородных краевых условий Дирихле и вектора начальных условий v с единственной компонентой, равной 1, и прочими компонентами, равными нулю (см. (4)). Решения такой задачи, которые можно рассматривать как численный эквивалент функции Грина, показаны на рис. 1. Очевидно, что как неявной, так и экспоненциальной схемам Эйлера удаётся дать неотрицательные решения в этом тесте.

Теперь рассмотрим результаты обычных запусков для этого теста, где краевые и начальное условия определяются точным решением (32). Численное решение и соответствующая ошибка для экспоненциальной схемы Эйлера показаны на рис. 2.

В таблице 1 для обоих методов на пространственных сетках разного размера показано число нелинейных итераций в зависимости от величины шага по времени. Для каждой сетки в таблице также показана величина $\max_{t \in [0, T]} \|A(y(t))\|_1$. Число матрично-векторных произведений (матвеков) для экспоненциального метода Эйлера совпадает с числом итераций подпространства Крылова, требуемых

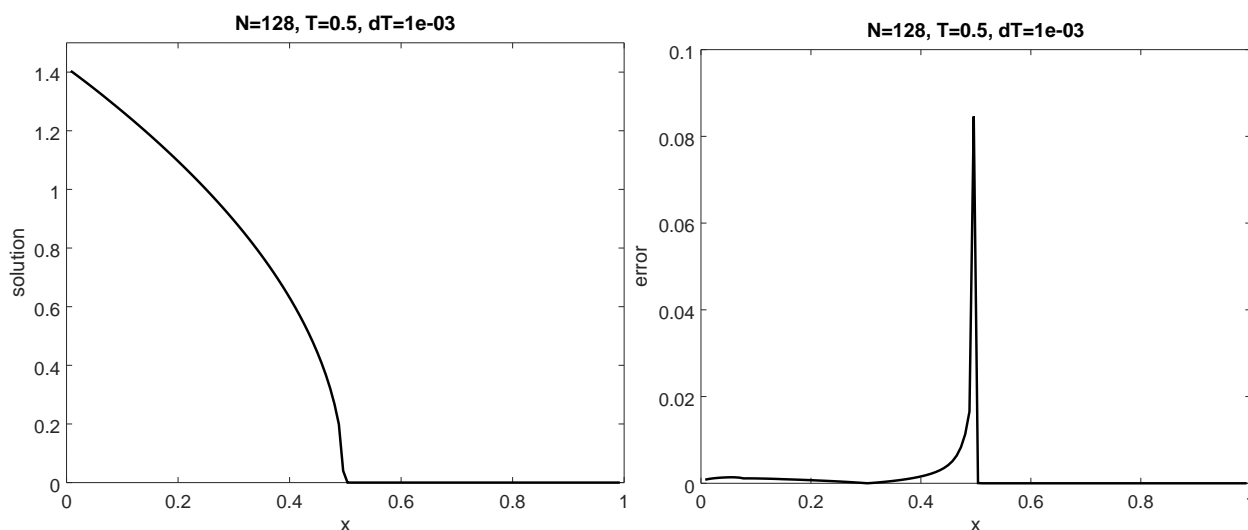


Рис. 2. Решение (левый график) и ошибка (правый график) экспоненциальной схемы Эйлера на пространственной сетке $N = 128$ в момент времени $T = 0.5$ для шага по времени $\Delta t = 10^{-3}$ ($\Delta t \max_{t \in [0, T]} \|A(y(t))\|_1 \approx 65$)

Таблица 1. Одномерное уравнение теплопроводности. Результаты расчётов неявной (НЭ) и экспоненциальной (ЭЭ) схемами Эйлера. Наименьшее число матрично-векторных произведений (матвеков) для обеих схем на каждой сетке подчёркнуто

	НЭ	ЭЭ
Δt	ошибка, итерации (матвеки)	ошибка, итерации (матвеки)
сетка $N = 128, \max_{t \in [0, T]} \ A(y(t))\ _1 \approx 6.5 \cdot 10^4$		
5e-05	4.07e-03, 10000 (35646)	5.26e-03, 10039 (10926)
1e-04	4.49e-03, 5000 (20206)	5.63e-03, 5072 (8053)
5e-04	7.95e-03, 1008 (7098)	9.08e-03, 1118 (4247)
1e-03	1.18e-02, 587 (<u>5102</u>)	1.11e-02, 642 (<u>3473</u>)
сетка $N = 256, \max_{t \in [0, T]} \ A(y(t))\ _1 \approx 2.6 \cdot 10^5$		
5e-05	2.33e-03, 10000 (50130)	3.61e-03, 10073 (20584)
1e-04	2.84e-03, 5000 (32482)	4.66e-03, 5102 (15241)
5e-04	6.65e-03, 1086 (13276)	7.57e-03, 1142 (9318)
1e-03	1.12e-02, 668 (<u>9980</u>)	1.08e-02, 768 (<u>7526</u>)

для вычисления действий (т.е. произведений на вектор) матричной функции φ . В неявном методе Эйлера линейные системы на верхнем слое в итерациях (11) решаются прямым методом для разреженных линейных систем. Указанное для этого метода в таблице число матвектов означает следующее. Решение линейных систем в (11) можно заменить определённым ограниченным числом итераций Чебышёва. При этом число чебышёвских итераций может быть выбрано так, чтобы схема была устойчива (для линейных задач), хотя линейные системы и не решаются точно. Такая конструкция приводит к так называемым явным схемам локальных итераций (ЛИ), которые хорошо зарекомендовали себя для задач теплопроводности [9]. Число матвектов для неявного метода Эйлера, приведённое в таблице 1 в скобках, — это число чебышёвских итераций, которое бы потребовалось вариантом схемы локальных итераций, называемым ЛИ-М, где «М» означает монотонность схемы [9]. Поскольку итерации Чебышёва требуют одного матвекта на итерацию, показанное в таблице число итераций равняется числу матвектов в схеме ЛИ-М. Мы видим, что экспоненциальный метод Эйлера более эффективен по числу требуемых матвектов, чем метод ЛИ-М.

3.2. Двумерное уравнение теплопроводности. В этом тесте задача (1) решается в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, в (2) берутся значения $k_0 = 1$ и $\sigma = 2$. Начальное и граничные условия в (1) выбираются так, чтобы задача (1) имела точное решение

$$u_{\text{exact}}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \sqrt{\frac{\max \left\{ 0; \left(1.3 - \frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{t}} \right) \right\}}{6}}. \quad (34)$$

Задача решается на интервале по времени $[t_0, T] = [0.0001, 0.0051]$. Сообщаемые ниже величины ошибок вычисляются согласно (33). Так же, как и в предыдущем тесте, допустимая точность для нелинейных итераций в (15), (18) задаётся равной $\text{tol} = 10^{-2}$, а допустимая точность для вычисления действий (произведений на вектор) матричной функции φ — равной величине 10 tol . Максимальная размерность подпространства Крылова для вычисления действий матричной функции φ также равна 30.

Результаты для этого двумерного теста представлены в таблице 2 в том же формате, что и для предыдущего теста в таблице 1. Здесь прослеживается та же закономерность: экспоненциальный метод Эйлера оказывается более эффективным по числу матвектов, чем метод ЛИ-М (т.е. неявная схема Эйлера в сочетании с ограниченным числом специальных чебышёвских итераций для решения (11)).

Таблица 2. Двумерное уравнение теплопроводности. Результаты расчётов неявной (НЭ) и экспоненциальной (ЭЭ) схемами Эйлера. Наименьшее число матвеков для обеих схем на каждой сетке подчёркнуто

Δt	НЭ ошибка, итерации (матвеки)	ЭЭ ошибка, итерации (матвеки)
сетка 64×64 , $\max_{t \in [t_0, T]} \ A(y(t))\ _1 \approx 3.0 \cdot 10^6$		
1e-06	1.24e-02, 5000 (12306)	1.20e-02, 5000 (5079)
5e-06	1.18e-02, 1011 (4266)	1.16e-02, 1038 (<u>1601</u>)
1e-05	1.17e-02, 536 (<u>2668</u>)	1.17e-02, 613 (1806)
5e-05	1.84e-02, 238 (2884)	1.75e-02, 479 (4164)
сетка 128×128 , $\max_{t \in [t_0, T]} \ A(y(t))\ _1 \approx 1.3 \cdot 10^7$		
1e-06	7.44e-03, 5000 (20556)	7.20e-03, 5000 (6135)
5e-06	7.24e-03, 1032 (6654)	7.51e-03, 1103 (<u>4129</u>)
1e-05	7.65e-03, 613 (<u>5814</u>)	8.52e-03, 732 (5210)
5e-05	1.95e-02, 398 (9688)	2.51e-02, 1045 (18403)
сетка 256×256 , $\max_{t \in [t_0, T]} \ A(y(t))\ _1 \approx 4.9 \cdot 10^7$		
1e-06	3.13e-03, 5000 (27700)	3.34e-03, 5000 (12746)
5e-06	4.44e-03, 1082 (<u>12860</u>)	5.88e-03, 1202 (<u>10800</u>)
1e-05	6.75e-03, 699 (13728)	9.51e-03, 1067 (17955)
5e-05	2.22e-02, 710 (34812)	3.76e-02, 2759 (106906)

4. Выводы и перспективы дальнейшей работы

Для решения нелинейных задач теплопроводности проведено теоретическое и численное сравнение нелинейных итерационных методов, основанных на неявной и экспоненциальной схемах Эйлера. Для обоих методов показано, что они дают монотонные и ограниченные по норме решения, а для нелинейных итераций, используемых в обоих методах, установлены схожие свойства сходимости. В численных экспериментах оба метода показали надёжную работу. Предложенный нелинейный экспоненциальный метод Эйлера является явной схемой интегрирования по времени. Ранее для нелинейных задач теплопроводности успешную работу показали явные схемы на основе чебышёвских итераций, известные как схемы локальных итераций (ЛИ). Представленные

здесь предварительные оценки эффективности показывают, что экспоненциальный метод Эйлера превосходит монотонную схему локальных итераций ЛИ-М. Однако реальное сравнение предложенного экспоненциального метода Эйлера и схем локальных итераций ещё предстоит сделать.

М.А. Бочев благодарит Л.А. Книжнермана за полезный совет.

Список литературы

- [1] Hundsdorfer W., Verwer J. G. Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. — Springer Verlag, 2003.
- [2] Тихонов, А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — 6-е изд. — Изд-во МГУ, 1999.
- [3] Horn R. A., Johnson C. R. Topics in Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1991.
- [4] Hochbruck M., Ostermann A. Exponential integrators // Acta Numer. — 2010. — Vol. 19. — P. 209–286.
- [5] Dekker K., Verwer J. G. Stability of Runge–Kutta methods for stiff non-linear differential equations. — North-Holland Elsevier Science Publishers, 1984.
- [6] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. — 5-е изд. — ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [7] Higham N. J. Functions of Matrices: Theory and Computation. — Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [8] Botchev M. A., Knizhnerman L., Tyrtysnikov E. E. Residual and Restarting in Krylov Subspace Evaluation of the φ Function // SIAM J. Sci. Comput. — 2021. — Vol. 43, no. 6. — P. A3733–A3759. — <https://doi.org/10.1137/20M1375383>.
- [9] Жуков, В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. — 2010. — Т. 22, № 10. — С. 127–158. — <http://mi.mathnet.ru/mm3034>.