



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 7 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.А. Повещенко, А.Ю. Круковский,  
В.О. Подрыга, П.И. Рагимли,  
Д.С. Бойков

Численное моделирование  
пространственных задач  
гидродинамики с учетом  
упругих процессов

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Численное моделирование пространственных задач гидродинамики с учетом упругих процессов / Ю.А. Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 7. 16 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-7>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-7>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.А. Повещенко, А.Ю. Круковский, В.О. Подрыга,  
П.И. Рагимли, Д.С. Бойков**

**Численное моделирование  
пространственных задач гидродинамики  
с учетом упругих процессов**

**Москва — 2023**

*Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Рагимли П.И., Бойков Д.С.*

### **Численное моделирование пространственных задач гидродинамики с учетом упругих процессов**

В настоящей работе методом опорных операторов для пространственных задач теории упругости построена конечно-разностная аппроксимация упругих сил на разнесенных лагранжевых сетках. Для векторов смещений на нерегулярных сетках, применительно к разностным схемам, для задач теории упругости разработаны соответствующие дискретные операции. С учетом энергетического баланса среды представленные семейства интегрально-согласованных аппроксимаций операций векторного анализа достаточны для численного моделирования данных процессов. В явном виде получены результирующие силы, действующие на узловые домены среды, в двумерной и трехмерной геометрии. Приведены расчеты распространения звуковых волн в алюминиевой пространственно-трехмерной ортогональной пластине вследствие торцевого удара. На примере численных расчетов подтверждена инвариантность упругих силовых и энергетических характеристик среды при твердотельных вращениях.

**Ключевые слова:** метод опорных операторов, двумерные и трехмерные консервативные конечно-разностные схемы, лагранжева сетка разнесенного типа.

*Poveshchenko Yu.A., Krukovskiy A.Yu., Podryga V.O., Rahimly P.I., Boykov D.S.*

### **Numerical modeling of spatial problems of hydrodynamics taking into account elastic processes**

In the present work, the support operator method for spatial problems of elasticity theory is used to construct a finite-difference approximation of elastic forces on staggered Lagrangian meshes. For displacement vectors on irregular meshes, as applied to difference schemes, for problems of elasticity theory, the corresponding discrete operations have been developed. Taking into account the energy balance of the medium, the presented families of integrally consistent approximations of vector analysis operations are sufficient for numerical modeling of these processes. The resulting forces acting on the nodal domains of the medium are obtained explicitly in two-dimensional and three-dimensional geometry. Calculations are given for the propagation of sound waves in an aluminum three-dimensional orthogonal plate due to an end impact. On the example of numerical calculations, the invariance of the elastic force and energy characteristics of the medium during solid-state rotations is confirmed.

**Key words:** support operator method, two-dimensional and three-dimensional conservative finite-difference schemes, Lagrangian staggered mesh.

## 1. Введение

В настоящей работе для двумерного и трехмерного случаев построена конечно-разностная аппроксимация упругих сил на разностных лагранжевых сетках, основанная на методе опорных операторов [1]. Для векторов смещений на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуры которых наложены минимальные разумные ограничения, применительно к разностным схемам для задач теории упругости построена аппроксимация соответствующих операций векторного анализа. Рассматриваются схемы как использующие тензор напряжений в явном виде, так и разделяющие его на шаровую и сдвиговую компоненты. В явном виде получены результирующие силы в двумерной и трехмерной геометриях. Такого рода методики имеют достаточно широкое применение в области физики высоких плотностей энергии.

В данной работе рассматриваются реализации основанной на методе опорных операторов дискретной модели упругих сил [2-11]. Тестовые расчеты, моделирующие распространение звуковых волн в трехмерной алюминиевой пластине, проведены на разностных сетках, состоящих из шестигранников. Полученные результаты численных расчетов подтверждают как хорошее качество построенных в данной работе разностных схем, так и высокую эффективность численных алгоритмов.

## 2. Постановка задачи и физические приближения

Движение вещества с учетом упругих сил и сдвиговых напряжений определяется уравнениями неразрывности, балансами импульса и энергии, которые в лагранжевых переменных имеют вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\nabla P + \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{t}_v) = -P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{t}_v) - \operatorname{div} \mathbf{W} + q, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \xi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\operatorname{div}(P\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{W} + q. \quad (2.4)$$

Здесь  $t$  – время;  $\rho$  – плотность;  $\eta = 1/\rho$  – удельный объем;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $P$  – гидродинамическое давление;  $\boldsymbol{\zeta}$  – сдвиговая компонента тензора напряжения;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$  – субстанциональная производная;  $\operatorname{tr}(\cdot)$  – след тензора;  $\xi$  – удельная внутренняя

энергия, учитывающая деформационные процессы;  $t_v = \frac{1}{2}(\frac{dv}{dt} + \nabla \mathbf{v})$  – симметризованный тензор скоростей деформаций;  $\mathbf{W}$  – поток тепла;  $q$  – объёмная плотность мощности сторонних источников.

Приведение тензора напряжений к виду с разделёнными шаровой  $-P$  и сдвиговой  $-\zeta$  компонентами:

$$\sigma = -P\delta + \zeta, \quad P = -\frac{1}{3}tr(\sigma),$$

где  $\delta$  – метрический тензор, является необходимым шагом для построения однородной разностной схемы, которая применима как для твёрдого вещества, где вклады от диагонального ( $-P\delta$ ) и недиагонального ( $\zeta$ ) членов (которые отвечают за объёмные и сдвиговые деформации соответственно) сравнимы, так и для плазмы, где отсутствуют сдвиговые напряжения, но для корректного описания зависимости давления от плотности необходимо использование достаточно сложных моделей [12]. Вклады сдвиговых деформаций ( $div\zeta$ ) аппроксимируются либо на недеформированной сетке [13], либо в условиях отсутствия сдвиговой компоненты (модуль сдвига  $\mu = 0$ ), что покрывает всю область параметров для вещества.

Тензор напряжений при твердотельных деформациях имеет вид [13]

$$\sigma = 2\mu t_U + \nu tr(t_U)\delta, \quad t_U = \frac{1}{2}(\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nabla \mathbf{U}),$$

где  $\mu$  (модуль сдвига);  $\nu$  – неотрицательные коэффициенты Ламе;  $\mathbf{U}$  – вектор смещений относительно недеформированной сетки;  $t_U$  – симметризованный тензор смещений. В твёрдом теле, а также в жидкости или плазме (в которых  $\mu = 0$ ) всегда справедливо

$$\sigma = -P\delta + \zeta, \quad \zeta = 2\mu(t_U - \frac{1}{3}tr(t_U)\delta).$$

При адиабатических деформациях внутренняя энергия единицы массы тела может быть представлена в виде [13]

$$\xi = \frac{k_{ad}}{2\rho}(tr(t_U))^2 + \frac{1}{4\mu\rho}tr(\zeta)^2 = \varepsilon(\rho, T) + \frac{1}{4\mu\rho}tr(\zeta)^2.$$

Здесь  $k_{ad}$  – адиабатический модуль сжатия. Зависимость внутренней энергии от плотности и температуры  $\varepsilon(\rho, T)$  будем считать заданной.

### 3. Методы опорных операторов для аппроксимации упругих процессов

#### 3.1. Метрические сетки метода опорных операторов

Для сеток такого типа, состоящих из ячеек ( $\Omega$ ), образованных узлами ( $\omega$ ), гранями ( $\sigma$ ) и ребрами ( $\lambda$ ), характерно наличие замкнутой сопряженной («сдвинутой») сетки, состоящей, например, из доменов  $d(\omega)$  вокруг узлов  $\omega$  (см. рис. 1).

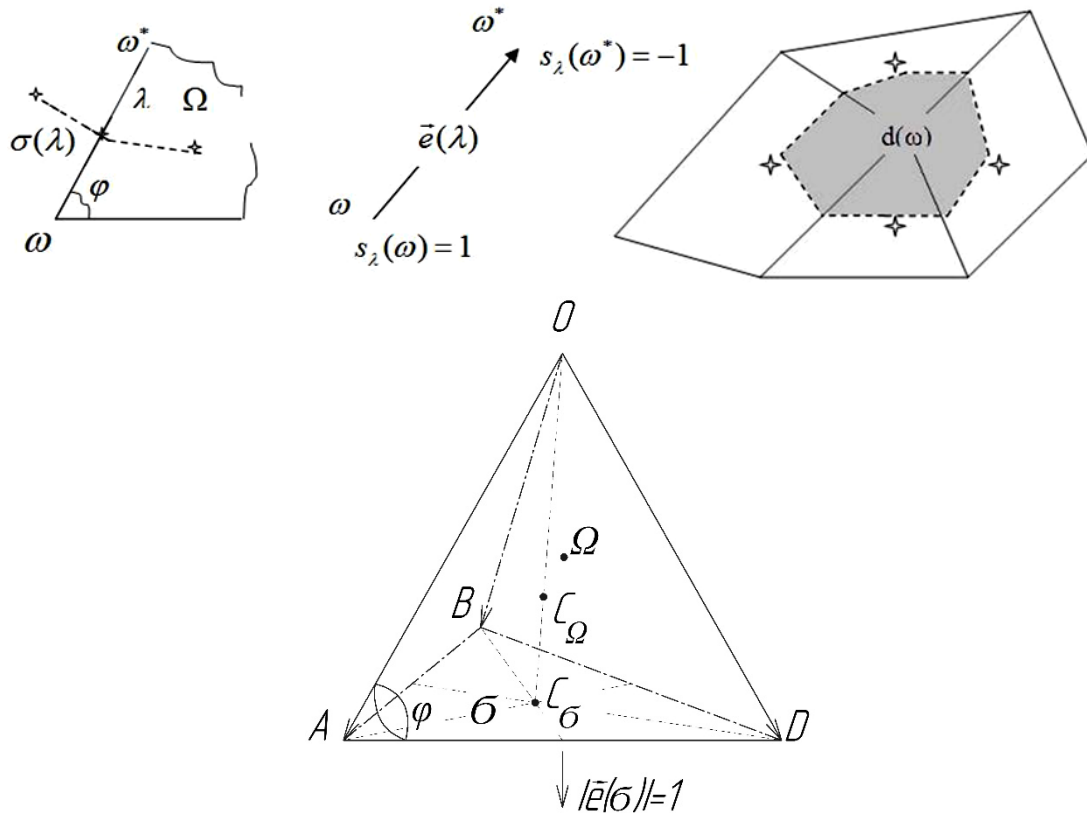


Рис. 1. Построение базисов.

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки  $\sigma(\lambda)$ . Базисы  $\varphi(\lambda)$  здесь попарно входят в ячейки  $\Omega(\lambda)$ , примыкающие к ребру  $\lambda$ . Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки  $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$ ). Она определяет

конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четыреугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих «дивергентно-градиентных» операций векторного анализа континуальных краевых задач. Дальнейшее изложение

носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов  $V_\varphi$  иллюстрируется на примере тетраэдральной 3D сетки.

В области  $O$  введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из тетраэдральных ячеек ( $\Omega$ ), базисов ( $\varphi$ ), узлов ( $\omega$ ), ребер ( $\lambda$ ) и связанных с ними ( $\sigma(\lambda)$ ) – границами балансовых узловых доменов  $d(\omega)$ . На рис. 1 представлен балансный узловой домен в 2D случае. Аналогичным образом ниже дается описание 3D узлового домена с использованием рис. 1.

Базисы  $\varphi$  создаются системой исходных (ковариантных) ортов  $\mathbf{e}(\lambda)$ , образованных ребрами. Под центрами ячеек  $\Omega$ , граней  $\sigma$  и ребер  $\lambda$  будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов  $\omega$ , их образующих. Поверхность при ребрах  $\lambda$ , состоящая из двух треугольников в каждой ячейке  $\Omega(\lambda)$  и соединяющая эти центры (ячейки, ее граней и ребер), представляет собой вектор

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda),$$

ориентированный так же, как и орт  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Здесь  $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$  – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Применительно к тетраэдральным ячейкам  $\Omega$ , погруженный в них базисный объем  $V_\varphi$  равен четверти объема тетраэдра. Наконец,  $\sum_{\varphi(\lambda)}$  – суммирование по всем базисам  $\varphi$ , в образовании которых приняло участие ребро  $\lambda$ . Замкнутые вокруг узла  $\omega$  поверхности  $\boldsymbol{\sigma}(\lambda(\omega))$  образуют поверхностно-замкнутые узловые домены  $d(\omega)$ .

К узлам отнесем искомую сеточную функцию  $\mathbf{u}$ . На ребрах выделим положительное направление (см. рис. 1) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_\lambda \mathbf{u} = - \sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega) \mathbf{u}_\omega = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_\omega.$$

Здесь  $s_\lambda(\omega)$  – бинарная знаковая функция, связанная с ориентацией ребра  $\lambda$  ( $s_\lambda(\omega) = +1$ , если узел  $\omega$  находится в начале ребра  $\lambda$ , и  $s_\lambda(\omega) = -1$ , если узел  $\omega$  находится в конце этого ребра). Сеточные тензорные поля  $X$  задаются своими представлениями в базисах  $X_\varphi$ .

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля DIN:  $(\varphi) \rightarrow (\omega)$  определим, аппроксимируя теорему Гаусса на  $d(\omega)$ :

$$\text{DIN } X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \boldsymbol{\tau}_X(\lambda), \quad \boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi (\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), X_\varphi),$$

где  $\sum_{\lambda(\omega)}$  – суммирование по всем ребрам  $\lambda$ , имеющим общий узел  $\omega$ .

Обозначая через  $(\ )_{\Delta}$  аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \left( \int_O \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{U} X^T) dV \right)_{\Delta} &= - \left( \int_O \mathbf{U} \operatorname{div} X dV - \int_{\partial O} (X \mathbf{U}, \mathbf{ds}) \right)_{\Delta} = \\ &= - \sum_{\omega} (\mathbf{u}_{\omega}, \operatorname{DIV} X) = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \operatorname{tr} \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} X_{\varphi} \right) = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}_{\varphi} X_{\varphi}^T) \equiv \\ &= \langle \nabla \mathbf{u}, X \rangle = \langle X, \nabla \mathbf{u} \rangle = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \operatorname{tr}(t_{\Delta u \varphi} X_{\varphi}) \Big|_{X_{\varphi} = X_{\varphi}^T} = \langle t_{\Delta u}, X \rangle. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \nabla \mathbf{u}, X \rangle$  определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее  $\left( \int_O \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{U} X^T) dV \right)_{\Delta}$ .

Тензорные поля  $\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}$ ,  $\nabla \mathbf{u}$ ,  $t_{\Delta u}$  и тензорное поле напряжений  $X_{\Delta u}$  даются своими представлениями в базисах:

$$\begin{aligned} \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} &= \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_{\lambda} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \quad \nabla \mathbf{u}_{\varphi} = \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \Delta_{\lambda} \mathbf{u}, \\ t_{\Delta u \varphi} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} + \nabla \mathbf{u}_{\varphi} \right), \quad X_{\Delta u \varphi} = 2\mu t_{\Delta u \varphi} + \nu \operatorname{tr}(t_{\Delta u \varphi}) \delta. \end{aligned}$$

Под  $\sum_{\lambda(\varphi)}$  понимается суммирование по ребрам  $\lambda$ , образующим базис  $\varphi$ .

Произвольному сеточному векторному полю инкрементов  $\vec{\delta}_{\lambda} \in H_{\lambda}$  на ребрах  $\lambda$  (определяющему поле смещений  $\vec{\delta}^{\&}$ ) сопоставим поле симметризованного тензора смещений  $t_{\delta}$  и поле тензора напряжений  $X_{\delta}$  по формулам:

$$\begin{aligned} t_{\delta \varphi} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\varphi)} (\vec{\delta}_{\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}(\lambda) + \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \vec{\delta}_{\lambda}) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{D\vec{\delta}^{\&}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} + \nabla \vec{\delta}_{\varphi}^{\&} \right), \\ X_{\delta \varphi} &= 2\mu t_{\delta \varphi} + \nu \operatorname{tr}(t_{\delta \varphi}) \delta. \end{aligned}$$

Для вариации континуального векторного поля смещения  $\delta \mathbf{U}$  на расстоянии  $\delta \mathbf{r}$  справедливо  $\delta \mathbf{U} = \left( \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}, \delta \mathbf{r} \right)$ . В силу определения взаимного базиса  $(\mathbf{e}(\lambda), \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda')) = \delta_{\lambda\lambda'}$ , для ребра  $\lambda(\varphi)$  очевиден сеточный аналог этого тождества:

$$\Delta_{\lambda} \mathbf{u} = \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi}, \mathbf{e}(\lambda) \right).$$



Уточним также силу  $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)$ , действующую на поверхность  $\sigma(\lambda)$  в поле напряжений  $X_{\Delta\mathbf{u}}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{X_{\Delta\mathbf{u}}}(\lambda) &= \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\Delta\mathbf{u}\varphi}) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \left\{ \mu \sum_{\lambda'(\varphi)} [(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda')) \Delta_{\lambda} \mathbf{u} + \right. \\ &+ (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \Delta_{\lambda} \mathbf{u}) \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda')] + \nu \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \sum_{\lambda'(\varphi)} (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda'), \Delta_{\lambda} \mathbf{u}) \left. \right\}. \end{aligned}$$

На поле инкрементов  $\vec{\partial}_{\lambda} \in H_{\lambda O}$  (не вращающем среду твердотельно) эта сила определяет самосопряженный, положительно определенный метрический оператор  $G_O: (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ ,  $G_O = G_O^* > 0$ .

$$\boldsymbol{\tau}_{X_{\partial}}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\partial\varphi}), \quad \boldsymbol{\tau}_{X_{\partial}} = G_O \vec{\partial}.$$

Для  $\vec{\partial}1_{\lambda}$  и  $\vec{\partial}2_{\lambda}$  из  $H_{\lambda O}$  скалярные произведения  $(\vec{\partial}1, \vec{\partial}2)_{\lambda}$  и  $\langle\langle \vec{\partial}1, \vec{\partial}2 \rangle\rangle$  определяются по формулам:

$$(\vec{\partial}1, \vec{\partial}2)_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\vec{\partial}1_{\lambda}, \vec{\partial}2_{\lambda}),$$

$$(\vec{\partial}1, G_O \vec{\partial}2)_{\lambda} = \sum_{\varphi} v_{\varphi} [2\mu \operatorname{tr}(t_{\partial 1\varphi} t_{\partial 2\varphi}) + \nu \operatorname{tr}(t_{\partial 1\varphi}) \operatorname{tr}(t_{\partial 2\varphi})] =,$$

$$(G_O \vec{\partial}1, \vec{\partial}2)_{\lambda} = \langle\langle \nabla \vec{\partial}1^{\&}, X_{\partial 2} \rangle\rangle = \langle\langle \nabla \vec{\partial}2^{\&}, X_{\partial 1} \rangle\rangle = \langle\langle \vec{\partial}1, \vec{\partial}2 \rangle\rangle.$$

Энергия деформации среды, производимой полем инкрементов  $\vec{\partial}_{\lambda}$ , есть энергия метрического оператора в этом поле:

$$(G_O \vec{\partial}, \vec{\partial})_{\lambda} = \langle\langle \vec{\partial}, \vec{\partial} \rangle\rangle.$$

### 3.2. Поворотно-нейтральные разностные схемы

Твердотельное вращение (2D и 3D сетка) определяется как возмущение поля инкрементов  $\vec{\partial}_{\lambda} \in H_{\lambda}$ :

$$\vec{\partial}_{\lambda} \rightarrow \vec{\partial}_{\lambda} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)], \quad \boldsymbol{\omega} = \text{const}.$$

Симметризованный тензор смещений  $t_{\partial\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\varphi)} (\vec{\partial}_{\lambda} \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) + \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \vec{\partial}_{\lambda})$

испытывает возмущение  $t_{\partial\varphi} \rightarrow t_{\partial\varphi} + t_{\omega\varphi}$ , где

$$t_{\omega\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\varphi)} ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)] \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) + \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]).$$

Для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  имеем:

$$\begin{aligned}
t_{\omega\varphi} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \left\{ [\boldsymbol{\omega} \times \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}(\lambda) (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \mathbf{a})] + \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)], \mathbf{a}) \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}] + \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) ([\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}], \mathbf{e}(\lambda)) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

т.е. тензор  $t_{\omega\varphi} = 0$ . Таким образом, тензор  $t_{\partial\varphi}$  инвариантен к твердотельным вращениям  $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]$ ,  $\boldsymbol{\omega} = const$ . Данное свойство разностной схемы, смещения в которой входят только через инвариантный к твердотельным вращениям симметризованный тензор  $t_{\partial\varphi}$  в базисах сетки, называется поворотной нейтральностью.

Упругие силовые и энергетические характеристики таких схем инвариантны как к параллельному переносу, так и к твердотельным вращениям. Отсюда следует, что для положительной определенности оператора  $DIN X_u$  ( $X_{\Delta u\varphi} = 2\mu t_{\Delta u\varphi} + \nu \text{tr}(t_{\Delta u\varphi})\delta$ ) необходимо, кроме параллельного переноса сетки ( $\Delta_\lambda \mathbf{u} \equiv 0$ ), исключить и ее твердотельное вращение ( $\Delta_\lambda \mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]$ ,  $\boldsymbol{\omega} = const$ ). В трехмерном случае это достигается принципом «трех гвоздей», т. е. в трех узлах, которые образуют плоскость, должны быть заданы нулевые смещения. В двумерном случае нужно закрепить прямую (двумя узлами).

Инвариантность результатов относительно твердотельного вращения данных схем подтверждена далее численными расчетами.

### 3.3. Скалярно-дивергентные задачи

Упругие деформации в среде возникают под действием внешних сил и сопутствующих деформациям физических процессов. Для соответствующих краевых задач методами теории опорных операторов можно построить различные варианты разностных схем.

Рассмотрим скалярно-дивергентную задачу в пространственной области  $O$  с границей  $\partial O$

$$\text{div} \mathbf{X}_u = f(r), \quad \mathbf{X}_u = K \nabla u,$$

наряду с соответствующим интегральным соотношением

$$\int_0 (\mathbf{X} \nabla u) dV + \int_0 u \text{div} \mathbf{X} dV = \int_{\partial 0} u(\mathbf{X}, \mathbf{ds}).$$

Здесь  $u$  – скаляр (температура, давление и т.п.);  $\mathbf{X}$  – произвольный вектор;  $\mathbf{X}_u$  – потоки, вызванные градиентом функции  $u$  в среде со свойствами проводимости, определяемыми тензором  $K$ .

Как и ранее (см. рис. 1), в области  $O$  вводится семейство нерегулярных разностных сеток, которые обладают метрическими свойствами, и соответствующих сеточных функций. Внутреннюю дивергенцию векторного поля  $DIN: (\varphi) \rightarrow (\omega)$  определим, аппроксимируя теорему Гаусса на  $d(\omega)$ .

Сеточное векторное поле  $\mathbf{X}$  задается своими представлениями в базисах  $\mathbf{X}_\varphi$ . Обозначая через  $(\ )_\Delta$  аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \left( \int_0 (\mathbf{X}, \nabla u) dV \right)_\Delta &= - \left( \int_0 u \operatorname{div} \mathbf{X} dV - \int_{\partial 0} u(\mathbf{X}, \mathbf{ds}) \right)_\Delta = \\ &= - \sum_\omega (u_\omega, \operatorname{DIN} \mathbf{X}) = \sum_\varphi V_\varphi (\mathbf{X}_\varphi, \operatorname{GRAD} u). \end{aligned}$$

Градиентное векторное поле  $\operatorname{GRAD}: (\omega) \rightarrow (\varphi)$  дается своими представлениями в базисах:

$$\operatorname{GRAD} u = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda u \mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \quad \Delta_\lambda u = - \sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega) u_\omega = u_{\omega^*} - u_\omega.$$

Полагая в базисах  $\varphi$  в качестве  $\mathbf{X}_\varphi$  векторное поле  $\mathbf{X}_{f\varphi} = K_\varphi \operatorname{GRAD} f$ , имеем самосопряженный неотрицательный оператор  $-\operatorname{DIN} \mathbf{X}_{f\varphi}: (\omega) \rightarrow (\omega)$  или  $-\operatorname{DIN} K \operatorname{GRAD}: (\omega) \rightarrow (\omega)$ . Здесь потоковое векторное поле  $\mathbf{X}_f$  дается своими компонентами в базисах  $\mathbf{X}_{f\varphi}$ . Это поле определяется градиентными свойствами скалярной сеточной функции  $f$ , заданной в узлах  $\omega$ , и сеточным тензорным полем проводимости  $K$ , задаваемым своими представлениями в базисах  $K_\varphi$ . Данный оператор будет положительно определенным, если хотя бы в одном граничном узле связной разностной сетки задана первая краевая задача, т.е. в этом граничном узле скалярная сеточная функция обращается в ноль.

### 3.4. Дифференциально-разностная схема

Введем обозначения для функций сетки метода опорных операторов (см. рис. 1). К ее узлам  $\omega$  будем относить ранее представленные в континуальной модели компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  и смещения  $\mathbf{U}$ , а также термодинамические величины:  $\rho, \eta, P, T, \xi, \varepsilon$ . Аналогичные разностные схемы, где термодинамические функции заданы в ячейках, представлены в [1, 14, 15]. Дифференциально-разностная схема в узлах сетки для уравнений (2.1)-(2.3) с “нулевыми” граничными условиями может быть записана следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = \operatorname{DIN} \mathbf{v},$$

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi \operatorname{GRAD} P + \operatorname{DIN} \zeta,$$

$$\frac{d}{dt} (m \zeta) = -P \operatorname{DIN} \mathbf{v} + \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi \operatorname{tr}(\zeta_\varphi t_{\Delta v \varphi}) - \operatorname{DIN} \mathbf{W} + Vq.$$

Приузловой объём  $V_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi$  определяется базисными объемами  $V_\varphi$ .

Приузловая масса постоянна  $m_\omega = \rho_\omega V_\omega = \operatorname{const}$ . Скорость  $\mathbf{v}_\varphi$  в базисе  $\varphi$  с

центральным узлом  $\omega$  берётся как  $\mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}_{\omega(\varphi)}$ . Сеточные тензорные поля сдвиговых напряжений задаются представлениями в базисах  $\zeta_\varphi = 2\mu_\varphi(t_{\Delta U\varphi} - \frac{1}{3}tr(t_{\Delta U\varphi})\delta)$ . Тепловой поток в базисах определяется как  $\mathbf{W}_\varphi = -\kappa_\varphi \text{GRAD}T$ , где  $\kappa_\varphi(P_\omega, T_\omega)$  – теплопроводность в базисе  $\varphi$  (ячейки  $\Omega \supset \varphi$ , содержащей этот базис) с центральным узлом  $\omega(\varphi)$ . Учитывающая адиабатические деформации внутренняя энергия узла  $\omega$  с массой  $m$  определится как

$$m\xi = m\varepsilon(\rho, T) + \frac{1}{4} \sum_{\varphi(\omega)} \frac{V_\varphi}{\mu_\varphi} tr(\zeta_\varphi^2).$$

Модуль сдвига  $\mu_\varphi$  на сетке определяется в базисе  $\varphi$  аналогично теплопроводности  $\kappa_\varphi$ .

## 4. Результаты расчетов

Рассматривается движение вещества, описываемое уравнениями неразрывности, Эйлера и энергетическими балансами с адиабатическими деформациями твердой фазы в рамках линейной теории упругости [13].

Для исследования однородной конечно-разностной аппроксимации упругих сил в рамках решения сопряженных задач гидродинамики и упругости [1] в случае, когда вещество находится в твердом состоянии, проведено моделирование распространения звуковых волн в трёхмерной ортогональной пластине вследствие удара, колебания пластины вследствие сдвиговой деформации или деформации изгиба.

Во всех этих случаях для вещества использовались параметры алюминия с плотностью  $\rho_s = 2.72 / \text{см}^3$ , модулем сдвига  $\mu = 26.1 \text{ ГПа}$  и модулем сжатия  $k = 72.9 \text{ ГПа}$ . Соответствующие значения скорости продольного и поперечного звука составляют  $c_p = \sqrt{(k + 4/3\mu)\rho_s} = 6300 \text{ м/с}$  и  $c_s = \sqrt{\mu/\rho_s} = 3100 \text{ м/с}$ . Задача о распространении волны в плоской трёхмерной пластине рассматривалась в следующей постановке:  $x \in [-5; 5]$ ,  $y \in [-1.3; 1.3]$ ,  $z \in [0; 0.2]$ ,  $v_x(t=0) = 0$ ,  $v_y(t=0) = v_0 e^{-4y-x^2}$ ,  $v_z(t=0) = 0$ . Координаты выражены в сантиметрах; амплитуда волны  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  много меньше скорости звука в алюминии. В начальный момент времени вещество не деформировано. На границах задавалось отсутствие внешних сил.

На рис. 2-4 представлены распределения плотностей в заданные моменты времени, а также направления векторов скоростей.

Рис. 2 показывает динамику развития процессов, происходящих в мишени, полученную в расчетах в  $xuz$ -геометрии при  $z=0.01$  см.

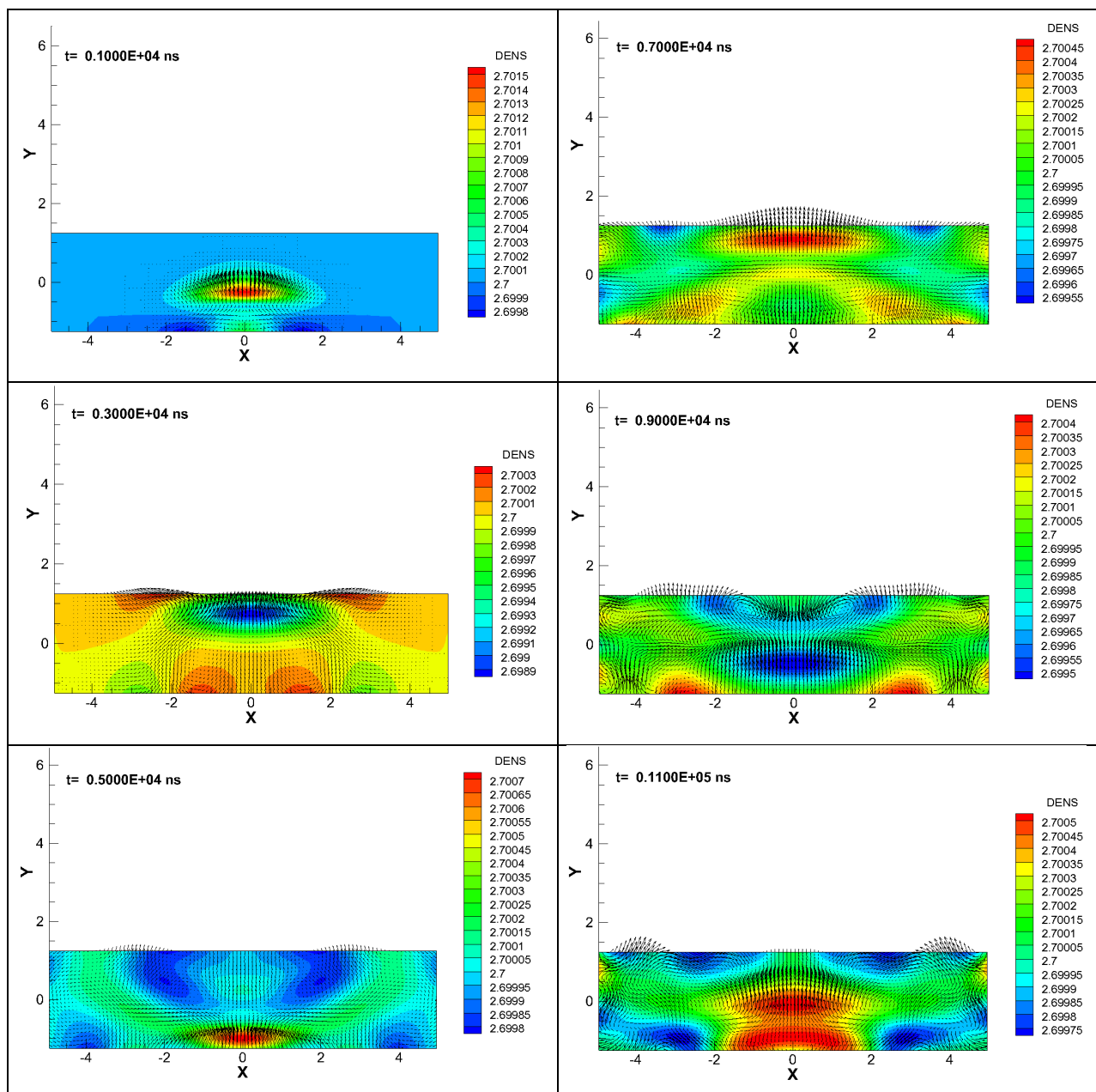


Рис. 2. Динамика плотности на моменты времени (сверху вниз, слева направо) 1, 3, 5, 7, 9 и 11 мкс.  $z=0.01$  см. Стрелками обозначены векторы скорости.

Для анализа вызванных лазерным воздействием гидродинамических и упруго-волновых процессов важна численная информация об обмене импульсом и энергией между испаренной и неиспаренной частями мишени. Для проверки качества методики в этом отношении, аналогично работе [1], проводился анализ динамики процессов, описываемых интегральными уравнениями внутренней, кинетической и полной энергий. Расчеты

проводились на сетках  $100 \times 100 \times 20$ . Полученные результаты качественно согласуются с аналитическими оценками, что подтверждает достоинство описанной в данной работе методики.

На рис. 3-4 представлены расчеты, проведенные на “повернутых” путем твердотельного вращения разностных сетках. Данные расчеты подтверждают инвариантность результатов относительно твердотельного вращения в силу свойства поворотной нейтральности рассматриваемых разностных схем [8].

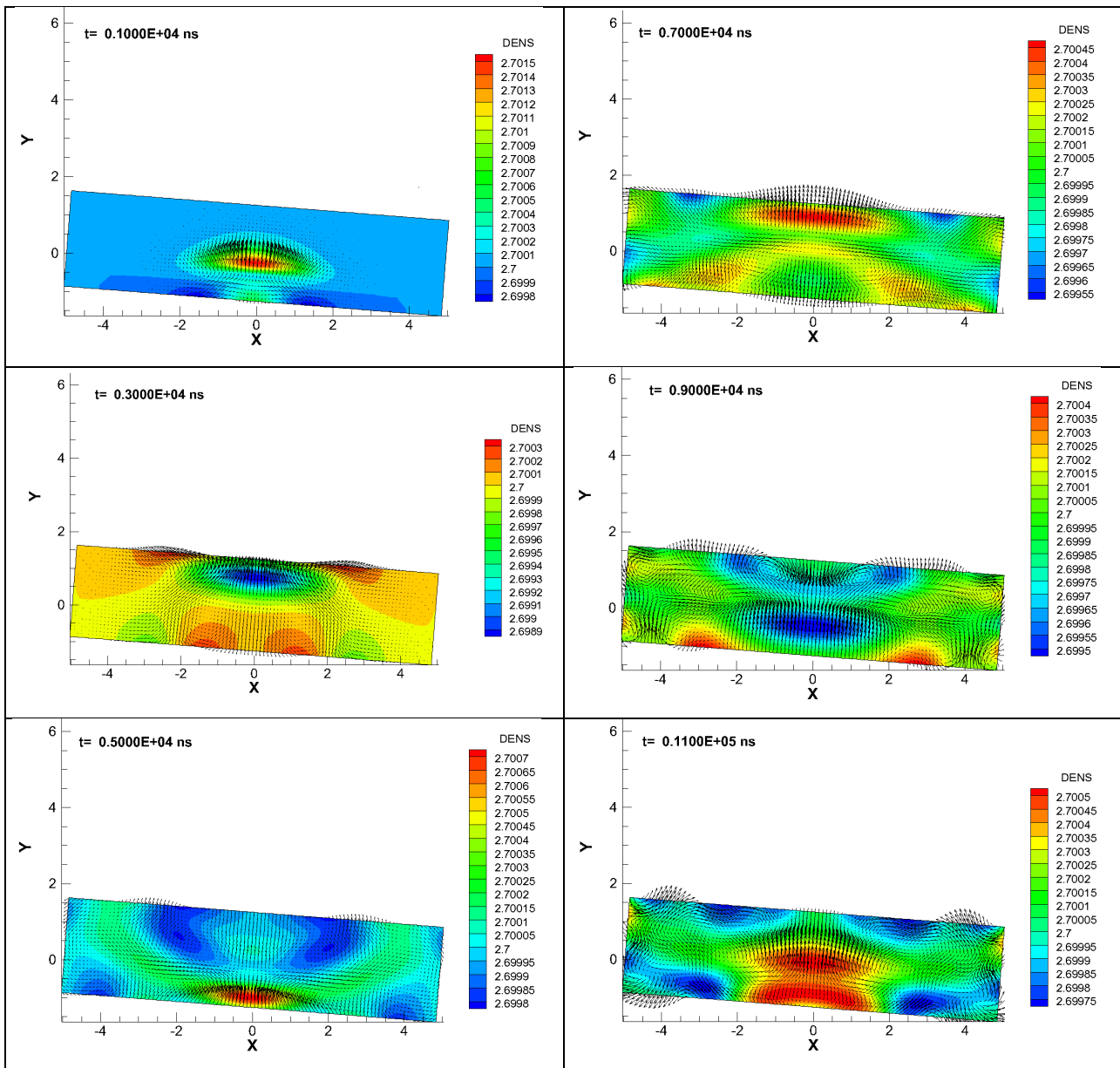


Рис. 3. Динамика плотности на моменты времени (сверху вниз, слева направо) 1, 3, 5, 7, 9 и 11 мкс.  $z = 0.01$  см. Стрелками обозначены векторы скорости.

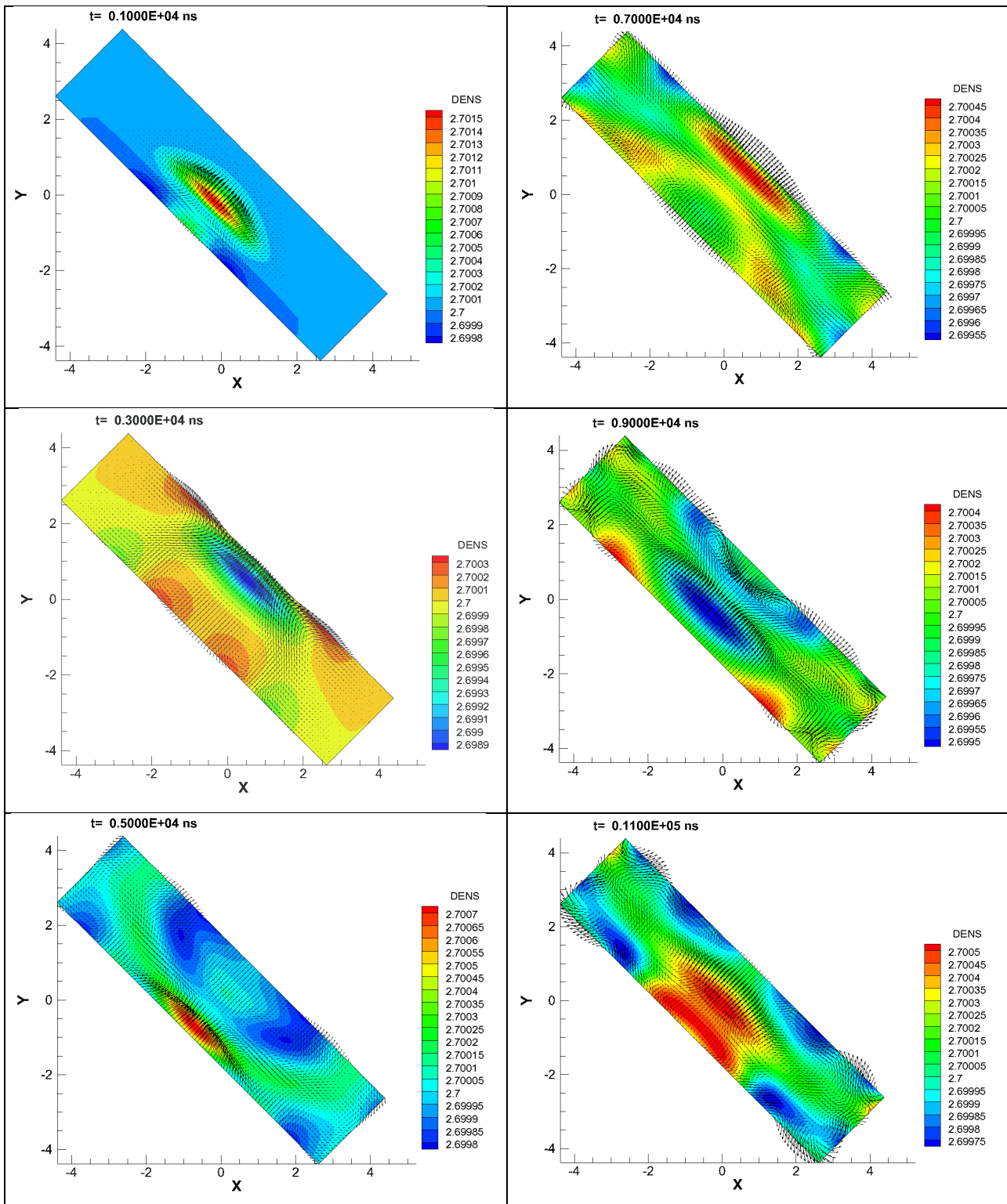


Рис. 4. Динамика плотности на моменты времени (сверху вниз, слева направо) 1, 3, 5, 7, 9 и 11 мкс.  $z = 0.01$  см. Стрелками обозначены векторы скорости.

## Заключение

В настоящей работе построены семейства интегрально-согласованных аппроксимаций операций векторного анализа для дискретного моделирования упругих сил в твердой фазе на разнесенных лагранжевых сетках. С учётом энергетического баланса среды рассматриваются схемы, которые разделяют тензор напряжений на шаровую и сдвиговую компоненты для построения однородных разностных алгоритмов, которые применимы как для твердого тела, так и для испаренной плазменной фазы. В рамках полученной в работе методики проведен ряд тестовых расчётов распространения звуковых волн в пространственно-трехмерной ортогональной пластине вследствие торцевого удара. Данные расчеты подтвердили инвариантность результатов относительно твердотельного вращения.

*Благодарности:* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004.

*Funding:* The reported study was funded by RFBR and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004.

## Библиографический список

1. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Бойков Д.С., Попов С.Б. Однородные разностные схемы для сопряженных задач гидродинамики и упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2019. Т. 161. № 3. С. 377–392.
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 7. С. 1317–1327.
3. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 5. С. 1092–1096.
4. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Самарский А.А. и др. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983. 143 с.
5. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщённых решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 3. С. 371–381.
6. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения



- Пуассона на обобщенных решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 10. С. 1477–1486.
7. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО "Критерий", 1996. 275 с.
  8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Матем. Моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 86–96.
  9. Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 10. 36 с.
  10. Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Бойков Д.С., Подрыга В.О., Рагимли П.И. Трехмерное моделирование гидродинамических задач с учетом упругих процессов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 30. 14 с.
  11. Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Рагимли П.И. Об одном подходе к решению пространственных задач гидродинамики с учетом упругих процессов // ЖВМ и МФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 658-665.
  12. Новиков В.Г., Никифоров В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
  13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости. М.: Наука, 2003. 264 с.
  14. Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 6. 20 с.
  15. Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Ключкова Л.В., Сузан Д.В. Оценки сходимости итерационных алгоритмов численного решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 94. 17 с.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Постановка задачи и физические приближения .....	3
3. Методы опорных операторов для аппроксимации упругих процессов.....	5
4. Результаты расчетов.....	11
Заключение.....	15
Библиографический список.....	15