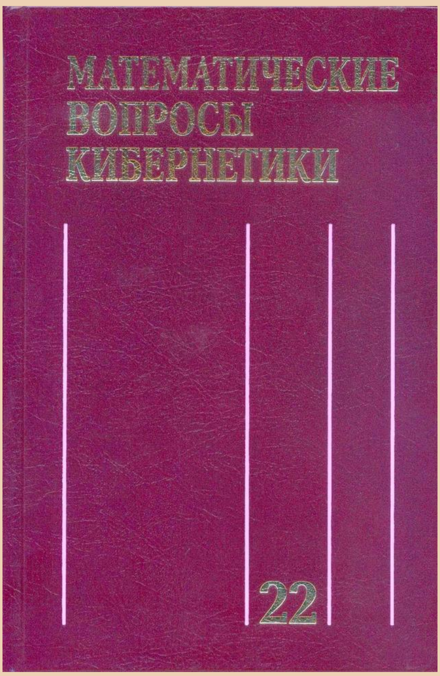
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 22



В. Б. Алексеев

Замкнутые классы в частичной k-значной логике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев В. Б. Замкнутые классы в частичной k-значной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 22. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. — С. 14–50. URL: https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2024-14 DOI: 10.20948/mvk-2024-14

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ В ЧАСТИЧНОЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

В. Б. АЛЕКСЕЕВ
(МОСКВА)

§ 1. Введение

В статье речь идет о дискретных функциях от любого (конечного) числа переменных, определенных и принимающих значения на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (подробные определения см., например, в [21] или [5]). При $k=2$ — это множество булевых функций, широко известных и довольно глубоко изученных.

Важной операцией над k-значными функциями является операция суперпозиции, которая описывает процесс построения из заданных функций новых функций с помощью формул. Значимость этой операции обусловлена тем, что она связана с процессами построения схем из функциональных элементов, имеющих важное прикладное значение. Грубо говоря, операция суперпозиции представляет собой произвольное переименование переменных у имеющихся функций, добавление и изъятие фиктивных переменных и подстановку имеющихся функций в другие имеющиеся функции вместо аргументов.

Множество всех k-значных функций с операцией суперпозиции называют k-значной логикой и обозначают P_k. Более широким, менее изученным, но важным объектом является множество P_k^* всех не обязательно всюду определенных (частичных) функций с операцией суперпозиции. Операция суперпозиции здесь определяется так же, как в P_k, с дополнительным условием: если на данном наборе переменных какая-то подформула некоторой формулы не определена, то и вся формула также не определена на этом наборе.

О п р е д е л е н и е 1. Множество всех функций, которые можно получить из множества функций A, применяя многократно операцию суперпозиции, называется замыканием A и обозначается $[A]$. Множество функций A называется замкнутым классом, если $[A]=A$.

Описание замкнутых классов позволяет решать задачу о представимости одних функций через другие, поскольку, если функции f_1, f_2, …, f_m входят в замкнутый класс A, а функция g не входит в A, то g нельзя выразить суперпозицией через f_1, f_2, …, f_m. А если A — это наименьший замкнутый класс, в который входят все функции f_1, f_2, …, f_m, то g можно

DOI: 10.20948/mvk-2024-14

выразить суперпозицией через f_1, f_2, $\ldots$, f_m тогда и только тогда, когда g входит в A.

Очевидно, что все множество P_k — это замкнутый класс. Все замкнутые классы в P_2 описал еще Пост около ста лет назад [37]. Их множество оказалось бесконечным, но счетным (диаграмма включений замкнутых классов в P_2 представлена на рис. 1 в § 4).

В середине прошлого века было доказано, что в P_k при $k \geqslant 3$ имеется континуум замкнутых классов [22]. Поэтому здесь представляется возможным описывать только отдельные важные фрагменты решетки (по включению) замкнутых классов в P_k.

Множество всех замкнутых классов в P_k^* имеет мощность континуума при всех $k \geqslant 2$ (см., например, [7]). Поэтому здесь тоже представляется возможным описывать только отдельные важные фрагменты решетки (по включению) замкнутых классов. Поскольку суперпозиция всюду определенных функций дает всюду определенную функцию, то, очевидно, класс P_k является замкнутым классом в P_k^* и любой замкнутый класс из P_k является замкнутым классом в P_k^*.

Еще один пример очевидно замкнутого класса в P_k^* дает множество всех нигде не определенных функций от любого числа переменных, который мы обозначим $\{\infty\}$, как принято в книге [35], являющейся наиболее полным собранием фактов о k-значных и частичных k-значных логиках.

Если в суперпозиции участвует нигде не определенная функция, то в соответствии с определением получается снова нигде не определенная функция. Поэтому добавление к любому замкнутому классу A в P_k^* множества функций $\{\infty\}$ не дает возможности получать новые функции, т. е. если A — замкнутый класс в P_k^*, то и $A \cup \{\infty\}$ — замкнутый класс в P_k^*.

О п р е д е л е н и е 2. Замкнутый класс A в P_k (или в P_k^*) называется предполным (в англоязычной литературе — maximal), если единственный замкнутый класс в P_k (соответственно в P_k^*), содержащий A и отличный от A, — это все множество P_k (соответственно P_k^*).

Предполные классы интересны тем, что через них формулируется следующий критерий полноты.

О п р е д е л е н и е 3. Множество функций A из P_k (из P_k^*) называется полной системой в P_k (соответственно в P_k^*), если $[A] = P_k$ (соответственно $[A] = P_k^*$).

Из результатов, полученных А. В. Кузнецовым, вытекает, в частности, следующее утверждение (см. [21]).

Т е о р е м а 1. *В P_k и в P_k^* имеется конечное число предполных классов. Множество функций A из P_k (из P_k^*) является полной системой в P_k (соответственно в P_k^*), если и только если A не содержится целиком ни в одном из предполных классов в P_k (соответственно в P_k^*).*

В P_2 имеется 5 предполных классов, которые принято обозначать T_0, T_1, L, S, M (см., например, [5]). Все 18 предполных классов в P_3 описал С. В. Яблонский [21]. Ряд семейств предполных классов в P_k описали С. В. Яблонский [21], В. В. Мартынюк [18], Е. Ю. Захарова [13], а также китайские математики Ван Сянхао [10] и Ло Чжукай [14, 15]. Полное описание всех предполных классов в P_k опубликовал в 1965 г. И. Г. Розенберг [38]. Кроме предполных классов, к настоящему времени описаны многие фрагменты в решетке замкнутых классов в P_k.

В данной статье будет дан обзор основных результатов о замкнутых классах в частичной k-значной логике P_k^*. В частности, будет описана новая техника автора для изучения замкнутых классов в P_k^*. В заключение будет продемонстрировано применение этой техники для описания одного из фрагментов в решетке замкнутых классов в P_k^*.

§ 2. Описание замкнутых классов с помощью предикатов (отношений)

В математике есть два основных способа описания множества объектов. В первом случае указывается способ построения всех объектов из каких-то простых объектов с помощью заданных операций. Во втором случае определяемое множество объектов выделяется из какого-то более широкого уже описанного множества объектов путем наложения дополнительных условий, которыми должны обладать определяемые объекты.

Эти же два подхода могут применяться и при описании замкнутых классов. Например, класс линейных булевых функций L можно определить как класс функций, получаемых с помощью суперпозиции из суммы по модулю 2 и константы 1, т. е. $L=[x\oplus y, 1]$.

Другой подход связан с так называемым сохранением предикатов (или отношений).

Определение 4. Всюду далее будем использовать стандартное обозначение $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$. Если A — конечное множество, то через A^n будем обозначать множество всех наборов длины n, все компоненты которых принадлежат A.

Определение 5. Предикатом (h-местным) на E_k называется любая функция $\rho(y_1,\ldots,y_h)\colon E_k^h\to\{0,1\}$ (обычно в качестве области значений рассматривают множество {ложь, истина}, но нам удобнее взять $\{0,1\}$). Отношением (h-местным) на E_k называется любое подмножество $V\subseteq E_k^h$.

Между предикатами и отношениями имеется очевидная связь: множество наборов, на которых h-местный предикат равен 1, является h-местным отношением, и наоборот, для любого h-местного отношения имеется единственный h-местный предикат, для которого данное отношение является областью, где предикат равен 1. Здесь мы будем использовать язык предикатов.

Определение 6. Пусть в E_k^n заданы h наборов: $\alpha^{(j)}=(\alpha_1^{(j)},\ldots,\alpha_n^{(j)})$, $j=1,\ldots,h$. Будем говорить, что эти h наборов *сравнимы относительно h-местного предиката* $\rho(y_1,\ldots,y_h)$, если $\rho(\alpha_i^{(1)},\ldots,\alpha_i^{(h)})=1$ при всех $i=1,\ldots,n$.

Определение 7. Пусть $\rho(y_1,\ldots,y_h)$ — h-местный предикат на E_k и пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ функция из P_k. Будем говорить, что функция f *сохраняет предикат* ρ, если для любых h наборов $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(h)}$ из E_k^n, сравнимых относительно предиката ρ, предикат ρ равен 1 на наборе $(f(\alpha^{(1)}), f(\alpha^{(2)}),\ldots,f(\alpha^{(h)}))$.

Определение 8. Пусть $\rho(y_1,\ldots,y_h)$ — h-местный предикат на E_k. Через $Pol_k\rho$ будет обозначаться класс всех функций из P_k, сохраняющих предикат ρ.

Например, класс монотонных булевых функций M — это класс всех булевых функций, сохраняющих предикат $\rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 \leqslant y_2)$ на E_2. Класс самодвойственных булевых функций S — это класс всех булевых функций, сохраняющих предикат $\rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 \neq y_2)$ на E_2. Класс T_a — это класс всех булевых функций, сохраняющих предикат $\rho(y) \equiv (y = a)$ на E_2. Класс L линейных булевых функций — это класс всех булевых функций, сохраняющих предикат $\rho(y_1, y_2, y_3) \equiv (y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 = 0)$ на E_2.

Описание предполных классов через предикаты оказалось более удобным. Именно на этом пути были окончательно описаны Розенбергом все предполные классы в P_k (см. описание ниже в § 5).

Для описания замкнутых классов в частичной k-значной логике P_k^* также можно использовать предикаты, но определения надо несколько модифицировать. Используются следующие два стандартных обобщения определения 8.

Определение 9. Пусть $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат на E_k. Через $pPol_k\rho$ обозначается множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^*, которые для любых h наборов $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(h)}$ из E_k^n, сравнимых относительно предиката ρ, определены на всех этих наборах и $\rho(f(\alpha^{(1)}), f(\alpha^{(2)}), \ldots, f(\alpha^{(h)})) = 1$.

Определение 10. Пусть $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат на E_k. Через $pPOL_k\rho$ обозначается множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^*, удовлетворяющих условию: для любых h наборов $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha^{(h)}$ из E_k^n, сравнимых относительно предиката ρ, либо функция f не определена хотя бы на одном из этих наборов, либо $\rho(f(\alpha^{(1)}), f(\alpha^{(2)}), \ldots, f(\alpha^{(h)})) = 1$.

Отметим, что $pPol_k\rho \cap P_k = pPOL_k\rho \cap P_k = Pol_k\rho$.

Определение 11. Селектором называется любая функция от любого числа переменных, тождественно равная одной из своих переменных. Замкнутый класс в P_k или в P_k^* называется клоном, если он содержит все селекторы. Клоны в P_k^* обычно называют частичными клонами.

Нетрудно доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для любого предиката ρ на E_k класс $Pol_k\rho$ является клоном в P_k и в P_k^*, а классы $pPol_k$ и $pPOL_k\rho$ являются клонами в P_k^*.*

В статье автора и А. А. Вороненко [7] предложен следующий более широкий вариант описания замкнутых классов в P_k^*.

Определение 12. Пусть заданы два h-местных предиката: R на E_k и R_1 на $E_k \cup \{\infty\}$. Через $U(R, R_1)$ будем обозначать семейство всех функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$ таких, что для любых h наборов: $\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$, $j = 1, \ldots, h$ из E_k^n справедлива импликация: если наборы $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(h)}$ сравнимы относительно предиката R, то

$$R_1((f(\alpha^{(1)}), f(\alpha^{(2)}), \ldots, f(\alpha^{(h)})) = 1.$$

Определение 13. Пусть $A \subseteq \{1, 2, \ldots, h\}$. Обозначим через W_A^h h-местный предикат на $E_k \cup \{\infty\}$, равный 1 на тех и только на тех наборах $(a_1, \ldots, a_h) \in (E_k \cup \{\infty\})^h$, в которых $a_i = \infty$ для всех $i \in A$ (остальные a_i произвольны). Если $A = \varnothing$, то считаем, что $W_A^h \equiv 0$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, h\}$. Тогда положим

$$W_{\mathfrak{A}}^h = \bigvee_{A \in \mathfrak{A}} W_A^h.$$

Лемма 1 [7]. *Пусть* h *— произвольное натуральное число и* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$ *— семейства подмножеств множества* $\{1, 2, \ldots, h\}$, *причем* $W_{\mathfrak{A}}^h \leqslant W_{\mathfrak{A}_j}^h$ *при всех* $j = 1, 2, \ldots, h$, *и пусть* R *— произвольный предикат на* E_k. *Тогда*

(1) *класс* $U(R, R \vee W_{\mathfrak{A}}^h)$ *замкнут;*
(2) *также замкнутым является класс*

$$U = U(R, R \vee W_{\mathfrak{A}}^h) \cup U(R, W_{\mathfrak{A}_1}^h) \vee \ldots \vee U(R, W_{\mathfrak{A}_p}^h).$$

В [7] это утверждение сформулировано для $k = 2$, но приведенное там доказательство справедливо для любого k. Отметим, что приведенные выше определения классов $pPol_k\rho$ и $pPOL_k\rho$ являются частными случаями классов типа (1) из приведенного утверждения. В первом случае $pPol_k\rho = U(\rho, \rho)$ ($W_{\mathfrak{A}}^h$ пусто), во втором случае $pPOL_k\rho = U(\rho, \rho \vee W_{\mathfrak{A}}^h)$, где $\mathfrak{A}$ — это семейство всех одноэлементных подмножеств в $\{1, 2, \ldots, h\}$.

§ 3. Предполные классы в P_k^*

Первым существенным результатом в изучении замкнутых классов в частичных k-значных логиках на русском языке был, по-видимому, результат Р. Фрейвалда. В 1966 г. Фрейвалд [20] описал все предполные классы в P_2^*. Их оказалось 8 в отличие от 5 в P_2.

Теорема 2[20]. *В* P_2^* *имеется ровно 8 предполных классов. Один из них — это класс* $P_2 \cup \{\infty\}$, *остальные 7 — это классы функций вида* $pPOL_2\rho$, *сохраняющих следующие предикаты:*

1) $\rho(y) \equiv (y = 0)$;
2) $\rho(y) \equiv (y = 1)$;
3) $\rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 = 0) \& (y_2 = 1)$;
4) $\rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 \neq y_2)$;
5) $\rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 \leqslant y_2)$;
6) $\rho(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (y_1 = y_2) \& (y_3 = y_4) \vee (y_1 = y_3) \& (y_2 = y_4)$;
7) $\rho(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (y_1 = y_2) \& (y_3 = y_4) \vee (y_1 = y_3) \& (y_2 = y_4) \vee (y_1 = y_4) \& (y_2 = y_3)$.

Как видно, предикаты 1), 2), 4), 5) — это те же предикаты, которые задают в P_2 предполные классы T_0, T_1, S, M. Нетрудно показать, что класс в P_2, задаваемый предикатом 7), — это класс L линейных булевых функций. Так что принципиально новыми здесь являются предполные классы, задаваемые предикатами 3) и 6), и класс $P_2 \cup \{\infty\}$.

В 1980 г. Ромов [19] нашел некоторые специальные предполные классы в P_k^*, в частности описал все 58 предполных классов в P_3^*. Отметим, что в [16] указано, что предполные классы в P_2^* и P_3^* опубликовал Ван Сян-хао [10] еще в 1963 г., но на китайском языке. Из-за начавшейся в 1960-х гг. в Китае «культурной революции» эти результаты оставались неизвестными в других странах.

Полностью все предполные классы в P_k^* для произвольных k первым описал китайский математик Ло Чжукай в 1984 г. в статьях на китайском языке [16] и [17]. В 1986 г. автор данной статьи встречался с Ло Чжукаем в Китае и договорился о переводе его статей на русский язык. В 1987 г. аспирант Ло Чжукая сделал перевод этих статей на английский язык, с которых автор данной статьи сделал переводы на русский язык, опубликованные в 1988 г. в «Кибернетическом сборнике» [16, 17]. К сожалению, и оригиналы на китайском языке, и переводы на русский язык остались неизвестными на Западе, и только в 1992 г. была опубликована статья [32], в которой описаны все предполные замкнутые классы в P_k^*.

Приведем здесь описание предполных классов в P_k^* из [16] (автор использовал язык отношений, мы будем использовать эквивалентный язык предикатов). Будем также для удобства использовать некоторую терминологию из [38].

Одним из предполных классов в P_k^* при всех $k \geqslant 2$ является класс $P_k \cup \{\infty\}$, остальные — это классы функций вида $pPOL_k\rho$ для некоторых предикатов ρ на E_k. Предикаты, задающие предполные классы в P_k^*, разбиваются на несколько групп.

Первая группа — одноместные предикаты $\rho(y) \equiv (y \in E)$ для произвольного непустого собственного подмножества $E \subset E_k$. Такие классы обозначаются в [16] как T_E.

Определение 14. Пусть $\widetilde{E}_k^h = \{\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \ldots \alpha_h) \mid \exists i \neq j(\alpha_i = \alpha_j)\}$. Предикат $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k называется абсолютно рефлексивным, если на всех наборах из $\widetilde{E}_k^h$ он равен 1.

Определение 15. Предикат $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k называется абсолютно симметричным, если из того, что он равен 1 на некотором наборе $\widetilde{\alpha}$, следует, что он равен 1 и на любом наборе, полученном из $\widetilde{\alpha}$ произвольной перестановкой координат.

Заметим, что при $h = 1$ любой предикат является абсолютно рефлексивным и абсолютно симметричным.

Вторая группа предикатов — это произвольные абсолютно рефлексивные и абсолютно симметричные предикаты $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k с $h \geqslant 2$. При $h = 2$ дополнительно требуется, чтобы предикат ρ был равен 1 хотя бы на одном наборе, в котором все координаты разные. Соответствующие классы $pPOL_k\rho$ для предикатов из второй группы названы в [16] классами вполне симметричных функций и обозначены $F_{S,h}$. Более точно, $F_{S,h}$ — это не один класс, а тип классов.

Определение 16. Пусть S_h — полная симметрическая группа на множестве h координат и H — произвольная ее подгруппа. Пусть задано прямое разбиение

$$E_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_h;\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, h.$$

Пусть $\overline{G}_h$ — некоторое множество наборов $(a_1, \ldots, a_h)$ из E_k^h, в которых все координаты различны и $a_i \in A_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, h$. Пусть предикат $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k равен 1 в точности на наборах из $\overline{G}_h$, а также на всех наборах, получающихся из них произвольной перестановкой координат из группы H. Тогда предикат ρ называется простым разделимым, а класс $pPOL_k\rho$ называется классом простых разделимых функций и обозначается $S_{I,h}$ (это опять обозначение не одного класса, а типа классов).

Определение 17. Пусть $R_t \subseteq \{1, 2, \ldots, h\}$, $|R_t| \geqslant 2$ для $t = 1, 2, \ldots, m$ и $R_p \cap R_q = \varnothing$ при $p \neq q$. Тогда через $G_h(R_1, \ldots, R_m)$ будем обозначать множество всех наборов $a_1, \ldots, a_h$ из E_k^h, в которых $a_i = a_j$, если i и j лежат в одном и том же R_t.

Определение 18. Пусть $G_h(R_1, \ldots, R_m)$ — некоторое множество наборов из предыдущего определения и пусть H — группа симметрий координат этого множества, т. е. некоторая группа перестановок координат, переводящих наборы из $G_h(R_1, \ldots, R_m)$ в наборы из $G_h(R_1, \ldots, R_m)$. Пусть заданы q прямых разбиений

$$D_i : E_k = A_1^i + A_2^i + \ldots + A_h^i, i = 1, 2, \ldots, q.$$

Пусть $\overline{G}_h$ — некоторое непустое множество наборов из E_k^h и пусть для каждого набора $(a_1, \ldots, a_h)$ из $\overline{G}_h$ существует разбиение D_p такое, что выполняются следующие условия:

(1) $a_j \in A_j^p$ для всех $j = 1, 2, \ldots, h$;

(2) если $p \geqslant 2$, то для любого подмножества координат R_t существуют такие i_1, i_2, $\ldots$, i_{p-1}, что для всех $j \in R_t$ выполняется

$$a_j \in A_{i_1}^1 \cap A_{i_2}^2 \cap \ldots A_{i_{p-1}}^{p-1}.$$

Пусть предикат $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k равен 1 в точности на наборах из множества $G_h(R_1, \ldots, R_m)$, а также на наборах из $\overline{G}_h$ и на всех наборах, получающихся из них произвольной перестановкой координат из группы H. Тогда предикат ρ называется регулярным разделимым, а класс $pPOL_k\rho$ называется классом регулярных разделимых функций и обозначается $S_{R,h}$ (это опять обозначение не одного класса, а типа классов).

Определение 19. Пусть $\rho_{4,3}(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (y_1 = y_2)\&(y_3 = y_4)\vee$ $\vee(y_1 = y_3)\&(y_2 = y_4)\vee(y_1 = y_4)\&(y_2 = y_3)$. Пусть заданы q прямых разбиений

$$D_i : E_k = A_1^i + A_2^i + A_3^i + A_4^i, i = 1, 2, \ldots, q.$$

Пусть $\overline{G}_4$ — некоторое множество наборов из E_k^4 и пусть для каждого набора $(a_1, \ldots, a_4)$ из $\overline{G}_4$ существует разбиение D_p такое, что выполняются следующие условия:

(1) $a_j \in A_j^p$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$;

(2) если $p \geqslant 2$, то для любого r от 1 до $p - 1$ существуют такие r и s, что одна пара чисел из $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ лежит в A_r, а другая в A_s.

При этом допускается $\overline{G}_4 = \varnothing$. Пусть предикат $\rho_1(y_1, \ldots, y_4)$ на E_k равен 1 в точности на наборах из множества $\overline{G}_4$ и на всех наборах, получающихся из них произвольной перестановкой координат. Тогда предикат $\rho(y_1, y_2, y_3, y_4) = \rho_{4,3} \vee \rho_1$ называется регулярным разделимым степени 3, а класс $pPOL_k\rho$ называется классом псевдолинейных функций и обозначается L_p (это опять обозначение не одного класса, а типа классов).

Определение 20. Пусть $\rho_{4,3}(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (y_1 = y_2)\&(y_3 = y_4)\vee$ $\vee(y_1 = y_3)\&(y_2 = y_4)$. Пусть H— максимальная группа симметрий этого предиката. Пусть заданы q прямых разбиений

$$D_i : E_k = A_1^i + A_2^i + A_3^i + A_4^i, i = 1, 2, \ldots, q.$$

Пусть $\overline{G}_4$ — некоторое множество наборов из E_k^4 и пусть для каждого набора $(a_1, \ldots, a_4)$ из $\overline{G}_4$ существует разбиение D_p такое, что выполняются следующие условия:

(1) $a_j \in A_j^p$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$;

(2) если $p \geqslant 2$, то для любого r от 1 до $p-1$ существуют такие r и s, что одна из пар чисел $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$ лежит в A_r, а другая в A_s или одна из пар чисел $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$ лежит в A_r, а другая в A_s.

При этом допускается $\overline{G}_4 = \varnothing$. Пусть предикат $\rho_1(y_1, \ldots, y_4)$ на E_k равен 1 в точности на наборах из множества $\overline{G}_4$ и на всех наборах, получающихся из них произвольной перестановкой координат из группы H. Тогда предикат $\rho(y_1, y_2, y_3, y_4) = \rho_{4,3} \vee \rho_1$ называется регулярным разделимым степени 2, а класс $pPOL_k\rho$ называется классом V-типа и обозначается $VG_{4,2}$ (это опять обозначение не одного класса, а типа классов).

Основная теорема из [17] имеет следующий вид.

Теорема 3. *При $k \geqslant 3$ список предполных классов в P_k^* исчерпывается классом $P_k \cup \{\infty\}$, классами T_E функций, сохраняющих E, классами $F_{S,h}$ вполне симметричных функций, классами $S_{I,h}$ простых разделимых функций, классами $S_{R,h}$ регулярных разделимых функций, классами L_p псевдолинейных функций и классом V-типа $VG_{4,2}$.*

§ 4. Связи P_2 и P_2^*. Проблема Лау

В начале 1990-х гг. автор данной статьи со своими учениками начал на кафедре математической кибернетики факультета ВМК МГУ изучение связей решеток замкнутых классов в P_k и P_k^*. Нетрудно доказать, что класс P_k содержится только в двух других замкнутых классах в P_k^*, а именно в классе $P_k \cup \{\infty\}$ и в классе P_k^*. Было интересно посмотреть, насколько изменится ситуация, если вместо класса P_k рассмотреть предполные классы в P_k. Для начала был рассмотрен случай $k=2$. Исследовалось, в каких замкнутых классах в P_2^* содержатся предполные классы Поста. Для 4 предполных классов Поста задача оказалась достаточно несложной — каждый из этих классов содержится в 8 других замкнутых классах в P_2^*. Однако для класса L линейных булевых функций ситуация оказалась намного сложнее. В 1994 г. автором и А.А. Вороненко [7] было показано, что для класса L линейных булевых функций, который является предполным в P_2, множество замкнутых классов в P_2^*, содержащих L, имеет мощность континуума. Отсюда очевидно, что если A — замкнутый класс в P_2 и $A \subseteq L$, то множество замкнутых классов в P_2^*, содержащих A, также имеет мощность континуума.

Несколько иначе поставила эту задачу Диетлинде Лау (Германия, Ростокский университет) [34].

Определение 21. Пусть A — замкнутый класс в P_k. Тогда через $\mathscr{I}(A)$ обозначим множество всех замкнутых классов B в P_k^* таких, что $B \cap P_k = A$.

Лау в [34] предложила определить мощность множеств $\mathscr{I}(A)$ для каждого замкнутого класса A из P_2. Заметим, что множества $\mathscr{I}(A)$ являются «расслоением» множества всех замкнутых классов в P_2^*. В дальнейшем эта задача получила название «проблема Лау» и активно изучалась многими зарубежными математиками.

Заметим, что для любого предполного класса A из P_k множество всех замкнутых классов в P_k^*, содержащих A, отличается от $\mathscr{I}(A)$ только тремя классами: P_k, $P_k \cup \{\infty\}$ и P_k^*. Поэтому в P_2^* $\mathscr{I}(L)$ также имеет мощность континуума, а каждое из семейств $\mathscr{I}(T_0)$, $\mathscr{I}(T_1)$, $\mathscr{I}(S)$, $\mathscr{I}(M)$ состоит из 6 классов.

Отметим, что если A и B — два замкнутых класса из P_2 и $A \subseteq B$, то множество замкнутых классов в P_2^*, содержащих B, содержится в множестве замкнутых классов в P_2^*, содержащих A, т. е. имеет место некоторая монотонность (точнее, «антимонотонность»). Поэтому результат о мощности множества замкнутых классов в P_2^*, содержащих A, переносится «по монотонности» либо на все классы, содержащиеся в A, либо на все классы, содержащие A. Для семейств Лау $\mathscr{I}(A)$ подобных результатов о монотонности, похоже, нет. Поэтому мощность каждого семейства $\mathscr{I}(A)$ приходится устанавливать независимо.

После появления работы [7] ряд результатов в этом направлении в 1995–1997 гг. опубликовал Б. Штраух [39, 40, 42].

Т е о р е м а 4 (Б. Ш т р а у х). *Если класс A является произвольным пересечением нескольких классов Поста T_0, T_1, S и M, кроме $S \cap M$, то семейство $\mathscr{I}(A)$ конечно, т. е. A содержится только в конечном числе замкнутых классов в P_2^*.*

Вопрос для класса $S \cap M$ остался открытым. С другой стороны, Штраух рассмотрел «маленькие» замкнутые классы.

О п р е д е л е н и е 22. Определим некоторые замкнутые классы в P_2 (см. рис. 1).

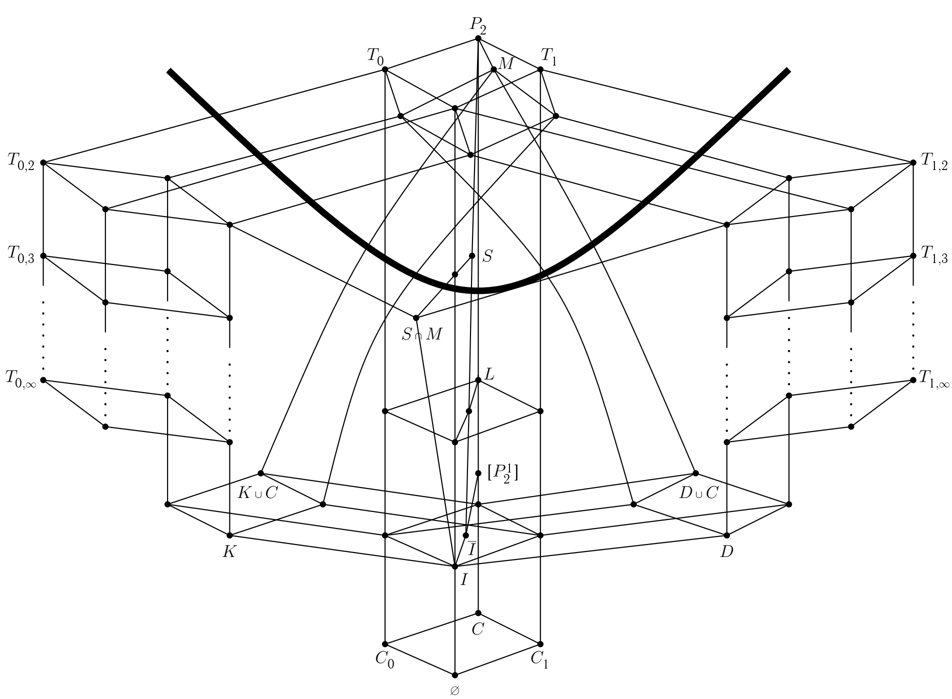


Рис. 1. Диаграмма Поста

Через I обозначается класс всех селекторов, т. е. всех функций от любого числа переменных, тождественно равных одной из переменных. Через C обозначается класс констант, т. е. всех функций от любого числа переменных, тождественно равных 0 или 1. Через K (соответственно D) обозначается класс всех конъюнкций (дизъюнкций), т. е. всех функций от любого числа переменных, представимых в виде конъюнкции (соответственно дизъюнкции) некоторых своих переменных. Через $T_{0,\infty}$ обозначается класс всех булевых функций, обладающих свойством: должна существовать такая переменная функции x_i, что во всех наборах, на которых функция равна 0, выполняется $x_i = 0$. Аналогично определяется класс $T_{1,\infty}$ с заменой 0 на 1.

Теорема 5 (Б. Штраух [41]). *Пусть A — замкнутый класс и $A \subseteq L$ или $A \subseteq B \in \{D \cup C, K \cup C, T_{0,\infty}, T_{1,\infty}\}$. Тогда $\mathscr{I}(A)$ имеет мощность континуума.*

В 2010 г. в [36] были собраны все известные на тот момент результаты о мощности семейств $\mathscr{I}(A)$ для клонов (замкнутых классов, содержащих все селекторные функции) из P_2. Пусть $\mathscr{F}$ — следующее семейство клонов в P_2:

$$\mathscr{F} = \{P_2, T_0, T_1, T_0 \cap T_1, M, M \cap T_0, M \cap T_1, M \cap T_0 \cap T_1, S, S \cap T_0 \cap T_1\}.$$

Результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть C — клон P_2. Тогда интервал частичных клонов $\mathscr{I}(C)$ в P_2^* конечен тогда и только тогда, когда $C \in \mathscr{F}$. Более того, если $C \subseteq B$, где B — любой из классов семейства $\{L, D \cup C, K \cup C, T_{0,\infty}, T_{1,\infty}\}$, то $\mathscr{I}(C)$ имеет мощность континуума.*

Таким образом, все клоны C в P_2 были разбиты на два семейства: клоны C, для которых $\mathscr{I}(C)$ содержит конечное число классов, и клоны C, для которых $\mathscr{I}(C)$ содержит бесконечное число классов (см. разделяющую линию на рис. 1). Остался только вопрос о точной мощности бесконечных интервалов $\mathscr{I}(C)$ для $C = S \cap M$ и для клонов C из восьми бесконечных цепочек диаграммы Поста.

В 2011 г. в препринте [27] было доказано, что $\mathscr{I}(S \cap M)$ содержит континуум замкнутых классов. В виде статьи этот результат опубликован только в 2016 г. [28].

Однако только в 2017 г. была опубликована статья [29], в которой мощность $\mathscr{I}(A)$ окончательно установлена для всех замкнутых классов A из P_2. А именно была доказана следующая теорема о дихотомии.

Теорема 7 (о дихотомии). *Пусть C — клон P_2. Тогда интервал частичных клонов $\mathscr{I}(C)$ в P_2^* конечен тогда и только тогда, когда $C \in \mathscr{F}$. В остальных случаях он имеет мощность континуума.*

Название «Теорема о дихотомии» указывает на тот факт, что не бывает счетной мощности.

Определение 23. Пусть A — клон в P_k^*. Тогда A называется сильным частичным клоном, если вместе с каждой функцией f, входящей в A, он содержит и все ее «сужения» (т. е. функции, получаемые из f заменой некоторых значений из множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ на ∞).

Понятно, что при любом k структура по включению всех сильных частичных клонов является подструктурой решетки всех частичных клонов, а интервалы Лау могут «прореживаться». В связи с теоремой о дихотомии в [29] была сформулирована проблема: существуют ли в решетке сильных частичных клонов в P_2^* интервалы (типа интервалов Лау) с бесконечной счетной мощностью. Однако прежде, чем статья [29] была опубликована, авторы сами нашли такие примеры [33], о чем вставили сообщение в статью [29] при корректуре.

В заключение раздела приведем точные значения числа классов в интервалах $\mathscr{I}(C)$ для $C \in \mathscr{F}$ [28]:

$$|\mathscr{I}(P_2)| = 3; |\mathscr{I}(T_0)| = |\mathscr{I}(T_1)| = 6; |\mathscr{I}(T_0 \cap T_1)| = 30;$$

$$|\mathscr{I}(M)| = 6; |\mathscr{I}(M \cap T_0)| = |\mathscr{I}(M \cap T_1)| = 15; |\mathscr{I}(M \cap T_0 \cap T_1)| = 101;$$

$$|\mathscr{I}(S)| = 6; |\mathscr{I}(S \cap T_0 \cap T_1)| = 380.$$

§ 5. Связи P_k и P_k^*. Интервалы $\mathscr{I}(A)$ для предполных классов A

В P_k^* также можно изучать интервал $\mathscr{I}(A)$ при любом $k \geqslant 2$. В первую очередь задача изучалась для предполных классов A из P_k. В 2006 г. часть результатов в этом направлении опубликовали Л. Хаддад, Д. Лау, И. Г. Розенберг [31]. Эти результаты также были представлены в книге Лау [35], опубликованной в 2006 г. Приведем эти результаты. Напомним, что окончательно все предполные классы в P_k были описаны Розенбергом в 1965 г. [38]. Все предполные классы описаны как классы всех функций, сохраняющих некоторый предикат. При этом все предикаты, порождающие предполные классы, естественным образом разбиваются на 6 семейств.

Определение 24. Элемент c из E_k называется центром для предиката $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k, если предикат ρ равен 1 на всех наборах из E_k^h, у которых хотя бы одна координата равна c.

Определение 25. Предикат $\rho(y_1, \ldots, y_h)$ на E_k называется центральным, если он абсолютно рефлексивный (см. определение 14), абсолютно симметричный (см. определение 15), имеет центр и отличен от тождественной единицы.

Заметим, что при $h = 1$ любой предикат, отличный от константы, является центральным.

Первое семейство предполных классов в P_k — это классы вида $Pol_k(\rho)$, где $\rho = \rho(y_1, \ldots, y_h)$ — произвольный центральный предикат на E_k.

Теорема 8 [31]. *Пусть $C = Pol_k(\rho)$, где $\rho = \rho(y)$ — одноместный предикат, отличный от константы. Тогда интервал частичных клонов $\mathscr{I}(C)$ в P_k^* состоит из 6 классов, если предикат ρ равен 1 только на одном наборе, и состоит из 7 классов, если предикат ρ равен 1 более чем на одном наборе.*

Теорема 9 [31]. *Пусть $C = Pol_k(\rho)$, где $\rho = \rho(y_1, \ldots, y_h)$ — центральный предикат на E_k, и пусть $h \geqslant 2$. Тогда интервал частичных клонов $\mathscr{I}(C)$ в P_k^* состоит из 3 классов: $Pol_k\rho$, $Pol_k\rho \cup \{\infty\}$, $pPol_k\rho$.*

Пусть $\rho = \rho(y_1, y_2)$ — произвольный двухместный предикат на E_k, задающий на E_k отношение эквивалентности. Отношения эквивалентности на E_k, при которых образуется всего один класс эквивалентности или k классов эквивалентности, будем считать тривиальными. Второе семейство предполных классов в P_k — это классы вида $Pol_k(\rho)$, где $\rho=\rho(y_1,y_2)$ — произвольный двухместный предикат на E_k, задающий на E_k нетривиальное отношение эквивалентности.

Теорема 10 [31]. *Пусть $C=Pol(\rho)$, где $\rho=\rho(y_1,y_2)$ — двухместный предикат на E_k, задающий на E_k нетривиальное отношение эквивалентности. Пусть $\rho_1=\rho\cup(\infty,\infty)$ и $pPol_k\rho_1$ обозначает множество всех функций из P_k^*, обладающих свойством: для любой пары наборов, сравнимых относительно ρ, функция либо не определена на обоих наборах, либо принимает значения, на которых предикат ρ равен 1. Тогда интервал частичных клонов $\mathcal{I}(C)$ в P_k^* состоит из 4 классов $Pol_k\rho$, $Pol_k\rho\cup\{\infty\}$, $pPol_k\rho_1$, $pPOL_k\rho$.*

Пусть s — перестановка на E_k без неподвижных точек, распадающаяся в произведение независимых циклов одной и той же простой длины p. И пусть двухместный предикат $\rho=\rho(y_1,y_2)$ на E_k, истинен в точности на парах вида $(a,s(a))$. Семейство классов $Pol_k(\rho)$ для всех таких предикатов образует третье семейство предполных классов в P_k.

Теорема 11 [31]. *Пусть $C=Pol(\rho)$, где $\rho=\rho(y_1,y_2)$ — любой предикат на E_k, описанный выше. Тогда интервал частичных клонов $\mathcal{I}(C)$ в P_k^* содержит конечное число классов. В частности, при $p=2$ число классов в $\mathcal{I}(C)$ равно 6, а при $p=3$ число классов в $\mathcal{I}(C)$ равно 15.*

Четвертое семейство предполных классов в P_k составляют классы квазилинейных функций. Пусть на множестве всех элементов E_k задано поле (это возможно только если $k=p^m$, где p — простое число и m — любое натуральное) и пусть $+$ обозначает операцию сложения в этом поле. Пусть предикат $\rho=\rho(y_1,y_2,y_3,y_4)$ истинен в точности на тех наборах $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, для которых $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$. Классы $C=Pol(\rho)$ для таких предикатов ρ образуют четвертое семейство предполных классов квазилинейных функций в P_k.

Теорема 12 [7, 30]. *Пусть C — предполный класс квазилинейных функций в P_k. Тогда интервал частичных клонов $\mathcal{I}(C)$ в P_k^* содержит континуум классов.*

Пятое семейство предполных классов в P_k определяется достаточно сложно. Пусть сначала $p\geqslant 3$ — простое число. Следующим образом определим предикат $\rho_p^h(y_1,y_2,\ldots,y_h)$ на множестве E_{p^h}. Пусть для любого a из E_{p^h} $(a^1,a^2,\ldots,a^h)$ — это представление числа a в системе счисления с основанием p. Тогда предикат $\rho_p^h(y_1,y_2,\ldots,y_h)$ истинен в точности на тех наборах $(a_1,a_2,\ldots,a_h)$, для которых при любом j в множестве $\{a_1^j,a_2^j,\ldots,a_h^j\}$ нет хотя бы одного элемента из E_h. Пусть χ — любое отображение из E_k *на* E_{p^h} и $\rho_k(y_1,y_2,\ldots,y_h)=\rho_p^h(\chi(y_1,y_2,\ldots,y_h))$ (так как χ — отображение *на*, то очевидно, что $p^h\leqslant k$). Все так определяемые предикаты $\rho_k(y_1,y_2,\ldots,y_h)$ для всех простых $p\geqslant 3$ порождают пятое семейство $C=Pol(\rho)$ предполных классов в P_k.

Теорема 13 [26]. *Пусть C — предполный класс из пятого семейства в P_k. Тогда интервал частичных клонов $\mathcal{I}(C)$ в P_k^* содержит континуум классов.*

Шестое семейство предполных классов в P_k составляют классы монотонных функций. Пусть на E_k задано отношение частичного порядка $\leqslant$, и пусть предикат $\rho = \rho(y_1, y_2) \equiv (y_1 \leqslant y_2)$. В шестое семейство входят все классы вида $C = Pol(\rho)$, где ρ — предикат для произвольного отношения частичного порядка на E_k с одним максимальным и одним минимальным элементами.

При $k = 2$ такой класс всего один — это класс M монотонных булевых функций. Для него из [7] следует, что интервал $\mathcal{I}(M)$ состоит из 6 замкнутых классов. Несложно показать, что результат остается аналогичным и для произвольных k для случая, когда частичный порядок на E_k образует решетку, т. е. у любых двух элементов есть наименьшая верхняя грань и наибольшая нижняя грань.

Теорема 14 [31]. *Пусть $C = Pol(\rho)$, где $\rho = \rho(y_1, y_2)$ — отношение частичного порядка на E_k, являющееся решеткой. Тогда интервал частичных клонов $\mathcal{I}(C)$ в P_k^* содержит 6 замкнутых классов.*

Описание этих классов и доказательство теоремы практически полностью может быть выполнено так же, как при $k = 2$ в [7].

Для частичных порядков, не являющихся решетками, вопрос остался открытым. Статья [31] была опубликована в 2006 г., и только в 2017 г. доцент мехмата МГУ О. С. Дудакова для одного из предполных классов M монотонных функций в P_6 доказала, что существует бесконечно много замкнутых классов в P_6^*, содержащих этот класс M [11]. В 2019 г. автор данной статьи в [2] и О. С. Дудакова в [12] независимо получили легко проверяемые необходимые и достаточные условия, при которых множество замкнутых классов в P_k^*, содержащих класс M монотонных функций из P_k, является бесконечным. Таким образом, с учетом ранее полученных результатов, получено полное описание тех предполных классов A в P_k, которые содержатся в конечном числе замкнутых классов в P_k^*.

Единственный вопрос, который здесь остался открытым: какая мощность может быть у бесконечных интервалов $\mathcal{I}(M)$ для монотонных предполных классов M из P_k.

Пусть G и H — частично упорядоченные множества (ч.у.м.) с отношениями $\leqslant_G$ и $\leqslant_H$ соответственно. Отображение $\varphi : G \to H$ называется монотонным, если для любых элементов a, b из G выполняется импликация $a \leqslant_G b \Longrightarrow \varphi(a) \leqslant_H \varphi(b)$.

Зафиксируем на E_k некоторый частичный порядок R. Он порождает на E_k^n частичный порядок $R_n : (a_1, \ldots, a_n) \leqslant_{R_n} (b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow \forall i (a_i \leqslant_R b_i)$. При этом множество всех монотонных функций $f : E_k^n \to E_k$ образует замкнутый класс M_R. Известно, что M_R — предполный класс в P_k тогда и только тогда, когда R имеет ровно один минимальный и ровно один максимальный элемент [18].

Пусть $A \subseteq E_k$, $B \subseteq E_k$, $A \cap B = \varnothing$, $a_i \leqslant_R b_j$ для всех $a_i \in A$, $b_j \in B$. Пару (A, B) будем называть неотделимой, если не существует такого $c \in E_k$, что $a_i \leqslant c \leqslant b_j$ (относительно R) для всех $a_i \in A$, $b_j \in B$.

В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть M_R — предполный класс монотонных функций в P_k и $T(M_R)$ — структура (по включению) всех замкнутых классов из P_k^*, содержащих M_R. Если в E_k нет неотделимых пар (относительно R), то $T(M_R)$ содержит ровно 9 замкнутых классов (и одинакова для всех таких R). Если E_k содержит хотя бы одну неотделимую пару, то структура $T(M_R)$ бесконечна и содержит подструктуру, антиизоморфную ч.у.м. пар натуральных чисел (m, l) с отношением*

$(m_1, l_1) \leqslant (m_2, l_2) \Longleftrightarrow m_1 \leqslant m_2, l_1 \leqslant l_2$. *В частности, в этом случае* $T(M_R)$ *содержит бесконечно убывающую цепочку классов и любое (конечное) число несравнимых классов.*

Трудность составляет вторая часть теоремы, для доказательства которой строятся специальные замкнутые классы следующим образом.

Пару (G, G_1), где G — ч.у.м. и $G_1 \subseteq G$, будем называть ч.у.м. с выделением.

Пусть R — частичный порядок на E_k и S — семейство (конечное или бесконечное) ч.у.м. с выделением. Класс $M_R(S)$ определим как множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $(n = 1, 2, \ldots)$, которые монотонны на своей области определения и обладают свойством: если $G \subseteq E_k^n$, $G_1 \subseteq G$, пара (G, G_1) (с отношением R_n) изоморфна некоторой паре из S и f определена на всем множестве G_1, то ее можно доопределить на всем множестве G так, что она будет монотонна на G. Очевидно, что $M_R \subseteq M_R(S)$ для любого S.

Семейство S назовем слабо замкнутым относительно монотонных отображений, если для любой пары (G, G_1) из S и любого монотонного отображения φ ч.у.м. G *на* ч.у.м. H в S найдется пара (H, H_1) такая, что $H_1 \subseteq \varphi(G_1)$.

Т е о р е м а 16. *Если S — семейство ч.у.м. с выделением, слабо замкнутое относительно монотонных отображений, и R — любой частичный порядок на E_k, то класс $M_R(S)$ замкнут.*

Нижним (верхним) зигзагом длины $2k$ будем называть ч.у.м. с элементами a_0, a_1, …, a_{2k}, в котором для каждого $s = 1, 2, \ldots, k$ выполняются неравенства $a_{2s-1} \leqslant a_{2s-2}$, $a_{2s-1} \leqslant a_{2s}$ (соответственно, $a_{2s-2} \leqslant a_{2s-1}$, $a_{2s} \leqslant a_{2s-1}$) и других сравнимостей нет.

Нижней (соответственно верхней) звездой с m лучами длины $2k$ будем называть ч.у.м., в котором выделены элементы v_0 (центр звезды), $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (концы лучей), центр соединен с каждым концом луча v_i нижним (соответственно верхним) зигзагом длины $2k$, других элементов и сравнимостей нет, и зигзаги не имеют общих вершин, кроме центра звезды. Такую звезду будем обозначать $Z_+(m, k)$ (соответственно $Z^+(m, k)$).

Через $Z(m_1, k; m_2, l)$ обозначим ч.у.м., состоящее из двух непересекающихся звезд: нижней звезды $Z_+(m_1, k)$ с m_1 лучами длины $2k$ и верхней звезды $Z^+(m_2, l)$ с m_2 лучами длины $2l$, а также дополнительного элемента d. Будем считать, что в $Z(m_1, k; m_2, l)$ выполнены все сравнимости из каждой звезды, а также дополнительные сравнимости: $a_i \leqslant d \leqslant b_j$, $a_i \leqslant b_j$ для всех $a_i \in Z_+$, $b_j \in Z^+$ (других сравнимостей нет).

Через $S(m_1, k; m_2, l)$ обозначим семейство всех монотонных образов пары $(Z(m_1, k; m_2, l), Z_+(m_1, k) \cup Z^+(m_2, l))$, т. е. множество всех пар (G, G_1), где G — ч.у.м., $G_1 \subseteq G$, таких, что существует монотонное отображение: φ ч.у.м. $Z(m_1, k; m_2, l)$ *на* ч.у.м. G, при котором $\varphi(Z_+(m_1, k) \cup Z^+(m_2, l)) = G_1$. Семейство $S(m_1, k; m_2, l)$ замкнуто (а значит и слабо замкнуто) относительно монотонных отображений, поскольку произведение двух монотонных отображений снова есть монотонное отображение.

Т е о р е м а 17. *Пусть R — частичный порядок на E_k с одним минимальным и одним максимальным элементом. Пусть (A, B) — неотделимая пара подмножеств в E_k относительно частичного порядка R,*

$|A|=p, |B|=q$, и пусть для любого $c\in A\cup B$ множество $(A\cup B)\setminus\{c\}$ не содержит неотделимых пар подмножеств. Пусть $S_1=S(p,k_1;q,l_1)$, $S_2=S(p,k_2;q,l_2)$. Тогда $M_R(S_2)\subseteq M_R(S_1)\Longleftrightarrow k_1\leqslant k_2$ и $l_1\leqslant l_2$.

Таким образом, вторая часть теоремы 15 вытекает из теорем 16 и 17.

§ 6. Интервалы $Int(A)$

В 2021 г. автор данного обзора начал изучать новые интервалы замкнутых классов в P_k^* [3, 25].

Определение 26. Пусть A — замкнутый класс в P_k. Через $Str(A)$ в [35] обозначено множество всех функций из P_k^*, которые можно доопределить (заменой ∞ на другие значения) до некоторой функции из A.

Легко видеть, что для любого замкнутого класса A класс $Str(A)$ замкнут и $A\subseteq Str(A)$. Очевидно, что множество всюду определенных функций в $Str(A)$ совпадает с A, и значит, $Str(A)$ содержится в интервале $\mathscr{I}(A)$.

Определение 27. Пусть A — замкнутый класс в P_k. Тогда через $Int(A)$ будем обозначать семейство всех замкнутых классов в P_k^*, содержащих A и состоящих только из функций, доопределимых до некоторой функции из A, т. е. $Int(A)=\{B|\ \ B$ — замкнутый класс в P_k^* и $A\subseteq B\subseteq Str(A)\}$.

Замечание 1. Если A — клон в P_k, то все классы B из $Int(A)$ также являются клонами в P_k^* (частичными клонами).

Интересной задачей является следующая.

Проблема. Определить мощность семейства $Int(A)$ для различных замкнутых классов A. Если интервал конечный, то описать решетку замкнутых классов в $Int(A)$ (относительно включения).

Поскольку $A\in\mathscr{I}(A)$ и $Str(A)\in\mathscr{I}(A)$, то $Int(A)\subseteq\mathscr{I}(A)$. Поэтому если интервал $\mathscr{I}(A)$ конечный, то и интервал $Int(A)$ конечный. Однако если интервал $\mathscr{I}(A)$ бесконечный, то интервал $Int(A)$ может быть как бесконечным, так и конечным. Например, для класса L булевских линейных функций мощность $\mathscr{I}(L)$ континуальна, а про $Int(L)$ доказано только, что это семейство бесконечно [7], но точная мощность его неизвестна. Если A — предполный класс монотонных k-значных функций, то семейство $\mathscr{I}(A)$ может быть и конечным и бесконечным, но семейство $Int(A)$ всегда конечно и состоит из 6 замкнутых классов [35].

§ 7. Интервалы $Int(S)$ для классов самодвойственных функций

Задачу описания интервала $Int(S)$ для классов самодвойственных функций (не обязательно предполных) автор данного обзора рассмотрел в 2009 г. [1] в других обозначениях.

Определение 28. Пусть σ — любая подстановка на $E_k=\{0,1,\dots,k-1\}$. Функция из $f(x_1,\dots,x_n)$ из P_k называется самодвойственной относительно подстановки σ, если $\sigma^{-1}(f(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\equiv f(x_1,\dots,x_n)$.

Известно, что класс S_σ функций из P_k, самодвойственных относительно подстановки σ, является предполным тогда и только тогда, когда подстановка σ не имеет неподвижных точек и распадается в произведение независимых циклов одинаковой простой длины p [21]. Для предполных классов S_σ

самодвойственных функций из P_k в [31] доказано, что даже интервал $\mathscr{I}(S)$ является конечным. Автором в [1] рассмотрены классы S_σ функций из P_k, самодвойственных относительно подстановки σ, которая распадается в произведение независимых циклов одинаковой, но не обязательно простой длины m. Доказано, что интервал $Int(S)$ и в этом случае конечен, и описано строение замкнутых классов этого интервала. В частности, показано, что структура этого интервала зависит только от длины циклов, на которые распадается подстановка, и не зависит от числа циклов.

Пусть $k = m \cdot q$ и зафиксирована некоторая подстановка σ на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, которая распадается в произведение q циклов длины m. Очевидно, что σ^m — тождественная подстановка и σ^i не является тождественной подстановкой при $0<i<m$. Пусть S_σ — множество всех полностью определенных k-значных функций, самодвойственных относительно подстановки σ, и $Str(S_\sigma)$ — множество всех функций из P_k^*, доопределимых до функций из S_σ. Теорема, приводимая ниже полностью описывает интервал $Int(S_\sigma)$, состоящий из всех замкнутых классов в P_k^*, лежащих между классами S_σ и $Str(S_\sigma)$.

Пусть M — произвольное непустое семейство подмножеств из множества $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ (в M может входить и пустое подмножество). Тогда через $U(M)$ обозначим множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $Str(S_\sigma)$ таких, что для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ множество

$$\{i \mid i \in E_m, f(\sigma^i(\alpha_1), \ldots, \sigma^i(\alpha_n)) = \infty\}$$

принадлежит M.

Семейство M будем называть замкнутым относительно циклического сдвига, если для любого подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \in M$ выполняется $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_s)\} \in M$.

Теорема 18 [1]. *При любом k для любой подстановки σ, распадающейся в произведение циклов одинаковой длины m, интервал $Int(S_\sigma)$ содержит конечное число замкнутых классов и все эти классы взаимно однозначно представляются в виде $U(M_1) \cup U(M_2) \cup \ldots \cup U(M_s)$, где M_1, $M_2, \ldots$, M_s — семейства подмножеств из E_m, удовлетворяющие условиям:*

1) *каждое M_i замкнуто относительно циклического сдвига и объединения подмножеств;*
2) *ни одно M_i не содержится в другом M_j;*
3) *ровно для одного i выполняется $\varnothing \in M_i$;*
4) $\forall i, j \exists t \forall A, B (A \in M_i, B \in M_j \longrightarrow A \cup B \in M_t)$.

§ 8. Описание интервалов $Int(A)$ с помощью предикатов

В отличие от интервалов $\mathscr{I}(A)$, для интервалов $Int(A)$ имеет место монотонность: если $A \subseteq B$, то мощность интервала $Int(A)$ не меньше, чем мощность интервала $Int(B)$ (см. теорему 20).

Другим преимуществом изучения интервалов $Int(A)$ оказалась их хорошая связь с классами предикатов (отличная от соответствия Галуа [9]). Опишем эту связь. В нашем случае предикаты будут описывать область определенности частичных функций.

Определение 29. Через $Pr(k)$ будем обозначать множество всех предикатов на E_k (т. е. функций, принимающих только значения 0 и 1) от любого числа переменных.

Определение 30. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in Pr(k)$. Тогда через f/R будем обозначать функцию $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_k^*, определяемую следующим образом:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ если } R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1, \\ \infty, \text{ если } R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Замечание 2. В случае $R(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$, выполнено $f/R = f$, а если $R(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, то $f/R = \infty(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \infty$. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, то предикат $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ описывает область определенности функции f/R.

Легко видеть, что выполнено

$$(f/R_1)/R_2 = f/(R_1 \cdot R_2)$$

для любых $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $R_1(x_1, \ldots, x_n) \in Pr(k)$, $R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Pr(k)$ и выполнено

$$f(g_1(y_1, \ldots, y_m)/R_1, \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)/R_n) = \\ = f(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m))/R_1 \cdot \ldots \cdot R_n \quad (1)$$

для любых $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $g_1(y_1, \ldots, y_m) \in P_k^*$, $\ldots$, $g_n(y_1, \ldots, y_m) \in P_k^*$, $R_1(y_1, \ldots, y_m) \in Pr(k)$, $\ldots$, $R_n(y_1, \ldots, y_m) \in Pr(k)$.

Основой для изучения интервалов $Int(A)$ является следующее простое утверждение.

Лемма 2. *Пусть A — клон в P_k и C — частичный клон в $Int(A)$. Пусть $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(\widetilde{x}) \in A$, $f_1(\widetilde{x}) \in A$ и $f(\widetilde{x})/R(\widetilde{x}) \in C$. Тогда также $f_1(\widetilde{x})/R(\widetilde{x}) \in C$.*

Доказательство. Пусть $e_1^2(x_1, x_2) \equiv x_1$ селекторная функция. Так как C — частичный клон и $C \in Int(A)$, то $e_1^2(x_1, x_2) \in C$ и $A \subseteq C$. Тогда $f_1 \in C$ и $e_1^2(f_1(\widetilde{x}), f(\widetilde{x})/R(\widetilde{x})) \in C$. Но, используя (1), получаем:

$$e_1^2(f_1(\widetilde{x}), f(\widetilde{x})/R(\widetilde{x})) = e_1^2(f_1(\widetilde{x}), f(\widetilde{x}))/R(\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x})/R(\widetilde{x}).$$

Следовательно, $f_1(\widetilde{x})/R(\widetilde{x}) \in C$.

Определение 31. Пусть $A \subseteq P_k^*$, $Q \subseteq Pr(k)$. Тогда через A/Q мы обозначаем множество всех функций $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k^*$, представимых в форме $h = f/R$ для некоторых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ и $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$.

Замечание 3. Пусть $A \subseteq P_k$. Тогда $Str(A) = A/Pr(k)$.

Лемма 3. *Пусть A — клон в P_k. Тогда все частичные клоны в $Int(A)$ имеют вид A/Q, где $Q \subseteq Pr(k)$.*

Доказательство. Пусть C — частичный клон в $Int(A)$. Из леммы 2 следует, что если $f(\widetilde{x})/R(\widetilde{x})\in C$, то $A/R\subseteq C$. Таким образом, C является объединением множеств A/R, где R пробегает некоторое подмножество $Q\in Pr(k)$. Тогда по определению $C=A/Q$.

Таким образом, если A — клон в P_k, то для описания $Int(A)$ надо просто найти условия, при которых множество A/Q является клоном в $Int(A)$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Определение 32. Пусть A — замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс из P_k. Определим O_A как множество следующих операций над предикатами из $Pr(k)$:

1) произвольное переименование переменных;
2) добавление и изъятие фиктивных переменных;
3) конъюнкция предикатов;
4) подстановка в предикат функций из A вместо некоторых переменных.

Для $K\subseteq Pr(k)$ через $[K]_A$ будем обозначать замыкание множества предикатов K относительно операций из O_A. Очевидно, что при этом $K\subseteq[K]_A$.

Замечание 4. Заметим, что для любого множества предикатов K из $Pr(k)$ и любого замкнутого класса A из P_k множество предикатов $[K]_A$ замкнуто относительно всех операций из O_A.

Определение 33. Множество всех предикатов $1(x_1,\ldots,x_n)\equiv 1$ от любого числа переменных будем обозначать $\{1\}$.

Определение 34. Пусть A — замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс из P_k. Через $Z(A)$ будем обозначать семейство всех подмножеств в $Pr(k)$, замкнутых относительно всех операций из O_A и содержащих все предикаты $1(x_1,\ldots,x_n)\equiv 1$ от любого числа переменных.

Теорема 19 [25]. *Пусть A — клон в P_k. Тогда верно следующее.*

1) *Все частичные клоны в $Int(A)$ имеют вид A/Q, где $Q\subseteq Pr(k)$.*
2) *Пусть $Q\subseteq Pr(k)$. Тогда $A/Q\in Int(A)$ в том и только в том случае, если $Q\in Z(A)$.*
3) *Отображение $\varphi: Q\to A/Q$ является изоморфизмом решетки множеств из $Z(A)$ (относительно включения множеств) на решетку клонов в $Int(A)$ (относительно включения множеств), т. е. $A/K_1\subseteq A/K_2$ тогда и только тогда, когда $K_1\subseteq K_2$.*

Доказательство. Пункт 1) — это просто доказанная выше лемма 3. Для обоснования 2) мы докажем следующие леммы.

Мы будем использовать обозначение $i=\overline{1,n}$ вместо $i=1,2,3,\ldots,n$.

Лемма 4. *Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P_k$, $g_i(y_1,\ldots,y_m)\in P_k$ для $i=\overline{1,n}$ и пусть*

$$f(g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_m))=F(y_1,\ldots,y_m).$$

Пусть $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in Pr(k)$ и $R_i(y_1,y_2,\ldots,y_m)\in Pr(k)$ для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда

$$(f/R)(g_1/R_1,\ldots,g_n/R_n)=F/R_0,$$

где $R_0=R_0(y_1,y_2,\ldots,y_m)=R_1\cdot R_2\cdot\ldots\cdot R_n\cdot R(g_1,\ldots,g_n)$.

Доказательство. Из определения суперпозиции в P_k^* следует, что функция $(f/R)(g_1/R_1,\ldots,g_n/R_n)$ определена на наборе $(a_1,\ldots,a_m)\in E_k^m$ (и при этом равна $f(g_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,g_n(a_1,\ldots,a_m)))$ тогда и только тогда, когда все функции $g_i(y_1,\ldots,y_m)$ определены на наборе $(a_1,\ldots,a_m)$ и функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_k$ определена на наборе $(g_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots$ $\ldots,g_n(a_1,\ldots,a_m))$. Таким образом, область определенности функции $(f/R)(g_1/R_1,\ldots,g_n/R_n)$ задается предикатом $R_1\cdot R_2\cdot\ldots\cdot R_n\cdot R(g_1,\ldots,g_n)$. Получаем следующее равенство:

$$(f/R)(g_1/R_1,\ldots,g_n/R_n)=f(g_1,\ldots,g_n)/(R_1\cdot R_2\cdot\ldots\cdot R_n\cdot R(g_1,\ldots,g_n)).$$

Лемма 5. *Пусть A — клон в P_k и $Q\in Z(A)$. Тогда A/Q — частичный клон в $Int(A)$.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — любая функция из A. По определению $Str(A)$ имеем: $f/R\in Str(A)$ для любого предиката $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Поэтому $A/Q\subseteq Str(A)$. С другой стороны, по определению $Z(A)$, предикат $1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 1$ содержится в Q. Поэтому $f/1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A/Q$. Но$f/1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f$. Следовательно, $f\in A/Q$. Таким образом, $A\subseteq A/Q\subseteq Str(A)$.

2) Поскольку A — клон, то A содержит все селекторные функции. Так как $A\subseteq A/Q$, то A/Q также содержит все селекторные функции.

3) Пусть $h(x_1,\ldots,x_n)\in A/Q$. Тогда $h=f(x_1,\ldots,x_n)/R(x_1,\ldots,x_n)$ для некоторых $f(x_1,\ldots,x_n)\in A$ и $R(x_1,\ldots,x_n)\in Q$. Легко видеть, что добавление фиктивной переменной в функцию $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ можно реализовать просто добавлением этой переменной как фиктивной в $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $R(x_1,\ldots,x_n)$. Для изъятия фиктивной переменной из $h(x_1,\ldots,x_n)$ достаточно отождествить эту переменную с какой-нибудь из остальных переменных, что можно реализовать отождествлением этих же переменных в функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и предикате $R(x_1,\ldots,x_n)$. Так как A — замкнутый класс и Q замкнуто относительно переименования переменных, то полученная функция также будет лежать в A/Q. Следовательно, A/Q замкнуто относительно добавления и изъятия фиктивных переменных.

4) Пусть $f'(x_1,\ldots,x_n)\in A/Q$, $g_i'(y_1,\ldots,y_m)\in A/Q$ для всех $i=\overline{1,n}$ и пусть $f'(g_1',\ldots,g_n')=F'(y_1,\ldots,y_m)$. Тогда существуют такие функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $g_1(y_1,\ldots,y_m)$, $\ldots$, $g_n(y_1,\ldots,y_m)$ из A и такие предикаты $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $R_1(y_1,\ldots,y_m)$, $\ldots$, $R_n(y_1,\ldots,y_m)$ из Q, что $f'=f/R$, $g_i'=g_i/R_i$, $i=\overline{1,n}$. Пусть

$$f(g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_m))=F(y_1,\ldots,y_m).$$

Так как A — замкнутый класс, то $F\in A$. По лемме 4 имеем: $F'=F/R_0$, где $R_0=R_0(y_1,y_2,\ldots,y_m)=R_1\cdot R_2\cdot\ldots\cdot R_n\cdot R(g_1,\ldots,g_n)$. Так как $R\in Q$, $R_i\in Q$ для всех $i=\overline{1,n}$, $g_i\in A$ для всех $i=\overline{1,n}$ и $Q\in Z(A)$, то $R_0\in Q$. Следовательно, $F'=F/R_0\in A/Q$. Получили, что A/Q замкнуто относительно подстановки в предикат функций из A вместо переменных. Заметим, что переименование переменных является частным случаем подстановки функций из A, поскольку все селекторы входят в A.

Из 1)–4) следует, что A/Q — частичный клон в P_k^* и $A\subseteq A/Q\subseteq Str(A)$. Поэтому $A/Q\in Int(A)$.

Лемма 6. *Пусть A — клон в P_k, $Q \subseteq Pr(k)$ и $A/Q \in Int(A)$. Тогда $Q \in Z(A)$.*

Доказательство. 1) Пусть $R(x_1, \ldots, x_n) \in Q$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любая функция из A. Пусть $R'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ и $f'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ получаются из $R(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ добавлением фиктивной переменной x_{n+1}. Тогда f'/R' также получается из f/R добавлением фиктивной переменной x_{n+1}. Так как по лемме 5 A/Q — частичный клон в P_k^* и $f/R \in A/Q$, то также $f'/R' \in A/Q$. Поскольку функция f' полностью определенная, то отсюда следует, что $R' \in Q$. Получаем, что Q замкнуто относительно добавления фиктивных переменных. Аналогично доказывается, что Q замкнуто относительно изъятия фиктивных переменных.

2) Пусть $R(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, $g_i(y_1, \ldots, y_m) \in A$ для всех $i = \overline{1, n}$. Покажем, что $R(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)) \in Q$. Так как A — клон, то селектор $e_1^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1 \in A$. Следовательно, $e_1^n/R \in A/Q$. Пусть $(e_1^n/R)(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)) = F(y_1, \ldots, y_m)$. Так как $e_1^n/R \in A/Q$, и $g_i \in A \subseteq A/Q$ для всех i, и A/Q — частичный клон, то $F \in A/Q$. Пусть $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Из леммы 4 получаем:

$$F(\widetilde{y}) = e_1^n(g_1(\widetilde{y}), \ldots, g_n(\widetilde{y}))/R(g_1(\widetilde{y}), \ldots, g_n(\widetilde{y})).$$

Так как $F \in A/Q$ и функция $e_1^n(g_1(\widetilde{y}), \ldots, g_n(\widetilde{y}))$ полностью определена, то

$$R(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)) \in Q.$$

3) Пусть $R_1(y_1, \ldots, y_m) \in Q$ и $R_2(y_1, \ldots, y_m) \in Q$. Покажем, что $R_1 \cdot R_2 \in Q$. Так как A — клон, то $e_1^2(x_1, x_2) \equiv x_1 \in A \subseteq A/Q$ и $e_1^m(y_1, \ldots, y_m) \equiv y_1 \in A$. Рассмотрим функцию

$$e_1^2(e_1^m(y_1, \ldots, y_m)/R_1, e_1^m(y_1, \ldots, y_m)/R_2) = h(y_1, \ldots, y_m).$$

Так как A/Q — частичный клон, то $h(y_1, \ldots, y_m) \in A/Q$. Из 4 получаем: $h(y_1, \ldots, y_m) = e_1^m(y_1, \ldots, y_m)/(R_1 \cdot R_2)$. Так как $h \in A/Q$ и функция $e_1^m(y_1, \ldots, y_m)$ полностью определена, то $R_1 \cdot R_2 \in Q$.

4) Пусть предикат $1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любая функция из A. Так как $A/Q \in Int(A)$, то $A \subseteq A/Q$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n)/1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f \in A \subseteq A/Q.$$

Из того, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ полностью определена, получаем, что $1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$. Следовательно, $\{1\} \subseteq Q$.

Из 1)–4) получаем, что $Q \in Z(A)$.

Таким образом, утверждение 2) из теоремы 19 следует из лемм 5 и 6.

Докажем, что отображение $\varphi : Q \to A/Q$ из утверждения 3) теоремы 19 является инъекцией. Пусть $Q_1 \subseteq Pr(k)$, $Q_2 \subseteq Pr(k)$ и $Q_1 \nsubseteq Q_2$. Тогда существует предикат $R(x_1, \ldots, x_n) \in Pr(k)$ такой, что $R(x_1, \ldots, x_n) \in Q_1$, но $R(x_1, \ldots, x_n) \notin Q_2$. Поскольку A — клон, то селектор $e_1^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1$ входит в A. Тогда

$$e_1^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)/R(x_1, \ldots, x_n) \in A/Q_1.$$

Так как $R(x_1, \ldots, x_n) \notin Q_2$ и A содержит только всюду определенные функции, то $e_1^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)/R(x_1, \ldots, x_n) \notin A/Q_2$. Таким образом, $A/Q_1 \nsubseteq A/Q_2$.

Если $Q_1 \neq Q_2$, то $Q_1 \nsubseteq Q_2$ или $Q_2 \nsubseteq Q_1$. Тогда $A/Q_1 \nsubseteq A/Q_2$ или $A/Q_2 \nsubseteq A/Q_1$. Следовательно, отображение $\varphi : Q \to A/Q$ является инъекцией $Z(A)$ в $Int(A)$ (по доказанному утверждению 2) из теоремы 19). Из утверждений 1) и 2) теоремы 19 следует также, что φ является сюръекцией $Z(A)$ на $Int(A)$. Таким образом, φ — взаимно однозначное соответствие. Очевидно, что

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Longrightarrow A/Q_1 \subseteq A/Q_2,$$

и выше мы доказали, что

$$Q_1 \nsubseteq Q_2 \Longrightarrow A/Q_1 \nsubseteq A/Q_2.$$

Следовательно, φ — изоморфизм.

Теорема 19 позволяет сводить изучение интервала $Int(A)$ (как частично упорядоченного множества) к изучению частично упорядоченного множества $Z(A)$, что во многих случаях оказывается проще. В частности, сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 20. *Пусть A и B — клоны в P_k и $A \subseteq B$. Тогда структура $Int(B)$ (как частично упорядоченное множество с отношением включения) изоморфна некоторой подструктуре частично упорядоченного множества $Int(A)$.*

Доказательство. Если A и B — клоны в P_k и $A \subseteq B$, то все операции из O_A содержатся среди операций из O_B. Поэтому любой класс предикатов, замкнутый относительно операций из O_B, замкнут и относительно операций из O_A. Таким образом, структура $Z(B)$ (с отношением включения) получается из структуры $Z(A)$ «прореживанием» (возможно, структуры совпадают). С учетом теоремы 19 получаем отсюда утверждение теоремы 20.

Таким образом, при переходе к более широкому клону мощность $Int(A)$ не может увеличиваться (при этом, так как в P_k^* счетное число функций, то мощность $Int(A)$ при любом A не превосходит континуума).

§ 9. Мощность интервала $Int(I)$

Обычно рассматривают только те замкнутые классы (клоны), которые содержат все селекторные функции (равные просто переменной). Учитывая монотонность мощности $Int(A)$ для клонов, интересно рассмотреть самый маленький из клонов, которым является класс I всех селекторов.

Теорема 21. *Пусть I — замкнутый класс в P_k, состоящий только из всех селекторов (функций, тождественно равных одной из переменных). Тогда интервал $Int(I)$ для любого $k \geqslant 2$ содержит континуум замкнутых классов.*

Доказательство. Рассмотрим следующие предикаты на E_k ($n = 1, 2, \ldots$):

$$Maj_n = Maj_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ если } x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n/2, \\ 0 \text{ если } x_1 + x_2 + \ldots + x_n < n/2. \end{cases}$$

Лемма 7. *Пусть* $S = \{v_{2n}, n = 2, 3, 5, \ldots\}$, *где* n *пробегает множество простых чисел. Тогда ни один предикат из* S *нельзя получить из остальных предикатов множества* S *и предикатов из* $\{1\}$ *с помощью операций из* O_I.

Доказательство. Так как I состоит только из селекторов и подстановка селектора вместо переменной равносильна переименованию переменной, то множество операций O_I состоит только из добавления и изъятия фиктивных переменных, переименования переменных и конъюнкции предикатов. Предположим, что предикат Maj_{2p} (где p — простое) может быть получен из остальных предикатов множества S и предикатов из $\{1\}$ с помощью операций из O_I. Тогда для некоторого простого числа q (где $q \neq p$) мы должны иметь $Maj_{2p}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p}) = Maj_{2q}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2q}}) \cdot \ldots$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_{2q}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ появляются среди $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2q}}$ соответственно $r_1, r_2, \ldots, r_{2p}$ раз. Тогда $r_1 + r_2 + \ldots + r_{2p} = 2q$. Поскольку p и q — различные простые числа, то $2q$ не делится на $2p$. Следовательно, среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2p}$ есть разные числа. Не ограничивая общности, можем считать, что $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots r_{2p}$. Тогда $r_1 + r_2 + \ldots + r_p < r_{p+1} + r_{p+2} + \ldots + r_{2p}$. Откуда $r_1 + r_2 + \ldots + r_p < q$. Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 1$ и $x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_{2p} = 0$. Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2p} = p$ и $Maj_{2p}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p}) = 1$. Но $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{2q}} = r_1 + r_2 + \ldots + r_p < q$ и $Maj_{2q}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2q}}) = 0$. Получили, что $1 = 0$. Это противоречие доказывает лемму 7.

Из леммы 7 вытекает, что замыкания разных подмножеств из множества $S = \{Maj_4, Maj_6, Maj_{10}, \ldots\}$ относительно операций из O_I дают разные классы из $Z(I)$. Получаем, что мощность семейства $Z(I)$ равна континууму. Тогда справедливость теоремы 21 вытекает из теоремы 19.

Проблема. Интересно определить мощность интервала $Int(A)$ для других замкнутых классов A из P_k, в частности для всех замкнутых классов A из P_2. В [29] показано, что мощность интервала $I(A)$ для любого замкнутого класса A из P_2 либо конечна, либо равна континууму. Для последних классов интересно выяснить, сохранится ли континуальность при переходе к интервалу $Int(A)$ и бывают ли классы, для которых эта мощность становится счетной.

§ 10. Свойства семейств $Z(A)$. Базисные классы

Определение 35. Пусть $K_1, K_2 \subseteq Pr(k)$. Тогда положим $K_1 \cdot K_2 = \{R_1 \cdot R_2 \mid R_1 \in K_1, R_2 \in K_2\}$. Здесь под умножением предикатов понимается их конъюнкция.

Определение 36. Множество всех предикатов $0(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ от любого числа переменных будем обозначать $\{0\}$.

Очевидно, что $\{0\} \cdot K = \{0\}$ и $\{1\} \cdot K = K$ для любого подмножества предикатов K. Введенная операция умножения на семействе всех подмножеств предикатов коммутативна и ассоциативна, а также дистрибутивна относительно объединения подмножеств предикатов по любому сомножителю. Следовательно, семейство всех подмножеств предикатов с операциями объединения и умножения подмножеств образует коммутативное полукольцо с единицей и нулем.

Утверждение 2. *Пусть A — замкнутый класс в P_k, K_1 — любое подмножество предикатов и $K_2 \in Z(A)$. Тогда $K_1 \subseteq K_1 \cdot K_2$.*

Доказательство. Так как $K_2 \in Z(A)$, то (по определению) множество тождественно истинных предикатов $\{1\}$ содержится в $Z(A)$. Поэтому $K_1 = K_1 \cdot \{1\} \subseteq K_1 \cdot K_2$.

Утверждение 3. *Пусть A — замкнутый класс в P_k и $K \in Z(A)$. Тогда $K \cdot K = K$.*

Доказательство. Из утверждения 2 получаем, что $K \subseteq K \cdot K$. С другой стороны, так как $K \in Z(A)$, то K замкнуто относительно конъюнкции предикатов. Следовательно, $K \cdot K \subseteq K$. Отсюда $K \cdot K = K$.

Утверждение 4. *Пусть A — замкнутый класс в P_k и пусть $K_1 \in Z(A)$, $K_2 \in Z(A)$. Тогда также $K_1 \cdot K_2 \in Z(A)$.*

Доказательство. Так как $K_1 \in Z(A)$ и $K_2 \in Z(A)$, то (по определению) $\{1\} \subseteq K_1$ и $\{1\} \subseteq K_2$. Тогда $\{1\} = \{1\} \cdot \{1\} \subseteq K_1 \cdot K_2$. Очевидно, что класс $K_1 \cdot K_2 = \{R_1 \cdot R_2 | R_1 \in K_1, R_2 \in K_2\}$ замкнут относительно операций 1, 2 и 4 из O_A (так как K_1 и K_2 замкнуты относительно этих операций). Пусть p и q — предикаты, $p \in K_1 \cdot K_2$ и $q \in K_1 \cdot K_2$. Это значит, что существуют $p_1, p_2 \in K_1$ и $q_1, q_2 \in K_2$ такие, что $p = p_1 \cdot p_2$ и $q = q_1 \cdot q_2$. Тогда $p \cdot q = (p_1 \cdot p_2) \cdot (q_1 \cdot q_2) = (p_1 \cdot q_1) \cdot (p_2 \cdot q_2)$. Так как $K_1 \in Z(A)$ и $K_2 \in Z(A)$, то они замкнуты относительно конъюнкции предикатов. Поэтому $p_1 \cdot q_1 \in K_1$ и $p_2 \cdot q_2 \in K_2$. Следовательно, $p \cdot q \in K_1 \cdot K_2$. Получили, что класс $K_1 \cdot K_2$ замкнут относительно операции 3 (конъюнкции предикатов) из O_A. Таким образом, класс $K_1 \cdot K_2$ замкнут относительно всех операций из O_A и содержит $\{1\}$. Следовательно, $K_1 \cdot K_2 \in Z(A)$.

Утверждение 5. *Пусть A — замкнутый класс в P_k и пусть $K_i \in Z(A)$ для всех $i = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$. Тогда также $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \in Z(A)$.*

Доказательство. Так как $K_i \in Z(A)$, то все K_i замкнуты относительно операций 1, 2 и 4 из O_A. Тогда легко видеть, что и $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \in Z(A)$ замкнуто относительно этих операций. Пусть R_1 и R_2 — два предиката из $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \in Z(A)$. Тогда существуют i и j такие, что $R_1 \in K_i$, $R_2 \in K_j$. Так как $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots$, то существует r такое, что $R_1 \in K_r$ и $R_2 \in K_r$. Поскольку $K_r \in Z(A)$, то K_r замкнут относительно операции 3 из O_A (конъюнкции предикатов). Следовательно, $R_1 \cdot R_2 \in K_r$, а значит, $R_1 \cdot R_2 \in \cup_{i=1}^{\infty} K_i$. Получили, что класс $\cup_{i=1}^{\infty} K_i$ замкнут относительно операции 3 из O_A (конъюнкции предикатов). Так как $K_1 \in Z(A)$, то по определению$K_1 \supseteq \{1\}$ и, следовательно, $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \supseteq \{1\}$. Таким образом, класс $\cup_{i=1}^{\infty} K_i$ замкнут относительно всех операций из O_A и содержит $\{1\}$. Следовательно, класс $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \in Z(A)$.

Определение 37. Под произведением бесконечного числа классов будем понимать объединение всех конечных произведений этих классов. В частности, сами классы тоже входят в это объединение.

Утверждение 6. *Пусть A — замкнутый класс в P_k, и пусть $K_i \in Z(A)$, для $i = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда $\Pi_{i=1}^{\infty} K_i \in Z(A)$.*

Доказательство. Обозначим $\Pi_{i=1}^{m} K_i$ через N_m. Из утверждения 4 следует, что $N_m \in Z(A)$ при всех m. Из утверждения 2 получаем, что $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$. Пусть K — произведение некоторых K_i и пусть m — максимальное i, входящее в это произведение. Тогда из утверждения 2 получаем, что $K \subseteq K \cdot N_m$. Но с учетом утверждения 3 получаем, что $K \cdot N_m = N_m$

и, следовательно, $K \subseteq N_m$. Отсюда следует, что $\Pi_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} N_m$. Из определения $\Pi_{i=1}^{\infty} K_i$ следует, что $N_m \subseteq \Pi_{i=1}^{\infty} K_i$ при всех m, откуда $\cup_{m=1}^{\infty} N_m \subseteq \Pi_{i=1}^{\infty} K_i$. Поскольку выше есть обратное включение, то $\Pi_{i=1}^{\infty} K_i = \cup_{m=1}^{\infty} N_m$. Так как $N_m \in Z(A)$ при всех m, то по утверждению 5 $\Pi_{i=1}^{\infty} K_i = \cup_{m=1}^{\infty} N_m \in Z(A)$.

Следующее понятие предложено М. И. Мироновым.

Определение 38. Класс K из $Z(A)$ будем называть базисным классом для $Z(A)$, если существует такой предикат $R \in Pr(k)$, что $[R \cup \{1\}]_A = K$.

Замечание 5. Так как множество всех предикатов R в $Pr(k)$ счетно, то для любого A множество базисных классов для $Z(A)$ не более чем счетно.

Замечание 6. Поскольку $K \cdot \{1\} = K$ для любого подмножества предикатов K, то легко видеть, что для любого предиката R из $Pr(k)$ выполняется: $[R \cup \{1\}]_A = [R]_A \cup \{1\}$.

Для описания $Z(A)$ мы используем следующее утверждение [8].

Теорема 22. *Пусть A — замкнутый класс в P_k. Тогда семейство $Z(A)$ состоит в точности из всех произведений (возможно бесконечных) базисных классов для $Z(A)$.*

Доказательство. 1) По определению все базисные классы для $Z(A)$ входят в $Z(A)$. Поэтому из утверждений 4 и 6 вытекает, что все их произведения как конечные, так и бесконечные, входят в $Z(A)$.

2) Покажем, что любой класс K из $Z(A)$ является произведением (возможно бесконечным) базисных классов для $Z(A)$. Пусть $\{R_1, R_2, \ldots\}$ — все предикаты из K, отличные от тождественно истинных предикатов (их множество не более чем счетно). Так как $K \in Z(A)$, то (по определению) $\{1\} \subseteq K$. Тогда $R_i \cup \{1\} \subseteq K$, и значит, $[R_i \cup \{1\}]_A \subseteq K$, поскольку K замкнуто относительно всех операций из O_A. Все классы $[R_i \cup \{1\}]_A$, $i = 1, 2, \ldots$ являются базисными классами для $Z(A)$ по определению. Обозначим через N бесконечное (или конечное) произведение $\Pi_{i=1}^{\infty}[R_i \cup \{1\}]_A$. Из утверждений 4 и 6 следует, что $N \in Z(A)$. Поскольку $[R_i \cup \{1\}]_A \subseteq K$ при всех i и K замкнуто относительно конъюнкции предикатов, то $N \subseteq K$. С другой стороны, из определения 37 имеем, что $[R_i \cup \{1\}]_A \subseteq N$ для всех i. Поскольку $R_i \in [R_i \cup \{1\}]_A$, то $R_i \in N$ для всех i, а так как $N \in Z(A)$, то $\{1\} \subseteq N$. Отсюда $K \subseteq N$. Из двух полученных включений следует, что $K = N = \Pi_{i=1}^{\infty}[R_i \cup \{1\}]_A$.

§ 11. Интервалы $Int(Pol_k)$

Одним из важных замкнутых классов в P_k является класс Pol_k всех функций, представимых полиномом по модулю k, т. е. полиномом с операциями сложения и умножения по модулю k. Этот класс активно исследовался многими математиками.

Автор данной статьи рассмотрел интервал $Int(Pol_k)$ в работах [3, 4, 25]. Если k — простое число, то $Pol_k = P_k$ и $Int(Pol_k)$ состоит из 3 классов: P_k, $P_k \cup \{\infty\}$ и P_k^*. В [25] рассмотрен случай, когда k (значность логики) является произведением двух различных простых чисел p и q. Для упрощения изложения рассмотрен случай $k = 6 = 2 \cdot 3$, но указано, что все результаты справедливы и для общего случая.

Пусть $k=p\cdot q$, где p и q — различные простые числа. Согласно китайской теореме об остатках, каждый элемент a из $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$ может быть взаимно однозначно представлен парой $(a^{(p)},a^{(q)})$, где $a^{(p)}$ и $a^{(q)}$ — остатки от деления a на p и q. Аналогично можно представлять любую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_k$ парой функций:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(f^{(p)}(x_1,\ldots,x_n),f^{(q)}(x_1,\ldots,x_n)).$$

Точно так же можно представлять любую переменную x_i парой $(x_i^{(p)},x_i^{(q)})$, а значит, и набор переменных $\widetilde{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ парой наборов $\widetilde{x}=(\widetilde{x}^{(p)},\widetilde{x}^{(q)})$. Тогда можно записать:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(f^{(p)}(\widetilde{x}^{(p)},\widetilde{x}^{(q)}),f^{(q)}(\widetilde{x}^{(p)},\widetilde{x}^{(q)})).$$

Определим следующие множества предикатов на E_k.

1) $Q_0=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R\equiv 1, n=0,1,2,\ldots\}$;
2) $Q_1=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R\equiv 1$ или $R\equiv 0, n=0,1,2,\ldots\}$;
3) $Q_2=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R(\widetilde{x})=R'(\widetilde{x}^{(p)}), R'\in Pr(p)\}$;
4) $Q_3=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R(\widetilde{x})=R''(\widetilde{x}^{(q)}), R''\in Pr(q)\}$;
5) $Q_4=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R(\widetilde{x})=R'(\widetilde{x}^{(p)})\cdot R''(\widetilde{x}^{(q)}), R'\in Pr(p), R''\in Pr(q)\}$;
6) $Q_5=\{R(x_1,\ldots,x_n)\mid R(\widetilde{x})=\bigvee\limits_{i=1}^{t} R_i'(\widetilde{x}^{(p)})\cdot R_i''(\widetilde{x}^{(q)}), t=1,2,\ldots;\ R_i'\in Pr(p)$, $R_i''\in Pr(q)$ для всех i и $R_i'\cdot R_s'\equiv 0$, $R_i''\cdot R_s''\equiv 0$ для всех $i\neq s\}$;
7) $Q_6=Pr(k)$.

Результатом статьи [25] является следующая теорема.

Теорема 23. *Пусть $k=p\cdot q$, где p и q — различные простые числа. Тогда интервал $Int(Pol_k)$ состоит из 7 замкнутых классов, а именно: Pol_k/Q_i, $i=\overline{0,6}$. Для этих замкнутых классов выполняются следующие включения: $Pol_k/Q_0\subset Pol_k/Q_1\subset Pol_k/Q_2\subset Pol_k/Q_4\subset Pol_k/Q_5\subset Pol_k/Q_6$, $Pol_k/Q_1\subset Pol_k/Q_3\subset Pol_k/Q_4$, а Pol_k/Q_2 и Pol_k/Q_3 не сравнимы.*

Доказательство этой теоремы основано на приведенной выше теореме 19. Для чего достаточно доказать, что множества предикатов $Q_0,\ldots,Q_6$ различны и $Z(Pol_k)$ состоит в точности из этих 7 множеств предикатов.

В статье [3] рассмотрен случай, когда k (значность логики) имеет не менее 3 различных простых делителей. Оказалось, что ситуация кардинально меняется. А именно доказана следующая теорема.

Теорема 24. *Пусть натуральное число k имеет хотя бы 3 различных простых делителя. Тогда семейство $Int(Pol_k)$ бесконечно, в частности в нем есть бесконечно убывающая (относительно вложения) цепочка различных замкнутых классов.*

Доказательство этой теоремы также основано на приведенной выше теореме 19. Для чего конструктивно строится бесконечно убывающая (относительно вложения) цепочка различных классов предикатов, замкнутых относительно всех операций из O_{Pol_k}, сначала для k, являющегося произведением трех различных простых чисел, а затем и для любого k, имеющего хотя бы 3 различных простых делителя.

Окончательно вопрос решен в статье [4], где доказана следующая теорема.

Теорема 25. *Пусть натуральное число k делится на квадрат простого числа. Тогда семейство $Int(Pol_k)$ бесконечно, в частности в нем есть бесконечно возрастающая (относительно вложения) цепочка различных замкнутых классов.*

Здесь также конструктивно строится бесконечно возрастающая (относительно вложения) цепочка различных классов предикатов, замкнутых относительно всех операций из O_{Pol_k}, сначала для k, являющегося квадратом простого числа, а затем и для любого k, которое делится на квадрат простого числа. В заключение применяется теорема 19.

Окончательный результат имеет следующий вид.

Теорема 26. *Если $k \geqslant 2$ — простое число или произведение двух различных простых чисел, то семейство $Int(Pol_k)$ содержит конечное число замкнутых классов; в остальных случаях это семейство бесконечно.*

§ 12. Описание интервала $Int(S \cap T_0 \cap T_1)$ в P_2^*

Пусть S — это класс самодвойственных булевых функций, а T_0 и T_1 — классы булевых функций, сохраняющих, соответственно, 0 и 1. В качестве иллюстрации применения теорем 19 и 22 приведем доказательство теоремы, анонсированной в [6] без доказательства. В ней описывается интервал $Int(S \cap T_0 \cap T_1)$ в P_2^*.

Определение 39. Для набора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ из E_2^h противоположным будем называть набор $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_h)$. Введем в множестве $Pr(2)$ всех предикатов на E_2 следующие классы предикатов: A — класс всех четных предикатов, т. е. предикатов, принимающих на любых двух противоположных наборах одинаковые значения; B — класс всех предикатов, у которых на каждой паре противоположных наборов хотя бы одно значение равно 0; C — класс всех предикатов $Pr(2)$. Если X — один из классов A, B или C и $a, b \in \{0, 1\}$, то положим

$$X_{ab} = \{p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \mid p(0, \ldots, 0) = a, p(1, \ldots, 1) = b\}.$$

Замечание 7. Из определения 39 следует, что не существует классов A_{01}, A_{10} и B_{11}.

Далее в теореме 27 и ее доказательстве рассматриваются предикаты только из $Pr(2)$.

Теорема 27. *Базисными классами для $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$ являются только следующие 11 классов предикатов:* $\{1\}$, $\{1\} \cup \{0\}$, $\{1\} \cup A_{00}$, A_{11}, $\{1\} \cup B_{00}$, $\{1\} \cup B_{01}$, $\{1\} \cup B_{10}$, $\{1\} \cup C_{00}$, $\{1\} \cup C_{01}$, $\{1\} \cup C_{10}$, C_{11}.

Доказательство. По определению базисные классы для $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$ — это классы вида $[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = [R]_{S \cap T_0 \cap T_1} \cup \{1\}$ (см. замечание 6) для произвольных предикатов $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ из $Pr(2)$. Напомним, что указанное замыкание означает возможность многократного применения следующих операций: 1) произвольное переименование переменных; 2) добавление и изъятие фиктивных переменных; 3) конъюнкция предикатов;

4) подстановка в предикат функций из $S\cap T_0\cap T_1$ вместо некоторых переменных.

Лемма 8. *Классы предикатов A, B и C замкнуты относительно всех операций из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$.*

Доказательство. Для класса C лемма очевидна. Легко видеть, что классы A и B замкнуты относительно операций 2) и 3). Так как при переименовании переменных противоположные наборы переходят в противоположные, то классы A и B замкнуты относительно операции 1). Пусть $R(y_1,y_2,\ldots,y_h)$ — предикат из A или B и пусть $f_i\in S\cap T_0\cap T_1$ для $i=1,2,\ldots,h$. Пусть $R(f_1,f_2,\ldots,f_h)=R_1(z_1,z_2,\ldots,z_m)$. Рассмотрим следующий оператор:

$$\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_m)=(f_1(z_1,z_2,\ldots,z_m),f_2(z_1,z_2,\ldots,z_m),\ldots,f_h(z_1,z_2,\ldots,z_m)),$$

отображающий E_2^m в E_2^h. Тогда $R_1(z_1,z_2,\ldots,z_m)=R(\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_m))$. Поскольку все функции f_1, f_2, …, f_h — самодвойственные, то оператор Φ отображает противоположные наборы в противоположные. Поэтому если предикат R обладает свойством, задающим класс A или B, то и предикат R_1 обладает таким же свойством, Получаем, что классы A и B замкнуты относительно всех операций из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$.

Лемма 9. *Пусть X — один из классов A, B или C и $a,b\in\{0,1\}$, тогда класс X_{ab} замкнут относительно всех операций из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$.*

Доказательство. По лемме 8 замыкание X_{ab} относительно всех операций из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$ содержится в X. Легко видеть, что свойство $p(0,\ldots,0)=a$, $p(1,\ldots,1)=b$ сохраняется при переименовании переменных, добавлении и изъятии фиктивных переменных и конъюнкции предикатов. Пусть $R\in X_{ab}$ и $R_1(z_1,z_2,\ldots,z_m)=R(\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_m))$, где

$$\Phi(z_1,z_2,\ldots,z_m)=(f_1(z_1,z_2,\ldots,z_m),f_2(z_1,z_2,\ldots,z_m),\ldots,f_h(z_1,z_2,\ldots,z_m))$$

и все $f_i\in S\cap T_0\cap T_1$. Так как все $f_i\in S\cap T_0\cap T_1$, то $f_i(0,0,\ldots,0)=0$ и $f_i(1,1,\ldots,1)=1$ для всех i. Поэтому $\Phi(0,0,\ldots,0)=(0,0,\ldots,0)$ и $\Phi(1,1,\ldots,1)=(1,1,\ldots,1)$, откуда

$$R_1(0,0,\ldots,0)=R(\Phi(0,0,\ldots,0))=R(0,0,\ldots,0)=a$$

и

$$R_1(1,1,\ldots,1)=R(\Phi(1,1,\ldots,1))=R(1,1,\ldots,1)=b.$$

Таким образом, свойство $p(0,\ldots,0)=a,p(1,\ldots,1)=b$ сохраняется и при подстановке функций из $S\cap T_0\cap T_1$ в предикаты из X_{ab}. Получаем, что класс X_{ab} замкнут относительно всех операций из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$.

Лемма 10. *Все классы из теоремы 27 входят в $Z(S\cap T_0\cap T_1)$.*

Доказательство. Так как для любого класса предикатов K выполняется $[K\cup\{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1}=[K]_{S\cap T_0\cap T_1}\cup\{1\}$, то утверждение леммы 10 вытекает из леммы 9.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Если $R(y_1,y_2,\ldots,y_h)\equiv 1$, то $[R\cup\{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1}=\{1\}$. Если $R(y_1,y_2,\ldots,y_h)\equiv 0$, то $[R\cup\{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1}=\{1\}\cup\{0\}$.*

Лемма 12. *Пусть* $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — *четный предикат, отличный от константы, и пусть* $R(0, 0, \ldots, 0) = R(1, 1, \ldots, 1) = a$. *Тогда* $[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = \{1\} \cup A_{aa}$.

Доказательство. Так как по условию $R \in A_{aa}$, то из леммы 9 получаем, что $[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = [R]_{S \cap T_0 \cap T_1} \cup \{1\} \subseteq A_{aa}$. Также очевидно, что $\{1\} \subseteq [R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1}$.

Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — произвольный предикат из A_{aa}. Покажем, что он входит в $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$. По условию $R(0, 0, \ldots, 0) = R(1, 1, \ldots, 1) = a$. Так как по условию $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — четный предикат, отличный от константы, то существуют 2 противоположных набора α и $\overline{\alpha}$ такие, что $R(\alpha) = R(\overline{\alpha}) = \overline{a}$.

Зададим оператор $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m) : E_2^m \to E_2^h$ следующим образом. Если $Q(0, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = a$, а значит, и $Q(1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_m) = a$ (так как $Q \in A$), то тогда положим $\Phi(0, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = (0, 0, \ldots, 0)$, а $\Phi(1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_m) = (1, 1, \ldots, 1)$. Если же $Q(0, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \overline{a}$, а значит, и $Q(1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_m) = \overline{a}$, то положим $\Phi(0, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \alpha$, а $\Phi(1, \overline{\gamma}_2, \ldots, \overline{\gamma}_m) = \overline{\alpha}$. Тогда $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m))$. При этом значениями оператора Φ на любой паре противоположных наборов являются два противоположных набора. Следовательно, любая координата f_i оператора Φ на любой паре противоположных наборов принимает противоположные значения, т. е. $f_i \in S$. При этом так как $Q \in A_{aa}$, то $Q(0, 0, \ldots, 0) = Q(1, 1, \ldots, 1) = a$. Тогда по построению $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и $f_i(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Таким образом, все $f_i \in S \cap T_0 \cap T_1$ и

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m), \ldots, f_h(z_1, z_2, \ldots, z_m)).$$

Поскольку предикат Q получается путем подстановки в предикат R функций из класса $S \cap T_0 \cap T_1$, то, по определению замыкания, $Q \in [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$.

Таким образом, $A_{aa} \subseteq [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$ и

$$\{1\} \cup A_{aa} \subseteq \{1\} \cup [R]_{S \cap T_0 \cap T_1} = [R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1}.$$

Поскольку в начале доказательства есть обратное включение, то получаем $[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = \{1\} \cup A_{aa}$.

Лемма 13. *Пусть* $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — *некоторый предикат и пусть существуют 2 противоположных набора* α *и* $\overline{\alpha}$ *такие, что* $R(\alpha) = 0$, $R(\overline{\alpha}) = 1$. *Пусть* $R(0, 0, \ldots, 0) = a$, $R(1, 1, \ldots, 1) = b$. *Тогда множество* $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$ *содержит все предикаты* $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *из* $Pr(2)$ *такие, что* $Q(0, 0, \ldots, 0) = a$, $Q(1, 1, \ldots, 1) = b$, *а на любой другой паре противоположных наборов* Q *принимает противоположные значения.*

Доказательство. Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — любой предикат из $Pr(2)$ такой, что $Q(0, 0, \ldots, 0) = a$, $Q(1, 1, \ldots, 1) = b$, а на любой другой паре противоположных наборов Q принимает противоположные значения. Покажем, что он входит в $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$.

Зададим оператор $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m) : E_2^m \to E_2^h$ следующим образом. Положим $\Phi(0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0)$ и $\Phi(1, 1, \ldots, 1) = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть γ и $\overline{\gamma}$ — любая другая пара противоположных наборов. По условию значения $Q(\gamma)$ и $Q(\overline{\gamma})$ противоположны. Пусть $Q(\gamma) = 0$, $Q(\overline{\gamma}) = 1$. Тогда положим $\Phi(\gamma) = \alpha$, а $\Phi(\overline{\gamma}) = \overline{\alpha}$. Получаем, что $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m))$. При этом значениями оператора Φ на любой паре противоположных наборов являются два противоположных набора. Следовательно, любая координата f_i оператора Φ на любой паре противоположных наборов принимает противоположные значения, т. е. $f_i \in S$. При этом $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и $f_i(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Таким образом, все $f_i \in S \cap T_0 \cap T_1$ и

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m), \ldots, f_h(z_1, z_2, \ldots, z_m)).$$

Поскольку предикат Q получается путем подстановки в предикат R функций из класса $S \cap T_0 \cap T_1$, то, из определения замыкания вытекает, что $Q \in [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$.

Лемма 14. *Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — некоторый предикат, и пусть существуют 2 противоположных набора α и $\overline{\alpha}$ такие, что $R(\alpha) = 0$, $R(\overline{\alpha}) = 1$. Пусть $R(0, 0, \ldots, 0) = a$, $R(1, 1, \ldots, 1) = b$. Тогда множество $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$ содержит все предикаты $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ из $Pr(2)$ такие, что $Q(0, 0, \ldots, 0) = a$, $Q(1, 1, \ldots, 1) = b$, а на любой другой паре противоположных наборов Q принимает хотя бы одно значение 0, т. е. $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1} \supseteq B_{ab}$..*

Доказательство. Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — произвольный предикат из B_{ab}. Покажем, что он входит в $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$. Построим по нему два новых предиката $Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и $Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ следующим образом. Положим

$$Q_1(0, 0, \ldots, 0) = Q_2(0, 0, \ldots, 0) = a, Q_1(1, 1, \ldots, 1) = Q_2(1, 1, \ldots, 1) = b.$$

Пусть γ и $\overline{\gamma}$ — любая другая пара противоположных наборов. Если значения $Q(\gamma)$ и $Q(\overline{\gamma})$ противоположные, то положим

$$Q_1(\gamma) = Q_2(\gamma) = Q(\gamma) \text{ и } Q_1(\overline{\gamma}) = Q_2(\overline{\gamma}) = Q(\overline{\gamma}).$$

Если $Q(\gamma) = Q(\overline{\gamma}) = 0$ (других вариантов быть не может), то положим $Q_1(\gamma) = 0$, $Q_1(\overline{\gamma}) = 1$, $Q_2(\gamma) = 1$, $Q_2(\overline{\gamma}) = 0$. Тогда получим, что

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) \cdot Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m).$$

Из леммы 13 получаем, что Q_1 и Q_2 принадлежат замыканию $[R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$, а так как оно замкнуто относительно, то и $Q \in [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$. Таким образом, $B_{ab} \subseteq [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$.

Лемма 15. *Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — предикат, у которого на каждой паре противоположных наборов хотя бы одно значение равно 0, но отличный от константы 0. И пусть $R(0, 0, \ldots, 0) = a$, $R(1, 1, \ldots, 1) = b$ (либо a, либо b должно равняться 0). Тогда $[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = \{1\} \cup B_{ab}$.*

Доказательство. Так как по условию $R \in B_{ab}$, то по лемме 9

$$[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = [R]_{S \cap T_0 \cap T_1} \cup \{1\} \subseteq B_{ab} \cup \{1\}.$$

Из леммы 14 следует, что $B_{ab} \subseteq [R]_{S \cap T_0 \cap T_1}$, откуда

$$\{1\} \cup B_{ab} \subseteq \{1\} \cup [R]_{S \cap T_0 \cap T_1} = [R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1}.$$

Из двух противоположных включений получаем, что

$$[R \cup \{1\}]_{S \cap T_0 \cap T_1} = \{1\} \cup B_{ab}.$$

Лемма 16. *Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — предикат, не являющийся четным. Пусть существуют два противоположных набора α и $\overline{\alpha}$ такие, что $R(\alpha) = R(\overline{\alpha}) = 1$. Пусть $R(0, 0, \ldots, 0) = a$, $R(1, 1, \ldots, 1) = b$. Тогда* *множество $[R]_{S\cap T_0\cap T_1}$ содержит все предикаты $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ из $Pr(2)$ такие, что $Q(0, 0, \ldots, 0) = a$, $Q(1, 1, \ldots, 1) = b$, а на любой другой паре противоположных наборов Q принимает хотя бы одно значение 1.*

Доказательство. Так как предикат R не является четным, то существуют 2 противоположных набора β и $\overline{\beta}$ такие, что $R(\beta) = 0$, $R(\overline{\beta}) = 1$. Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — любой предикат из $Pr(2)$ такой, что $Q(0, 0, \ldots, 0) = a$, $Q(1, 1, \ldots, 1) = b$, а на любой другой паре противоположных наборов Q принимает хотя бы одно значение 1. Покажем, что он входит в $[R]_{S\cap T_0\cap T_1}$. Зададим оператор $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\colon E_2^m \to E_2^h$ следующим образом. Положим

$$\Phi(0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \text{ и } \Phi(1, 1, \ldots, 1) = (1, 1, \ldots, 1).$$

Пусть γ и $\overline{\gamma}$ — любая другая пара противоположных наборов. Если $Q(\gamma) = Q(\overline{\gamma}) = 1$, то положим $\Phi(\gamma) = \alpha$, а $\Phi(\overline{\gamma}) = \overline{\alpha}$. Если $Q(\gamma) = 0$, $Q(\overline{\gamma}) = 1$ (других вариантов быть не может), то положим $\Phi(\gamma) = \beta$, а $\Phi(\overline{\gamma}) = \overline{\beta}$. Тогда $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_m))$. При этом значениями оператора Φ на любой паре противоположных наборов являются два противоположных набора. Следовательно, любая координата f_i оператора Φ на любой паре противоположных наборов принимает противоположные значения, т. е. $f_i \in S$. При этом $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и $f_i(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Таким образом, все $f_i \in S \cap T_0 \cap T_1$ и

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = R(f_1(z_1, z_2, \ldots, z_m), \ldots, f_h(z_1, z_2, \ldots, z_m)).$$

Поскольку предикат Q получается путем подстановки в предикат R функций из класса $S \cap T_0 \cap T_1$, то из определения замыкания вытекает, что $Q \in [R]_{S\cap T_0\cap T_1}$.

Лемма 17. *Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — предикат, не являющийся четным. И пусть существуют 2 противоположных набора α и $\overline{\alpha}$ такие, что $R(\alpha) = R(\overline{\alpha}) = 1$. Пусть $R(0, 0, \ldots, 0) = a$, $R(1, 1, \ldots, 1) = b$. Тогда $[R \cup \{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1} = \{1\} \cup C_{ab}$.*

Доказательство. Так как по условию $R \in C_{ab}$, то по лемме 9

$$[R \cup \{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1} = [R]_{S\cap T_0\cap T_1} \cup \{1\} \subseteq C_{ab}.$$

Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — произвольный предикат из C_{ab}. Покажем, что он входит в $[R]_{S\cap T_0\cap T_1}$. Построим по предикату $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ два новых предиката $Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и $Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ следующим образом. Положим

$$Q_1(0, 0, \ldots, 0) = Q_2(0, 0, \ldots, 0) = a, Q_1(1, 1, \ldots, 1) = Q_2(1, 1, \ldots, 1) = b.$$

Пусть γ и $\overline{\gamma}$ — любая другая пара противоположных наборов. Если значения $Q(\gamma)$ и $Q(\overline{\gamma})$ противоположные или $Q(\gamma) = Q(\overline{\gamma}) = 1$, то положим

$$Q_1(\gamma) = Q_2(\gamma) = Q(\gamma) \text{ и } Q_1(\overline{\gamma}) = Q_2(\overline{\gamma}) = Q(\overline{\gamma}).$$

Если же $Q(\gamma) = Q(\overline{\gamma}) = 0$, то положим

$$Q_1(\gamma) = 0, Q_1(\overline{\gamma}) = 1, Q_2(\gamma) = 1, Q_2(\overline{\gamma}) = 0.$$

Тогда получим, что

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_m) = Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) \cdot Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m).$$

Из леммы 16 получаем, что Q_1 и Q_2 принадлежат замыканию $[R]_{S\cap T_0\cap T_1}$, а так как оно замкнуто относительно взятия конъюнкции, то и $Q \in [R]_{S\cap T_0\cap T_1}$. Таким образом, $C_{ab} \subseteq [R]_{S\cap T_0\cap T_1}$, откуда

$$\{1\} \cup C_{ab} \subseteq \{1\} \cup [R]_{S\cap T_0\cap T_1} = [R \cup \{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1}.$$

Поскольку в начале доказательства есть обратное включение, то получаем $[R \cup \{1\}]_{S\cap T_0\cap T_1} = \{1\} \cup C_{ab}$.

Условия лемм 11, 12, 15, 17 исчерпывают все возможные случаи для предиката R. Отметим также, что $\{1\} \cup A_{11} = A_{11}$ и $\{1\} \cup C_{11} = C_{11}$. Таким образом, из леммы 10 вытекает, что все классы из формулировки теоремы 27 являются базисными классами для $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$, а леммы 11, 12, 15, 17 показывают, что других базисных классов для $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$ нет. Теорема 27 доказана.

Введем семейства классов предикатов $\mathscr{D}_{00} = \{\varnothing, \{0\}, A_{00}, B_{00}, A_{00} \cup B_{00}, C_{00}\}$, $\mathscr{D}_{01} = \{\varnothing, B_{01}, C_{01}\}$, $\mathscr{D}_{10} = \{\varnothing, B_{10}, C_{10}\}$, $\mathscr{D}_{11} = \{\{1\}, A_{11}, C_{11}\}$.

Т е о р е м а 28. *Семейство $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$ содержит ровно 91 класс предикатов. Все они имеют вид: $X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$, где $X_{00} \in \mathscr{D}_{00}$, $X_{01} \in \mathscr{D}_{01}$, $X_{10} \in \mathscr{D}_{10}$, $X_{11} \in \mathscr{D}_{11}$. При этом:*

1) *если $X_{00} \in \{\varnothing, \{0\}\}$, то либо $X_{01} = \varnothing$, либо $X_{10} = \varnothing$ (30 классов);*
2) *если $X_{00} = A_{00}$, то $X_{01} = \varnothing$, $X_{10} = \varnothing$, $X_{11} \in \{\{1\}, A_{11}\}$ (2 класса);*
3) *если $X_{00} = B_{00}$, то либо $X_{01} \neq C_{01}$, либо $X_{10} \neq C_{10}$ (24 класса);*
4) *если $X_{00} = A_{00} \cup B_{00}$, то $X_{01} \neq C_{01}$, $X_{10} \neq C_{10}$, $X_{11} \neq C_{11}$ (8 классов);*
5) *если $X_{00} = C_{00}$, то нет других ограничений (27 классов).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 22, для доказательства теоремы 28 достаточно рассмотреть все произведения базисных классов, описанных в теореме 27. Отметим, что операция умножения классов предикатов коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна.

Л е м м а 18. *Пусть Y — любой класс предикатов из теоремы 27. Тогда $Y \cdot Y = Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — любой класс предикатов из теоремы 27. По лемме 9 класс Y замкнут относительно умножения предикатов, т. е. $Y \cdot Y \subseteq Y$. С другой стороны, любой класс Y из теоремы 27 содержит множество предикатов $\{1\}$. Поэтому $Y = \{1\} \cdot Y \subseteq Y \cdot Y$. Получаем, что для любого базисного класса Y из теоремы 27 выполняется $Y \cdot Y = Y$.

Лемма 18 показывает, что нас интересуют только произведения различных классов из теоремы 27 (а значит только конечные произведения).

Л е м м а 19. $A \cdot B \subseteq B$, $C \cdot B \subseteq B$, $A \cdot C \subseteq C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последнее включение очевидно. Пусть $R_1 \in A$ или $R_1 \in C$, а $R_2 \in B$. Пусть $R_1 \cdot R_2 = R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$. Так как на любой паре противоположных наборов предикат R_2 принимает хотя бы одно значение 0, то и предикат R на любой паре противоположных наборов принимает хотя бы одно значение 0. Следовательно, $R \in B$.

Лемма 20. *Пусть* $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. *Тогда* $A_{a,b} \cdot B_{c,d} = C_{a,b} \cdot B_{c,d} = B_{ac,bd}$, $A_{a,b} \cdot C_{c,d} = C_{ac,bd}$, $A_{a,b} \cdot A_{c,d} = A_{ac,bd}$, $B_{a,b} \cdot B_{c,d} = B_{ac,bd}$, $C_{a,b} \cdot C_{c,d} = C_{ac,bd}$. *(Здесь предполагается, что оба класса в левой части равенств существуют.)*

Доказательство. Из леммы 19 следует, что

$$A_{a,b} \cdot B_{c,d} \subseteq A \cdot B \subseteq B \text{ и } C_{a,b} \cdot B_{c,d} \subseteq C \cdot B \subseteq B.$$

Кроме того, если

$$R_1(0, \ldots, 0) = a, R_1(1, \ldots, 1) = b, R_2(0, \ldots, 0) = c, R_2(1, \ldots, 1) = d$$

и $R = R_1 \cdot R_2$, то $R(0, \ldots, 0) = ac$, $R(1, \ldots, 1) = cd$. Поэтому

$$A_{a,b} \cdot B_{c,d} \subseteq B_{ac,bd} \text{ и } C_{a,b} \cdot B_{c,d} \subseteq B_{ac,bd}.$$

Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — произвольный предикат из $B_{ac,bd}$. Построим по нему два новых предиката $Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и $Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ следующим образом. Положим

$$Q_1(0, 0, \ldots, 0) = a, Q_2(0, 0, \ldots, 0) = c, Q_1(1, 1, \ldots, 1) = b, Q_2(1, 1, \ldots, 1) = d.$$

На остальных наборах положим $Q_1 \equiv 1$, $Q_2 \equiv Q$. Тогда $Q_1 \cdot Q_2 = Q$. При этом $Q_1 \in A_{a,b}$, $Q_1 \in C_{a,b}$ и $Q_2 \in B_{c,d}$. Поэтому

$$Q \in A_{a,b} \cdot B_{c,d} \text{ и } Q \in C_{a,b} \cdot B_{c,d}.$$

Получаем, что

$$B_{ac,bd} \subseteq A_{a,b} \cdot B_{c,d} \text{ и } B_{ac,bd} \subseteq C_{a,b} \cdot B_{c,d}.$$

Поскольку выше есть обратные включения, то получаем, что

$$A_{a,b} \cdot B_{c,d} = C_{a,b} \cdot B_{c,d} = B_{ac,bd}.$$

Равенство $A_{a,b} \cdot C_{c,d} = C_{ac,bd}$ доказывается абсолютно так же, как и равенство $A_{a,b} \cdot B_{c,d} = B_{ac,bd}$.

Пусть X — любой из классов A, B или C. Из леммы 8 следует, что $X_{a,b} \cdot X_{c,d} \subseteq X$. При этом для любого предиката $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ из $X_{a,b} \cdot X_{c,d}$ выполняется $R(0, 0, \ldots, 0) = ac$, $R(1, 1, \ldots, 1) = bd$. Поэтому $X_{a,b} \cdot X_{c,d} \subseteq X_{ac,bd}$. Пусть $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — произвольный предикат из $X_{ac,bd}$. Построим по предикату $Q(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ два новых предиката $Q_1(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и $Q_2(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ следующим образом. Положим

$$Q_1(0, 0, \ldots, 0) = a, Q_1(1, 1, \ldots, 1) = b, Q_2(0, 0, \ldots, 0) = c, Q_2(1, 1, \ldots, 1) = d.$$

На остальных наборах положим $Q_1 \equiv Q$ и $Q_2 \equiv Q$. Тогда $Q_1 \cdot Q_2 = Q$. При этом $Q_1 \in X_{a,b}$ и $Q_2 \in X_{c,d}$. Поэтому $Q \in X_{a,b} \cdot X_{c,d}$. Получаем, что $X_{ac,bd} \subseteq X_{a,b} \cdot X_{c,d}$. Поскольку выше есть обратное включение, то получаем, что $X_{a,b} \cdot X_{c,d} = X_{ac,bd}$.

Л е м м а 21. *Все классы из* $Z(S\cap T_0\cap T_1)$ *имеют вид:* $X_{00}\cup X_{01}\cup X_{10}\cup X_{11}$, *где* $X_{00}\in\mathcal{D}_{00}$, $X_{01}\in\mathcal{D}_{01}$, $X_{10}\in\mathcal{D}_{10}$, $X_{11}\in\mathcal{D}_{11}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 27 все базисные классы для $Z(S\cap T_0\cap T_1)$ имеют вид $\{1\}\cup X$, где X либо пустое множество, либо $X=\{0\}$, либо один из классов A_{ab}, B_{ab}, C_{ab} (заметим, что не существует классов A_{01}, A_{10} и B_{11}). Если X' и X'' — любые 2 класса предикатов, то

$$(\{1\}\cup X')\cdot(\{1\}\cup X'')=\{1\}\cup X'\cup X''\cup X'\cdot X''.$$

Тогда по лемме 20 получаем, что все конечные произведения базисных классов являются объединением некоторых из классов $\{1\}$, $\{0\}$, A_{ab}, B_{ab}, C_{ab}. Поскольку $\{1\}\subseteq A_{11}\subseteq C_{11}$, то можно считать, что в этом объединении участвует только одно слагаемое из $\mathcal{D}_{11}$ (так как по определению $\{1\}$ содержится в любом классе из $Z(S\cap T_0\cap T_1)$, то одно слагаемое из $\mathcal{D}_{11}$ обязано участвовать). Аналогично, поскольку $B_{01}\subseteq C_{01}$, и $B_{10}\subseteq C_{10}$ то можно считать, что в этом объединении участвует только одно слагаемое из $\mathcal{D}_{01}$ и одно слагаемое из $\mathcal{D}_{10}$ (возможно, пустые множества). Поскольку $\{0\}\subseteq A_{00}\subseteq C_{00}$ и $\{0\}\subseteq B_{00}\subseteq C_{00}$, то можно считать, что в этом объединении участвует не более одного слагаемого из каждой из этих цепочек, откуда следует, что тогда участвует ровно одно слагаемое из $\mathcal{D}_{00}$ (возможно, пустое множество).

Согласно лемме 21, для доказательства теоремы 28 достаточно установить, какие из классов, указанных в лемме 21, входят в $Z(S\cap T_0\cap T_1)$. Поскольку операции 1, 2 и 4 из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$ применяются только к одному предикату, то из леммы 9 вытекает, что все классы, указанные в лемме 21, замкнуты относительно операций 1, 2 и 4 из $O_{S\cap T_0\cap T_1}$. Таким образом, остается установить, какие из классов, указанных в лемме 21, замкнуты относительно умножения предикатов.

Л е м м а 22. *Пусть класс предикатов* Y *имет вид:* $X_{00}\cup X_{01}\cup X_{10}\cup X_{11}$, *где* $X_{00}\in\mathcal{D}_{00}$, $X_{01}\in\mathcal{D}_{01}$, $X_{10}\in\mathcal{D}_{10}$, $X_{11}\in\mathcal{D}_{11}$, *и пусть* $X_{00}\in\{\varnothing,\{0\}\}$. *Тогда* Y *замкнут относительно умножения предикатов в том и только в том случае, если либо* $X_{01}=\varnothing$, *либо* $X_{10}=\varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $X_{01}\neq\varnothing$ и $X_{10}\neq\varnothing$. Так как по условию $X_{01}\subseteq Y$ и $X_{10}\subseteq Y$, то $Y\cdot Y$ содержит $X_{01}\cdot X_{10}$, где $X_{01}=B_{01}$ или $X_{01}=C_{01}$, а $X_{10}=B_{10}$ или $X_{10}=C_{10}$. По лемме 20 получаем, что в любом случае $Y\cdot Y$ содержит B_{00} или C_{00}. Но $B_{00}\nsubseteq Y$ и $C_{00}\nsubseteq Y$, поэтому Y не замкнут относительно умножения предикатов.

2) Пусть $X_{01}=\varnothing$. Тогда $Y=X_{10}\cup X_{11}$ или $Y=\{0\}\cup X_{10}\cup X_{11}$, где $X_{10}\in\{\varnothing,B_{10},C_{10}\}$, а $X_{11}\in\{\{1\},A_{11},C_{11}\}$. Покажем, что в любом случае $(X_{10}\cup X_{11})\cdot(X_{10}\cup X_{11})\subseteq X_{10}\cup X_{11}$. Если хотя бы одно из слагаемых пусто, то это сразу вытекает из леммы 20. Пусть оба слагаемых не пустые. Тогда, используя дистрибутивность и коммутативность умножения классов предикатов, а также лемму 20, получаем $(X_{10}\cup X_{11})\cdot(X_{10}\cup X_{11})=X_{10}\cdot X_{10}\cup X_{10}\cdot X_{11}\cup X_{11}\cdot X_{11}=X_{10}\cup X_{10}\cdot X_{11}\cup X_{11}$. Если $X_{10}=B_{10}$, то в любом случае по лемме 20 имеем: $X_{10}\cdot X_{11}=B_{10}=X_{10}$. Если же $X_{10}=C_{10}$, то в любом случае по лемме 20 имеем: $X_{10}\cdot X_{11}=C_{10}=X_{10}$. Получаем, что в любом случае $(X_{10}\cup X_{11})\cdot(X_{10}\cup X_{11})\subseteq X_{10}\cup X_{11}$.

Если $Y=X_{10}\cup X_{11}$, то получаем, что $Y\cdot Y\subseteq Y$. Если $Y=\{0\}\cup X_{10}\cup X_{11}$, то

$$Y\cdot Y=\{0\}\cup(X_{10}\cup X_{11})\cdot(X_{10}\cup X_{11})\subseteq\{0\}\cup(X_{10}\cup X_{11})=Y.$$

Таким образом, в любом случае Y замкнут относительно умножения предикатов.

Абсолютно аналогично доказательство проводится, если $X_{10} = \varnothing$.

Лемма 23. *Пусть класс предикатов Y имет вид: $X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$, где $X_{00} \in \mathscr{D}_{00}$, $X_{01} \in \mathscr{D}_{01}$, $X_{10} \in \mathscr{D}_{10}$, $X_{11} \in \mathscr{D}_{11}$, и пусть $X_{00} = A_{00}$. Тогда Y замкнут относительно умножения предикатов в том и только в том случае, если $X_{01} = \varnothing$, $X_{10} = \varnothing$, $X_{11} \in \{\{1\}, A_{11}\}$.*

Доказательство. 1) Пусть $X_{01} \neq \varnothing$. Тогда $X_{01} = B_{01}$ или $X_{01} = C_{01}$. Но тогда $Y \cdot Y$ содержит подмножество $A_{00} \cdot X_{01}$, равное (см. лемму 20) B_{00} или C_{00}. Но $B_{00} \nsubseteq A_{00}$ и $C_{00} \nsubseteq A_{00}$. Получаем, что $Y \cdot Y \nsubseteq Y$, т. е. Y не замкнут относительно умножения предикатов. Аналогичный результат получаем, если $X_{10} \neq \varnothing$.

2) Пусть $X_{11} \notin \{\{1\}, A_{11}\}$. Тогда $X_{11} = C_{11}$. В этом случае $Y \cdot Y$ содержит подмножество $A_{00} \cdot C_{11}$, равное (см. лемму 20) C_{00}. Но $C_{00} \nsubseteq A_{00}$. Получаем, что $Y \cdot Y \nsubseteq Y$, т. е. Y не замкнут относительно умножения предикатов.

3) Пусть теперь $X_{01} = \varnothing$, $X_{10} = \varnothing$ и $X_{11} \in \{\{1\}, A_{11}\}$. Тогда $Y = A_{00} \cup \{1\}$ или $Y = A_{00} \cup A_{11}$. Используя лемму 20, получаем:

$$(A_{00} \cup \{1\}) \cdot (A_{00} \cup \{1\}) = A_{00} \cup \{1\} \text{ и } (A_{00} \cup A_{11}) \cdot (A_{00} \cup A_{11}) = A_{00} \cup A_{11}.$$

Таким образом, в любом случае $Y \cdot Y = Y$, т. е. Y замкнуто относительно умножения предикатов.

Лемма 24. *Пусть класс предикатов Y имет вид: $X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$, где $X_{00} \in \mathscr{D}_{00}$, $X_{01} \in \mathscr{D}_{01}$, $X_{10} \in \mathscr{D}_{10}$, $X_{11} \in \mathscr{D}_{11}$, и пусть $X_{00} = B_{00}$. Тогда Y замкнут относительно умножения предикатов в том и только в том случае, если $X_{01} \neq C_{01}$ или $X_{10} \neq C_{10}$.*

Доказательство. 1) Пусть $X_{01} = C_{01}$ и $X_{10} = C_{10}$. Тогда $Y \cdot Y$ содержит подмножество $C_{01} \cdot C_{10}$, равное (см. лемму 20) C_{00}. Но $C_{00} \nsubseteq B_{00}$. Получаем, что $Y \cdot Y \nsubseteq Y$, т. е. Y не замкнут относительно умножения предикатов.

2) Пусть теперь $X_{01} \neq C_{01}$. Тогда $X_{01} = \varnothing$ или $X_{01} = B_{01}$. Поэтому $Y = B_{00} \cup X_{10} \cup X_{11}$ или $Y = B_{00} \cup B_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$. При этом (см. лемму 20) $B_{00} \cdot B_{00} = B_{00}$, $B_{00} \cdot B_{01} = B_{00}$, $B_{01} \cdot B_{01} = B_{01}$, $X_{10} \cdot X_{10} = X_{10}$, $X_{11} \cdot X_{11} = X_{11}$ и в любом случае $B_{00} \cdot X_{10}$, $B_{00} \cdot X_{11}$ и $B_{01} \cdot X_{10}$ — либо пустые множества, либо равны B_{00}, а $B_{01} \cdot X_{11} = B_{01}$. Если $X_{10} = \varnothing$, то других слагаемых в $Y \cdot Y$ нет. Если $X_{10} = B_{10}$, то в любом случае $X_{10} \cdot X_{11} = B_{10} \cdot X_{11} = B_{10}$. Если $X_{10} = C_{10}$, то в любом случае $X_{10} \cdot X_{11} = C_{10} \cdot X_{11} \subseteq C_{10}$. Получаем, что в любом случае $Y \cdot Y \subseteq Y$.

Совершенно аналогично лемма доказывается, если $X_{10} \neq C_{10}$.

Лемма 25. *Пусть класс предикатов Y имет вид: $X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$, где $X_{00} \in \mathscr{D}_{00}$, $X_{01} \in \mathscr{D}_{01}$, $X_{10} \in \mathscr{D}_{10}$, $X_{11} \in \mathscr{D}_{11}$, и пусть $X_{00} = A_{00} \cup B_{00}$. Тогда Y замкнут относительно умножения предикатов в том и только в том случае, если $X_{01} \neq C_{01}$, $X_{10} \neq C_{10}$ и $X_{11} \neq C_{11}$.*

Доказательство. 1) Пусть $X_{01} = C_{01}$, или $X_{10} = C_{10}$, или $X_{11} = C_{11}$. Так как $X_{00} = A_{00} \cup B_{00}$, то $Y \cdot Y$ содержит подмножество (см. лемму 20) $A_{00} \cdot C_{01} = C_{00}$, или $A_{00} \cdot C_{10} = C_{00}$, или $A_{00} \cdot C_{11} = C_{00}$, т. е. в любом случае содержит C_{00}. Но $C_{00} \nsubseteq A_{00} \cup B_{00}$. Получаем, что $Y \cdot Y \nsubseteq Y$, т. е. Y не замкнут относительно умножения предикатов.

2) Пусть теперь $X_{01} \neq C_{01}$, $X_{10} \neq C_{10}$, $X_{11} \neq C_{11}$. Тогда $X_{01} = \varnothing$ или $X_{01} = B_{01}$, $X_{10} = \varnothing$ или $X_{10} = B_{10}$, $X_{11} = \{1\}$ или $X_{11} = A_{11}$. Легко проверить с помощью леммы 20, что во всех возможных случаях $X_{11} \cdot X_{11} = X_{11}$, $X_{11} \cdot X_{01} = X_{01}$ и $X_{11} \cdot X_{10} = X_{10}$. Произведение $X_{01} \cdot X_{10}$ — либо пустое множество, либо $B_{01} \cdot B_{10} = B_{00}$. При умножении A_{00} и B_{00} на A_{00}, B_{00}, X_{01}, X_{10} и X_{11} получаются слагаемые с индексом 00, но лемма 20 показывает, что в рассматриваемых случаях никогда не может получиться C_{00}, т. е. получается либо пустое множество, либо A_{00}, либо B_{00}.

Получаем, что в любом случае $Y \cdot Y \subseteq Y$.

Лемма 26. *Пусть класс предикатов Y имет вид: $X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$, где $X_{00} \in \mathscr{D}_{00}$, $X_{01} \in \mathscr{D}_{01}$, $X_{10} \in \mathscr{D}_{10}$, $X_{11} \in \mathscr{D}_{11}$, и пусть $X_{00} = C_{00}$. Тогда Y замкнут относительно умножения предикатов.*

Доказательство. Посмотрим, какие слагаемые могут получаться при раскрытии скобок в $Y \cdot Y$. Если X — любое слагаемое из Y, то $X \cdot X = X$ согласно лемме 20. При умножении C_{00} на любое слагаемое, а также при умножении X_{01} на X_{10} получается либо пустое множество, либо C_{00}, либо $A_{00} \subseteq C_{00}$, либо $B_{00} \subseteq C_{00}$. Так как $X_{11} \subseteq C_{11}$, то $X_{01} \cdot X_{11} \subseteq X_{01} \cdot C_{11}$. При этом если $X_{01} = \varnothing$, то $X_{01} \cdot X_{11} = \varnothing$. Если $X_{01} = B_{01}$, то $X_{01} \cdot X_{11} \subseteq B_{01} \cdot C_{11} = B_{01}$. Если $X_{01} = C_{01}$, то $X_{01} \cdot X_{11} \subseteq C_{01}$. Таким образом, всегда $X_{01} \cdot X_{11} \subseteq X_{01}$. Аналогично доказывается, что $X_{10} \cdot X_{11} \subseteq X_{10}$.

Получаем, что в любом случае $Y \cdot Y \subseteq Y$. Леммы 21–26 полностью доказывают правильность описания всех классов предикатов из $Z(S \cap T_0 \cap T_1)$ в теореме 28. Количество классов в каждом из пунктов 1)–5) этой теоремы легко вычисляется. Теорема 28 полностью доказана.

Теорема 28 вместе с теоремой 19 дают полное описание $Int(S \cap T_0 \cap T_1)$.

Теорема 29. *В частичной двузначной логике P_2^* имеется ровно 91 замкнутый класс функций, содержащий все функции из $S \cap T_0 \cap T_1$ и состоящий только из функций, доопределимых до какой-нибудь функции из $S \cap T_0 \cap T_1$. Это классы вида $(S \cap T_0 \cap T_1)/K$, где K пробегает все классы предикатов из теоремы 28.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б. О некоторых замкнутых классах самодвойственных частичных многозначных функций // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 16–24.
2. Алексеев В. Б. О замкнутых классах в частичной k-значной логике, содержащих класс монотонных функций // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 2. — С. 3–13.
3. Алексеев В. Б. О замкнутых классах в частичной k-значной логике, содержащих все полиномы // Дискретная математика. — 2021. — Т. 33, № 2. — С. 6–19.
4. Алексеев В. Б. О мощности интервала $Int(Pol_k)$ в частичной k-значной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2022. — № 2. — С. 11–17.
5. Алексеев В. Б. Дискретная математика. Учебник. — М.: ИНФРА-М, 2023.
6. Алексеев В. Б. Описание интервала $Int(S \cap T_0 \cap T_1)$ в частичной двузначной логике // Труды XI Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 26–29 мая 2023 г.). — М.: МАКС Пресс, 2023. — С. 15–18.
7. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 4. — С. 58–79.
8. Алексеев В. Б., Миронов М. И. Некоторые свойства интервала Int в частичной k-значной логике // Материалы XIV Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2022 г.). — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2022. — С. 74–77. — URL: https://keldysh.ru/dms.

9. Бондарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10. — № 5. — С. 1–9.
10. Ван Сянхао. Структурная теория полных и частичных функций, определенных на конечном множестве // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — № 2. — С. 295–316.
11. Дудакова О. С. О классах частичных монотонных функций шестизначной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVIII Международной конференции (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М: МАКС Пресс, 2017. — С. 78–81.
12. Дудакова О. С. Построение бесконечного семейства классов частичных монотонных функций многозначной логики // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2019. — № 1. — С. 3–7.
13. Захарова Е. Ю. Критерий полноты систем функций из P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 18. — М.: Наука, 1967. — С. 5–10.
14. Ло Чжукай. О предполноте классов функций, сохраняющих разбиения // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — № 2. — С. 105–116.
15. Ло Чжукай. Предполнота множеств линейных функций и колец // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — № 2. — С. 1–14.
16. Ло Чжукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Acta Math. Sinica. — 1984. — Т. 27, № 6. — С. 795–800. — [Русский перевод: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 131–141].
17. Ло Чжукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Acta Math. Sinica. — 1984. — Т. 27. — С. 676–683. — [Русский перевод: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 142–161].
18. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 49–60.
19. Ромов Б. А. О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики // Кибернетика. — 1980. — № 1. — С. 28–36.
20. Фрейвалд Р. В. Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. Вып. 8. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1966. — С. 55–68.
21. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. Т. 51. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 5–142.
22. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
23. Alekseev V. B. On some intervals of partial clones // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. — 2022. — V. 38, No. 1/2. — P. 3–22.
24. Börner F., Haddad L. Maximal partial clones with no finite basis // Algebra Universalis. — 1998. — V. 40, No. 4. — P. 453–476. — DOI: 10.1007/s000120050095.
25. Couceiro M., Haddad L., Rosenberg I. G. Partial clones containing all Boolean monotone self-dual partial functions. — 2011. — Preprint.
26. Couceiro M., Haddad L., Rosenberg I. G. Partial clones containing all Boolean monotone self-dual partial functions // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. — 2016. — V. 27, No. 2/3. — P. 183–192.
27. Couceiro M., Haddad L., Schölzel K., Waldhauser T. A solution to a problem of D. Lau: complete classification of intervals in the lattice of partial Boolean clones // Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing. — 2017. — V. 28, No. 1. — P. 47–58.
28. Haddad L., Lau D. Uncountable families of partial clones containing maximal clones // Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 2007. — V. 48, No. 1. — P. 257–280.
29. Haddad L., Lau D., Rosenberg I. G. Intervals of partial clones containing maximal clones // Journal of Automata, Languages and Combinatorics. — 2006. — V. 11, No. 4. — P. 399–421.
30. Haddad L., Rosenberg I. G. Completeness theory for finite partial algebras // Algebra Universalis. — 1992. — V. 29, No. 3. — P. 378–401. — DOI: 10.1007/BF01212439.
31. Haddad L., Scholzel K. Countable Intervals of Partial Clones // Proc. 44th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic. Vol. 17 (Bremen, Germany, May 2014). — IEEE, 2014. — P. 155–160. — DOI: 10.1109/ismvl.2014.35.
32. Lau D. Über partielle Funktionenalgebren. (On partial function algebras) // Rostocker Mathematisches Kolloquium. — 1988. — Bd. 33. — S. 23–48.

33. L a u D. Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — DOI: 10.1007/3-540-36023-9.
34. L a u D., S c h ö l z e l K. A Classification of Partial Boolean Clones // Proc. 40th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic. Vol. 5 (Barcelona, Spain, May 2010). — IEEE, 2010. — P. 189–194. — DOI: 10.1109/ismvl.2010.43.
35. P o s t E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. Vol. 5. — Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941. — (Ann. Math. Stud.) — DOI: 10.1515/9781400882366.
36. R o s e n b e r g I. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris. — 1965. — T. 260. — P. 3817–3819.
37. S t r a u c h B. Die Menge $\mathscr{M}(M \cap T_0 \cap T_1)$ // Preprint Universität Rostok. — 1995.
38. S t r a u c h B. Die Menge $\mathscr{M}(S \cap T_0 \cap T_1)$ // Preprint Universität Rostok. — 1995.
39. S t r a u c h B. Noncountable many classes containing a fixed class of total Boolean functions // General algebra and applications in discrete mathematics. Proceedings of the conference on general algebra and discrete mathematics, Potsdam, Germany, June 1996. — Aachen: Shaker Verlag, 1997. — P. 177–188.
40. S t r a u c h B. On partial classes containing all monotone and zero-preserving total Boolean functions // Mathematical Logic Quarterly (MLQ). — 1997. — V. 43, No. 4. — P. 510–524. — DOI: 10.1002/malq.19970430407.

Поступило в редакцию 31 VIII 2024