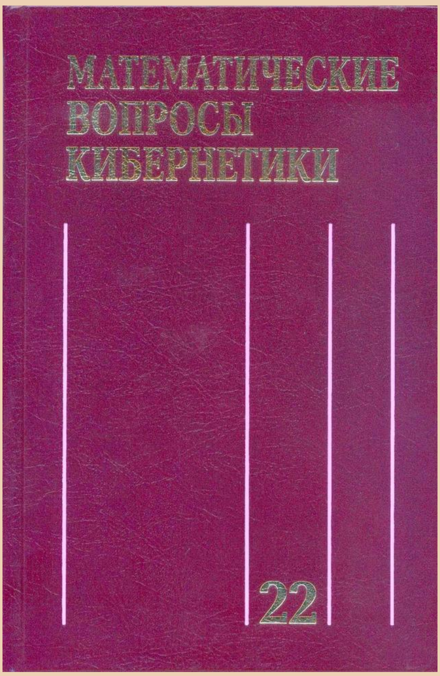

С. С. Марченков

Задание импликативно неявных расширений с помощью реляционных систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Задание импликативно неявных расширений с помощью реляционных систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 22. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. — С. 276–284. URL: https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2024-276 DOI: 10.20948/mvk-2024-276

ЗАДАНИЕ ИМПЛИКАТИВНО НЕЯВНЫХ РАСШИРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЕЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Введение

В конце 1970-х гг. А. В. Кузнецов [4] предложил два определения выразимости функций в многозначной логике, базирующихся на функциональных уравнениях: неявную выразимость и параметрическую выразимость. Параметрическая выразимость приводит к оператору параметрического замыкания — одному из первых сильных операторов замыкания [6]. В отличие от параметрической выразимости оператор неявной выразимости (оператор неявного расширения) не является оператором замыкания. В середине 1990-х гг. систематическое изучение оператора неявного расширения начал О. М. Касим-Заде [2, 3]. Он, в частности, установил, что неявное расширение любого множества булевых функций совпадает с его параметрическим замыканием [2]. Позже было показано [9], что для любого $k \geqslant 3$ число неявных расширений в P_k континуально.

В работе [8] автор предложил рассматривать обобщения неявной выразимости, когда в язык неявной выразимости добавляются новые логические связки. Установлено, что на этом пути возможны лишь три обобщения, которые по добавляемым связкам названы дизъюнктивно неявной, импликативно неявной и негативно неявной выразимостями. Доказано, что при любом $k \geqslant 2$ число неявных расширений любого типа в P_k конечно. В частности, найдены все 6 дизъюнктивно и импликативно неявных расширений булевых функций, а также все 2 негативных расширения в P_2. Кроме того, показано, что уже дизъюнктивно неявные расширения являются достаточно широкими: при любом $k \geqslant 2$ любое дизъюнктивно неявное расширение в P_k содержит множество H_k^* всех однородных функций, сохраняющих множество E_{k-1}.

В [9] обнаружено, что для каждого из указанных трех типов неявной выразимости множество неявных расширений собственным образом содержит множество замкнутых классов этого типа. Таким образом, число замкнутых классов в P_k является нижней оценкой числа неявных расширений соответствующего типа в P_k. Известно [5], что число дизъюнктивно (позитивно) замкнутых классов в P_3 равно 194. Поэтому можно ожидать, что

DOI: 10.20948/mvk-2024-276

число дизъюнктивно неявных расширений в P_3 будет иметь тот же порядок. Вместе с тем число импликативно замкнутых классов в P_3 равно 17 [7]. Кроме того, в [8] установлено, что каждое импликативно неявное расширение $F \subseteq P_3$ является импликативно неявным расширением множества не более чем трехместных функций из F. Поэтому представляется весьма перспективной задача описания всех импликативно неявных расширений в P_3.

Автор нашел все импликативно неявные расширения одноместных функций в P_3 [10]. Как оказалось, среди этих расширений имеются как импликативно замкнутые классы, так и множества, не замкнутые относительно операции суперпозиции. В настоящей работе мы хотим несколько по-иному взглянуть на порождение импликативно неявных расширений: отказаться от функционального подхода и предложить реляционный (основанный на отношениях) подход. Мы устанавливаем (теорема 1), что импликативно неявные расширения в P_k можно задавать с помощью реляционных систем — множеств не более чем k-местных отношений, принадлежащих данным расширениям. Теоретически этот способ задания представляется более предпочтительным, нежели прямолинейный подход, использующий системы не более чем k-местных функций, поскольку в импликативно неявных расширениях определяются прежде всего отношения и только на их основе — функции. Кроме того, он позволяет в принципе более точно оценивать сверху число импликативно неявных расширений в P_k. В утверждении 1 показано, что реляционные n-системы представляют собой булевы алгебры с теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и (относительного) дополнения. В терминах булевых алгебр полностью охарактеризованы все реляционные 2-системы для импликативно неявных расширений в P_3. Для реляционных 3-систем аналогичное описание проведено только для ограничений отношений на множество всех наборов с тремя различными компонентами.

Основные понятия

Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). В определении языка $\mathscr{L}_k$ неявной выразимости мы несколько отступаем от первоначального определения А. В. Кузнецова [4]. Исходными символами языка $\mathscr{L}_k$ являются предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений E_k, символы $f_i^{(n)}$ для обозначения всех n-местных функций k-значной логики, знак равенства $=$, логическая связка конъюнкция &, левая и правая скобки и запятая. Нижний индекс k в обозначении $\mathscr{L}_k$ будем, как правило, опускать.

Пусть $Q \subseteq P_k$. Введем понятия терма над Q. Все символы предметных переменных считаем термами над Q. Если $f_i^{(n)}$ — символ n-местной функции из Q, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, то $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ также есть терм над Q. Если t_1, t_2 — термы над Q, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем равенством или элементарной формулой над Q. Все остальные формулы над Q представляют собой конъюнкции элементарных формул над Q.

Всякий терм t языка $\mathscr{L}_k$ определяет некоторую функцию g из P_k (переменная определяет селекторную функцию). Если $f_1, \ldots, f_r$ — все символы функций, входящие в терм t, то говорим, что терм t определяет функцию g через функции $f_1, \ldots, f_r$. Всякая формула языка $\mathscr{L}_k$ с m переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула над Q и формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ *неявно выражает* отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ через функции множества Q. Отношение ρ называем *неявно выразимым* через функции множества Q, если существует формула языка $\mathscr{L}_k$, которая неявно выражает отношение ρ через функции множества Q.

Понятие неявной выразимости перенесем с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка $\mathscr{L}$ неявно выражает отношение $y = g(x_1, \ldots, x_m)$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что формула Φ *неявно выражает* функцию g через функции множества Q. Совокупность всех функций, неявно выразимых через функции множества Q, называем *неявным расширением* множества Q и обозначаем через $I[Q]$.

В [8] показано, что, внося в язык $\mathscr{L}$ неявной выразимости новые логические связки, можно получить лишь три новых отношения неявной выразимости; они получаются, например, внесением в язык $\mathscr{L}$ логических связок дизъюнкции, импликации или отрицания. В дальнейшем мы будем иметь дело только с языком $\mathscr{L}_{\to}$, который будем называть языком импликативно неявной выразимости. Аналогичное названия применяем для неявного расширения, используя для него обозначение $I_{\to}$.

Диагональю будем называть множество всех наборов из E_k^n, имеющих одинаковые компоненты; наборы из диагонали будем называть диагональными наборами.

Пусть $Q \subseteq P_k$ и $l \geqslant 1$. Импликативно неявной реляционной l-системой множества Q назовем множество всех l-местных отношений, принадлежащих множеству $I_{\to}[Q]$. Хотя $I_{\to}[Q]$ определено как множество всех функций, импликативно неявно выразимых через функции множества Q, мы здесь и далее включаем также в $I_{\to}[Q]$ все отношения, импликативно неявно выразимых через функции из Q. Основанием для этого служит то обстоятельство, что формулы языка $\mathscr{L}_{\to}$ выражают прежде всего отношения, а уж затем с использованием отношений специального вида (графики функций) — функции из $I_{\to}[Q]$.

Результаты

Т е о р е м а 1. *Для любого $k \geqslant 2$ и любого множества $Q \subseteq P_k$ импликативно неявное расширение $I_{\to}[Q]$ множества Q совпадает с множеством функций, импликативно неявно выразимых через отношения импликативно неявных реляционных l-систем множества Q, где $2 \leqslant l \leqslant k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону утверждение теоремы очевидно: всякая функция, определимая импликативно неявной формулой через отношения импликативно неявных реляционных l-систем множества Q, принадлежит множеству $I_{\to}[Q]$. Докажем обратное включение.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ входит в множество $I_{\to}[Q]$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ есть произвольный набор из E_k^n. Предположим далее, что ε — отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, индуцированное отношением равенства компонент набора a. Пусть сначала набор a содержит менее k различных значений и $\{c_1, \ldots, c_p\}, \ldots, \{d_1, \ldots, d_q\}$ — все классы эквивалентности отношения ε. Рассмотрим импликативно неявную формулу

$$\mathop{\&}_{(i,j)\in\varepsilon}(x_i = x_j) \to \Phi'(x_{c_1}, \ldots, x_{d_1}, y), \tag{1}$$

где формула $\Phi'(x_{c_1}, \ldots, x_{d_1}, y)$ получена отождествлением переменных

$$x_{c_1} = \ldots = x_{c_p}, \ldots, x_{d_1} = \ldots = x_{d_q} \tag{2}$$

из формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, которая импликативно неявно определяет над множеством Q график функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда, как нетрудно видеть, формула (1) будет правильно определять график функции f не только для набора a, но и для любого набора b, у которого отношение равенства компонент совпадает с отношением ε. Более того, аналогичное утверждение будет справедливо также для любого набора b, у которого отношение равенства компонент содержит отношение ε. Во всех остальных случаях (т. е. когда посылка формулы (1) ложна) формула (1) будет истинна.

Пусть теперь набор a содержит все k значений. Тогда значение $f(a)$ совпадает с некоторым a_i. Возьмем определенную выше формулу $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ и проведем в ней отождествление переменных (2), дополнив его отождествлением $y = x_i$. Полученную после отождествления формулу обозначим через $\Phi'(x_{c_1}, \ldots, x_{d_1})$ (при этом, разумеется, вместо числа i будет выбрано соответствующее число из множества $\{c_1, \ldots, d_1\}$). Образуем импликативно неявную формулу

$$\mathop{\&}_{(i,j)\in\varepsilon}\ \mathop{\&}_{(p,q)\notin\varepsilon}(x_i = x_j) \,\&\, (x_p \neq x_q) \to \Phi'(x_{c_1}, \ldots, x_{d_1}). \tag{3}$$

Несмотря на то, что формула (3) содержит отрицания равенств переменных, ее можно привести к эквивалентному виду, использующему только логические связки конъюнкцию и импликацию. Это сразу следует из того, что после приведения формулы (3) к эквивалентной ДНФ по крайней мере одна из конъюнкций будет состоять только из элементарных формул (равенств термов) без отрицаний. Далее, из строения формулы (3) видно, что для произвольного набора $b \in E_k^n$ формула истинна только в двух случаях: либо отношение равенства между компонентами набора b отлично от ε, либо значение $f(b)$ совпадает с b_i.

Собирая теперь конъюнктивно формулы вида (1) и (3), взятые для всех отношений эквивалентности на множестве $\{1, \ldots, n\}$ с не более чем k классами эквивалентности, получим импликативно неявную формулу над множеством не более чем k-местных отношений из $I_{\to}[Q]$, которая определяет график функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

Далее нам потребуется рассматривать реляционные n-системы как булевы алгебры. При этом мы будем пользоваться обычной теоретико-множественной интерпретацией отношений: отношение $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве E_k^n отождествляется с множеством всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из E_k^n, которые удовлетворяют отношению ρ. В соответствии с этим соглашением логической операции дизъюнкции отвечает операция объединения, а операции конъюнкции — операция пересечения. Если отношениям $\rho(x_1, \ldots, x_n), \sigma(x_1, \ldots, x_n)$ отвечают множества X, Y, то импликации $\rho(x_1, \ldots, x_n) \to \sigma(x_1, \ldots, x_n)$ будет отвечать, конечно, множество $\bar{X} \cup Y$, где $\bar{X}$ — дополнение множества X до множества E_k^n. Однако в реляционной n-системе всегда имеется минимальное отношение ω — пересечение всех отношений данной системы. Поэтому импликацию общего вида $\rho(x_1, \ldots, x_n) \to \sigma(x_1, \ldots, x_n)$ можно заменить эквивалентной формулой $(\rho(x_1, \ldots, x_n) \to \omega(x_1, \ldots, x_n)) \vee \sigma(x_1, \ldots, x_n)$. Импликации $\rho(x_1, \ldots, x_n) \to \omega(x_1, \ldots, x_n)$ будет отвечать одноместная операция относительного дополнения $\bar{X} \cup O$, где множество O определяется отношением $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ (по поводу относительного дополнения в решетках см., например, [1]). Таким образом, каждой реляционной n-системе мы сопоставим булеву алгебру с нулем O, единицей E_k^n и операциями объединения, пересечения и относительного дополнения. Приведенные выше рассуждения доказывают

Утверждение 1. *Для любого $k \geqslant 2$ и любого множества $Q \subseteq P_k$ реляционная n-система импликативно неявного расширения множества Q является булевой алгеброй с операциями объединения, пересечение и (относительного) дополнения.*

Сделаем еще несколько замечаний, относящихся к утверждению 1. В дальнейшем нас будет интересовать лишь случай $n \geqslant 2$. В этом случае в любую реляционную n-систему входит диагональ. Кроме того, очевидно, в реляционную n-систему входит также тождественно истинное отношение. Если никаких других отношений в реляционной n-системе нет, то мы приходим к тривиальной двухэлементной булевой алгебре. В противном случае булева алгебра имеет как минимум 4 элемента.

Пусть ω — тождественно ложное отношение. Тогда относительное дополнение (с пустым множеством в качестве множества O) на подмножествах множества E_k^n действует как обычное дополнение. В частности, в соответствующей булевой алгебре наряду с диагональю D будет присутствовать множество $\bar{D}$. В результате мы имеем как минимум четырехэлементную булеву алгебру. Дальнейшее обогащение этой алгебры возможно за счет множеств, отличных от $E_k^n, \varnothing, D, \bar{D}$.

Если отношение ω отлично от тождественно ложного отношения, то множество O состоит только из диагональных наборов (иначе пересечение $D \cap O$ было бы собственным подмножеством O). В этом случае минимальной булевой алгеброй будет четырехэлементная алгебра, состоящая из множеств $E_k^n, O, D, \bar{D} \cup O$.

Учитывая утверждение 1, опишем более детально реляционные 2-системы импликативно неявных расширений в P_3. Прежде всего рассмотрим реляционные 2-системы, у которых ω есть тождественно ложное отношение. Посредством $\mathscr{B}$ будем обозначать булеву алгебру множеств, отвечающую реляционной 2-системе. Напомним, что атомом булевой алгебры $\mathscr{B}$ называется такое непустое множество A, что для любого множества X алгебры $\mathscr{B}$ пересечение $A \cap X$ совпадает либо с $\varnothing$, либо с A. Известно (см., например, [1]), что булеву алгебру $\mathscr{B}$ можно полностью задать с помощью перечисления всех ее атомов: любое непустое множество алгебры $\mathscr{B}$ есть объединение некоторого числа ее атомов.

Согласно определению атомы алгебры попарно не пересекаются. Кроме того, поскольку в алгебру $\mathscr{B}$ входят оба множества $D, \bar{D}$, каждый атом целиком содержится в одном из этих множеств. В силу взаимной дополнительности множеств $D, \bar{D}$ пересечения множеств алгебры $\mathscr{B}$ с каждым из множеств $D, \bar{D}$ также будут образовывать булевы алгебры $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ с пустым множеством в качестве нуля и множествами $D, \bar{D}$ в качестве единиц. Поэтому описание алгебры $\mathscr{B}$, по существу, сводится к описанию алгебр $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$. В частности, это относится к атомам всех трех алгебр.

Начнем с описания атомов алгебры $\mathscr{B}_1$. Здесь все зависит от числа наборов в атомах. Как нетрудно видеть, всего имеются 5 возможных распределений наборов из D по атомам алгебры: 1) все три набора образуют одноэлементные атомы; 2) один атом состоит из двух наборов, а другой — из одного; 3) алгебра $\mathscr{B}_1$ состоит из множеств $\varnothing, D$ и имеет один атом.

Несколько сложнее обстоит дело с алгеброй $\mathscr{B}_2$. Здесь необходимо учесть, что наличие в реляционной 2-системе отношения $\rho(x, y)$ влечет за собой наличие отношения $\rho(y, x)$. Отношения $\rho(x, y), \rho(y, x)$ могут как совпадать, так и не совпадать. Таким образом, для неравных элементов a, b алгебра $\mathscr{B}_2$ может содержать, например, либо два атома (a, b) и (b, a), либо один атом, состоящий из наборов $(a, b), (b, a)$.

Для упрощения перечисления возможных вариантов разобьем множество $\bar{D}$ на пары противоположных наборов:

$$\{01, 10\}, \quad \{02, 20\}, \quad \{12, 21\} \tag{4}$$

(при перечислении наборов мы опускаем скобки и запятые). Будем последовательно рассматривать алгебры с возрастающим числом атомов.

Прежде всего отметим одноатомную алгебру $\mathscr{B}_2$, состоящую только из множеств $\varnothing, \bar{D}$. Далее рассмотрим алгебры, имеющие два атома. Пусть сначала один из атомов является одноэлементным и состоит из набора ab, где $a \neq b$. Тогда, как отмечалось выше, в алгебру должно входить множество, состоящее из одного набора ba. Очевидно, что оно входит во второй (5-элементный) атом, что противоречит определению атома.

Пусть один из атомов состоит из двух наборов. Тогда операция перестановки компонент переводит его в двухэлементное множество, которое, очевидно, должно совпадать с исходным атомом. Следовательно, имеются ровно три алгебры $\mathscr{B}_2$ данного типа, каждая из которых определяется одной из пар (4).

Пусть оба атома алгебры состоят из трех наборов. Нетрудно видеть, что в этом случае ни в один из атомов не может входить пара из списка (4). В самом деле, если это не так и атом A содержит пару из списка (4), то перестановка компонент в атоме A с последующим пересечением с другим атомом дает одноэлементное множество, что противоречит определению атома. В результате мы приходим к четырем алгебрам $\mathscr{B}_2$, имеющим два трехэлементных атома, поскольку оба атома являются взаимнодополнительными (до $\bar{D}$) множествами.

Предположим, что алгебра $\mathscr{B}_2$ имеет три атома. Тогда она не может иметь трехэлементный атом: в противном случае в алгебре будет одноэлементный атом, что с использованием перестановки компонент в наборах атомов легко приводит к противоречию. Очевидно, что возможны 3 варианта с одним 4-элементным и двумя одноэлементными атомами, причем последние принадлежат одной паре из (4).

Остается рассмотреть случай, когда все три атома состоят из двух наборов. Имеется очевидный вариант, когда три пары из (4) образуют три атома. В остальных вариантах один атом должен входить в список (4), а два других получаются из оставшихся пар разъединением наборов: один набор каждой пары попадает в один атом, а другой набор — в другой атом. В целом получаем 10 вариантов алгебр $\mathscr{B}_2$ с тремя атомами.

Перейдем к алгебрам $\mathscr{B}_2$, имеющим 4 атома. Здесь возможны 3 варианта, когда два атома берутся из списка (4), а остальные два одноэлементны и в объединении дают оставшуюся пару. Еще 6 вариантов получаются следующим образом: берутся две пары из (4), разъединяются и образуют два двухэлементных атома, остальные два атома одноэлементны.

Рассмотрим алгебры $\mathscr{B}_2$ с пятью атомами. Очевидно, что здесь возможны лишь три варианта, в которых один атом берется из списка (4), а остальные 4 атома одноэлементны. Алгебра $\mathscr{B}_2$ с шестью атомами единственна.

Таким образом, всего имеется ровно 155 алгебр $\mathscr{B}$.

Перейдем теперь к реляционным 2-системам, у которых отношение ω не является тождественно ложным. Как отмечалось выше, тогда соответствующее ему множество O есть подмножество D. Пусть сначала $O = D$. Если в реляционную 2-систему входят только отношение ω и тождественно истинное отношение, то мы имеем тривиальную двухэлементную булеву алгебру. Предположим, что в реляционную 2-систему входят и другие отношения.

Тогда, как и выше, рассматриваем атомы соответствующей булевой алгебры, содержащие наборы из множества $\bar{D}$ (и, конечно, наборы множества D). Все приведенные выше построения сохраняются и в данном случае.

Пусть множество O состоит из двух наборов, например 00 и 11. Тогда булева алгебра $\mathscr{B}$ содержит множество $\overline{\{22\}} = \bar{D} \cup O$. Если, помимо множеств $O, D, \overline{\{22\}}, E_3^2$, других множеств в алгебре нет, то алгебра $\mathscr{B}$ состоит из четырех элементов с двумя атомами $D, \overline{\{22\}}$. В противном случае в алгебре всегда будет присутствовать атом D, а остальные атомы алгебры будут получаться из атомов алгебры $\mathscr{B}_2$ добавлением множества O. Поэтому в данном случае детальное описание возможных булевых алгебр мы опускаем.

Случай, когда множество O состоит из одного набора, отличается от предыдущего только тем, что вместо атома D возможно появление еще двух атомов, которые получаются из O добавлением одного набора из $D \backslash O$.

Обратимся теперь к исследованию возможных 3-реляционных систем в случае трехзначной логики. Поскольку отношения из этих систем будут использоваться в формулах вида (3), мы, наряду с операциями конъюнкции и импликации, будем использовать и операцию отрицания, т. е. полную систему логических связок.

Исследование 3-реляционных систем можно провести по частям: разбить систему отношений на несколько частей (вообще говоря, пересекающихся) и затем исследовать эти части отдельно. В нашем случае такое разбиение удобно выполнить следующим образом: три части системы пусть состоят только из отношений, для которых выполнятся соответственно равенства $x = y, x = z, y = z$ (эти части, очевидно, пересекаются), а четвертая часть — из оставшихся отношений (которые удовлетворяют конъюнкции $(x \neq y)\ \&\ (x \neq z)\ \&\ (y \neq z)$). Первые три части можно исследовать тем же путем, как это сделано выше для реляционных 2-систем. Четвертая часть нуждается в отдельном рассмотрении, которое будет проведено ниже.

Итак, пусть отношение $\rho(x, y, z)$ определено на множестве E_3. Нас будут интересовать только наборы, все компоненты которых различны. Обозначим это множество наборов через $\widehat{E}_3^3$. Считая, что отношение ρ не является ни тождественно ложным, ни тождественно истинным, рассмотрим множества наборов из $\widehat{E}_3^3$, которые порождаются отношением $\rho(x, y, z)$ в реляционной 3-системе.

1. Отношению ρ удовлетворяет только один набор (из множества $\widehat{E}_3^3$).

В этом случае путем перестановки переменных из отношения ρ получаем любое трехместное отношение, которому удовлетворяет ровно один набор. Далее с помощью операции дизъюнкции можно образовать любое трехместное отношение, которому удовлетворяют от двух до шести наборов (повторим, что имеются в виду только наборы из $\widehat{E}_3^3$).

2. Отношению ρ удовлетворяют ровно два набора.

а) Наборы имеют общую компоненту a.

Тогда перестановкой переменных из отношения ρ можно получить два других отношения с двумя наборами, имеющими общую компоненту a. Операция дизъюнкции позволяет строить из них три отношения с четырьмя наборами (две пары, в каждой из которых есть общая компонента a) и полное отношение с шестью наборами.

б) Наборы не имеют общей компоненты.

Как нетрудно проверить, в этом случае с точностью до перестановки наборов пара имеет вид $\{(a, b, c), (a+1, b+1, c+1)\}$ (сложение по модулю 3). Перестановкой переменных можно образовать любую другую пару этого типа (порядок наборов не учитываем), а с помощью операции дизъюнкции — объединение любых двух или всех трех пар (в последнем случае приходим к полному отношению).

3. Отношению ρ удовлетворяют три набора.

а) Два из них имеют общую компоненту.

Пусть, например, это первая компонента. Рассмотрим отношение

$$\sigma(x, y, z) = \rho(x, y, z) \,\&\, \rho(x, z, y).$$

Ему удовлетворяют только два набора (имеющие общую первую компоненту). Как мы условились выше, при получении новых отношений из отношения ρ можно использовать произвольные логические связки. В связи с этим определяем отношение $\rho(x, y, z) \,\&\, \neg\sigma(x, y, z)$, которому удовлетворяет только один набор.

б) Никакая пара (различных) наборов не имеет общей компоненты.

В этом случае, как нетрудно видеть, отношению ρ удовлетворяет лишь одна из двух троек наборов:

$$\{(0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1)\}, \quad \{(0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 1, 0)\}.$$

Заметим, что вторая тройка удовлетворяет отношению $\neg\rho$.

4. Если отношению ρ удовлетворяют четыре или пять наборов, то отношению $\neg\rho$ удовлетворяют два или один набор, и мы приходим к рассмотренным выше случаям.

Для более полного описания реляционных 3-систем необходимо рассмотреть случаи, когда реляционная система содержит несколько трехместных отношений различного типа. Отношения из пункта 1 мы опускаем, поскольку они дают произвольные трехместные отношения (имеются в виду их ограничения на множество $\widehat{E}_3^3$). Пусть в систему входят два отношения ρ_1, ρ_2, которые удовлетворяют условиям пункта 2а с различными общими компонентами. В этом случае, как нетрудно видеть, путем перестановки переменных из отношений ρ_1, ρ_2 можно получить такие отношения $\rho_1'(x, y, z)$, $\rho_2'(x, y, z)$, что отношению

$$\rho_1'(x, y, z) \,\&\, \rho_2'(x, y, z) \tag{5}$$

удовлетворяет только один набор (из $\widehat{E}_3^3$), и мы приходим к пункту 1. Пусть теперь в систему входят два отношения ρ_1, ρ_2, одно из которых удовлетворяет пункту 2а, а другое — пункту 2б. Если отношению ρ_2 удовлетворяет пара наборов (a, b, c), $(a+1, b+1, c+1)$, то путем перестановки переменных в отношении ρ_1 можно добиться того, что один из наборов, удовлетворяющих данному отношению, будет совпадать с набором (a, b, c). Далее вновь образуем конъюнкцию вида (5).

Предположим, что отношение ρ_1 удовлетворяет условиям пункта 2а, а отношение ρ_2 — пункта 3б. Так же, как в предыдущем случае, конъюнкция вида (5) дает отношение, которому удовлетворяет только один набор. Наконец, пусть отношение ρ_1 удовлетворяет условиям пункта 2б, а отношение ρ_2 — условиям пункта 3б. Тогда после подходящей перестановки переменных в отношении ρ_1 переходим к отношению $\rho_2(x, y, z) \,\&\, \neg\rho_1(x, y, z)$, которому удовлетворяет один набор.

Таким образом, если рассматривать отношения из 3-реляционных систем с точностью до множеств из $\widehat{E}_3^3$, удовлетворяющих отношениям систем, то возможные реляционные системы исчерпываются системами из пп. 2, 3б и системой, состоящей из всех непустых подмножеств из $\widehat{E}_3^3$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуров С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки. — М.: КРАСАНД, 2012.
2. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 2. — С. 44–49.
3. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 299–301.
4. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
5. Марченков С. С. Позитивно замкнутые классы трехзначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, № 1. — С. 67–83.
6. Марченков С. С. Сильные операторы замыкания. — М.: МАКС Пресс, 2017.
7. Марченков С. С. Расширения оператора позитивного замыкания с помощью логических связок // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 46–58.
8. Марченков С. С. Неявная выразимость в многозначной логике // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2022. — № 3. — С. 41–48.
9. Марченков С. С. О неявных расширениях в многозначной логике // Дискретная математика. — 2023. — Т. 35, № 2. — С. 34–41.
10. Марченков С. С. Об импликативно неявных расширениях в трехзначной логике // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2024. — № 1. — С. 9–17.

Поступило в редакцию 1 IV 2024,
окончательный вариант 29 IV 2024.