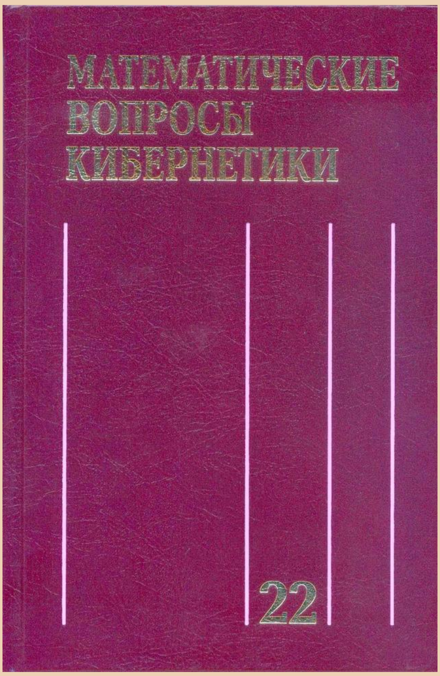
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 22



В. В. Кочергин,
А. В. Михайлович

О немонотонной сложности булевых функций и функций k-значной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кочергин В. В., Михайлович А. В. О немонотонной сложности булевых функций и функций k-значной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 22. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. — С. 51–151. URL: https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2024-51 DOI: 10.20948/mvk-2024-51

О НЕМОНОТОННОЙ СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*)

В. В. КОЧЕРГИН, А. В. МИХАЙЛОВИЧ

(МОСКВА)

Оглавление

Введение

В работе исследуется задача о схемной реализации произвольной булевой функции или функции многозначной логики с использованием минимально возможного числа немонотонных функций из заданного конечного множества в случае, когда монотонные функции можно использовать без ограничений. Под схемной реализацией понимается построение для заданной функции схемы из функциональных элементов (другие встречающиеся в литературе названия: логические схемы, булевы схемы, схемы вычислений, комбинационные схемы — определения схем и всех сопутствующих

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

DOI: 10.20948/mvk-2024-51 © В. В. Кочергин, А. В. Михайлович, 2024

понятий см., например, в [27, 51, 55, 76, 105]) над соответствующим базисом*). В качестве базиса, над которым строятся схемы, берется множество функций, состоящее из двух непересекающихся частей: одна из них — это множество M всех монотонных функций**), которые можно использовать «бесплатно», вторая состоит из конечного числа немонотонных функций, количество использований которых и определяет качество схемы или ее сложность. Иными словами, монотонным функциям базиса приписан нулевой вес, а немонотонным — единичный, а под сложностью схемы как обычно понимается суммарный вес всех ее элементов. Заметим, что наличие в базисе всех монотонных функций необязательно — достаточно, чтобы в базис входили с нулевым весом функции, порождающие весь класс монотонных функций.

Такая постановка задачи восходит к работам Э. Н. Гилберта и А. А. Маркова.

В 1954 г. Э. Н. Гилберт [87], исследуя характерные особенности схем переключательного типа — прежде всего релейно-контактных [7, 52] и вентильных переключательных схем [92], — не содержащих инверторов вообще или использующих минимальное их количество, пришел к математической задаче минимизации количества различных подформул, на которые «навешан» знак отрицания, в формуле для булевой функции, когда допускаются связки «*и*» (конъюнкция), «*или*» (дизъюнкция) и «*не*» (отрицание).

Практический интерес к этой задаче изначально возник в связи с тем, что в некоторых типах переключательных схем устройства, которые выполняют отрицание, более дороги и менее надежны, чем устройства, выполняющие другие логические операции. Например, в релейно-контактных схемах отрицание реализовывалось посредством применения размыкающих контактов, а регулировка пружины реле, имеющего как замыкающие, так и размыкающие контакты, более сложна, нежели регулировка реле только с замыкающими контактами, кроме того, тестирование замыкающих контактов намного проще тестирования размыкающих. Для получения отрицания в вентильных переключательных схемах вообще использовались трансформаторы.

Э. Н. Гилберт [87] установил, что минимальное число отрицаний, достаточное для реализации любой булевой функции от n переменных, растет с ростом n по порядку как логарифм от n. Верхняя оценка установлена конструктивно, а нижняя получена из стандартных мощностных (энтропийных) рассуждений. Забегая вперед, отметим, что полученная в [87] нижняя оценка может быть поднята асимптотически вдвое, при этом стандартным мощностным методом (см., например, [27, 53]) это сделать невозможно: используя мощностной метод, вообще нельзя улучшить асимптотику нижней оценки, полученную Э. Н. Гилбертом, несмотря на то, что она установлена на основе достаточно грубых оценок числа монотонных булевых функций от фиксированного числа переменных.

В 1957 г. А. А. Марков получил [56] исчерпывающее решение этой задачи: он установил, что минимальное число отрицаний, достаточное

*) Часто вместо слов «над базисом» используется эквивалентное сочетание «в базисе»; выбор того или иного варианта в данной работе зачастую обусловлен вариантом обсуждаемого первоисточника.

**) В случае реализации функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ монотонность определяется относительно стандартного линейного порядка $0 < 1 < 2 < \ldots < k-1$.

для схемной реализации произвольной булевой функции f в базисе $\{x \vee y, x\&y, \overline{x}, 0, 1\}$, названное им инверсионной сложностью функции f, равно $\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil$, где $d(f)$ — максимальное (максимум берется по всем возрастающим цепям наборов значений переменных) число изменений значений функции с бóльшего значения на меньшее. Более того, в 1963 г. А. А. Марков установил аналогичную оценку инверсионной сложности для реализации произвольной системы булевых функций. Достаточно подробное изложение этих результатов, правда, отличное от авторского, дано в первом параграфе; влияние идей и подходов, использованных при доказательстве этих классических результатов, в дальнейшем будут прослеживаться неоднократно.

Отметим, что постановки задач в работах Э. Н. Гилберта и А. А. Маркова формально несколько отличаются — в одном случае базисные функции нулевого веса порождают класс $M_{01} = M \setminus \{0, 1\}$, а в другом — класс M (см., например, [6, 75]). Однако нетрудно заметить, что значение сложности в этих базисах будет отличаться только для двух функций — самих констант 0 и 1, которые в первом случае имеют сложность один, а во втором — ноль. В дальнейшем, как правило, не будем различать эти два базиса.

В 1961 г. Э. И. Нечипоруком [59] установлено точное значение инверсионной сложности для любой булевой функции в классе схем без ветвления выходов элементов (формул). Оказалось, что минимальное число отрицаний в формуле над базисом $\{x \vee y, x\&y, \overline{x}\}$, реализующей произвольную булеву функцию f, равно $d(f)$. К сожалению, этот факт, как и некоторые другие фундаментальные результаты Э. И. Нечипорука, о части из которых пойдет речь в разделе 4.1, за рубежом недостаточно известны. Так, точная формула инверсионной сложности в классе формул была «переоткрыта» спустя почти полвека в работе [97].

Вообще количество публикаций, в которых затрагиваются различные вопросы задачи о вычислении булевых функций с использованием минимально возможного числа отрицаний, достаточно велико (см., в частности, [78–81, 83, 89, 98–100, 102, 104, 106, 107]), причем особый интерес, начиная с середины девяностых годов прошлого века, эта тематика вызывает в Японии. Стоит еще отметить обзор М. Фишера [85] и монографию С. Юкны [91], а также работу [90] о некоторых криптографических аспектах этой задачи.

Возвращаясь к задаче об инверсионной сложности булевых функций, рассматривавшейся Э. Н. Гилбертом и А. А. Марковым, отметим, что эта задача является частным случаем более общей задачи о сложности функций в вырожденных базисах (базисах, содержащих нетривиальные элементы с ненулевыми весами), исследовавшейся, например, в работах [2, 58, 59, 61, 62, 72]. Актуальность такой постановки обусловлена тем, что в задачах построения схем не только инверторы могут по своим сложностным характеристикам сильно отличаться от других элементов. Разница в стоимости, размерах, доступности, возможностях тестирования и ремонтопригодности, а также других свойствах базисных элементов может быть настолько принципиальной, что веса некоторых элементов можно считать нулевыми. Это позволяет более объемно выявить роль элементов того или иного вида.

Формализуем такую постановку. Пусть базис B состоит из двух непересекающихся множеств булевых функций A_0 и A_1, причем всем функциям из множества A_0 приписан нулевой вес — это *нулевая часть* базиса B, а функциям из множества A_1, а их должно быть конечное число, — положительные (чаще всего единичные) веса — это *положительная часть* базиса.

Базис B называется *вырожденным*, если множество A_0 содержит функцию, существенно зависящую более чем от одной переменной.

Базис B называется *полным*, если любая функция может быть представлена формулой над B. Если последнее условие не выполняется, то базис называется *неполным*.

Под *сложностью схемы S над базисом B* понимается величина $L_B(S)$, численно равная сумме весов всех элементов схемы S. В обозначении сложности схемы индекс, указывающий на базис, иногда опускается.

Пусть $f \in [B]$, т. е. функцию f можно представить формулой над B. *Сложность $L_B(f)$ функции f* при реализации схемами над базисом B — это минимальное значение сложностей схем, реализующих функцию f над базисом B. *Функция Шеннона сложности реализации схемами над базисом B* определяется стандартным равенством $L_B(n) = \max L_B(n)$, где максимум берется по всем булевым функциям из множества $[B]$ от n переменных.

Отметим, что замена в базисе B нулевой части A_0 на множество $[A_0]$ не приводит к изменению значения сложности.

В 1961 г. Э. И. Нечипорук [58, 59] для полного вырожденного базиса B, нулевая часть которого $[\{x \vee y\}]$ состоит из всевозможных дизъюнкций переменных, а положительная часть — из отрицания, имеющего единичный вес, установил следующую асимптотику роста функции Шеннона:

$$L_B(n) \sim \sqrt{2}\, 2^{n/2}.$$

Из соображений двойственности аналогичный результат справедлив и для полного вырожденного базиса B, нулевая часть которого $[\{x \& y\}]$ состоит из всевозможных конъюнкций переменных, а положительная часть — из отрицания, имеющего единичный вес.

В работах [58, 59] исследовались также пять полных вырожденных базисов $\Lambda_i = A_{0i} \cup A_{1i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, нулевая часть которых состоит из нетривиальных замкнутых классов линейных функций, а положительная часть — из конъюнкции двух переменных и отрицания, если оно не входит в нулевую часть базиса:

$$A_{01} = [\{x \oplus y, 1\}] = L,\ A_{02} = [\{x \oplus y \oplus 1\}] = L \cap T_1,\ A_{03} = [\{x \oplus y\}] = L \cap T_0,$$
$$A_{04} = [\{x \oplus y \oplus z\}] = L \cap T_0 \cap T_1, \quad A_{05} = [\{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}] = L \cap S;$$
$$A_{11} = A_{15} = \{x \& y\}, \quad A_{12} = A_{13} = A_{14} = \{x \& y, \overline{x}\}.$$

Для всех этих базисов установлена асимптотика роста функции Шеннона:

$$L_{\Lambda_i}(n) \sim 2^{n/2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

В работах [61, 62] Э. И. Нечипорук обобщил результаты из [58, 59] на случай неполных вырожденных базисов, нулевая часть которых порождает замкнутые классы линейных функций, конъюнкций или дизъюнкций, и на случай произвольных положительных весов элементов базиса из положительной части.

А. Б. Угольниковым рассмотрены [72] случаи вырожденных неполных базисов, в которых замыкание нулевой части базиса не содержится в объединении классов линейных функций, конъюнкций и дизъюнкций. Для многих из них установлены точные по порядку оценки соответствующих функций Шеннона.

Результаты [58, 59, 61, 62, 72] Э. И. Нечипорука и А. Б. Угольникова позволяют сделать вывод, что изменение базиса, сохраняющее его нулевую часть, несущественно отражается на методах построения схем и оценках функций Шеннона, в то время как изменение нулевой части базиса приводит к существенным изменениям — порядок роста функции Шеннона может изменяться от константного и логарифмического до $2^{n/2}$ (подробнее см. раздел 4.1).

В этом свете исследования, о которых пойдет речь в настоящей работе, а именно изучение немонотонной сложности булевых функций и функций многозначной логики, т. е. сложности над вырожденными базисами, нулевой частью которых всегда является класс всех монотонных функций, а изменяется только ненулевая часть, связаны в некотором смысле с более тонкой материей, с более детальной проработкой методов построения схем и доказательства нижних оценок.

В первом параграфе излагаются классические результаты А. А. Маркова об инверсионной сложности булевых функций и систем булевых функций, причем доказательства приводятся в том виде, который в дальнейшем используется как основа для различных обобщений.

Второй параграф посвящен исследованию немонотонной сложности булевых функций — сложности над вырожденным базисом, нулевая часть которого состоит из всех монотонных функций, а положительная — из конечного числа немонотонных функций, каждая из которых имеет единичный вес. Для любого базиса описанного вида и произвольной булевой функции устанавливается точное значение сложности этой функции над заданным базисом.

Обобщение инверсионной сложности на случай функций многозначной логики — объект исследования в третьем параграфе. Также, как и в первом параграфе, рассматривается вырожденный базис, нулевая часть которого состоит из всех монотонных функций, а единственная функция единичного веса — отрицание. Но все это изучается во множестве функций k-значной логики, поэтому приходится делать уточнения: множество монотонных функций рассматривается относительно стандартного линейного порядка $0<1<2<\ldots<k-1$, а под отрицанием понимается либо отрицание Поста, либо отрицание Лукасевича (определения этих функций см. ниже или в [6, 27, 75]). В этом параграфе в общем случае доказываются верхняя и нижняя оценки немонотонной сложности функций многозначной логики, которые, вообще говоря, для произвольного вырожденного базиса, нулевая часть которого состоит из всех монотонных функций, а положительная — из конечного числа немонотонных функций единичного веса не устанавливают даже асимптотику роста функции Шеннона, но из которых извлекаются, однако, точные значения инверсионной сложности произвольной функции многозначной логики и в случае, когда под отрицанием понимается отрицание Поста, и в случае, когда под отрицанием понимается отрицание Лукасевича.

Задача об инверсионной сложности, т. е. о сложности в вырожденном базисе, нулевая часть которого состоит из всех монотонных функций, а единственная функция единичного веса — отрицание, тесно связана с задачей об обычной сложности, понимаемой как суммарное число всех элементов, в бесконечном невырожденном базисе, состоящем из всех монотонных функций и отрицания, имеющих одинаковый единичный вес. Последней задаче посвящен четвертый параграф работы. В первой его части дан обзор известных результатов о сложности булевых функций над бесконечными полными невырожденными базисами относительно поведения соответствующих функций Шеннона. Во второй и третьей частях четвертого параграфа исследуется задача о сложности произвольной функции многозначной логики в бесконечных базисах B_P и B_L, состоящих их всех монотонных функций и, соответственно, отрицания Поста или отрицания Лукасевича. Установлены точные значения соответствующих функций Шеннона, а для произвольной функции k-значной логики получены верхние и нижние оценки в базисах B_P и B_L, отличающихся друг от друга не более чем на 1 в случае базиса B_P и не более чем на 3 в случае базиса B_L. В последней части четвертого параграфа приводится окончательное решение задачи в булевом случае — для произвольной булевой функции установлено точное значение ее сложности реализации в бесконечном базисе, состоящем из отрицания и всех монотонных функций, и предложен метод построения минимальной схемы в этом базисе.

В пятом параграфе исследуется немонотонная сложность функций многозначной логики над произвольным вырожденным базисом, нулевая часть которого состоит из всех монотонных функций, а положительная часть состоит из конечного числа немонотонных функций единичного веса. Основным результатом является получение для произвольной функции многозначной логики верхней и нижней оценок немонотонной сложности, отличающихся лишь на небольшую константу, не зависящую от базиса.

Формальные определения будут даваться по мере необходимости.

Авторы постарались сделать отдельные части данной работы по возможности независимыми, поэтому некоторые наиболее важные факты упоминаются по несколько раз.

§ 1. Инверсионная сложность булевых функций

В этом параграфе излагаются классические результаты А. А. Маркова об инверсионной сложности булевых функций, причем не в авторском варианте, а в виде, который наиболее удобен для сравнения с представленными далее обобщениями. Основой такого изложения, по-видимому, стоит считать работы М. Фишера [84–86], с последующей обработкой С. Юкны [91].

Дадим необходимые определения.

Последовательность

$$\widetilde{\alpha}_1=(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n}),\ \ \widetilde{\alpha}_2=(\alpha_{21},\ldots,\alpha_{2n}),\ \ \ldots,\ \ \widetilde{\alpha}_r=(\alpha_{r1},\ldots,\alpha_{rn})$$

наборов из множества $E_2^n=\{0,1\}^n$ назовем *возрастающей цепью* или просто *цепью*, если все наборы $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij}\leqslant\alpha_{i+1,j},\quad i=1,\ldots,r-1,\quad j=1,\ldots,n.$$

Наборы $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_r$ будем называть *началом* и *концом* этой цепи соответственно.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция. Упорядоченную пару наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* f, если выполнены условия:

1) $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$;

2) $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Обрывом для системы функций будем называть любую пару наборов, являющуюся обрывом хотя бы для одной функции системы.

Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система булевых функций от переменных $x_1, \ldots x_n$, а C — цепь, имеющая вид

$$\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r.$$

Под *падением* $d_C(F)$ *системы* F *на цепи* C будем понимать число обрывов для системы F на парах вида $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$.

Спад $d(F)$ системы F определим равенством $d(F) = \max d_C(F)$, где максимум берется по всем цепям C.

Следуя [56, 57], под *инверсионной сложностью схемы* S в базисе $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$, обозначаемой $I(S)$, будем понимать число инверторов (элементов, которым приписана базисная функция $\overline{x}$) в схеме S.

Инверсионная сложность $I(f)$ *булевой функции* f и *инверсионная сложность* $I(F)$ *системы булевых функций* F определяются равенствами

$$I(f) = \min I(S), \quad I(F) = \min I(S),$$

где минимум берется по всем схемам в базисе B_0, реализующим, соответственно, функцию f или систему функций F.

Инверсионную сложность можно трактовать как сложность в бесконечном базисе $B = M_{01} \cup \{\overline{x}\}$, в котором функциям из множества M_{01} — класса всех отличных от констант монотонных булевых функций — приписан нулевой вес (их использование «бесплатно»), а отрицанию — единичный.

Отметим также, что в случае добавления к нулевой (бесплатной) части базиса констант 0 и 1 (в этом случае нулевой вес будут иметь все монотонные булевы функции) значение инверсионной сложности произвольной отличной от константы булевой функции не изменится.

В 1957 г. А. А. Марков установил точное значение инверсионной сложности для произвольной булевой функции, а также для любых n и m нашел максимально возможное значение инверсионной сложности систем из m булевых функций от n переменных. Спустя 6 лет А. А. Марков установил точное значение инверсионной сложности и для произвольной системы булевых функций. Приведем доказательство соответствующей теоремы.

Теорема 1 (А. А. Марков [56, 57], 1957–1963). *Для любой системы* F *булевых функций справедливо равенство*

$$I(F) = \lceil \log(d(F) + 1) \rceil.$$

Отдельно докажем нижнюю и верхнюю оценки величины $I(F)$. Основой для доказательства нижней оценки будет следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой системы F булевых функций справедливо неравенство*

$$d(F) \leqslant 2^{I(F)} - 1.$$

Доказательство. Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система булевых функций от переменных $x_1, \ldots x_n$. Проведем индукцию по $I(F)$.

Если $I(F) = 0$, то все функции системы F монотонны. Следовательно, $d(F) = 0$.

Пусть для всех систем функции G, для которых справедливо соотношение $I(G) \leqslant I(F) - 1$, утверждение леммы выполняется. Рассмотрим произвольную схему S со входами $x_1, \ldots, x_n$, реализующую систему функций F и содержащую ровно $I(F)$ инверторов (элементов, реализующих отрицание). В этой схеме выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) инвертор и обозначим его E. Пусть на вход инвертора E подается монотонная функция $h(x_1, \ldots, x_n)$. Преобразуем схему S, удалив из нее элемент E, создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S' реализует систему функций $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$, причем выполняются следующие условия

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i\left(\overline{h(x_1, \ldots, x_n)}, x_1, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Кроме того, справедливо неравенство $I(G) \leqslant I(F) - 1$.

Пусть цепь

$$C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

имеет падение $d(F)$.

Рассмотрим последовательность C' наборов длины $n+1$:

$$(\overline{h(\widetilde{\alpha}_1)}, \widetilde{\alpha}_1), \ldots, (\overline{h(\widetilde{\alpha}_r)}, \widetilde{\alpha}_r).$$

Последовательность C', вообще говоря, не является цепью, однако, в силу монотонности функции $h(x_1, \ldots, x_n)$, первые разряды в наборах последовательности C' до какого-то момента равны единице, а потом — нулю, и, следовательно, последовательность C' можно так разбить на два участка (идущих подряд элементов последовательности C') C'_1 и C'_2, что каждая из последовательностей наборов C'_j, $j = 1, 2$, является цепью.

По предположению индукции для j, $j = 1, 2$, выполняются соотношения

$$d_{C'_i}(G) \leqslant d(G) \leqslant 2^{I(G)} - 1 = 2^{I(F)-1} - 1.$$

Теперь, учитывая, что справедливы равенства

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i\left(\overline{h(x_1, \ldots, x_n)}, x_1, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, \ldots, m,$$

получаем

$$d_C(F) \leqslant d_{C'_1}(G) + d_{C'_2}(G) + 1 \leqslant 2(2^{I(G)} - 1) + 1 \leqslant 2^{I(F)} - 1.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой системы F булевых функций справедливо неравенство*

$$I(F) \geqslant \lceil \log(d(F)+1) \rceil.$$

Доказательство. Из леммы 1 вытекает оценка

$$d(F) \leqslant 2^{I(F)} - 1,$$

откуда, в силу целочисленности величины $I(F)$, следует требуемая нижняя оценка. Лемма 2 доказана.

Переходя к доказательству верхней оценки, введем понятие «переключателя» функций, которое в обобщенном виде будет активно использоваться и в дальнейшем.

Назовем, следуя, например, [91], *переключателем* булевых функций $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ такую булеву функцию $g(u, v, x_1, \ldots, x_n)$, что

$$g(0, 1, x_1, \ldots, x_n) = f_0(x_1, \ldots, x_n), \quad g(1, 0, x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Переключателем множества упорядоченных пар функций будем называть множество переключателей этих пар.

Лемма 3. *Для любого множества $\{(f_{01}, f_{11}), \ldots, (f_{0m}, f_{1m})\}$ упорядоченных пар булевых функций найдется переключатель G этого множества пар, удовлетворяющий условию*

$$I(G) \leqslant \max\{I(F_0), I(F_1)\},$$

где $F_0 = \{f_{01}, \ldots, f_{0m}\}$, $F_1 = \{f_{11}, \ldots, f_{1m}\}$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по величине $r = \max\{I(F_0), I(F_1)\}$.

Если $r = 0$, то множества функций F_0 и F_1 монотонны. Тогда в качестве искомого множества функций G можно взять множество

$$\{g_j \mid g_j = uf_{1j} \vee vf_{0j}, \ j = 1, \ldots, m\}.$$

Шаг индукции. Для $i = 0, 1$ обозначим через $S_i(\widetilde{x})$ некоторую схему со входами $x_1, \ldots, x_n$, реализующую систему функций F_i и содержащую $I(F_i)$ инверторов. Если в одной из схем S_i, $i = 1, 2$, нет инверторов, то в качестве множества функций G можно взять такое же множество, как и в случае $r = 0$. Иначе для $i = 0, 1$ в схеме $S_i(\widetilde{x})$ выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) инвертор. Пусть на его вход подается монотонная функция $h_i(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через $S_i(y, \widetilde{x})$ схему со входами $y, x_1, \ldots, x_n$, получающуюся из схемы $S_i(\widetilde{x})$ путем замены выделенного инвертора на новый вход y, а через $f'_{ij}(y, x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, — функции, вычисляемые схемой $S_i(y, \widetilde{x})$. Тогда

$$f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = f'_{ij}(\overline{h_i(x_1, \ldots, x_n)}, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 0, 1, \ j = 1, \ldots, m.$$

Так как $I(F'_i) \leqslant r - 1$, $i = 0, 1$, то, по предположению индукции, найдется такое множество функций

$$G' = \{g'_j(u, v, y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid j = 1, \ldots, m\},$$

что

$$I(G') \leqslant \max\{I(F_0'), I(F_1')\} \leqslant r-1;$$
$$g_j'(0,1,y,x_1,\ldots,x_n) = f_{0j}'(y,x_1,\ldots,x_n), \quad j=1,\ldots,m;$$
$$g_j'(1,0,y,x_1,\ldots,x_n) = f_{1j}'(y,x_1,\ldots,x_n), \quad j=1,\ldots,m.$$

Теперь в функции $g_j'(u,v,y,x_1,\ldots,x_n)$, $j=1,\ldots,m$, вместо переменной y подставим функцию

$$Y(u,v,x_1,\ldots,x_n) = \overline{uh_1(x_1,\ldots,x_n) \vee vh_0(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Учитывая, что

$$Y(0,1,x_1,\ldots,x_n) = \overline{h_0(x_1,\ldots,x_n)}, \quad Y(1,0,x_1,\ldots,x_n) = \overline{h_1(x_1,\ldots,x_n)},$$

получаем, что функции

$$g_j(u,v,x_1,\ldots,x_n) = g_j'(u,v,Y(u,v,x_1,\ldots,x_n),x_1,\ldots,x_n), \quad j=1,\ldots,m,$$

множества $G=\{g_1,\ldots,g_m\}$ являются переключателями функций f_{0j} и f_{1j}. Кроме того, выполняются неравенства $I(G) \leqslant 1+I(G') \leqslant r$.

Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Для любой системы F булевых функций справедливо неравенство*

$$I(F) \leqslant \lceil \log(d(F)+1) \rceil.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $R(F) = \lceil \log(d(F)+1) \rceil$. Проведем индукцию по величине $R(F)$.

Если $R(F)=0$, то $d(F)=0$ и, следовательно, все функции системы F монотонны. Поэтому $I(F)=0$.

Пусть для любой системы функций G, для которой справедливо соотношение $R(G) \leqslant R(F)-1$, утверждение леммы выполняется.

Обозначим через T множество двоичных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с началом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(F) < 2^{R(F)-1}$, т. е.

$$T = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \mid d_C(F) < 2^{R(F)-1} \text{ для любой цепи } C \text{ с началом } \widetilde{\alpha}\}.$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha} \in T$ и каждый разряд набора $\widetilde{\alpha}$ не превосходит соответствующего разряда некоторого набора $\widetilde{\beta}$, то и $\widetilde{\beta} \in T$.

Теперь докажем, что для любой цепи C с концом в наборе $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \notin T$, также выполняется аналогичное неравенство $d_C(F) < 2^{R(F)-1}$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_0 с концом в наборе $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \notin T$, для которой выполняется неравенство $d_{C_0}(F) \geqslant 2^{R(F)-1}$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}$ не лежит в множестве T, то найдется цепь C_1 с началом в наборе $\widetilde{\alpha}$, для которой выполняется неравенство $d_{C_1}(F) \geqslant 2^{R(F)-1}$. Тогда для цепи $C = C_0 \cup C_1$ справедливы соотношения

$$d_C(F) \geqslant d_{C_0}(F) + d_{C_1}(F) \geqslant 2^{R(F)-1} + 2^{R(F)-1} = 2^{R(F)} > d(F),$$

что противоречит определению величины $d(F)$.

Через $\chi_T(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим характеристическую функцию множества T. Отметим, что функция $\chi_T(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна.

Далее для каждой функции f_j из множества F положим

$$f_{0j}(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1, \ldots, x_n)\chi_T(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f_{1j}(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \vee \chi_T(x_1, \ldots, x_n).$$

Теперь введем обозначения

$$F_0 = \{f_{0j} \mid f_j \in F\}, \quad F_1 = \{f_{1j} \mid f_j \in F\}.$$

В силу определения множеств F_0 и F_1 выполняются неравенства

$$d(F_i) < 2^{R(F)-1}, \quad i = 0, 1,$$

и, следовательно,

$$d(F_i) \leqslant 2^{R(F)-1} - 1, \quad i = 0, 1.$$

Поэтому

$$R(F_i) = \lceil \log(d(F_i) + 1) \rceil \leqslant \lceil \log 2^{R(F)-1} \rceil = R(F) - 1, \quad i = 0, 1.$$

Теперь рассмотрим переключатель $G = \{g_j(u, v, \widetilde{x}) \mid j = 1, \ldots, m\}$ множества пар функций $\{(f_{0j}(\widetilde{x}), f_{1j}(\widetilde{x})) \mid j = 1, \ldots, m\}$, о существовании которого говорится в лемме 3. Тогда

$$f_j(\widetilde{x}) = g_j\left(\overline{\chi_T(\widetilde{x})}, \chi_T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Действительно, если $\widetilde{x} \in T$, то

$$g_j\left(\overline{\chi_T(\widetilde{x})}, \chi_T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\right) = g_j(0, 1, \widetilde{x}) = f_{0j}(\widetilde{x}) = f_j(\widetilde{x}).$$

Если $\widetilde{x} \notin T$, то

$$g_j\left(\overline{\chi_T(\widetilde{x})}, \chi_T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\right) = g_j(1, 0, \widetilde{x}) = f_{1j}(\widetilde{x}) = f_j(\widetilde{x}).$$

Учитывая монотонность функции $\chi_T(\widetilde{x})$, а также предположение индукции, получаем соотношения

$$I(F) \leqslant I(G) + 1 \leqslant \max\{I(F_0), I(F_1)\} + 1 \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\lceil \log(d(F_0) + 1) \rceil, \lceil \log(d(F_1) + 1) \rceil\} \leqslant \lceil \log 2^{R(F)-1} \rceil + 1 = R(F),$$

которые завершают переход индукции.

Лемма 4 доказана.

Из лемм 2 и 4 непосредственно следует теорема 1.

Теорема 1 позволяет просто установить точные значения соответствующих функций Шеннона. *Функция Шеннона $I(n)$ инверсионной сложности булевых функций от n переменных* и *функция Шеннона $I(n, m)$ инверсионной сложности систем из m булевых функций от n переменных* стандартным образом определяются равенствами

$$I(n) = \max_{f \in P_2(n)} I(f), \quad I(n, m) = \max_{F = \{f_1, \ldots, f_m\},\ f_j \in P_2(n)} I(F).$$

Теорема 2 (А. А. Марков [56], 1957). *Для любых n и m, $n\geqslant 1$, $m\geqslant 2$, справедливы равенства*

$$I(n)=\lceil\log(\lceil n/2\rceil+1)\rceil=\lfloor\log(n+1)\rfloor,$$

$$I(n,m)=\lceil\log(n+1)\rceil.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1, учитывая, что спад одной функции от n переменных не может превышать величины $\lceil n/2\rceil$, а спад системы функций от n переменных не может превышать величины n, для доказательства теоремы достаточно предъявить функцию и систему функций, на которых эти ограничения достигаются.

Положим $l_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n\oplus 1$. Тогда

$$d(l_1)=\lceil n/2\rceil,\quad d\left(\{l_1,\overline{l_1}\}\right)=n.$$

Теорема 2 доказана.

Стоит отметить, что А. А. Марков доказал теорему 2 в 1957 г., за 6 лет до того, как им было найдено точное значение инверсионной сложности произвольной системы булевых функций.

§ 2. Немонотонная сложность булевых функций

В этом параграфе рассматривается естественное обобщение задачи об инверсионной сложности булевых функций — задача о сложности реализации булевых функций схемами в бесконечных полных базисах, содержащих все монотонные функции, имеющие при этом нулевой вес (стоимость использования) и конечное число немонотонных функций единичного веса. Такое обобщение инверсионной сложности будем называть немонотонной сложностью.

Изложение настоящего параграфа основано на материалах статьи [44], а также работ [35, 37, 38, 94].

Итак, будем исследовать реализацию булевых функций схемами из функциональных элементов над базисами B, имеющими вид:

$$B=M\cup\{\omega_1,\ldots,\omega_p\},\quad \omega_i\in P_2\setminus M,\ \ i=1,\ldots,p,$$

причем функциям из множества M приписан нулевой вес, а функциям $\omega_1,\ldots,\omega_p$ — единичный.

Определим *немонотонную сложность $I_B(S)$ схемы S над базисом B* как число немонотонных элементов схемы S, т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса.

Немонотонную сложность булевой функции f над базисом B определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом B функцию f. Для немонотонной сложности функции f будем использовать обозначение $I_B(f)$.

Аналогичным образом определяется и величина $I_B(F)$ — *немонотонная сложность системы F булевых функций.*

Отметим, что в определениях немонотонной сложности в качестве части базиса, имеющей нулевой вес, вместо множества всех монотонных функций можно взять произвольное порождающее множество класса монотонных функций.

Задача о немонотонной сложности реализации одной булевой функции получила в некотором смысле окончательное решение: в 2017 г. установлено [44] точное значение немонотонной сложности над произвольным базисом указанного вида для любой булевой функции. Сформулируем и этот результат и приведем его доказательство.

Теорема 3 [44]. *Пусть базис B имеет вид*

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_2 \setminus M, \ i = 1, \ldots, p.$$

Тогда для любой булевой функции f выполняется равенство

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil ,$$

где $D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}$.

2.1. Нижняя оценка. Доказательство нижней оценки теоремы 3 основано на следующем обобщении леммы 1.

Лемма 5. *Пусть схема S реализует над базисом B булеву функцию f. Тогда справедливо неравенство*

$$d(f) \leqslant D(B) \left(2^{I_B(S)} - 1\right) .$$

Доказательство. Проведем индукцию по $I_B(S)$.

Если $I_B(S) = 0$, то функция f монотонна. Следовательно, $d(f) = 0$.

Пусть для любой схемы S' над базисом B, для которой справедливо соотношение $I_B(S') \leqslant I_B(S) - 1$, утверждение леммы выполняется.

В схеме S со входами $x_1, \ldots, x_n$ выделим первую относительно некоторой правильной нумерации (т. е. нумерации, при которой на входы элементов не могут подаваться выходы элементов с бо́льшими номерами) вершину, которой приписана какая-либо функция из множества $\{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, и функциональный элемент, соответствующий этой вершине, обозначим через E. Пусть на выходе элемента E реализуется функция $h(x_1, \ldots, x_n)$. Преобразуем схему S, удалив из нее элемент E, создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S' реализует функцию $g(y, x_1, \ldots, x_n)$, для которой выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g\left(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n\right) .$$

Кроме того, справедливо равенство $I_B(S') = I_B(S) - 1$.

Пусть цепь

$$C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

наборов из E^n удовлетворяет условию $d_C(f) = d(f)$.

Рассмотрим последовательность C' наборов длины $n+1$:

$$(h(\widetilde{\alpha}_1), \widetilde{\alpha}_1), \ldots, (h(\widetilde{\alpha}_r), \widetilde{\alpha}_r).$$

Последовательность C', вообще говоря, не является цепью. В силу неравенства $d(h) \leqslant D(B)$ первые разряды в наборах последовательности C' меняют свое значение не более $2D(B)+1$ раз. Выделим в последовательности C' подпоследовательность C'_1, включив в нее все начальные наборы из C', у которых первый разряд равен нулю (если такие наборы в начале последовательности C' имеются), а также добавив все наборы из C', начинающиеся с единицы. Обозначим через C'_2 подпоследовательность последовательности C', включающую в себя все остальные наборы из C', начинающиеся с нуля. Последовательности C'_1 и C'_2 уже являются возрастающими цепями наборов из множества E_{n+1}. Покажем, что выполняется неравенство

$$d_C(f) \leqslant d_{C'_1}(g) + d_{C'_2}(g) + D(B).$$

Сопоставим некоторым обрывам функции f на соседних наборах цепи C обрывы для функции g на соседних наборах цепей C'_1 и C'_2.

Назовем упорядоченную пару соседних наборов $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ цепи C *внутренней*, если соответствующие этим наборам наборы $(h(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}_i)$ и $(h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1})$ последовательности C' лежат в одной цепи C'_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$, т. е. либо

$$(h(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}_i) \in C'_1, \quad (h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1}) \in C'_1,$$

либо

$$(h(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}_i) \in C'_2, \quad (h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1}) \in C'_2.$$

Назовем упорядоченную пару соседних наборов $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ цепи C *граничной*, если среди соответствующих этим наборам наборов $(h(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}_i)$ и $(h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1})$ последовательности C' один лежат в цепи C'_1, а другой — в цепи C'_2.

Внутренней паре наборов $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ цепи C, являющейся обрывом для функции f, естественным образом сопоставим пару наборов $((h(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}_i), (h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1}))$ последовательности C', причем, во-первых, оба набора этой пары одновременно лежат либо в цепи C'_1, либо в цепи C'_2; во-вторых, в силу равенства

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g\left(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n\right)$$

эта пара наборов является обрывом для функции g.

Две граничные пары $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ и $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j \geqslant i+1$, назовем *соседними*, если все наборы

$$(h(\widetilde{\alpha}_{i+1}), \widetilde{\alpha}_{i+1}), \ldots, (h(\widetilde{\alpha}_j), \widetilde{\alpha}_j)$$

лежат только в одной из цепей C'_1 или C'_2.

Обозначим через q число граничных пар наборов в цепи C. Очевидно, что $q \leqslant 2D(B)$. Рассмотрим множество первых $2\lfloor q/2 \rfloor$ граничных пар (при четном q это множество всех граничных пар, а при нечетном q — множество всех граничных пар без последней пары). Это множество граничных пар, в свою очередь, разобьем на $\lfloor q/2 \rfloor$ двухэлементных подмножеств так, чтобы в каждом подмножестве его элементы были соседними граничными парами.

Теперь рассмотрим две произвольные граничные пары $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$ и $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j \geqslant i+1$, являющиеся соседними и удовлетворяющие условию: каждая из этих пар является обрывом для функции f.

В силу последнего условия справедливы равенства

$$f(\widetilde{\alpha}_i)=g(h(\widetilde{\alpha}_i),\widetilde{\alpha}_i)=1,\quad f(\widetilde{\alpha}_{i+1})=g(h(\widetilde{\alpha}_{i+1}),\widetilde{\alpha}_{i+1})=0,$$
$$f(\widetilde{\alpha}_j)=g(h(\widetilde{\alpha}_j),\widetilde{\alpha}_j)=1,\quad f(\widetilde{\alpha}_{j+1})=g(h(\widetilde{\alpha}_{j+1}),\widetilde{\alpha}_{j+1})=0.$$

Так как граничные пары $(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{i+1})$ и $(\widetilde{\alpha}_j,\widetilde{\alpha}_{j+1})$ являются соседними, то для некоторого $t\in\{1,2\}$ все наборы

$$(h(\widetilde{\alpha}_{i+1}),\widetilde{\alpha}_{i+1}),\ldots,(h(\widetilde{\alpha}_j),\widetilde{\alpha}_j)$$

лежат в цепи C'_t, а наборы $(h(\widetilde{\alpha}_i),\widetilde{\alpha}_i)$ и $(h(\widetilde{\alpha}_{j+1}),\widetilde{\alpha}_{j+1})$ — в цепи C'_{2-t}. Поэтому в цепи C'_{2-t} набор $(h(\widetilde{\alpha}_{j+1}),\widetilde{\alpha}_{j+1})$ следует непосредственно за набором $(h(\widetilde{\alpha}_i),\widetilde{\alpha}_i)$, причем

$$g(h(\widetilde{\alpha}_i),\widetilde{\alpha}_i)=1,\quad g(h(\widetilde{\alpha}_{j+1}),\widetilde{\alpha}_{j+1})=0.$$

Теперь граничной паре наборов $(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{i+1})$ цепи C, являющейся обрывом для функции f, сопоставим являющуюся обрывом для функции g пару наборов $((h(\widetilde{\alpha}_i),\widetilde{\alpha}_i),(h(\widetilde{\alpha}_{j+1}),\widetilde{\alpha}_{j+1}))$, идущих подряд в цепи C'_{2-t}.

Таким образом, для функции f каждому обрыву вида $(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{i+1})$, за исключением не более $q-\lfloor q/2\rfloor$ обрывов, будет сопоставлен уникальный обрыв для функции g, состоящий из двух идущих подряд либо в цепи C'_1, либо в цепи C'_2 наборов. Поэтому справедливо неравенство

$$d_C(f)\leqslant d_{C'_1}(g)+d_{C'_2}(g)+\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil\leqslant d_{C'_1}(g)+d_{C'_2}(g)+D(B).$$

По предположению индукции для i, $i=1,2$, выполняются соотношения

$$d_{C'_i}(g)\leqslant d(g)\leqslant D(B)\left(2^{I_B(S')}-1\right)=D(B)\left(2^{I_B(S)-1}-1\right).$$

Окончательно получаем:

$$d(f)=d_C(f)\leqslant d_{C'_1}(g)+d_{C'_2}(g)+D(B)\leqslant$$
$$\leqslant D(B)\left(2(2^{I_B(S')}-1)+1\right)=D(B)\left(2^{I_B(S)}-1\right).$$

Лемма 5 доказана.

Л е м м а 6. *Для любой булевой функции f справедливо неравенство*

$$I_B(f)\geqslant\left\lceil\log_2\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right)\right\rceil.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой схемы S, реализующей функцию f, в силу леммы 5 справедлива оценка

$$2^{I_B(S)}-1\geqslant\frac{d(f)}{D(B)}.$$

Следовательно,

$$I_B(f)\geqslant\log_2\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right).$$

Для завершения доказательства достаточно учесть целочисленность величины $I_B(f)$.

Лемма 6 доказана и тем самым установлена нижняя оценка теоремы 3.

2.2. Верхняя оценка. Верхнюю оценку теоремы 3 достаточно доказать для базиса $B = M \cup \{\omega\}$, где ω — такая функция из множества $\{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, что выполняется условие $d(\omega) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}$.

Следующая лемма о переключателе является аналогом леммы 3 — для базиса более общего вида рассматривается случай одной пары функций.

Лемма 7. *Пусть базис B имеет вид:*

$$B = M \cup \{\omega\}.$$

Тогда для любой упорядоченной пары (f_0, f_1) булевых функций найдется переключатель g этой пары, удовлетворяющий условию

$$I_B(g) \leqslant \max\{I_B(f_0), I(f_1)\}.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по величине $s = \max\{I_B(f_0), I_B(f_1)\}$.

Если $s = 0$, то функции f_0 и f_1 монотонны. Тогда в качестве искомого переключателя g можно взять функцию $g = uf_1 \vee vf_0$.

Шаг индукции. Для $i = 0, 1$ обозначим через $S_i(\widetilde{x})$ некоторую схему со входами $x_1, \ldots, x_n$, реализующую над базисом B функцию f_i и содержащую $I_B(f_i)$ немонотонных элементов (элементов, которым приписана функция ω). Если в одной из схем S_i, $i = 1, 2$, нет немонотонных элементов, то в качестве функции g можно также взять функцию $g = uf_1 \vee vf_0$. Иначе для $i = 0, 1$ в схеме $S_i(\widetilde{x})$ выделим первый (относительно некоторой правильной нумерации) элемент, которому приписана функция ω. Пусть на его входы подаются монотонные функции $h_{i1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_{im}(x_1, \ldots, x_n)$ (полагаем, что функция ω является m-местной). Обозначим через $S'_i(y, \widetilde{x})$ схему со входами $y, x_1, \ldots, x_n$, получающуюся из схемы $S_i(\widetilde{x})$ путем замены выделенного немонотонного элемента на новый вход y, а через $f'_i(y, x_1, \ldots, x_n)$ — функцию, вычисляемую схемой $S'_i(y, \widetilde{x})$. Тогда

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = f'_i(\omega(h_{i1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots h_{im}(x_1, \ldots, x_n)), x_1, \ldots, x_n).$$

Так как $I(f'_i) \leqslant s - 1$, $i = 0, 1$, то, по предположению индукции, найдется переключатель $g'(u, v, y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что

$$\begin{gathered} I_B(g') \leqslant \max\{I_B(f'_0), I_B(f'_1)\} \leqslant s - 1, \\ g'(0, 1, y, x_1, \ldots, x_n) = f'_0(y, x_1, \ldots, x_n), \\ g'(1, 0, y, x_1, \ldots, x_n) = f'_1(y, x_1, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

Теперь в функцию $g'(u, v, y, x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменной y подставим функцию

$$\begin{aligned} Y(u, v, x_1, \ldots, x_n) = \omega(uh_{11}(x_1, \ldots, x_n) \vee vh_{01}(x_1, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, uh_{1m}(x_1, \ldots, x_n) \vee vh_{0m}(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} Y(0, 1, x_1, \ldots, x_n) = \omega(h_{01}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_{0m}(x_1, \ldots, x_n)), \\ Y(1, 0, x_1, \ldots, x_n) = \omega(h_{11}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_{1m}(x_1, \ldots, x_n)), \end{aligned}$$

получаем, что функция

$$g(u, v, x_1, \ldots, x_n) = g'(u, v, Y(u, v, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$$

является переключателем функций f_0 и f_1. Кроме того, выполняются неравенства $I(g) \leqslant 1 + I(g') \leqslant s$.

Лемма 7 доказана.

Собственно доказательство верхней оценки основано на следующем соображении. Использование при построении схемы дополнительного немонотонного элемента, реализующего функцию ω, приводит к возможности увеличить спад реализуемой схемой функции в два раза и еще на $d(\omega)$. Дадим аккуратную формулировку этого факта и его доказательство.

Лемма 8. *Пусть базис B имеет вид:*

$$B = M \cup \{\omega\}.$$

Тогда для любой булевой функции f справедливо неравенство

$$I_B(f) \leqslant \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{d(\omega)} + 1 \right) \right\rceil .$$

Доказательство. Проведем индукцию по величине $R(f)$, где

$$R(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{d(\omega)} + 1 \right) \right\rceil .$$

Отметим истинность неравенств

$$d(\omega) \left(2^{R(f)-1} - 1\right) < d(f) \leqslant d(\omega) \left(2^{R(f)} - 1\right) .$$

Если $R(f) = 0$, то $d(f) = 0$ и, следовательно, функция f монотонна. Поэтому $I_B(f) = 0$.

Пусть для любой булевой функции g, для которой справедливо соотношение $R(g) \leqslant R(f) - 1$, утверждение леммы выполняется.

Пусть $d(\omega) = t$.

Полагая, что функция f является n-местной, разобьем множество E^n всех двоичных наборов длины n на подмножества следующим образом.

Обозначим через T_1 множество всех двоичных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) \leqslant t\left(2^{R(f)-1} - 1\right)$, т. е.

$$T_1 = \left\{ \widetilde{\alpha} \in E^n \mid d_C(f) \leqslant t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha} \right\} .$$

Для четных $i = 2, 4, \ldots, 2t-2$ обозначим через T_i множество двоичных наборов $\widetilde{\alpha}$ длины n, удовлетворяющих условиям:

1) $f(\widetilde{\alpha}) = 0$;

2) $\max d_C(f) = t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) + i/2$, где максимум берется по всем цепям C с концом в наборе $\widetilde{\alpha}$.

Для нечетных $i = 3, 5, \ldots, 2t-1$ обозначим через T_i множество двоичных наборов $\widetilde{\alpha}$ длины n, удовлетворяющих условиям:

1) $f(\widetilde{\alpha}) = 1$;

2) $\max d_C(f) = t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) + (i-1)/2$, где максимум берется по всем цепям C с концом в наборе $\widetilde{\alpha}$.

Наконец, положим

$$T_{2t} = E^n \setminus (T_1 \cup T_2 \ldots \cup T_{2t-1}) .$$

Отметим следующее свойство множества наборов T_{2t}: если набор $\widetilde{\alpha}$ лежит в множестве T_{2t} и каждый разряд двоичного набора $\widetilde{\alpha}'$ длины n не меньше соответствующего разряда набора $\widetilde{\alpha}$, то и набор $\widetilde{\alpha}'$ лежит в множестве T_{2t}.

Покажем, что для произвольной цепи C с началом, лежащем во множестве T_{2t}, выполняется неравенство

$$d_C(f) \leqslant t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) .$$

Действительно, предположим противное — пусть существует цепь C_1 с началом в наборе $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in T_{2t}$, удовлетворяющая условию $d_{C_1}(f) > t\left(2^{R(f)-1} - 1\right)$. Тогда в силу соотношения $\widetilde{\alpha} \notin T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{2t-1}$ найдется цепь C_0 с концом в наборе $\widetilde{\alpha}$, удовлетворяющая условию $d_{C_0}(f) \geqslant t + t\left(2^{R(f)-1} - 1\right)$. Таким образом, для цепи C, состоящей из наборов цепей C_0 и C_1, выполняются соотношения

$$d_C(f) > t + t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) + t\left(2^{R(f)-1} - 1\right) = t\left(2^{R(f)} - 1\right) ,$$

совокупность которых противоречит неравенству

$$d(f) \leqslant t\left(2^{R(f)} - 1\right) .$$

Так как $d(\omega) = t$, то найдется возрастающая цепь $\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2t}$ наборов из E^m, удовлетворяющая условиям

$$\omega(\widetilde{\beta}_{2i-1}) = 1, \quad \omega(\widetilde{\beta}_{2i}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots t.$$

Пусть $\widetilde{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{im})$, $i = 1, 2, \ldots, 2t$.

Для $j = 1, \ldots, m$ определим монотонные функции $h_j(x_1, \ldots, x_n)$, положив $h_j(\widetilde{\alpha}) = \beta_{ij}$ для всех наборов $\widetilde{\alpha} \in T_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2t$.

Тогда $\left(h_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, h_m(\widetilde{\alpha})\right) = \widetilde{\beta}_i$ для всех наборов $\widetilde{\alpha} \in T_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2t$.

Теперь введем функции $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } \widetilde{x} \in T_1; \\ 1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_2 \cup \ldots \cup T_{2t}; \end{cases}$$

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1 \cup \ldots \cup T_{2t-1}; \\ f(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } \widetilde{x} \in T_{2t}. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \\ = f_0(x_1, \ldots, x_n)\, \omega(h_1(x_1, \ldots, x_n), h_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)) \vee \\ \vee f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

По построению функции f_0 и f_1 удовлетворяют условиям

$$d(f_0) \leqslant t\left(2^{R(f)-1}-1\right),$$
$$d(f_1) \leqslant t\left(2^{R(f)-1}-1\right).$$

Поэтому выполняются соотношения

$$R(f_0) = \left\lceil \log_2\left(\frac{d(f_0)}{t}+1\right)\right\rceil \leqslant R(f)-1,$$
$$R(f_1) = \left\lceil \log_2\left(\frac{d(f_1)}{t}+1\right)\right\rceil \leqslant R(f)-1.$$

Применяя к функциям f_0 и f_1 предположение индукции, получаем неравенства

$$I_B(f_0) \leqslant R(f)-1, \quad I_B(f_1) \leqslant R(f)-1.$$

В силу леммы 7 найдется переключатель $g(u, v, x_1, \ldots, x_n)$ пары (f_0, f_1), удовлетворяющий условию

$$I_B(g) \leqslant \max\{I_B(f_0), I(f_1)\} \leqslant R(f)-1.$$

Теперь рассмотрим булеву функцию $f'(x_1, \ldots, x_n)$, получающуюся из функции

$$g(u, v, x_1, \ldots, x_n)u \vee g(u, v, x_1, \ldots, x_n)v$$

подстановкой монотонной функции $\chi_{2t}(x_1, \ldots, x_n)$, являющейся характеристической функцией множества наборов T_{2t}, вместо переменной u и функции

$$\omega(h_1(x_1, \ldots, x_n), h_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

вместо переменной v.

Очевидно, что

$$I_B(f') \leqslant I_B(g)+1 \leqslant R(f).$$

Покажем, что на самом деле $f'(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Если $\widetilde{\alpha} \in T_{2i-1}$, где $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, то $\chi_{2t}(\widetilde{\alpha}) = 0$ и выполнено равенство $\omega(h_1(\widetilde{\alpha}), h_2(\widetilde{\alpha}), \ldots, h_m(\widetilde{\alpha})) = 1$. Следовательно,

$$f'(\widetilde{\alpha}) = g(0, 1, \widetilde{\alpha}) = f_0(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} f(\widetilde{\alpha}), & \text{если } \widetilde{\alpha} \in T_1; \\ 1, & \text{если } \widetilde{\alpha} \in T_3 \cup \ldots \cup T_{2t-1}. \end{cases}$$

Но при выполнении условия $\widetilde{\alpha} \in T_3 \cup \ldots \cup T_{2t-1}$ по построению множеств $T_3, \ldots, T_{2t-1}$ верно равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Если $\widetilde{\alpha} \in T_{2i}$, где $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$, то $\chi_{2t}(\widetilde{\alpha}) = 0$ и выполнено равенство $\omega(h_1(\widetilde{\alpha}), h_2(\widetilde{\alpha}), \ldots, h_m(\widetilde{\alpha})) = 0$. Следовательно,

$$f'(\widetilde{\alpha}) = 0.$$

Но при выполнении условия $\widetilde{\alpha} \in T_2 \cup \ldots \cup T_{2t-2}$ по построению множеств $T_2, \ldots, T_{2t-2}$ верно равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 0$.

Если $\widetilde{\alpha} \in T_{2t}$, то $\chi_{2t}(\widetilde{\alpha}) = 1$ и $\omega(h_1(\widetilde{\alpha}), h_2(\widetilde{\alpha}), \ldots, h_m(\widetilde{\alpha})) = 0$. Следовательно

$$f'(\widetilde{\alpha}) = g(1, 0, \widetilde{\alpha}) = f_1(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}).$$

Таким образом, $I_B(f) \leqslant R(f)$. Лемма 8 доказана.

Для завершения доказательства верхней оценки теоремы 3 достаточно применить лемму 8 к базису $B' = M \cup \{\omega\}$, где ω — функция исходного базиса B, удовлетворяющая условию $d(\omega) = D(B)$, а также воспользоваться очевидным неравенством $I_B(f) \leqslant I_{B'}(f)$.

З а м е ч а н и е. Вопрос о точном значении немонотонной сложности $I_B(F)$ произвольной системы F булевых функций в настоящее время остается открытым. Предположение о том, что для любой системы F булевых функций величина $I_B(F)$ численно равна значению

$$\left\lceil \log_2 \left(\frac{d(F)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil,$$

опровергает следующий контрпример:

$$F = \{\overline{x}, \overline{y}\}, \quad B = M \cup \{x \oplus y \oplus z\}.$$

В этом примере величина $\left\lceil \log_2 \left(\frac{d(F)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil$ равна 1, а на самом деле $I_B(F) = 2$.

§ 3. Инверсионная сложность функций k-значной логики

Теперь рассмотрим другое обобщение задачи об инверсионной сложности — использование любых монотонных функций по-прежнему бесплатно, единственной функцией в базисе, имеющей ненулевой вес, опять будет отрицание, но речь пойдет о реализации не булевых функций и систем булевых функций, а функций и систем функций k-значной логики. Отметим, что в этом случае уже нужно уточнять, о каком классе монотонных функций k-значной логики идет речь и какое имеется в виду отрицание — Поста или Лукасевича.

Изложение этого параграфа существенным образом опирается на работы [36, 93].

Дадим необходимые определения, введя в отличие от булева случая сразу понятие немонотонной сложности и не определяя предварительно отдельно инверсионную сложность функций k-значной логики.

Пусть P_k — множество всех функций k-значной логики, M — класс всех функций из P_k, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \ldots < k-1$.

В этом и последующих параграфах будем исследовать сложностные вопросы реализации функций k-значной логики схемами из функциональных элементов над базисами B, имеющими вид:

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_k \setminus M, \; i = 1, \ldots, p,$$

причем функциям из множества M приписан нулевой вес, а функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — ненулевой (как правило, единичный).

Определим *немонотонную сложность* $I_B(S)$ *схемы* S *над базисом* B стандартным образом как суммарный вес элементов схемы S. В силу того, что монотонные функции входят в базис B с нулевым весом, $I_B(S)$ — это сумма весов немонотонных элементов схемы S, т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса. В случае, когда все немонотонные функции базиса имеют одинаковый вес, который без ограничения общности можно считать единичным, величина $I_B(S)$ равна числу немонотонных элементов схемы S.

Немонотонную сложность над базисом B функции k-значной логики f (системы функций F) определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом B функцию f (систему функций F). Для немонотонной сложности функции f (системы функций F) будем использовать обозначение $I_B(f)$ (соответственно $I_B(F)$).

В рамках данного параграфа нас в первую очередь будет интересовать немонотонная сложность над двумя естественными базисами $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$, где $N_P(x)$ — отрицание Поста, т. е. функция $x+1 \pmod k$, а $N_L(x)$ — отрицание Лукасевича, т. е. функции $k-1-x$. Немонотонную сложность над базисами B_P и B_L естественно также называть *инверсионной сложностью*.

Для того, чтобы сформулировать основной результат этого параграфа, распространим некоторые определения, которые были даны при изучении немонотонной сложности булевых функций, на k-значный случай.

Обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через E_k. Последовательность

$$\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}),\ \widetilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}),\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rn})$$

наборов из множества E_k^n назовем *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \ldots < k-1$ или просто *цепью*, если все наборы $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Наборы $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_r$ будем называть *началом* и *концом* этой цепи соответственно.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* f, если выполнены условия:

1) $\alpha_j \leqslant \beta_j,\ \ j = 1, \ldots, n$;

2) $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Обрывом для системы функций будем называть любую пару наборов, являющуюся обрывом хотя бы для одной функции системы.

Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система функций k-значной логики от переменных $x_1, \ldots x_n$, а C — цепь, имеющая вид

$$\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r.$$

Под *падением* $d_C(F)$ *системы* F *на цепи* C будем понимать число обрывов для системы F на парах вида $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$.

Также как и в булевом случае, *спад* $d(F)$ системы F функций k-значной логики определим равенством $d(F) = \max d_C(F)$, где максимум берется по всем цепям C.

Теперь сформулируем основной результат об инверсионной сложности систем функций k-значной логики.

Т е о р е м а 4 [36]. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливы равенства*

$$I_{B_P}(F) = \lceil \log_2(d(F)+1) \rceil, \qquad I_{B_L}(F) = \lceil \log_k(d(F)+1) \rceil .$$

Нижние и верхние оценки теоремы 4 будут следовать из соответствующих теорем, доказываемых в следующих двух разделах для произвольных базисов описанного выше вида в предположении, что все немонотонные функции рассматриваемых базисов имеют единичный вес. Отметим, что при $k=2$ каждое из равенств теоремы 4 превращается в равенство из теоремы 1.

3.1. Нижняя оценка. Доказательство нижней оценки, из которой будет следовать нижняя оценка теоремы 4, основано на естественном обобщении леммы 1 на случай реализации функций k-значной логики.

Пусть в базисе B, имеющем вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_2 \setminus M$, $i=1,\ldots,p$, функциям $\omega_1,\ldots,\omega_p$ приписан единичный вес. Положим

$$D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}.$$

Сформулируем нижнюю оценку в виде отдельного утверждения.

Т е о р е м а 5[36]. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$I_B(F) \geqslant \left\lceil \log_{D(B)+1}(d(F)+1) \right\rceil .$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Л е м м а 9. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$d(F) \leqslant (D(B)+1)^{I_B(F)} - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F=\{f_1,\ldots,f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система функций k-значной логики от переменных $x_1, \ldots x_n$. Проведем индукцию по величине $I_B(F)$.

Если $I_B(F)=0$, то все функции системы F монотонны. Следовательно, $d(F)=0$.

Пусть для любой системы функции G, для которой справедливо соотношение $I_B(G) \leqslant I_B(F)-1$, утверждение леммы выполняется. Рассмотрим произвольную схему S со входами $x_1,\ldots,x_n$, реализующую систему функций F и содержащую ровно $I_B(F)$ элементов единичного веса. В этой схеме выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) такой элемент и обозначим его E. Элементу E соответствует (приписана) q-местная функция ω из множества $\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$, а на входы этого элемента подаются монотонные функции $h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_q(x_1,\ldots,x_n)$. Переделаем схему S, удалив из нее элемент E, создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S' реализует систему функций $G=\{g_1,\ldots,g_m\}$, причем для $i=1,\ldots,m$ выполняются условия

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = g_i\left(\omega(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_q(x_1,\ldots,x_n)), x_1,\ldots,x_n\right).$$

Кроме того, справедливо неравенство $I_B(G) \leqslant I_B(F) - 1$.

Пусть цепь

$$C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

имеет падение $d(F)$.

Рассмотрим последовательность C' наборов длины $n+1$:

$$(\omega(h_1(\widetilde{\alpha}_1), \ldots, h_q(\widetilde{\alpha}_1)), \widetilde{\alpha}_1), \ldots, (\omega(h_1(\widetilde{\alpha}_r), \ldots, h_q(\widetilde{\alpha}_r)), \widetilde{\alpha}_r).$$

Последовательность C', вообще говоря, не является цепью, однако ее можно так разбить на p участков (идущих подряд элементов последовательности C') $C'_1, \ldots, C'_p$, что каждая из последовательностей наборов C'_j, $j = 1, \ldots, p$, является цепью и p удовлетворяет условиям $1 \leqslant p \leqslant D(B)+1$.

По предположению индукции для всех j, $j = 1, \ldots, p$, выполняются соотношения

$$d_{C'_i}(G) \leqslant d(G) \leqslant (D(B) + 1)^{I_B(G)} - 1 = (D(B) + 1)^{I_B(F)-1} - 1.$$

Теперь, учитывая, что справедливы равенства

$$f_i(\widetilde{\alpha}) = g_i\left(\omega(h_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, h_q(\widetilde{\alpha})), \widetilde{\alpha}\right), \quad i = 1, \ldots, m,$$

получаем:

$$d_C(F) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d_{C'_i}(G) + p - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{p}((D(B)+1)^{I_B(F)-1} - 1) + p - 1 \leqslant (D(B)+1)^{I_B(F)} - 1.$$

Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из леммы 9 вытекает оценка

$$d(F) \leqslant (D(B) + 1)^{I_B(F)} - 1,$$

откуда, в силу целочисленности величины $I_B(F)$, следует требуемая нижняя оценка. Теорема 5 доказана.

Замечание. Оценка из теоремы 5 не может претендовать на неулучшаемость для любых базисов рассматриваемого вида и произвольных систем функций даже при $k = 2$. Действительно, система булевых функций $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ не может иметь сложность 1 ни в каком базисе, так как иначе в единственном немонотонном элементе будет реализовываться какая-то функция от двух переменных, которая имеет спад, в точности равный единице (как немонотонная функция от двух переменных), в то время как спад системы равен двум.

3.2. Верхняя оценка. Переходя к получению верхней оценки теоремы 5, обобщим на случай функций k-значной логики введенное ранее понятие переключателя булевых функций.

Назовем *s-переключателем* упорядоченного набора функций k-значной логики $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ любую функцию k-значной логики $g(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}
g(1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
g(0, 1, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\;\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
g(0, \ldots, 0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Для множества упорядоченных наборов по s функций *s-переключателем* этого множества будем называть множество s-переключателей наборов функций из данного множества (по одному s-переключателю на каждый набор из s функций).

Лемма 10. *Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega(x_1,\ldots,x_q\}$, где $\omega \in P_k \setminus M$, $q \geqslant 1$. Тогда для любого множества $\{(f_{11},\ldots f_{s1}),\ldots$ $\ldots,(f_{1m},\ldots,f_{sm})\}$ упорядоченных наборов функций k-значной логики найдется s-переключатель G этого множества наборов, удовлетворяющий условию*

$$I_B(G) \leqslant \max\{I_B(F_1),\ldots,I_B(F_s)\},$$

где $F_i = \{f_{i1},\ldots,f_{im}\}$, $i = 1,\ldots,s$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по величине $r = \max\{I_B(F_1),\ldots,I_B(F_s)\}$.

Если $r = 0$, то множества функций F_i, $i = 1,\ldots,s$, монотонны. Тогда в качестве искомого множества функций G можно взять множество

$$\{g_j \mid g_j = \max(\min(\varphi(z_1), f_{1j}),\ldots,\min(\varphi(z_s), f_{sj}),\ j = 1,\ldots,m\},$$

где функция $\varphi(z)$ равна $k-1$ для всех ненулевых значений z и $\varphi(0) = 0$.

Шаг индукции. Для $i = 1,\ldots,s$, обозначим через $S_i(\widetilde{x})$ некоторую схему со входами $x_1,x_2,\ldots,x_n$, реализующую систему функций F_i и содержащую $\max\{I_B(F_i),1\}$ элементов, соответствующих базисной функции ω. В схеме $S_i(\widetilde{x})$ выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) элемент, соответствующий базисной функции ω. Пусть на его вход подаются монотонные функции $h_{i1}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_{iq}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Обозначим через $S_i(y,\widetilde{x})$ схему со входами $y,x_1,x_2,\ldots,x_n$, получающуюся из схемы $S_i(\widetilde{x})$ путем замены выделенного элемента на новый вход y, а через $f'_{ij}(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $j = 1,\ldots,m$, — функции, вычисляемые схемой $S_i(y,\widetilde{x})$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \\ &= f'_{ij}(\omega(h_{i1}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_{iq}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ &\qquad\qquad j = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Положим $F'_i = \{f'_{i1},\ldots,f'_{im}\}$. Так как $I_B(F'_i) \leqslant r-1$, $i = 1,\ldots,s$, то, по предположению индукции, найдется такое множество функций

$$G' = \{g'_j(z_1,\ldots,z_s,y,x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid j = 1,\ldots,m\},$$

что

$$I_B(G') \leqslant \max\{I_B(F'_1),\ldots,I_B(F'_s)\} \leqslant r-1;$$

$$\begin{array}{rcll} g'_j(1,0,\ldots,0,y,x_1,x_2,\ldots,x_n) &=& f'_{1j}(y,x_1,x_2,\ldots,x_n), & j = 1,\ldots,m; \\ g'_j(0,1,\ldots,0,y,x_1,x_2,\ldots,x_n) &=& f'_{2j}(y,x_1,x_2,\ldots,x_n), & j = 1,\ldots,m; \\ && \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ g'_j(0,0,\ldots,1,y,x_1,x_2,\ldots,x_n) &=& f'_{sj}(y,x_1,x_2,\ldots,x_n), & j = 1,\ldots,m. \end{array}$$

Теперь в функции $g'_j(z_1,\ldots,z_s,y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $j=1,\ldots,m$, вместо переменной y подставим функцию

$$\begin{aligned}&Y(z_1,\ldots,z_s,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\\&=\omega(\max(\min(\varphi(z_1),h_{11}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\ldots,\min(\varphi(z_s),h_{s1}(x_1,x_2,\ldots,x_n))),\ldots,\\&\quad\max(\min(\varphi(z_1),h_{1q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\ldots,\min(\varphi(z_s),h_{sq}(x_1,x_2,\ldots,x_n)))).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}Y(1,0,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\omega(h_{11}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_{1q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\\Y(0,1,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\omega(h_{21}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_{2q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\\&\ldots\\Y(0,0,\ldots,1,x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\omega(h_{s1}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,h_{sq}(x_1,x_2,\ldots,x_n)),\end{aligned}$$

получаем, что для $j=1,\ldots,m$ функция

$$\begin{aligned}&g_j(z_1,\ldots,z_s,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\\&\qquad=g'_j(z_1,\ldots,z_s,Y(z_1,\ldots,z_s,x_1,x_2,\ldots,x_n),x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

является s-переключателем набора функций $f_{1j},\ldots,f_{sj}$. Кроме того, для множества $G=\{g_1,\ldots,g_m\}$ выполняются неравенства $I_B(G)\leqslant 1+I_B(G')\leqslant r$. Лемма 10 доказана.

Введем еще одну важнейшую характеристику для базисов рассматриваемого вида.

Для произвольной функции k-значной логики $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и произвольной цепи $C=(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_r)$ наборов из E_k^n определим величину $u_C(f)$ как наибольшую длину t подпоследовательности $\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_t$ последовательности C, удовлетворяющей условию $f(\widetilde{\beta}_1)>f(\widetilde{\beta}_2)>\ldots>f(\widetilde{\beta}_t)$.

Теперь определим *инверсионную силу* $u(f)$ *функции* f равенством $u(f)=\max u_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C наборов из E_k^n. Очевидно, что для любой функции f выполняются соотношения $1\leqslant u(f)\leqslant d(f)+1$, при этом если функция f не является монотонной, то справедливо неравенство $u(f)\geqslant 2$.

Пусть в базисе B, имеющем вид $B=M\cup\{\omega_1,\ldots,\omega_p\}$, $\omega_i\in P_2\setminus M$, $i=1,\ldots,p$, функциям $\omega_1,\ldots,\omega_p$ приписан единичный вес. Тогда равенством $u(B)=\max u(f)$, где максимум берется по всем функциям f из базиса B, введем величину $u(B)$ — *инверсионную силу базиса* B.

Теорема 6[36]. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$I_B(F)\leqslant\lceil\log_{u(B)}(d(F)+1)\rceil.$$

Доказательство. Пусть $u(B)=s$. Выберем в базисе B функцию $\omega(x_1,\ldots,x_q)$, удовлетворяющую условию $u(\omega)=s$. Положим $B'=M\cup\{\omega(x_1,\ldots,x_q)\}$. В силу очевидного соотношения $I_{B'}(F)\geqslant I_B(F)$ достаточно установить неравенство $I_{B'}(F)\leqslant\lceil\log_s(d(F)+1)\rceil$, которое будем доказывать индукцией по величине $R(F)=\lceil\log_s(d(F)+1)\rceil$.

Если $R(F)=0$, то $d(F)=0$ и, следовательно, все функции системы F монотонны. Поэтому $I_B(F)=0$.

Пусть для любой системы функции G, для которой справедливо соотношение $R(G)\leqslant R(F)-1$, утверждение леммы выполняется.

Обозначим через T_1 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(F)<s^{R(F)-1}$, т. е.

$$T_1=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^n \mid d_C(F)<s^{R(F)-1} \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha}\}.$$

Далее, для $i=2,\ldots,s-1$ обозначим через T_i множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C наборов из множества $E_k^n\setminus(T_1\cup\ldots\cup T_{i-1})$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(F)<s^{R(F)-1}$, т. е.

$$T_i=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^n\setminus(T_1\cup\ldots\cup T_{i-1}) \mid d_C(F)<s^{R(F)-1}$$
$$\text{для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha},\ C\subset E_k^n\setminus(T_1\cup\ldots\cup T_{i-1}),\}.$$

Наконец, положим

$$T_s=E_k^n\setminus(T_1\cup\ldots\cup T_{s-1}).$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha}\in T_i$ и $\widetilde{\beta}\prec\widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta}\in T_1\cup\ldots\cup T_{i-1}$, $i=1,\ldots,s$.

Теперь докажем, что для любой цепи C наборов из множества T_s также выполняется неравенство $d_C(F)<s^{R(F)-1}$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_s с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s\in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_s}(F)\geqslant s^{R(F)-1}$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}_s$ не лежит в множестве T_{s-1}, то найдется цепь C_{s-1} с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_{s-1}$, $\widetilde{\alpha}_{s-1}\in T_{s-1}$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s\in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_{s-1}}(F)\geqslant s^{R(F)-1}$. Аналогично последовательно для $i=s-2,\ldots,1$ устанавливаем существование цепи C_i с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_i\in T_i$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, $\widetilde{\alpha}_{i+1}\in T_{i+1}$, для которой выполняется неравенство $d_{C_i}(F)\geqslant s^{R(F)-1}$.

Тогда для цепи $C=C_1\cup\ldots\cup C_s$ справедливы соотношения

$$d_C(F)=d_{C_1}(F)+\ldots+d_{C_s}(F)\geqslant s\left(s^{R(F)-1}\right)=s^{R(F)}>d(F),$$

что противоречит определению величины $d(F)$.

Далее для каждой функции f_j из множества $F=\{f_1,\ldots,f_m\}$ положим

$$f_{ij}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases} 0, & \text{если } (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_1\cup\ldots\cup T_{i-1};\\ f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n), & \text{если } (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_i;\\ k-1, & \text{если } (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_{i+1}\cup\ldots\cup T_s;\end{cases}$$

$i=1,\ldots,s$.

Теперь введем обозначения

$$F_i=\{f_{ij}\mid f_j\in F\},\quad i=1,\ldots,s.$$

В силу определения множеств F_i выполняются неравенства $d(F_i) < s^{R(F)-1}$, $i = 1, \ldots, s$, и, следовательно, неравенства

$$d(F_i) \leqslant s^{R(F)-1} - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Поэтому

$$R(F_i) = \lceil \log_s(d(F_i) + 1) \rceil \leqslant \lceil \log s^{R(F)-1} \rceil = R(F) - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В силу определения величины $s = u(\omega)$ найдется цепь

$$(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}), (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}), \ldots, (\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}),$$

удовлетворяющая условию

$$\omega(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}) > \omega(\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}) > \ldots > \omega(\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}).$$

Функции $\xi_1, \ldots, \xi_q$ определим равенствами

$$\xi_j(x_1, \ldots, x_n) = \beta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, q,$$

справедливыми для всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i.

Далее положим $b_i = \omega(\beta_{i1}, \ldots, \beta_{iq})$, $i = 1, \ldots, s$.

Теперь определим функции $\lambda_j(x)$, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j; \\ 1, & \text{если } x \geqslant j. \end{cases}$$

И, наконец, введем функции $\mu_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, s$:

$$\mu_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}; \\ 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_i \cup \ldots \cup T_s. \end{cases}$$

Отметим, что все введенные функции монотонны.

Теперь рассмотрим s-переключатель $G = \{g_j(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x}) \mid j = 1, \ldots, m\}$ множества наборов функций $\{(f_{1j}(\widetilde{x}), \ldots, f_{sj}(\widetilde{x})) \mid j = 1, \ldots, m\}$, о существовании которого говорится в лемме 10.

В функции $g_j(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x})$, $j = 1, \ldots, m$, вместо переменной z_i, $i = 1, \ldots, s$, подставим функцию

$$Z_i(x_1, \ldots, x_n) = \min \left\{ \lambda_{b_i} \left(\omega(\xi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \xi_q(x_1, \ldots, x_n)) \right), \mu_i(x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

Учитывая, что функция $Z_i(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в единицу на наборах из множества T_i, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i справедливы равенства

$$g_j(Z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Z_s(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = \\ = f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1, \ldots, x_n),$$

$i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, m$.

Для реализации функций $Z_1, \ldots, Z_s$, помимо использования монотонных функций, потребовалось лишь однократное использование функции ω. Поэтому, учитывая предположение индукции, получаем соотношения

$$I_{B'}(F) \leqslant I_{B'}(G) + 1 \leqslant \max\{I_{B'}(F_1), \ldots, I_{B'}(F_s)\} + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\lceil \log_s(d(F_1)+1)\rceil, \ldots, \lceil \log_s(d(F_s)+1)\rceil\} \leqslant \left\lceil \log_s s^{R(F)-1}\right\rceil + 1 = R(F),$$

которые завершают переход индукции. Теорема 6 доказана.

В случае, когда для базиса B выполняется равенство $D(B)+1 = u(B)$, теоремы 5 и 6 дают точное значение немонотонной сложности в базисе B для любой системы функций k-значной логики. Очевидно, что это равенство выполняется для базисов B_P и B_L, откуда и следует теорема 4.

Далее, стандартным образом определим *функции Шеннона немонотонной сложности функций от n переменных* и *сложности систем из m функций от n переменных над базисом B*:

$$I_B(n) = \max_{f\in P_k(n)} I_B(f), \quad I_B(n,m) = \max_{F=\{f_1,\ldots,f_m\}:\, f_j\in P_k(n)} I_B(F).$$

Теперь положим

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k}\right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil + 1.$$

Легко проверить, что величина $T(k,n)$ ровно на единицу превосходит максимально возможный спад у функций k-значной логики от n переменных.

Простым следствием теоремы 4 является следующая характеризация функций Шеннона немонотонной сложности над базисами B_P и B_L.

Теорема 7 [36]. *Для любых n и m, $n\geqslant 1$, $m\geqslant 2$, справедливы равенства*

$$I_{B_P}(n) = \lceil \log_2 T(k,n)\rceil, \qquad I_{B_P}(n,m) = \lceil \log_2((k-1)n+1)\rceil;$$

$$I_{B_L}(n) = \lceil \log_k T(k,n)\rceil, \qquad I_{B_L}(n,m) = \lceil \log_k((k-1)n+1)\rceil.$$

§ 4. Сложность функций k-значной логики в двух бесконечных базисах

4.1. Схемная сложность в бесконечных базисах. К рассматривавшейся в предыдущем параграфе задаче об инверсионной (немонотонной) сложности функций k-значной логики в базисах B_P и B_L тесно примыкает задача об обычной сложности (когда под сложностью $L_B(f)$ функции f понимается минимально возможное число всех элементов при реализации функции f схемами над базисом B) функций многозначной логики в бесконечных базисах B_P и B_L. При этом если справедливость при условии $d(f)\to\infty$ равенства $L_{B_L}(f) = 2\log_k(d(f)+1) + O(1)$ непосредственно следует из вполне ожидаемого, но далеко не очевидного соотношения $L_{B_L}(f) = 2I_{B_L}(f) + O(1)$, то для доказательства равенства $L_{B_P}(f) = 3\log_3(d(f)+1) + O(1)$ требуется значительно более детальный анализ строения схем над базисом B_P.

Но прежде чем перейти к детальному анализу сложности функций k-значной логики в бесконечных базисах B_P и B_L в случае, когда все элементы базиса имеют единичный вес, остановимся на особенностях и известных результатах, касающихся вопросов схемной сложности функций (в подавляющем большинстве двузначной логики) над бесконечными базисами, как правило, в шенноновской постановке задачи. Отметим, что сильно сжатые и неполные обзоры по этой тематике содержатся в работах [23, 25, 28, 34, 66].

Сначала формализуем понятия бесконечного и конечного базисов. Как и прежде, под базисом будем понимать произвольную функционально полную в P_2 (или в P_k) систему функций. Базис называется *бесконечным*, если он содержит функции, существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных (т. е. для всякого m в базисе имеется функция, существенно зависящая не менее чем от m переменных). В противном случае базис называется *конечным*.

В дальнейшем если не оговорено иное, то предполагается, что обсуждается задача о схемной сложности булевых функций над бесконечными базисами в постановке, предполагающей, что веса всех элементов базиса равны 1, но будем касаться и варианта этой задачи, допускающей наличие произвольных положительных весов у элементов базиса.

Изложение известных результатов будем вести на языке описания асимптотического поведения функции Шеннона $L_B(n)$, которая, как обычно, для любого значения n определяется как наименьшая величина сложности, достаточная для реализации схемой над базисом B любой булевой функции от n переменных. Что касается задачи о сложности реализации над бесконечными базисами конкретных последовательностей функций, то в этом направлении стоит отметить работы [26, 88, 96, 108].

В 1956 г. Д. Э. Маллер установил [101], что для всякого конечного (полного) базиса B булевых функций порядок роста функции Шеннона $L_B(n)$ при $n \to \infty$ равен $2^n/n$.

Исчерпывающее описание асимптотического поведения функций Шеннона для всех полных конечных булевых базисов с положительными весами элементов в 1958 г. дано О. Б. Лупановым [50] (см. также [55]). Пусть каждому элементу E базиса B приписан положительный вес $P(E)$. Для каждого элемента E с числом входов $r(E) \geqslant 2$ рассмотрим величину $\frac{P(E)}{r(E)-1}$ и будем называть ее *приведенным весом* элемента E. В [50] установлено, что

$$L_B(n) \sim \rho \frac{2^n}{n},$$

где ρ — минимум приведенных весов элементов базиса B.

Задача асимптотического поведения функций Шеннона для всех бесконечных булевых базисов оказалась значительно сложнее и в настоящее время далека от своего решения. По существу, порядки роста функций Шеннона сложности реализации булевых функций над бесконечными базисами до недавнего времени были известны только в отдельных случаях. Но и эти результаты говорили о том, что поведение функций Шеннона для бесконечных базисов очень разнообразно. В частности, давно известны [54, 56, 57, 59, 60, 87] примеры базисов, для которых порядки роста функций Шеннона равны: 1, $\log_2 n$, $(2^n/n)^{1/2}$, $2^{n/2}$.

Тривиальным примером, когда функция Шеннона тождественно равна единице, является базис P_2, состоящий из всех булевых функций. Некоторые базисы, в которых функция Шеннона стабилизируется начиная с некоторого n_0 (т. е. равна константе для всех достаточно больших значений n), можно извлечь из работы Э. И. Нечипорука [62], в которой для похожей задачи базисы такого вида названы «неинтересными».

По-видимому, первый бесконечный базис, для которого были получены интересные и нетривиальные результаты, касающиеся обсуждаемой в данный момент задачи, — это базис B_{-}, состоящий из всех монотонных булевых функций и отрицания. Из работы Э. Н. Гилберта [87] 1954 года, в которой хотя и исследуется формально совсем другая модель управляющих систем — контактные схемы, тем не менее для класса схем из функциональных элементов извлекаются верхняя оценка инверсионной сложности произвольной функции, а также отличающаяся от нее асимптотически вдвое мощностная нижняя оценка функции Шеннона инверсионной сложности $I(n)$, вместе устанавливающие логарифмический порядок роста функции Шеннона $L_{B_{-}}(n)$. Теорема о точном значении инверсионной сложности произвольной булевой функции, доказанная А. А. Марковым в 1957 г., в силу очевидных неравенств $I(f)+1 \leqslant L_{B_{-}}(f) \leqslant 2I(f)+1$, справедливых для функций, отличных от переменных и их отрицаний, автоматически дает верхнюю и нижнюю оценки сложности произвольной булевой функции в базисе B_{-}, отличающиеся не более чем вдвое. Асимптотическое равенство

$$L_{B_{-}}(n) \sim \log_2 n$$

является следствием, например, более общей теоремы 1 из [40]. В разделе 4.4 данного параграфа для произвольной булевой функции будет указано точное значение сложности в базисе, состоящем из всех монотонных булевых функций и отрицания.

Следующей после теоремы Маркова важнейшей вехой в исследовании сложности булевых функций в бесконечных базисах стали фундаментальные результаты [58–62], полученные в 1961–1965 гг. Э. И. Нечипоруком.

В работах [58, 59] для бесконечного базиса B_D, состоящего из отрицания и всевозможных дизъюнкций переменных, Э. И. Нечипоруком установлена асимптотика роста функции Шеннона:

$$L_{B_D}(n) \sim 2\sqrt{2}\, 2^{\frac{n}{2}}.$$

В работах [58, 59, 61, 62] для бесконечных полных базисов Λ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, определяемых равенствами

$$\Lambda_1 = [\{x \oplus y, 1\}] \cup \{x\&y\},$$
$$\Lambda_2 = [\{x \oplus y \oplus 1\}] \cup \{x\&y, \overline{x}\}, \quad \Lambda_3 = [\{x \oplus y\}] \cup \{x\&y, \overline{x}\},$$
$$\Lambda_4 = [\{x \oplus y \oplus z\}] \cup \{x\&y, \overline{x}\}, \quad \Lambda_5 = [\{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}] \cup \{x\&y\},$$

в случае, когда функции из замкнутого класса линейных функций, входящих в соответствующий базис Λ_i, имеют нулевой вес, а конъюнкция двух переменных и отрицание (если отрицание не входит в нулевую часть базиса) — единичный вес, установлено, что рост функции Шеннона асимптотически равен $2^{n/2}$ (в работе [62] даже получен существенно более общий результат). Как следствие для функций Шеннона $L_{\Lambda_i}(n)$ сложности реализации булевых функций в бесконечных базисах Λ_i, в случае, когда все элементы базиса имеют единичный вес, установлен порядок роста:

$$L_{\Lambda_i}(n) = \Theta\left(2^{\frac{n}{2}}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Говоря о результатах Э. И. Нечипорука первой половины 60-х годов прошлого века в области схемной сложности булевых функций в бесконечных базисах, стоит подробнее остановиться на одном из важнейших бесконечных базисов — базисе из пороговых элементов, совмещающих простоту, гибкость и надежность с важными практическими приложениями, связанными с моделированием пороговыми функциями нейронов. Пороговым функциям и схемам из пороговых функций посвящена обширная литература (см., например, [11–13, 67, 109]).

Булева функция называется *пороговой*, если множество ее единиц отделимо от множества ее нулей гиперплоскостью, т. е. булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *пороговой*, если существуют такие действительные числа $w_1, \ldots, w_n, h$, что неравенство $w_1x_1 + \ldots + w_nx_n \leqslant h$ выполняется только при таких $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$, при которых выполняется условие $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$. Так как функции $x\&y$, $x \vee y$ и $\overline{x}$ — пороговые, то бесконечный базис B_t всех пороговых функций является полным.

Сложность булевых функций в базисе B_t исследовалась многими авторами (см., например, [3–5, 10, 68, 74, 109–111]). Так, например, Р. О. Уиндер показал [110], что

$$L_{B_t}(n) = \Omega\left(\left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

В 1964 г. Э. И. Нечипорук нашел [60] порядок роста функции Шеннона $L_{B_t}(n)$, установив нижнюю и верхнюю оценки, отличающиеся при $n \to \infty$ асимптотически в $\sqrt{2}$ раз:

$$2(1 - o(1))\left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant L_{B_t}(n) \leqslant 2\sqrt{2}(1 + o(1))\left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Окончательное асимптотически точное решение о сложности реализации булевых функций в базисе B_t было получено в 1973 г. О. Б. Лупановым [54], который доказал, что

$$L_{B_t}(n) \sim 2\left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Перейдем к еще одному важному примеру бесконечного базиса, изучению теоретико-сложностных свойств которого придавал особое значение О. Б. Лупанов. Булева функция, принимающая значение 1 лишь на некоторой антицепи (множество попарно несравнимых двоичных наборов одинаковой длины), называется *антицепной*. Множество всех антицепных функций образует бесконечный базис, который обозначается через AC (см., например, [19]). В базис AC также включаются константы 0 и 1, по соглашению не имеющие переменных. С содержательной точки зрения им соответствуют функциональные элементы без входов, реализующие на выходе константы 0 и 1 соответственно. Множество AC замкнуто относительно операций подстановки констант и отождествления переменных, и всякая булева функция выражается через функции из множества AC с помощью операции суперпозиции (система AC полна, поскольку, например, функции $\overline{x}$ и $x\&y$ являются антицепными, а их совокупность образует базис).

Серьезное изучение базиса антицепных функций началось в середине 90-х годов прошлого века с работ О. М. Касим-Заде [19, 20], хотя, учитывая, что число антицепей в булевом кубе заданной размерности равно числу монотонных булевых функций от соответствующего числа переменных, нетривиальную нижнюю оценку $L_{AC}(n) \geqslant (1/2 - o(1)) \log n$ можно извлечь уже из мощностной нижней оценки, содержащейся в работе [87]. В [19] была установлена достаточно простая верхняя оценка $n+1$ для сложности произвольной булевой функции от n переменных (эта оценка спустя почти двадцать лет была улучшена на 1 О. В. Подольской [63]), но основным результатом работы [19] стало устранение экспоненциального разрыва в нижней и верхней оценках функции Шеннона, а именно была принципиально, до величины $\Omega(n^{1/3})$, поднята нижняя оценка величины $L_{AC}(n)$.

В [20] О. М. Касим-Заде доказал нижнюю оценку $\Omega(\sqrt{n/\ln n})$ сложности в базисе AC линейной функции от n переменных, тем самым улучшив предыдущую нижнюю оценку функции Шеннона.

Окончательно порядок роста функции Шеннона сложности булевых функций в бесконечном базисе антицепных функций установлен в 2015 г. О. В. Подольской [64]. Она доказала, что

$$L_{AC}(n) = \Theta(n).$$

Прежде чем перейти к результатам общего порядка о сложности реализации булевых функций над бесконечными базисами, отметим еще несколько близких по тематике исследований.

Серия результатов Н. А. Карповой [16–18] формально не подпадает под указанную выше постановку задачи о сложности в бесконечных базисах, так как набор допустимых средств для построения схемы зависит от самой функции, а точнее от числа аргументов этой функции. Однако эти результаты имеют прямое отношение к обсуждаемой задаче и не могут быть здесь проигнорированы.

В работе [18] Н. А. Карпова показала, что если базис B состоит из элементов, реализующих все булевы функции от $n-1$ переменной, то любая булева функция от n переменных, $n \geqslant 4$, может быть вычислена схемой над базисом B, содержащей три элемента. Если же базис состоит из всех функций от $n-c$ переменных, то при всех достаточно больших значениях n величина соответствующей функции Шеннона равна 2^c+1.

Логическим продолжением исследований из [18] является работа [16], в которой изучался вопрос о сложности реализации функции от n переменных схемами, состоящими из элементов (блоков), реализующих всевозможные системы из m функций от m переменных. Такая постановка является нетривиальной только при условии $m < n$. В [16] установлено, что при выполнении условия $n - \log n - m \to \infty$ соответствующая функция Шеннона растет асимптотически как

$$\frac{2^n}{m(n+2^m)}.$$

В работе [17] результаты из [16] удалось перенести с сохранением качественной картины на существенно более широкий класс базисов, в частности на случай базисов, состоящих из элементов с ограниченным информационным содержанием.

М. И. Гринчук в работе [9] изучал рост функций Шеннона для бесконечного базиса, состоящего из всех симметрических булевых функций, при этом вес каждого базисного элемента равен числу его существенных входов. Доказательство утверждения, что в таком базисе, как и в любом полном бесконечном базисе, в котором вес каждого элемента равен числу его существенных входов, функция Шеннона асимптотически растет как $2^n/n$, интересно прежде всего альтернативным способом подсчета в бесконечном базисе схем сложности не менее заданной, необходимого для доказательства нижней мощностной оценки. Кроме того, в работе [9] рассматривалась функция Шеннона сложности реализации булевых функций одноэлементными схемами — специфика базиса позволяет для произвольной функции строить схемы, состоящие всего из одного элемента. Для такой функции Шеннона, помимо естественной верхней оценки $2^n - 1$, установлена нижняя оценка $2^n - n^2$.

Отметим также исследования сложности реализации булевых функций схемами заданной глубины над базисом из обобщенных конъюнкций

$$B_{KD} = \left\{ \left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}\right)^{\beta} \mid k = 1, 2, \ldots; \alpha_i, \beta \in \{0, 1\} \right\},$$

проведенные И. С. Сергеевым [69, 70]. Асимптотическое равенство

$$L_{B_{KD}} \sim \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}},$$

вытекающее из технически тяжелого результата Э. И. Нечипорука [59], доказано в [70] значительно проще. Кроме того, в [70] установлена нижняя оценка сложности в случае реализации схемами фиксированной глубины, из которой следует, что указанная асимптотика функции Шеннона не может быть достигнута на схемах ограниченной глубины. В частности, для схем глубины 3 над базисом B_{KD} в [69] найден асимптотический рост соответствующей функции Шеннона, равный $2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$, что усиливает результат из [82].

Переходя к общим результатам, касающихся сложности функций над бесконечными базисами, следует сказать, что получены они в основном усилиями Н. А. Карповой и О. М. Касим-Заде.

В 1970 г. Н. А. Карпова установила [14] необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять числовая функция, асимптотически равная функции Шеннона при реализации булевых функций в произвольном бесконечном базисе, каждому элементу которого приписан произвольный неотрицательный вес: эта функция должна быть асимптотически монотонна и допустима, а допустимой называется такая числовая функция $P(n)$, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при всех n и всех t ($N \leqslant t \leqslant n$) выполнено условие

$$\frac{P(n)(tn + 2^t)}{2^n P(t)} < 1 + \varepsilon.$$

Таким образом, была дана полная характеризация функций, асимптотически равных функциям Шеннона в таких бесконечных базисах [14]. В 1975 г.

Н. А. Карпова показала [15], что установленные в [14] результаты могут быть сформулированы в терминах аксиоматически заданных функционалов.

Отметим, что, во-первых, в рассматриваемой Н. А. Карповой постановке допускались элементы нулевого веса, а во-вторых, задача нахождения по заданному бесконечному базису функции Шеннона сложности в этом базисе в указанных работах не рассматривалась. Как показали дальнейшие исследования в области сложности над бесконечными базисами, картина поведения функций Шеннона в случае меры сложности, равной числу элементов схемы, существенно отличается от общей картины, описанной Н. А. Карповой.

Возвращаясь к постановке задачи, предполагающей, что веса всех базисных элементов равны единице, выделим результат, полученный в 1997 г. О. М. Касим-Заде. В работе [21] он доказал, что для всякого бесконечного базиса B выполняется соотношение $L_B(n) = O(2^{n/2})$. С точностью до константы эта оценка является, вообще говоря, неулучшаемой: из уже упоминавшейся работы Э. И. Нечипорука [59], в частности, известен пример бесконечного базиса, в котором порядок роста функции Шеннона равен $2^{n/2}$. Как уже отмечалось, результаты работ Э. Н. Гилберта [87] и А. А. Маркова [56, 57] дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\log_2 n$, результаты Э. И. Нечипорука [60] и О. Б. Лупанова [54] о схемах в базисе пороговых функций дают пример бесконечного базиса с порядком роста функции Шеннона равным $\sqrt{\dfrac{2^n}{n}}$, а базис B, состоящий из всех булевых функций, — пример базиса с ограниченной сверху функцией Шеннона.

В 2002 г. О. М. Касим-Заде [22] предложил новый метод получения двусторонних оценок функций Шеннона в произвольных бесконечных базисах, который позволил при достаточно слабых ограничениях оценить рост функций Шеннона с точностью до полиномиальной эквивалентности. Метод получения нижних оценок в [22] основан на «мощностных» соображениях и восходит к [54, 60]. Что касается верхних оценок, то предложенный в [22] метод позволил получить верхние оценки функции Шеннона, сопоставимые с ее мощностной нижней оценкой. Эти результаты получили развитие в [23], где были получены более точные оценки.

В общих чертах качественная картина поведения порядков роста функций Шеннона в бесконечных базисах была описана О. М. Касим-Заде [25] в 2013 г.

Для изложения этих результатов введем еще два определения.

Если выполнено соотношение $a(n) = O(b(n))$, то, следуя [25], *интервалом* между функциями $a(n)$ и $b(n)$ будем называть множество всех действительнозначных функций $c(n)$ натурального аргумента, принимающих положительные значения при всех достаточно больших n и удовлетворяющих условиям $c(n) = \Omega(a(n))$ и $c(n) = O(b(n))$. Если функция $c(n)$ лежит в интервале между функциями $a(n)$ и $b(n)$ и по порядку роста не совпадает ни с одной из них, то будем говорить, что функция $c(n)$ *лежит строго в интервале* между функциями $a(n)$ и $b(n)$.

Далее, классом L содержательно (подробнее см. [25]) назовем множество функций от одной действительной переменной, состоящее из тождественной функции x, всех действительных констант, и такое, которое вместе с любыми двумя функциями $f(x), g(x)$ содержит все функции, финально эквивалентные функциям $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, $e^{f(x)}$, $\log_2|f(x)|$ (финальная эквивалентность означает равенство функций для всех значений аргумента, начиная с некоторого числа).

Согласно классификации, описанной в [25], для любого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо лежит в одном из двух интервалов: или между функциями $\log_2 n$ и n, или между функциями n и $2^{n/2}$.

Таким образом, для всякого бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона либо равен 1, либо не меньше $\log_2 n$. Иначе говоря, не существует базиса, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями 1 и $\log_2 n$ [25].

В [25] установлено, что существуют базисы с порядком роста функции Шеннона, равным n. Из этого факта и приведенных выше результатов следует, что границы 1, $\log_2 n$, n и $2^{n/2}$ каждого из интервалов, указанных в классификации порядков роста функций Шеннона [25], достижимы.

Отметим, что порядок роста функции Шеннона $\sqrt{\frac{2^n}{n}}$, относящийся к базису пороговых функций, лежит строго в интервале между функциями n и $2^{n/2}$. Можно показать, что число базисов с различными порядками роста функций Шеннона в этом интервале бесконечно; обширное семейство таких базисов построено в работе [25].

В [25] показано, что для любой функции λ, принадлежащей классу L и удовлетворяющей условиям $\lambda(n)=\Omega(n)$, $\log_2\lambda(n)=O(n^{1/2})$, существует бесконечный базис, в котором функция Шеннона по порядку роста равна функции $\lambda(n)$. В частности, из этого результата вытекает, что порядками роста функции Шеннона являются, например, функции $n\log_2 n$, $n\log_2\log_2 n$, n^2, $n^{3/2}$, $n^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt[5]{n}}$ и другие (подробнее см. [25]).

Что касается интервала между функциями $\log_2 n$ и n, то ответ на вопрос, существуют ли базисы, в которых порядки роста функций Шеннона лежат строго в этом интервале, оставался неизвестным и очень интересовал О. М. Касим-Заде.

Упоминавшийся выше метод получения оценок, предложенный в [22], дает, в частности, следующий результат: если полученная посредством него мощностная нижняя оценка функции Шеннона в данном бесконечном базисе по порядку не ниже линейной (и тем самым функция Шеннона попадает в интервал от n до $2^{n/2}$), то функция Шеннона по порядку заключена между этой нижней оценкой и ее квадратом. В интервале от $\log_2 n$ до n это свойство, вообще говоря, не выполняется. Для таких бесконечных базисов получение достаточно точных нижних оценок их функций Шеннона, по-видимому, требует привлечения иных соображений. Такие новые методы получения нижних оценок удалось разработать при исследовании базиса антицепных функций. Некоторое время базис антицепных функций был претендентом на то, что в этом базисе порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями $\log_2 n$ и n. И хотя, в конечном счете, это оказалось не так — О. В. Подольская [64] установила, что порядок роста все-таки линеен, — разработанные методы помогли О. В. Подольской в 2016 г. доказать [65], что в базисе, состоящем из всех антицепных функций и линейных функций от любого числа переменных, порядок роста функции

Шеннона равен $\sqrt{n \log n}$. Тем самым показано, что существует базис, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями $\log_2 n$ и n.

Стоит отметить, что для функций многозначной логики систематических исследований задачи о сложности над бесконечными базисами, насколько известно авторам, не проводилось. В этом направлении можно указать только отдельные результаты, из которых выделим два, формально не относящихся к изучаемой тематике, но представляющих явный интерес в свете обсуждаемых вопросов.

В 2011 г. А. В. Кочергин при исследовании асимптотического поведения функции Шеннона глубины (необходимые определения см., например, в [24]) функций многозначной логики в конечных и бесконечных базисах установил [29, 31], что в случае бесконечного базиса порядок роста функции Шеннона глубины либо равен 1, либо равен $\log_2 n$. Для сравнения — установленная А. В. Кочергиным в [30] качественная картина асимптотического поведения функции Шеннона глубины имеет такой вид: для произвольного конечного базиса B функций k-значной логики рост функции Шеннона глубины асимптотически равен $c_B n$, где константа c_B выражается через логарифм некоторого алгебраического числа и зависит только от базиса, а также предложен алгоритм нахождения по базису указанной константы. Тем самым характерные особенности поведения функции Шеннона глубины в бесконечных базисах, известные для случая булевых функций (см., например, [24]), сохраняются и при переходе к случаю функций k-значной логики, где $k \geqslant 3$.

Остановимся еще на одном результате, имеющем отношение к сложности функций многозначной логики в бесконечных базисах (правда, речь идет о «формульной» сложности) и показывающем возможность наличия новых эффектов при переходе от булева случая к многозначному. В 2015 г. А. А. Андреев [1] для конкретной функции 4-значной логики (результат переносится на случай функций k-значной логики при $k \geqslant 5$) и некоторого специально построенного бесконечного базиса B установил точное значение сложности реализации этой функции формулами в базисе B (под сложностью реализации формулами понимается минимальное число переменных и констант в формулах, реализующих данную функцию, — подробнее см., например, [51, 55]), численно равное

$$2^{2^{n-1}} - 1.$$

Эта величина превосходит известную [73] рекордную оценку сложности реализации последовательности функций над конечным базисом в P_4, имеющую вид

$$2^{C_n^{[n/2]}}([n/2] + 1) - [n/2].$$

В примере А. А. Андреева не так существенно, что речь идет о «формульной», а не «схемной» сложности функций многозначной логики. Принципиальным моментом является тот факт, что рассматриваемый бесконечный базис не является полным. В случае булевых функций все замкнутые классы конечно порожденные. Это значит, что любой бесконечный базис будет избыточным и из него можно выделить конечную подсистему, порождающую тот же замкнутый класс. Следовательно, порядок роста сложности при переходе от конечного базиса булевых функций к бесконечному не может увеличиться. В случае же функций многозначной логики ситуация иная. Существуют примеры замкнутых классов, не имеющих конечного базиса [77], что дает дополнительные возможности для получения высоких нижних оценок в бесконечных базисах по сравнению с оценками в конечных базисах.

В следующих двух разделах данного параграфа для двух бесконечных полных базисов функций многозначной логики B_P и B_L дается полное решение задачи о сложности схемной реализации функций многозначной логики в шенноновской постановке — найдено точное значение соответствующих функции Шеннона.

В последнем, четвертом разделе параграфа для булевого случая полностью решена задача оптимального синтеза в ее исходной постановке — для каждой булевой функции установлено точное значение сложности реализации в базисе, состоящем из всех монотонных булевых функций и отрицания, а также предложен метод построения минимальной схемы.

4.2. Сложность функций k-значной логики в базисе B_P. В предыдущем параграфе в теореме 4 установлено точное значение инверсионной (немонотонной) сложности произвольной функции k-значной логики в базисе B_P, состоящем из отрицания Поста, т. е. функции $x+1 \pmod k$, и всех монотонных относительно порядка $0<1<\ldots<k-1$ функций из P_k.

Теперь откажемся от «бесплатности» использования в схеме монотонных элементов, при этом задача об инверсионной сложности превращается в задачу об обычной сложности, численно равной общему количеству элементов в схеме. Как и ранее, относительно такой меры для сложности в базисе B схемы S и функции f будем использовать обозначения $L_B(S)$ и $L_B(f)$ соответственно.

Из теоремы 4 и очевидных неравенств

$$I_{B_P}(f) \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant 2I_{B_P}(f)+1,$$

справедливых для любой функции k-значной логики f, непосредственно следуют оценки

$$\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant 2\,\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil + 1.$$

Докажем, что для базиса B_P при любом k, $k \geqslant 3$, значение $L_{B_P}(f)$ с точностью до небольшой аддитивной константы совпадает с величиной $3\log_3(d(f)+1)$.

Перейдем к получению соответствующих оценок. Изложение основано на работе [41] с использованием работ [39, 42, 43].

4.2.1. Нижние оценки. Подготовку к доказательству нижних оценок начнем с модификации леммы 9, но сначала напомним некоторые определения.

Для произвольного множества B функций k-значной логики, содержащего конечное число немонотонных функций, величина $D(B)$ определяется равенством

$$D(B) = \max_{\omega \in B} d(\omega).$$

Для произвольной схемы S обозначим через F_S систему всех функций, реализуемых в вершинах схемы S. Также обозначим через $d(S)$ величину $d(F_S)$.

Лемма 11. *Пусть схема S' над базисом B получается из схемы S добавлением элементов $e_1, \ldots, e_t$, на входы которых подаются либо входы схемы S, либо выходы каких-либо элементов схемы S. Тогда*

$$d(S') \leqslant (D(B)t+1)(d(S)+1)-1.$$

Доказательство. Пусть на входы схем S и S' подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, а цепь

$$C=(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

наборов из E_k^n удовлетворяет условию $d_C(F_{S'})=d(S')$.

Обозначим величину $d_C(F_S)$ через l. Тогда цепь C можно разбить на $l+1$ подцепь $C_1, \ldots, C_{l+1}$ таким образом, что будут выполняться условия:

1. Для каждого i, $i=1, \ldots, l+1$, найдутся такие натуральные a и b, $1 \leqslant a < b \leqslant r$, что

$$C_i=(\widetilde{\alpha}_a, \widetilde{\alpha}_{a+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_b).$$

2. При $i \neq j$ справедливо равенство $C_i \cap C_j=\varnothing$.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{l+1} C_i=C$.

4. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant l+1$, верно равенство $d_{C_i}(F_S)=0$.

Тогда для любой цепи C_i, $i=1, \ldots, l+1$, и для каждой функции f_j, вычисляемой на выходе элемента e_j, $j=1, \ldots, t$, выполняется неравенство $d_{C_i}(f_j) \leqslant D(B)$.

Поэтому, используя также соотношения $l=d_C(F_S) \leqslant d(F_S)=d(S)$, получаем:

$$\begin{aligned} d(S') &= d_C(F_{S'}) \leqslant d_{C_1}(F_{S'})+\ldots+d_{C_{l+1}}(F_{S'})+l= \\ &= d_{C_1}(\{f_1, \ldots, f_t\})+\ldots+d_{C_{l+1}}(\{f_1, \ldots, f_t\})+l \leqslant D(B)(l+1)t+l= \\ &= (D(B)t+1)(l+1)-1 \leqslant (D(B)t+1)(d(S)+1)-1. \end{aligned}$$

Лемма 11 доказана.

Отметим, что способ доказательства леммы 11 в частном случае $t=1$ может быть положен в основу альтернативного доказательства (основанного на анализе той части схемы, которая примыкает не ко входам схемы, а к ее выходам) нижней оценки минимального числа отрицаний Поста при реализации систем функций k-значной логики схемами в базисе B_P (см. лемму 9 и теорему 5 из предыдущего параграфа, а также лемму 1 и теорему 2 из [36]).

Теперь для произвольного натурального n положим

$$\tau(n)=\begin{cases} 1, & \text{если } 3^r < n \leqslant 4 \times 3^{r-1} \text{ для некоторого целого } r; \\ 2, & \text{если } 4 \times 3^{r-1} < n \leqslant 2 \times 3^r \text{ для некоторого целого } r; \\ 3, & \text{если } 2 \times 3^r < n \leqslant 3 \times 3^r \text{ для некоторого целого } r. \end{cases}$$

Лемма 12. *Пусть набор натуральных чисел* $\{n_1, \ldots, n_m\}$ *удовлетворяет для некоторого натурального* N *условию* $n_1 \times \ldots \times n_m \geqslant N$. *Тогда справедливо неравенство*

$$n_1 + \ldots + n_m \geqslant 3\left(\lceil \log_3 N \rceil - 1\right) + \tau(N).$$

Доказательство. Зафиксируем значение N. Среди всех конечных наборов натуральных чисел, произведение элементов которых не менее чем N, отметим наборы с минимально возможным значением суммы элементов, а среди них выделим тот набор, в котором произведение элементов максимально, и обозначим его через $(n_1, \ldots, n_m)$. В силу выбора набора достаточно установить справедливость утверждения леммы для выделенного набора $(n_1, \ldots, n_m)$. Опишем некоторые свойства элементов этого набора.

1. Все элементы набора не превосходят четырех. Действительно, если найдется элемент n_i, удовлетворяющий неравенству $n_i \geqslant 5$, то, заменив в исходном наборе элемент n_i на два элемента $n_{i_1} = 2$ и $n_{i_2} = n_i - 2$, получим набор с той же самой суммой элементов, но с бо́льшим произведением — противоречие со свойствами построенного набора.

2. Не более двух элементов набора равны двум (иначе замена трех двоек на две тройки приведет к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

3. Среди элементов набора не более одной четверки (иначе замена двух четверок на две тройки и двойку приведет к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

4. В наборе не могут одновременно присутствовать двойка и четверка (иначе замена двойки и четверки на две тройки приведет к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

Таким образом, в наборе $(n_1, \ldots, n_m)$ все элементы равны трем, за исключением, быть может, одной или двух двоек или одной четверки.

Если $N = 1$, то утверждение леммы проверяется непосредственно. Далее считаем, что выполняется условие $N \geqslant 2$. Положим $r = \lfloor \log_3 (N-1) \rfloor$. Тогда $(N-1)/3 < 3^r \leqslant N - 1$. Поэтому $3^r + 1 \leqslant N < 3^{r+1} + 1$. Следовательно, верны неравенства

$$3^r < N \leqslant 3^{r+1}.$$

Отдельно рассмотрим три случая.

Случай 1°. Пусть выполняются соотношения $3^r < N \leqslant 4 \times 3^{r-1}$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из $r - 1$ троек и либо одной четверки, либо двух двоек. Следовательно,

$$n_1 + \ldots + n_m \geqslant 3(r-1) + 4 = 3\lfloor \log_3 (N-1) \rfloor + 1.$$

Случай 2°. Пусть выполняются соотношения $4 \times 3^{r-1} < N \leqslant 2 \times 3^r$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из r троек и одной двойки. Следовательно,

$$n_1 + \ldots + n_m \geqslant 3r + 2 = 3\lfloor \log_3 (N-1) \rfloor + 2.$$

Случай 3°. Пусть выполняются соотношения $2 \times 3^r < N \leqslant 3 \times 3^r$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из $r+1$ тройки. Следовательно,

$$n_1 + \ldots + n_m \geqslant 3(r+1) = 3\lfloor \log_3 (N-1) \rfloor + 3.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством $\lfloor \log_3(N-1) \rfloor = \lceil \log_3 N \rceil - 1$. Лемма 12 доказана

Для нижней границы из леммы 12 введем обозначение, для каждого натурального n положив

$$W(n) = 3\left(\lceil \log_3 n \rceil - 1\right) + \tau(n).$$

Отметим, что величина $W(n)$ численно равна минимально возможному числу дуг в ориентированном графе, допускающем кратные дуги, но не содержащем ориентированных циклов, и в котором выделены две вершины с числом ориентированных путей между ними не менее n (см., например, [32, 33, 103]).

Выпишем значения аргумента n, при которых функция $W(n)$ принимает значения от 1 до 11 (табл. 1)

Таблица 1

$W(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	1	2	3	4	5–6	7–9	10–12	13–18	19–27	28–36	37–54

Отметим некоторые факты, связанные с функцией $W(n)$, которые будут использоваться в последующих доказательствах.

Лемма 13. *Функция $W(n)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Справедливы неравенства*

$$W(n) \geqslant 3\log_3 n, \quad n \geqslant 1;$$
$$W(n) < 3\log_3 n + 2 - 3\log_3(4/3) < 3\log_3 n + 1{,}215, \quad n \geqslant 1;$$
$$W(n) \leqslant W(n+1), \quad n \geqslant 1;$$
$$W(n) \geqslant W(n+1) - 1, \quad n \geqslant 1;$$
$$W(n) \geqslant W(n+2) - 1, \quad n \geqslant 4.$$

2. *Равенство $W(n) = W(n+1)$ верно тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$n \notin \{3^s \mid s = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{2 \times 3^s \mid s = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{4 \times 3^s \mid s = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

3. *Если при некотором натуральном значении s выполняется условие*

$$\frac{1}{2}3^s < n < 4 \times 3^{s-1},$$

то справедливо равенство

$$W(n+1) + 2 = W(2n+1).$$

Для доказательства нижних оценок сложности в базисе B_P рассмотрим вспомогательный базис

$$B'_P = M \cup \{x + i \pmod k \mid i = 1, \ldots k-1\}.$$

Как обычно, схему в базисе B, реализующую функцию или систему функций, будем называть *минимальной*, если никакая схема в базисе B меньшей сложности не реализуют эту функцию или систему функций.

Функциональный элемент схемы в базисе B будем называть *монотонным*, если ему приписана монотонная функция из базиса, и, соответственно, *немонотонным*, если ему приписана немонотонная функция из базиса.

Далее будем считать, что значность k рассматриваемой логики не менее 3. При доказательстве нижних оценок, как правило, этот момент дополнительно оговариваться не будет, так как при $k=2$ устанавливаемые нижние оценки являются хоть и малоинформативными, но формально верными.

На множестве минимальных схем в базисе B'_P, в которых есть пара немонотонных элементов, соединенных ребром, определим следующую операцию преобразования этих схем.

Пусть S — произвольная минимальная схема, реализующая некоторую функцию в базисе B'_P, и пусть в схеме S выход некоторого элемента e_1, которому приписана функция $x+i \pmod k$, подается на вход элемента e_2, которому приписана функция $x+j \pmod k$. Рассмотрим схему S', которая получается из схемы S заменой элемента e_2 на элемент e'_2, которому приписана функция $x+i+j \pmod k$ и в который входит ребро, исходящее из того элемента, из которого выходит ребро в элемент e_1. Будем говорить, что схема S' получена из схемы S *операцией приведения* (относительно пары элементов e_1 и e_2).

Выделим класс минимальных схем в базисе B'_P, к которым невозможно применить операцию приведения. Схему S в базисе B'_P будем называть *приведенной*, если схема S минимальна и на вход никакого элемента схемы, которому приписана немонотонная функция из базиса B'_P, не подается выход никакого элемента, которому тоже приписана немонотонная функция из базиса B'_P, т. е. никакие два немонотонных элемента схемы не соединены ребром.

Сформулируем простые утверждения, которые нам потребуются в дальнейшем.

Лемма 14. *У любой функции k-значной логики есть реализующая ее в базисе B'_P приведенная схема.*

Лемма 15. *Пусть схема S' получается из схемы S, построенной в базисе B'_P, применением операции приведения. Тогда:*

1. *Схемы S и S' реализуют одну и ту же функцию.*
2. *Число элементов в схемах S и S' одинаковое.*
3. *Число немонотонных элементов в схемах S и S' одинаковое.*
4. *Число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, в схемах S и S' одинаковое.*
5. *Число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов, в схемах S и S' одинаковое.*

Пусть S — приведенная схема для некоторой функции f в базисе B'_P. Разобьем множество всех монотонных элементов схемы S на подмножества $S_0, S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. Ко множеству S_i, $i=0,1,\ldots$, отнесем все монотонные элементы схемы S, для каждого из которых максимальное число немонотонных элементов в путях от входов схемы до этого элемента равно i. Тогда схема S имеет вид, представленный на рис. 1, где элементам e_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant t_i)$ приписаны немонотонные элементы из базиса B'_P и блоки $S_1, \ldots, S_{r-1}$ по построению непустые, т. е. содержат хотя бы один монотонный элемент. Такое представление приведенной схемы будем называть *каноническим*.

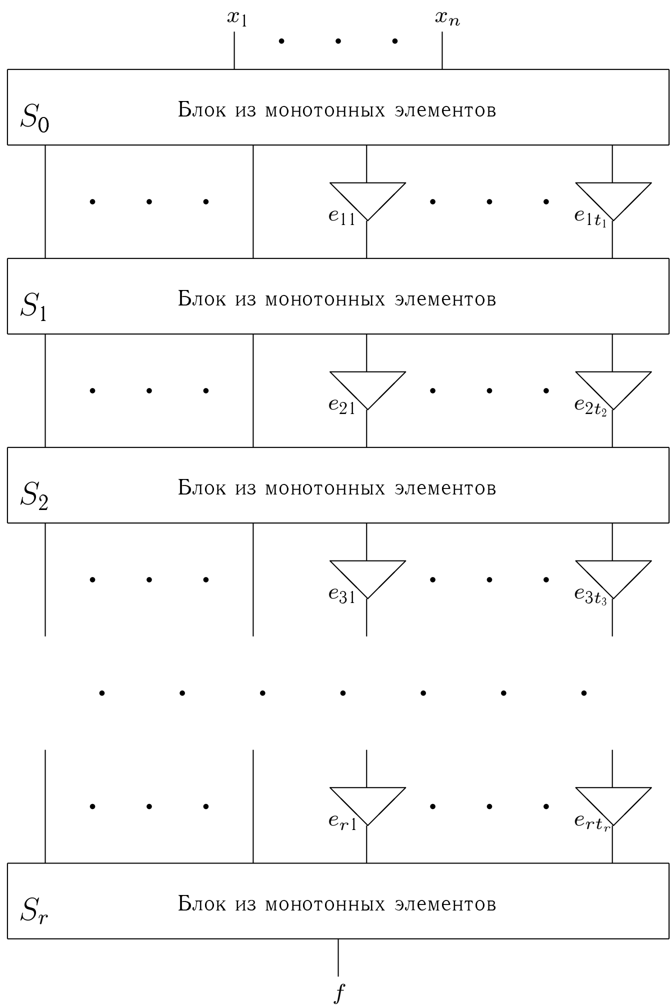


Рис. 1

Для приведенной схемы S обозначим через $l_0(S)$ число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, а через $l_1(S)$ — число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов. Заметим, что если в минимальной схеме максимальное число немонотонных элементов в цепях от входов к выходу равно r, то для каждого монотонного элемента, ни один путь от которого до выхода не содержит немонотонных элементов, найдется цепь от входа до этого элемента, содержащая r немонотонных элементов.

Лемма 16. *Пусть S — приведенная схема в базисе B'_P для немонотонной функции f. Тогда выполняется неравенство*

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant W(d(f)+1) - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим каноническое представление схемы S (см. рис. 1).

Применяя лемму 11 и учитывая равенство $D(B'_P)=1$, получаем:

$$d(f) + 1 \leqslant d(S) + 1 \leqslant (t_1+1)\ldots(t_r+1).$$

Из этого соотношения в силу леммы 12 следует неравенство

$$(t_1+1) + \ldots + (t_r+1) \geqslant W(d(f)+1).$$

С другой стороны,

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant (t_1+1) + \ldots + (t_r+1) - 1,$$

так как каждый из блоков $S_1, \ldots, S_{r-1}$ содержит хотя бы по одному элементу. Поэтому

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant W(d(f)+1) - 1.$$

Лемма 16 доказана.

Непосредственно из леммы 16 вытекает

Лемма 17. *Для любой функции k-значной логики f справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1) - 1.$$

Прежде чем продолжить получение нижних оценок сложности реализации функций в базисах B_P и B'_P, установим близость значений спадов двух функций, отличающихся по модулю k на константу.

Лемма 18. *Пусть функции k-значной логики f и g удовлетворяют условию*

$$g \equiv f + i \pmod{k}$$

для некоторого фиксированного значения i. Тогда

$$|d(f) - d(g)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть цепь $C=(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_t)$ наборов значений переменных функций f и g удовлетворяет условию $d_C(f)=d(f)$. Рассмотрим значения функции f на соседних наборах $\widetilde{\alpha}_j$ и $\widetilde{\alpha}_{j+1}$ цепи C, $j=1, \ldots, t-1$.

Если выполняются неравенства $0 \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) < k-i$ или неравенства $k-i \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \leqslant k-1$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ не является обрывом ни для функции f, ни для функции g.

Если выполняются неравенства $k-i > f(\widetilde{\alpha}_j) > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant 0$ или неравенства $k-1 \geqslant f(\widetilde{\alpha}_j) > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant k-i$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ является обрывом и для функции f, и для функции g.

Если выполняются неравенства $0 \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) < k-i \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \leqslant k-1$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ не является обрывом для функции f, но является обрывом для функции g. Число таких пар среди пар $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j=1,\ldots,t-1$, обозначим через p.

Если выполняются неравенства $k-1 \geqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \geqslant k-i > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant 0$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ является обрывом для функции f, но не является обрывом для функции g. Число таких пар среди пар $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j=1,\ldots,t-1$, обозначим через q.

Очевидно, что $q-p \leqslant 1$. Следовательно,

$$d(g) \geqslant d_C(g) = d_C(f) + p - q \geqslant d(f) - 1.$$

Аналогично устанавливается и неравенство $d(f) \geqslant d(g) - 1$. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Пусть для немонотонной функции f значение $d(f)$ ни при каком целом неотрицательном s не равно величинам 3^s, $4\times 3^{s-1}$, 2×3^s. Тогда верно хотя бы одно из утверждений*:

1. *Справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1)+1.$$

2. *Выходной элемент любой приведенной схемы, реализующей функцию f в базисе B'_P, является монотонным.*

Доказательство. Пусть схема S является приведенной схемой в базисе B'_P для функции f и элемент e, являющийся выходом схемы, не является монотонным, т. е. ему приписана некоторая функция $x+i \pmod k$, $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. Тогда на вход элемента e подается функция $g = f + k - i \pmod k$, причем для функции g в силу леммы 18 справедливо неравенство $d(g) \geqslant d(f) - 1$. Отсюда и из условий леммы следует, что функция g немонотонна. Схема S', получающаяся из схемы S путем удаления элемента e, является минимальной схемой в базисе B'_P для функции g — иначе, заменив подсхему S' на минимальную схему в базисе B'_P для функции g, получили бы схему в базисе B'_P для функции f сложности менее $L_{B'_P}(S)$. Выходной элемент схемы S' в силу приведенности схемы S является монотонным. В силу лемм 15 и 16 справедливо неравенство

$$L_{B'_P}(S') \geqslant W(d(g)+1).$$

В силу неравенства $d(g) \geqslant d(f) - 1$ и ограничений, накладываемых на величину $d(f)$ условиями леммы, с учетом леммы 13 получаем, что

$$W(d(g)+1) \geqslant W(d(f)+1).$$

Поэтому

$$L_{B'_P}(S) \geqslant W(d(f)+1)+1.$$

Отсюда следует утверждение леммы 19 ввиду минимальности схемы S.

Лемма 20. *Пусть значение $d(f)$ при некотором натуральном s равно либо $2\times 3^{s-1}$, либо 3^s, либо $4\times 3^{s-1}$. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях леммы выполняется неравенство $d(f) \geqslant 2$.

Пусть схема S является приведенной схемой в базисе B'_P для функции f. Обозначим выходной элемент схемы S через e. Если элемент e является монотонным, то утверждение леммы следует из леммы 16.

Если элемент e не является монотонным, т. е. ему приписана некоторая функция $x+i \pmod k$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, то на вход элемента e подается функция $g = f + k - i \pmod k$, причем в силу леммы 18 для функции g справедливо неравенство $d(g) \geqslant d(f) - 1$ (из этого неравенства, в частности, следует, что функция g немонотонная). Схема S', получающаяся из схемы S путем удаления элемента e, является минимальной схемой в базисе B'_P для функции g — иначе, заменив подсхему S' на минимальную схему в базисе B'_P для функции g, получили бы схему в базисе B'_P для функции f сложности менее $L_{B'_P}(S)$. Выходной элемент схемы S' в силу приведенности схемы S является монотонным. В силу лемм 15 и 16 справедливо неравенство

$$L_{B'_P}(S') \geqslant W(d(g)+1).$$

В силу неравенства $d(g) \geqslant d(f) - 1$ и ограничения $d(f) \geqslant 2$ с использованием леммы 13 получаем соотношение

$$W(d(g)+1) \geqslant W(d(f)+1) - 1.$$

Поэтому

$$L_{B'_P}(S) \geqslant W(d(f)+1).$$

Отсюда следует утверждение леммы 20 ввиду минимальности схемы S.

Из лемм 19 и 20 с использованием лемм 15 и 16 непосредственно вытекает следующее утверждение, формально верное и для булевых функций, но которое содержательно для оценок сложности функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ и будет использоваться именно в этом случае.

Теорема 8[41]. *Для любой функции k-значной логики f, удовлетворяющей условию $d(f) \geqslant 2$, справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(f) \geqslant L_{B'_P}(f) \geqslant 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1).$$

Замечание. Нижняя оценка величины $L_{B'_P}(f)$ из теоремы 8 для функций, удовлетворяющих условию $d(f) = 1$, не всегда выполняется: для функции $h_i(x) = x + i \pmod k$ ($i \in \{1, \ldots, k-1\}$), очевидно, верны равенства $d(h_i) = 1$ и $L_{B'_P}(h_i) = 1$, в то время как величина $3\left(\lceil \log_3 2 \rceil - 1\right) + \tau(2)$ равна 2.

Введем функцию k-значной логики от n переменных, имеющую при фиксированных значениях k и n максимально возможный спад:

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \ldots + x_n + 1)(k-1) \pmod k.$$

Теперь положим

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$d(\xi) + 1 = T(k,n).$$

Лемма 21. *Пусть при заданных значениях k и n выполняется условие $d(\xi)\geqslant 5$. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(\xi)\geqslant W(T(k,n))+1.$$

Доказательство. Очевидно, что выполняется соотношение $L_{B_P}(\xi)\geqslant L_{B'_P}(\xi)$. Если выполняется и строгое неравенство $L_{B_P}(\xi)>L_{B'_P}(\xi)$, то требуемая оценка следует из теоремы 8.

Далее считаем, что $L_{B_P}(\xi)=L_{B'_P}(\xi)$. Тогда минимальная для функции ξ схема S в базисе B_P является также минимальной схемой для функции ξ и в базисе B'_P. В зависимости от того, есть ли в схеме S немонотонный элемент, на вход которого подается переменная, рассмотрим два случая.

Случай 1°. Пусть в схеме S нет ни одного немонотонного элемента, на вход которого подается вход схемы (переменная).

Обозначим через S' построенную по схеме S приведенную схему. В силу леммы 15 верно соотношение $l_0(S')\geqslant 1$. Если дополнительно выполняется неравенство $l_1(S')\geqslant 1$, то с использованием леммы 16 имеем:

$$L_{B_P}(\xi)=L_{B'_P}(\xi)=L_{B'_P}(S)=L_{B'_P}(S')\geqslant W(d(\xi)+1)+1=W(T(k,n))+1.$$

Пусть теперь выполняется условие $l_1(S')=0$, т. е. выходной элемент e' схемы S' является немонотонным. Рассмотрим схему S'', получающуюся из схемы S' путем удаления элемента e'. Схема S'' реализует функцию h, которая подается на вход элемента e' в схеме S'. Отметим справедливость следующих свойств схемы S'' и функции h. Во-первых, в силу леммы 18 выполняется неравенство $d(h)\geqslant d(\xi)-1$ и, следовательно, в силу условий леммы функция h немонотонна. Во-вторых, схема S'' является минимальной для функции h в базисе B'_P (иначе схема S' не была бы минимальной для функции ξ в базисе B'_P). В-третьих, схема S'' является приведенной. В-четвертых, в силу условий случая и условий леммы, а также приведенности схемы S' выполняются неравенства $l_0(S'')\geqslant 1$ и $l_1(S'')\geqslant 1$. Таким образом, применяя лемму 16 для схемы S'' и лемму 13, получаем:

$$L_{B_P}(\xi)=L_{B'_P}(S')=L_{B'_P}(S'')+1\geqslant W(d(h)+1)+2\geqslant \\ \geqslant W(d(\xi)+1)+1=W(T(k,n))+1.$$

Случай 2°. Пусть в схеме S есть немонотонный элемент, на вход которого подается вход схемы.

Обозначим этот элемент через e. В силу симметричности функции ξ без ограничения общности можно считать, что в схеме S на вход элемента e подается переменная x_1. Переделаем схему S, удалив из нее элемент e и создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S_1 реализует некоторую функцию $g(y,x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1,\ldots,x_n)=g(N_P(x_1),x_1,\ldots,x_n).$$

Отметим, что схема S_1 — минимальная для функции g в базисе B'_P, так как иначе бы и схема S не была минимальной для функции ξ в базисе B'_P. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi)=L_{B'_P}(\xi)=L_{B'_P}(g)+1.$$

Рассмотрим множество $\mathscr{C}$ максимальных возрастающих цепей наборов из E_k^n, начинающихся с нулевого набора и заканчивающихся наборами

$$(k-2, k-1, \ldots, k-1), (k-1, k-1, \ldots, k-1).$$

Очевидно, что для любой цепи C из множества $\mathscr{C}$ справедливы равенства

$$|C| = (k-1)n + 1, \quad d_C(\xi) = d(\xi) = T(k, n) - 1.$$

Теперь определим множество $\mathscr{C}_1$ возрастающих цепей длины $(k-1)n$ наборов из E_k^n следующим образом. По каждой цепи C из множества $\mathscr{C}$ построим включаемую во множество $\mathscr{C}_1$ возрастающую цепь C_1 из $(k-1)n$ наборов длины $n+1$ путем исключения последнего набора и замены остальных наборов цепи C на наборы длины $n+1$ по правилу

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1 + 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для любой цепи C_1 из множества $\mathscr{C}_1$ выполняется неравенство $d_{C_1}(g) \geqslant d_C(\xi) - 1$. Поэтому, в частности,

$$d(g) \geqslant d(\xi) - 1 = T(k, n) - 2.$$

Случай 2.1°. Пусть выполняется неравенство $d(g) \geqslant d(\xi)$.

Тогда достаточно к функции g применить теорему 8 и воспользоваться монотонностью функции $W(n)$:

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 \geqslant W(d(g) + 1) + 1 \geqslant$$
$$\geqslant W(d(\xi) + 1) + 1 = W(T(k, n)) + 1.$$

Случай 2.2°. Пусть выполняется равенство $d(g) = d(\xi) - 1$.

В зависимости от того, есть ли в схеме S_1 немонотонный элемент, на вход которого подается переменная, рассмотрим два подслучая.

Случай 2.2.1°. Пусть в схеме S_1 нет ни одного немонотонного элемента, на вход которого подается вход схемы (переменная).

Обозначим через S_1' построенную по схеме S_1 приведенную схему. В силу леммы 15 верно соотношение $l_0(S_1') \geqslant 1$. Если дополнительно выполняется неравенство $l_1(S_1') \geqslant 1$, то с использованием леммы 16 имеем:

$$L_{B'_P}(S_1') \geqslant W(d(g) + 1) + 1.$$

Пусть теперь выполняется условие $l_1(S_1') = 0$, т. е. выходной элемент e_1' схемы S_1' является немонотонным. Рассмотрим схему S_1'', получающуюся из схемы S_1' путем удаления элемента e_1'. Схема S_1'' реализует функцию h, которая подается на вход элемента e_1' в схеме S_1'. Отметим справедливость следующих свойств схемы S_1'' и функции h. Во-первых, в силу леммы 18 выполняется неравенство $d(h) \geqslant d(g) - 1$ и, следовательно, в силу условий леммы функция h немонотонна. Во-вторых, схема S_1'' является минимальной для функции h в базисе B'_P (иначе схема S_1' не была бы минимальной для функции g в базисе B'_P). В-третьих, схема S_1'' является приведенной. В-четвертых, в силу условий случая и условий леммы, а также приведенности схемы S_1' выполняются неравенства $l_0(S_1'') \geqslant 1$ и $l_1(S_1'') \geqslant 1$. Поэтому, применяя лемму 16 для схемы S_1'' и лемму 13 и в случае немонотонного выходного элемента схемы S_1', получаем:

$$L_{B'_P}(S_1') = L_{B'_P}(S_1'') + 1 \geqslant W(d(h)+1) + 2 \geqslant W(d(g)+1) + 1.$$

Таким образом, используя лемму 13, окончательно в условиях рассматриваемого случая имеем:

$$\begin{aligned} L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(S_1) + 1 = L_{B'_P}(S_1') + 1 \geqslant \\ \geqslant W(d(g)+1) + 2 \geqslant W(d(\xi)+1) + 1 = W(T(k,n)) + 1. \end{aligned}$$

Случай 2.2.2°. Пусть в схеме S_1 есть немонотонный элемент, на вход которого подается вход схемы.

Обозначим этот элемент через e_1. В силу минимальности схемы S на вход элемента e_1 не может подаваться переменная x_1. Далее опять рассмотрим два случая.

Случай 2.2.2.1°. Пусть на вход элемента e_1 подается переменная y.

Переделаем схему S_1, удалив из нее элемент e_1 и создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную z. Полученная таким перестроением схема S_2^1 реализует некоторую функцию $h_1(y, z, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = h_1(N_P(x_1), N_P(N_P(x_1)), x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что схема S_2^1 — минимальная для функции h_1 в базисе B'_P, так как иначе бы и схема S_1 не была минимальной для функции g в базисе B'_P. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(h_1) + 2.$$

Рассмотрим произвольную цепь C_1^1 из множества $\mathscr{C}_1$, начинающуюся с набора $(1, 0, \ldots, 0)$ и заканчивающуюся наборами

$$(k-2, k-3, k-1, \ldots, k-1), \ (k-1, k-2, k-1, \ldots, k-1).$$

По цепи C_1^1 построим возрастающую цепь C_2^1 из $(k-1)n-1$ набора длины $n+2$ путем исключения последнего набора цепи C_1^1 и замены остальных наборов цепи на наборы длины $n+2$ по правилу

$$(\alpha_1+1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1+1, \alpha_1+2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для цепи C_2^1 выполняются неравенства

$$d_{C_2^1}(h_1) \geqslant d_{C_1^1}(g) - 1 \geqslant d_C(\xi) - 2.$$

Поэтому

$$d(h_1) \geqslant d(\xi) - 2 = T(k,n) - 3.$$

Теперь, применяя теорему 8, имеем:

$$\begin{aligned} L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(h_1) + 2 \geqslant \\ \geqslant W(d(h_1)+1) + 2 \geqslant W(T(k,n)-2) + 2. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство $T(k,n) \geqslant 6$ и справедливое в силу леммы 13 при $n \geqslant 6$ соотношение $W(n-2) \geqslant W(n)-1$, окончательно получаем

$$L_{B_P}(\xi) \geqslant W(T(k,n)) + 1.$$

Случай 2.2.2.2°. Пусть на вход элемента e_1 подается переменная из множества $\{x_2, \ldots, x_n\}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что в схеме S_1 на вход элемента e_1 подается переменная x_2. Переделаем схему S_1, удалив из нее элемент e_1 и создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную z. Полученная таким перестроением схема S_2^2 реализует некоторую функцию $h_2(y, z, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = h_2(N_P(x_1), N_P(x_2), x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что схема S_2^2 — минимальная для функции h_2 в базисе B'_P, так как иначе бы и схема S_1 не была минимальной для функции g в базисе B'_P. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(h_2) + 2.$$

Рассмотрим произвольную цепь C_1^2 из множества $\mathscr{C}_1$, начинающуюся с набора $(1, 0, \ldots, 0)$ и заканчивающуюся наборами

$$(k-1, k-2, k-2, k-1, \ldots, k-1), \ (k-1, k-2, k-1, k-1, \ldots, k-1).$$

По цепи C_1^2 построим возрастающую цепь C_2^2 из $(k-1)n-1$ набора длины $n+2$ путем исключения последнего набора цепи C_1^2 и замены остальных наборов цепи на наборы длины $n+2$ по правилу

$$(\alpha_1 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для цепи C_2^2 выполняются неравенства

$$d_{C_2^2}(h_2) \geqslant d_{C_1^2}(g) - 1 \geqslant d_C(\xi) - 2.$$

Поэтому

$$d(h_2) \geqslant d(\xi) - 2 = T(k,n) - 3.$$

Теперь, применяя теорему 8, имеем:

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(h_2) + 2 \geqslant \\ \geqslant W(d(h_2) + 1) + 2 \geqslant W(T(k,n) - 2) + 2.$$

Учитывая неравенство $T(k,n) \geqslant 6$ и справедливое в силу леммы 13 при $n \geqslant 6$ соотношение $W(n-2) \geqslant W(n)-1$, окончательно получаем

$$L_{B_P}(\xi) \geqslant W(T(k,n)) + 1.$$

Все случаи разобраны полностью. Лемма 21 доказана.

Стандартным образом определим функцию Шеннона сложности реализации функций k-значной логики схемами в базисе B_P:

$$L_{B_P}(n) = \max L_{B_P}(f),$$

где максимум берется по всем функциям k-значной логики f от n переменных.

Лемма 21 дает следующую нижнюю оценку функции Шеннона $L_{B_P}(n)$.

Т е о р е м а 9 [41]. *Для любого натурального* $n \geqslant 4$ *для функции Шеннона* $L_{B_P}(n)$ *справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(n) \geqslant 3\left(\lceil \log_3 T(k,n)\rceil - 1\right) + \tau(T(k,n)) + 1.$$

4.2.2. В е р х н и е о ц е н к и. Переходя к получению верхних оценок, установим еще одно важное свойство переключателя функций.

Л е м м а 22. *Для любого набора* $(f_1, \ldots, f_s)$ *функций* k*-значной логики найдется* s*-переключатель* g *этого набора функций, удовлетворяющий условию*

$$d(g) \leqslant \max\{d(f_1), \ldots, d(f_s)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве искомого s-переключателя достаточно взять функцию $g(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая в случае когда обычная сумма первых s переменных не превышает единицы задается равенствами

$$\begin{aligned} g(0,0,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 0,\\ g(1,0,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ g(0,1,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\;\;\cdots\\ g(0,\ldots,0,1,x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_s(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

и которая равна $k-1$ в случае, когда сумма первых s переменных больше единицы.

Функция g обладает следующим свойством. Если наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+n})$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_{s+n})$ удовлетворяют таким двум условиям:

1) $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, s+n$;

2) $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+n}) > g(\beta_1, \ldots, \beta_{s+n})$,

то $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, s$, и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = 1$.

Из этого свойства следует, что если из какой-либо цепи C наборов из E_k^{s+n} построить цепь C' наборов из E_k^n, удалив первые s разрядов в каждом наборе цепи C, то для цепей C и C' будет выполняться равенство $d_C(g) = d_{C'}(f)$, которое, по существу, и доказывает лемму 22.

Следующее утверждение несмотря на то, что при его доказательстве и дальнейшем применении используется язык схем, удобнее формулировать на языке формул.

Л е м м а 23. *Пусть функция* $f(\widetilde{x}) \in P_k$, $k \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* $d(f) \geqslant 1$. *Тогда найдутся монотонные функции*

$$\mu_0(\widetilde{x}),\ \mu_1(y_1, y_2, \widetilde{x}),\ \mu_2(y_1, y_2, \widetilde{x}),\ \mu_3(y_1, y_2, \widetilde{x}),$$

а также функция $g(z_1, z_2, z_3, \widetilde{x})$, *удовлетворяющая условию*

$$d(g) + 1 \leqslant \left\lceil \frac{d(f)+1}{3} \right\rceil,$$

для которых справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(\widetilde{x}) = g(&\mu_1(N_P(\mu_0(\widetilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\widetilde{x}))), \widetilde{x}),\\ &\mu_2(N_P(\mu_0(\widetilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\widetilde{x}))), \widetilde{x}),\ \mu_3(N_P(\mu_0(\widetilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\widetilde{x}))), \widetilde{x}),\ \widetilde{x}). \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала воспользуемся описанным при доказательстве верхней оценки теоремы 3 из работы [36] способом для построения реализующей функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ схемы во вспомогательном базисе B, состоящем из всех монотонных функций и функции $\omega(x)$, задаваемой равенством

$$\omega(x)=\begin{cases} k-1, & \text{если } x\leqslant k-3;\\ k-2, & \text{если } x=k-2;\\ 0, & \text{если } x=k-1.\end{cases}$$

Положим $R(f)=\lceil (d(f)+1)/3\rceil$. В силу условий теоремы справедливо неравенство $R(f)\geqslant 1$.

Обозначим через T_1 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f)<R(f)$, т. е.

$$T_1=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^n \mid d_C(f)<R(f) \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha}\}.$$

Далее, обозначим через T_2 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C наборов из множества $E_k^n\setminus T_1$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f)<$ $<R(f)$, т. е.

$$T_2=\{\widetilde{\alpha}\in E_k^n\setminus T_1 \mid d_C(f)<R(f) \\ \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha},\ C\subset E_k^n\setminus T_1\}.$$

Наконец, положим

$$T_3=E_k^n\setminus (T_1\cup T_2).$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha}\in T_i$ и каждый разряд набора $\widetilde{\beta}$ не превосходит соответствующего разряда набора $\widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta}\in T_1\cup\ldots\cup T_i$, $i=1,2,3$.

Теперь докажем, что для любой цепи C наборов из множества T_3 также выполняется неравенство $d_C(f)<R(f)$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_3 с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_3$, $\widetilde{\alpha}_3\in T_3$, для которой выполняется неравенство $d_{C_3}(f)\geqslant R(f)$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}_3$ не лежит в множестве T_2, то найдется цепь C_2 с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\alpha}_2\in T_2$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_3$, $\widetilde{\alpha}_3\in T_3$, для которой выполняется неравенство $d_{C_2}(f)\geqslant R(f)$. Аналогично устанавливаем существование цепи C_1 с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_1\in T_1$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\alpha}_2\in T_2$, для которой выполняется неравенство $d_{C_1}(F)\geqslant R(f)$.

Тогда для цепи $C=C_1\cup C_2\cup C_3$ справедливы соотношения

$$d_C(f)=d_{C_1}(f)+d_{C_2}(f)+d_{C_3}(f)\geqslant 3R(f)>d(f),$$

что противоречит определению величины $d(f)$.

Введем функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равенствами

$$f_1(\widetilde{x}) = \begin{cases} f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \in T_1; \\ k-1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_2 \cup T_3; \end{cases}$$

$$f_2(\widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1; \\ f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \in T_2; \\ k-1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_3; \end{cases}$$

$$f_3(\widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1 \cup T_2; \\ f(\widetilde{x}), & \text{если } \widetilde{x} \in T_3. \end{cases}$$

Для $i = 1, 2, 3$ в силу определения функций f_i выполняются неравенства $d(f_i) < R(f)$, а, следовательно и неравенства

$$d(f_i) \leqslant R(f) - 1.$$

Определим функцию $\mu_0(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\mu_0(\widetilde{x}) = \begin{cases} k-3, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1; \\ k-2, & \text{если } \widetilde{x} \in T_2; \\ k-1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_3. \end{cases}$$

Теперь определим функции $\lambda_{k-2}(x)$ и $\lambda_{k-1}(x)$:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j; \\ 1, & \text{если } x \geqslant j, \end{cases} \qquad j = k-2, k-1.$$

Наконец, введем функции $\chi_2(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi_3(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\chi_2(\widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1; \\ 1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_2 \cup T_3; \end{cases} \qquad \chi_3(\widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \widetilde{x} \in T_1 \cup T_2; \\ 1, & \text{если } \widetilde{x} \in T_3. \end{cases}$$

Отметим, что функции $\mu_0(\widetilde{x})$, $\lambda_{k-2}(x)$, $\lambda_{k-1}(x)$, $\chi_2(\widetilde{x})$ и $\chi_3(\widetilde{x})$ монотонные.

Далее, в силу леммы 22 для функций $f_1(\widetilde{x})$, $f_2(\widetilde{x})$ и $f_3(\widetilde{x})$ найдется функция $g(z_1, z_2, z_3, \widetilde{x})$, удовлетворяющая условиям

$$g(1,0,0,\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x}), \quad g(0,1,0,\widetilde{x}) = f_2(\widetilde{x}), \quad g(0,0,1,\widetilde{x}) = f_3(\widetilde{x});$$
$$d(g) \leqslant \max\left\{d(f_1), d(f_2), d(f_3)\right\}.$$

Из последнего соотношения в силу неравенств $d(f_i) \leqslant R(f) - 1$, $i = 1, 2, 3$, получаем:

$$d(g) \leqslant R(f) - 1 = \left\lceil \frac{d(f)+1}{3} \right\rceil - 1.$$

В функцию $g(z_1, z_2, z_3, \widetilde{x})$ вместо переменных z_1, z_2 и z_3 подставим функции

$$Z_1(\widetilde{x}) = \lambda_{k-1}(\omega(\mu_0(\widetilde{x})), \;\; Z_2(\widetilde{x}) = \min\left\{\lambda_{k-2}\left(\omega(\mu_0(\widetilde{x}))\right), \chi_2(\widetilde{x})\right\}, \;\; Z_3(\widetilde{x}) = \chi_3(\widetilde{x})$$

соответственно (см. схему на рис. 2).

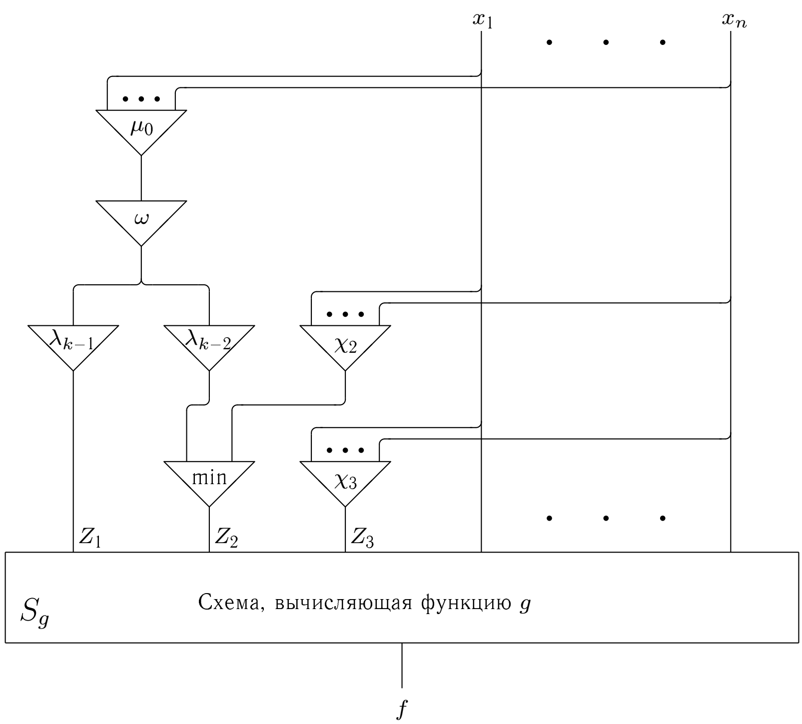


Рис. 2

Учитывая, что для $i = 1, 2, 3$ функция $Z_i(\widetilde{x})$ обращается в единицу на наборах из множества T_i, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $\widetilde{x}$ из множества T_i справедливы равенства

$$g(Z_1(\widetilde{x}), Z_2(\widetilde{x}), Z_3(\widetilde{x}), \widetilde{x}) = f_i(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}).$$

Для схемной реализации функций Z_1, Z_2, Z_3, помимо использования монотонных функций, потребовалось лишь однократное использование функции ω.

Возвращаясь от базиса B к базису B_P, покажем как задача построения схемы в базисе B_P для функции f сводится к задаче построения схемы в базисе B_P для функции g.

Теперь по схеме, реализующей функцию $f(\widetilde{x})$ над вспомогательным базисом B, построим схему, реализующую эту функцию в базисе B_P.

Прежде всего отметим, что в схеме, представленной на рис. 2, на вход элемента, которому приписан функциональный символ ω, могут подаваться только значения $k-3$, $k-2$ и $k-1$.

Введем монотонные функции $\zeta(x)$ и $\eta(x)$, положив

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1, \\ x, & \text{если } x \neq 1, \end{cases} \qquad \eta(x) = \min\{k-2, x\}.$$

Тогда для $x \in \{k-3, k-2, k-1\}$ справедливо равенство

$$\omega(x) = \max\left\{\eta(N_P(x)), \zeta(N_P(N_P(x)))\right\}.$$

Заменив в соответствии с этим равенством в схеме, представленной на рис. 2, элемент, которому приписан функциональный символ ω, на подсхему из пяти элементов, получим схему, реализующую функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B_P — см. рис. 3. Для получения искомого представления достаточно положить

$$\mu_1(y_1, y_2, \widetilde{x}) = \lambda_{k-1}(\max\{\eta(y_1), \zeta(y_2)\}),$$
$$\mu_2(y_1, y_2, \widetilde{x}) = \min\{\lambda_{k-2}(\max\{\eta(y_1), \zeta(y_2)\}), \chi_2(\widetilde{x})\},$$
$$\mu_3(y_1, y_2, \widetilde{x}) = \chi_3(\widetilde{x}).$$

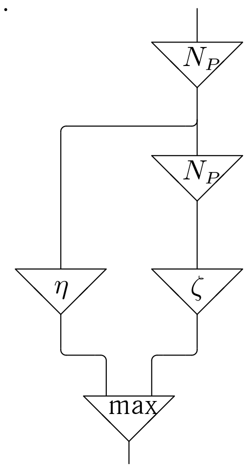


Рис. 3

Лемма 23 доказана.

Аналогично лемме 23 доказывается

Л е м м а 24. *Пусть функция* $f(\widetilde{x}) \in P_k$, $k \geqslant 2$, *удовлетворяет условию* $d(f) \geqslant 1$. *Тогда найдутся монотонные функции*

$$\mu_0(\widetilde{x}), \ \mu_1(y, \widetilde{x}), \ \mu_2(y, \widetilde{x}),$$

а также функция $g(z_1, z_2, \widetilde{x})$, *удовлетворяющая условию*

$$d(g) + 1 \leqslant \left\lceil \frac{d(f)+1}{2} \right\rceil,$$

для которых справедливо равенство

$$f(\widetilde{x}) = g(\mu_1(N_P(\mu_0(\widetilde{x})), \widetilde{x}), \ \mu_2(N_P(\mu_0(\widetilde{x})), \widetilde{x}), \ \widetilde{x}).$$

Теперь из лемм 23 и 24 выведем требуемую верхнюю оценку немонотонной сложности в базисе B_P.

Т е о р е м а 10[41]. *Для любой немонотонной функции* $f \in P_k$, $k \geqslant 3$, *справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1) + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отдельно рассмотрим три случая.

Случай 1°. Пусть для некоторого целого неотрицательного r выполняются неравенства $2 \times 3^r < d(f)+1 \leqslant 3 \times 3^r$.

Прежде всего отметим, что для произвольной функции f, удовлетворяющей условию $d(f)+1 \leqslant 3 \times 3^r$, применяя не более $r+1$ раз лемму 23 и учитывая монотонность суперпозиции монотонных функций, можно построить схему в базисе B_P сложности не более $3(r+1)+1$ (см. рис. 4, на котором элементы, соответствующие монотонным функциям базиса, обозначены m_i, $i=0,1,\ldots,r$). Этот факт будет использоваться и при разборе других случаев.

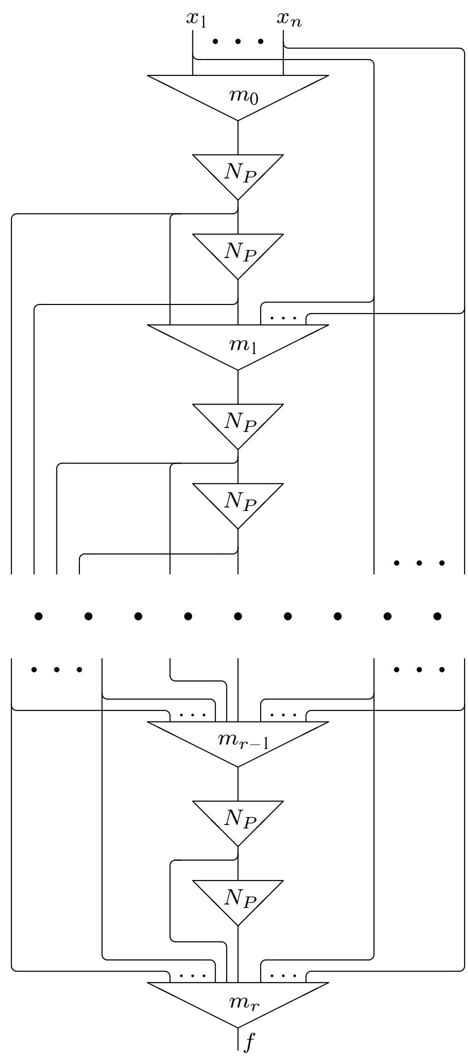


Рис. 4

Используя теперь и ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=3$ и $\lceil\log_3(d(f)+1)\rceil=r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f)\leqslant 3(r+1)+1=3\left(\lceil\log_3(d(f)+1)\rceil-1\right)+\tau(d(f)+1)+1.$$

Случай 2°. Пусть для некоторого целого неотрицательного r выполняются неравенства $4\times 3^{r-1}<d(f)+1\leqslant 2\times 3^r$.

В случае выполнения соотношения $d(f)+1\leqslant 2\times 3^r$ задача построения схемы для функции f применением леммы 24 сводится к задаче построения схемы для некоторой функции g, удовлетворяющей условию $d(g)+1 \leqslant \lceil (d(f)+1)/2 \rceil$, а с учетом условий случая — и неравенству $d(g)+1 \leqslant 3^r$.

Используя для построения схемы для функции g способ, использовавшийся в случае 1°, и учитывая монотонность суперпозиции монотонных функций, получаем для функции f схему в базисе B_P сложности не более $2+(3r+1)$.

Учитывая теперь и ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=2$ и $\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil = r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3r+3 = 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1)+1.$$

Случай 3°. Пусть для некоторого целого неотрицательного r выполняются неравенства $3^r < d(f)+1 \leqslant 4 \times 3^{r-1}$.

В случае выполнения соотношения $d(f)+1 \leqslant 4 \times 3^{r-1}$ задача построения схемы для функции f двукратным применением леммы 24 сводится к задаче построения схемы для некоторой функции g', удовлетворяющей условию $d(g')+1 \leqslant \lceil \lceil (d(f)+1)/2 \rceil /2 \rceil$, а с учетом условий случая — и неравенству $d(g')+1 \leqslant 3^{r-1}$.

Используя для построения схемы для функции g' способ, применявшийся в случае 1°, и учитывая монотонность суперпозиции монотонных функций, получаем для функции f схему в базисе B_P сложности не более $4+(3(r-1)+1)$.

Учитывая теперь и ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=1$ и $\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil = r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3r+2 = 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1)+1.$$

Все случаи рассмотрены. Теорема 10 доказана.

4.2.3. Заключительные замечания о сложности схем в базисе B_P. Объединим оценки теорем 9 и 10 в одно утверждение.

Теорема 11[41]. *Для любого натурального $n \geqslant 4$ для функции Шеннона $L_{B_P}(n)$ сложности реализации функций k-значной логики $(k \geqslant 3)$ в базисе B_P справедливо равенство*

$$L_{B_P}(n) = 3\left(\lceil \log_3 T(k,n) \rceil - 1\right) + \tau(T(k,n)) + 1.$$

Замечание. Для произвольной функции многозначной логики f, удовлетворяющей условию $d(f) \geqslant 2$, теоремы 8 и 10 дают нижнюю и верхнюю оценки величины $L_{B_P}(f)$, отличающиеся на единицу:

$$W(d(f)+1) \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant W(d(f)+1)+1.$$

Теперь оценим величину $L_{B_P}(f)$ для произвольной функции многозначной логики f, удовлетворяющей условию $d(f) < 2$.

Пусть $d(f)=0$. Тогда функция f монотонна. Если f — переменная, то $L_{B_P}(f)=0$. Для всех остальных монотонных функций выполняется равенство $L_{B_P}(f)=1$.

Пусть $d(f)=1$. Функции вида $x_i+1 \pmod k$ имеют в базисе B_P сложность, равную единице. Для реализации любой другой функции f, имеющей единичный спад, требуется как минимум два элемента. С другой стороны, в силу теоремы 10 для любой функции f, удовлетворяющей условию $d(f)=1$, выполняется неравенство $L_{B_P}(f)\leqslant 3$.

Тем самым для всех функций многозначной логики либо найдено точное значение сложности реализации схемами в базисе B_P либо установлены нижняя и верхняя оценки, отличающиеся не более чем на единицу.

Теперь приведем пример последовательности функций, для которых нижняя оценка из теоремы 8 является точным значением сложности.

Пусть $k\geqslant 3$; t — натуральный параметр. При выполнении условия $n\geqslant\dfrac{2t-1}{k-1}$ в E_k^n найдется цепь из $2t$ наборов $\widetilde{\alpha}_i=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})$, $i=1,\ldots,2t$.

Обозначим через $f(x,u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)$ функцию k-значной логики, принимающую значение 1 на t наборах из E_k^{2n+1} вида

$$(0,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in},0,\ldots,0),\quad i=1,3,\ldots 2t-1,$$

и на t наборах из E_k^{2n+1} вида

$$(k-1,k-1,\ldots,k-1,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}),\quad i=1,3,\ldots 2t-1,$$

а на остальных наборах принимающую значение 0.

Далее обозначим через $g(y,x,u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)$ функцию k-значной логики, принимающую значение 1 на t наборах из E_k^{2n+2} вида

$$(1,0,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in},0,\ldots,0),\quad i=1,3,\ldots 2t-1,$$

и на t наборах из E_k^{2n+2} вида

$$(0,k-1,k-1,\ldots,k-1,\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}),\quad i=1,3,\ldots 2t-1,$$

а на остальных наборах принимающую значение 0.

Для введенных функций выполняются следующие равенства:

$$d(f)=2t,$$
$$d(g)=t,$$
$$g(N_P(x),x,u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)=f(x,u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n).$$

В силу последнего соотношения выполняется неравенство

$$L_{B_P}(f)\leqslant L_{B_P}(g)+1.$$

Из теоремы 10 следует неравенство

$$L_{B_P}(g)\leqslant W(t+1)+1.$$

Поэтому если при некотором натуральном значении s выполняется условие $0{,}5\times 3^s<n<4\times 3^{s-1}$, то при $t\geqslant 2$ с использованием леммы 13 получаем:

$$L_{B_P}(f)\leqslant L_{B_P}(g)+1\leqslant W(t+1)+2=W(2t+1)=W(d(f)+1).$$

В качестве $t=t(m)$ можно взять, например, 3^m.

4.3. Сложность функций k-значной логики в базисе B_L. Возвращаясь ко второму рассматриваемому в предыдущем параграфе бесконечному базису функций k-значной логики ($k \geqslant 2$), базису B_L, состоящему из отрицания Лукасевича и всех монотонных функций, забегая вперед, скажем, что для сложности $L_{B_L}(f)$ реализации произвольной функции f схемами в базисе B_L достаточно естественное предположение, что для базиса B_L значение $L_{B_L}(f)$ отличается от величины $2\log_k(d(f)+1)$ не более чем на небольшую константу, оказывается верным. Ниже будут доказаны оценки, из которых, в частности, следуют соотношения

$$2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil - 2 \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil + 1.$$

Верхняя оценка без особых трудностей может быть извлечена из доказательства теоремы 6. Доказательство нижней оценки, несмотря на идейную близость с доказательством теоремы 8, имеет ряд существенных отличий, которые не дают возможности в той или иной степени «объединить» эти доказательства или вести их параллельно. Поэтому доказательство нижней оценки величины $L_{B_L}(f)$, как и нахождение точного значения соответствующей функции Шеннона, характеризующей сложность реализации самой сложнореализуемой функции от заданного числа переменных схемами в базисе B_L, проводится отдельно. Основой для изложения данного раздела является работа [40], но при этом материал значительно переработан, в частности исправлены отдельные неточности.

Отметим, что случай $k=2$ несколько отличается от случая $k \geqslant 3$ и будет отдельно рассмотрен в следующем разделе этого параграфа.

4.3.1. Нижние оценки. Для базиса B вида $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \backslash M$, $i=1, \ldots, p$, через $d(B)$ обозначим максимальное значение среди величин $d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)$. Пусть задана схема S над базисом B. Через F_S обозначим систему всех функций, реализуемых вершинами схемы S. Для произвольных системы G функций k-значной логики, схемы S и цепи C наборов независимых переменных систем G и F_S обозначим через $d_C(F_S; G)$ количество обрывов системы F_S на цепи C, не являющихся обрывами для системы G.

Лемма 25. *Пусть на входы схемы S над базисом B подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, а схема S' над базисом B получается из схемы S добавлением элементов $e_1, \ldots, e_t$, на входы которых подаются либо переменные $x_1, \ldots, x_n$, либо выходы каких-либо элементов схемы S. Тогда для произвольной системы G функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и для любой цепи C наборов из E_k^n выполняется неравенство*

$$d_C(F_{S'}; G) + 1 \leqslant (D(B)t + 1)(d_C(F_S; G) + 1).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную цепь

$$C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

наборов из E_k^n.

Обозначим величину $d_C(F_S; G)$ через l. Тогда цепь C можно разбить на $l+1$ подцепь $C_1, \ldots, C_{l+1}$ таким образом, что будут выполняться условия:

1. Для каждого i, $i=1,\ldots,l+1$, найдутся такие натуральные a и b, $1\leqslant a<b\leqslant r$, что

$$C_i=(\widetilde{\alpha}_a,\widetilde{\alpha}_{a+1},\ldots,\widetilde{\alpha}_b).$$

2. При $i\neq j$ справедливо равенство $C_i\cap C_j=\varnothing$.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{l+1} C_i=C$.

4. Для каждого i, $1\leqslant i\leqslant l+1$, верно равенство $d_{C_i}(F_S;G)=0$.

Тогда для любой цепи C_i, $i=1,\ldots,l+1$, и для каждой функции f_j, вычисляемой на выходе элемента e_j, $j=1,\ldots,t$, выполняется неравенство $d_{C_i}(f_j;G)\leqslant D(B)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}d_C(F_{S'};G)&\leqslant d_{C_1}(F_{S'};G)+\ldots+d_{C_{l+1}}(F_{S'};G)+l=\\&=d_{C_1}(\{f_1,\ldots,f_t\};G)+\ldots+d_{C_{l+1}}(\{f_1,\ldots,f_t\};G)+l\leqslant D(B)(l+1)t+l=\\&=(D(B)t+1)(l+1)-1=(D(B)t+1)(d_C(F_S;G)+1)-1.\end{aligned}$$

Лемма 25 доказана.

При $k\geqslant 2$ для произвольного натурального n положим

$$v_k(n)=\begin{cases}0, & \text{если } k^r<n\leqslant(2k-1)k^{r-1} \text{ для некоторого целого } r;\\ 1, & \text{если } (2k-1)k^{r-1}<n\leqslant k^{r+1} \text{ для некоторого целого } r.\end{cases}$$

Лемма 26. *Пусть набор натуральных чисел $\{t_1,\ldots,t_r\}$ для некоторых натуральных N и k, $k\geqslant 2$, удовлетворяет условию*

$$\big(t_1(k-1)+1\big)\times\big(t_2(k-1)+1\big)\times\ldots\times\big(t_r(k-1)+1\big)\geqslant N.$$

Тогда справедливо неравенство

$$t_1+2t_2\ldots+2t_r\geqslant 2\big(\lceil\log_k N\rceil-1\big)+v_k(N).$$

Доказательство. Зафиксируем значения N и k. Среди всех конечных наборов натуральных чисел, для которых соответствующее произведение из левой части условия леммы не менее чем N, выделим наборы с минимально возможным значением суммы из левой части доказываемого неравенства, а среди них отметим тот набор, в котором соответствующее произведение максимально, и обозначим отмеченный набор через $(n_1,\ldots,n_m)$. Докажем, что все значения $n_2,\ldots,n_m$ равны единице.

Действительно, если найдется элемент n_i, $i\geqslant 2$, удовлетворяющий неравенству $n_i\geqslant 2$, то, заменив в исходном наборе элемент n_i на два элемента $n_{i1}=1$ и $n_{i2}=n_i-1$, получим набор с тем же самым значением суммы из левой части доказываемого неравенства, но с бо́льшим значением произведения из левой части неравенства из условия леммы:

$$\begin{aligned}\big(n_{i1}(k-1)+1\big)\big(n_{i2}(k-1)+1\big)&=\big((k-1)+1\big)\big((n_i-1)(k-1)+1\big)=\\&=n_i(k-1)+1+(n_i-1)(k-1)^2>n_i(k-1)+1,\end{aligned}$$

что противоречит выбору исходного набора.

Исследуем вопрос, может ли первый разряд n_1 выделенного набора удовлетворять неравенству $n_1 \geqslant 3$.

Пусть $n_1 \geqslant 3$. Заменив в исходном наборе элемент n_1 на два элемента $n_{11} = n_1 - 2$ и $n_{12} = 1$, получим набор с тем же самым значением суммы из левой части доказываемого неравенства, так как $n_1 = n_{11} + 2n_{12}$. При этом в произведении из левой части неравенства из условия леммы множитель $n_1(k-1)+1$ будет заменен на произведение $\big(n_{11}(k-1)+1\big)\big(n_{12}(k-1)+1\big)$. В силу равенств

$$\big(n_{11}(k-1)+1\big)\big(n_{12}(k-1)+1\big) = \big((n_1-2)(k-1)+1\big)\big(1\cdot(k-1)+1\big) = \\ = (n_1-1)(k-1)+1+(n_1-2)(k-1)^2 = n_1(k-1)+1+(k-1)((n_1-2)(k-1)-1)$$

эта замена при выполнении хотя бы одного из условий $n_1 > 3$ и $k \geqslant 2$ приводит к увеличению произведения, что противоречит выбору набора $(n_1, \ldots, n_m)$. При одновременном выполнении условий $n_1 = 3$ и $k = 2$ описанная замена сохраняет как сумму, так и произведение. Поэтому в этом случае в качестве отмеченного набора можно взять набор $(n_{11}, n_{12}, n_2 \ldots, n_m)$.

Таким образом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первый разряд отмеченного набора равен либо 1, либо 2, а остальные разряды равны 1.

Если отмеченный набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит только из единиц, то из условия леммы вытекает неравенство $k^m \geqslant N$. Поэтому $m \geqslant \lceil \log_k N \rceil$. Следовательно,

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + 2t_r \geqslant n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_m = 2m - 1 \geqslant 2\lceil \log_k N \rceil - 1.$$

Если же $n_1 = 2$, то в силу условия леммы выполняется неравенство

$$\big(2(k-1)+1\big)k^{m-1} \geqslant N,$$

из которого вытекает соотношение

$$m - 1 \geqslant \left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} \right\rceil .$$

Тогда

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + 2t_r \geqslant n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_m \geqslant 2 + 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} \right\rceil .$$

Таким образом, имеем оценку

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + 2t_r \geqslant \min\left(2\lceil \log_k N \rceil - 1, 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} + 2 \right\rceil\right) .$$

Если $k^r < N \leqslant (2k-1)k^{r-1}$ для некоторого целого r, то

$$2\lceil \log_k N \rceil - 1 = 2r + 1, \quad 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} \right\rceil + 2 = 2r$$

и, следовательно,

$$\min\left(2\lceil \log_k N \rceil - 1, 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} + 2 \right\rceil\right) = 2r = 2\lceil \log_k N \rceil - 2.$$

Если $(2k-1)k^{r-1} < N \leqslant k^{r+1}$ для некоторого целого r, то

$$2\lceil \log_k N \rceil - 1 = 2r+1, \quad 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} \right\rceil + 2 = 2r+2$$

и, следовательно,

$$\min\left(2\lceil \log_k N \rceil - 1, 2\left\lceil \log_k \frac{N}{2k-1} + 2 \right\rceil\right) = 2r+1 = 2\lceil \log_k N \rceil - 1.$$

Лемма 26 доказана.

Нам потребуется также следующее похожее на лемму 26 утверждение.

Лемма 27. *Пусть набор натуральных чисел* $\{t_1, \ldots, t_r\}$ *для некоторых натуральных* N *и* k, $k \geqslant 2$, *удовлетворяет условию*

$$\big(t_1(k-1)+1\big) \times \big(t_2(k-1)+1\big) \times \ldots \times \big(t_r(k-1)+1\big) \geqslant N.$$

Тогда справедливо неравенство

$$t_1 + t_2 \ldots + t_r \geqslant \lceil \log_k N \rceil .$$

Для доказательства леммы 27 достаточно воспроизвести начало доказательства леммы 26 с поправкой на то, что в отмеченном наборе $(n_1, \ldots, n_m)$ и первый разряд не может быть больше единицы.

Как обычно, схему в базисе B, реализующую функцию или систему функций, будем называть *минимальной*, если никакая схема в базисе B меньшей сложности не реализуют эту функцию или систему функций.

Далее в этом подразделе будем рассматривать только схемы в бесконечном базисе B_L, состоящем из всех монотонных функций k-значной логики и отрицания Лукасевича, т. е. $B_L = M \cup N_L(x)$. Элементы, которым приписана базисная функция N_L, будем называть *инверторами*.

Пусть S — минимальная схема для некоторой функции f в базисе B_L. Разобьем множество всех монотонных элементов схемы S на подмножества $S_0, S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. К множеству S_i отнесем все монотонные элементы схемы S, для каждого из которых максимальное число немонотонных элементов в путях от входов схемы до этого элемента равно i. Тогда схема S имеет вид, представленный на рис. 1, где элементам e_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant t_i)$ приписана базисная функция «отрицание Лукасевича» и блоки $S_1, \ldots, S_{r-1}$ по построению непустые, т. е. содержат хотя бы один монотонный элемент. Такое представление (разбиение элементов) минимальной схемы, так же как и в предыдущем подразделе, будем называть *каноническим*.

Для минимальной схемы S обозначим через $l_0(S)$ число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, а через $l_1(S)$ — число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов, но хотя бы один путь от входа схемы к этому элементу содержит максимальное возможное (для всех путей от входов к выходу) число немонотонных элементов. К примеру, для схемы S, изображенной на рис. 1, верны равенства $l_0(S) = |S_0|$, $l_1(S) = |S_r|$.

Будем говорить, что минимальная схема S (с одним выходом) разбита на две подсхемы S' и S'', если: 1) каждый элемент схемы S содержится либо в подсхеме S', либо в подсхеме S''; 2) входами подсхемы S' являются входы схемы S, выходами подсхемы S' являются выходы всех ее элементов; входами подсхемы S'' являются входы схемы S и выходы подсхемы S', выходом подсхемы S'' является выход схемы S; 3) для любого инвертора, входящего в подсхему S'' и на вход которого подается выход монотонного элемента, в подсхему S'' входит и этот монотонный элемент. Отметим, что из минимальности схемы S вытекает минимальность подсхем S' и S''.

Лемма 28. *Пусть минимальная схема в базисе B_L для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f\in P_k$, $k\geqslant 2$, разбита на подсхемы S' и S''. Тогда для произвольной системы функций G от переменных $x_1,\ldots,x_n$ и любой цепи C наборов из E_k^n выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'')\geqslant 2\left(\left\lceil\log_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right)\right\rceil-1\right)+\upsilon_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right).$$

Доказательство. Пусть минимальная схема S в базисе B_L, реализующая функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, разбита на подсхемы S' и S''.

Если подсхема S'' не содержит функциональных элементов, то, очевидно, требуемое неравенство верно. Если подсхема S'' реализует монотонную функцию (от своих входов), то в силу соотношений $L_{B_L}(S'')=1$, $l_0(S'')=1$, $l_1(S'')=1$, $d_C(f;G)\leqslant d_C(F_{S'};G)$ утверждение леммы выполняется.

Далее будем считать, что функция, реализуемая подсхемой S'' (как функция от входов этой подсхемы), не является монотонной.

Рассмотрим каноническое представление схемы S''. Будем полагать, что в схеме S'' содержится $t_1+\ldots+t_r$ инверторов, расположенных аналогично схеме, представленной на рис. 1.

Последовательно «поуровнево» применяя лемму 25 и учитывая равенство $D(B_L)=k-1$, получаем:

$$d_C(f;G)+1\leqslant d_C(F_S;G)+1\leqslant (t_1(k-1)+1)\ldots(t_r(k-1)+1)(d_C(F_{S'};G)+1).$$

Поэтому

$$(t_1(k-1)+1)\ldots(t_r(k-1)+1)\geqslant\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}.$$

Из этого соотношения в силу леммы 26 следует неравенство

$$t_1+2t_2+\ldots+2t_r\geqslant 2\left(\left\lceil\log_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right)\right\rceil-1\right)+\upsilon_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right).$$

С другой стороны, число монотонных элементов в схеме S'' не менее чем $t_2+\ldots+t_r$, так как на входы каждого инвертора, за исключением не более t_1 инверторов, подается выход уникального монотонного элемента. Поэтому выполняется соотношение

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'')\geqslant t_1+2t_2+\ldots+2t_r.$$

Таким образом,

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'')\geqslant 2\left(\left\lceil\log_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right)\right\rceil-1\right)+\upsilon_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right).$$

Лемма 28 доказана.

В дальнейшем будет использоваться как правило не сама лемма 28, а ее следующий упрощенный вариант.

Лемма 29. *Пусть S — минимальная схема в базисе B_L для функции f, $f \in P_k$, $k \geqslant 2$. Тогда выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant 2\big(\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil - 1\big) + \upsilon_k(d(f)+1).$$

Доказательство. Пусть цепь C удовлетворяет условию $d_C(f) = d(f)$. Применяя лемму 28 для системы функций $G = \varnothing$ и разбиения схемы S на подсхемы S' и S'', где S' — схема, не содержащая функциональных элементов, а подсхема S'' совпадает со всей схемой S, имеем:

$$\begin{aligned} L_{B_L}(S) - l_0(S) - l_1(S) &\geqslant \\ \geqslant 2\left(\left\lceil \log_k \left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right)\right\rceil - 1\right) &+ \upsilon_k\left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right) = \\ &= 2\big(\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil - 1\big) + \upsilon_k(d(f)+1). \end{aligned}$$

Лемма 29 доказана.

Немного усилим утверждение леммы 28 в одном важном частном случае.

Лемма 30. *Пусть минимальная схема S в базисе B_L для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, $k \geqslant 2$, разбита на подсхемы S' и S'', причем подсхема S' состоит из всех немонотонных элементов, на вход которых подаются входы схемы S. Тогда для произвольной системы функций G от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и любой цепи C наборов из E_k^n выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(S'') - l_1(S'') \geqslant 2\left\lceil \log_k \left(\frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right)\right\rceil.$$

Доказательство леммы 30 отличается от доказательства леммы 28 тем, что в условиях леммы 30 на вход каждого немонотонного элемента подсхемы S'' подается выход уникального монотонного элемента подсхемы S'', что дает возможность использовать лемму 27 вместо леммы 26.

Теперь качество установленной леммой 29 нижней оценки сложности реализации функций k-значной ($k \geqslant 2$) логики в базисе B_L проиллюстрируем соответствующей верхней оценкой.

Теорема 12. *Для любой функции k-значной логики f справедливы неравенства*

$$2\big(\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil - 1\big) + \upsilon_k(d(f)+1) \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil + 1.$$

Доказательство. *Нижняя оценка* непосредственно следует из леммы 29.

Верхняя оценка. В силу теоремы 4 для реализации в базисе B_L функции f достаточно $\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil$ инверторов (при отсутствии ограничений на использование монотонных элементов). В схеме S, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе B_L и содержащей $\lceil \log_k (d(f)+1) \rceil$ инверторов, занумеруем инверторы числами от 1 до $I = \lceil \log_k (d(f)+1) \rceil$ так, чтобы не существовало ориентированных путей от инверторов с большим номером к инверторам с меньшим. Для $i = 1, \ldots, I$ обозначим через h_i функцию, подаваемую на вход i-го инвертора. Тогда найдутся монотонные функции $m_1, m_2, \ldots, m_{I+1}$, для которых выполняются равенства

$$h_1 = m_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ h_2 = m_2(x_1, \ldots, x_n, N_L(h_1)), \ldots,$$
$$h_I = m_I(x_1, \ldots, x_n, N_L(h_1), \ldots, N_L(h_{I-1})),$$
$$f = m_{I+1}(x_1, \ldots, x_n, N_L(h_1), \ldots, N_L(h_I)).$$

Поэтому
$$L_{B_L}(f) \leqslant 2I + 1 \leqslant 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil + 1.$$

Теорема 12 доказана.

Следствие. *При $k \geqslant 2$ для любой функции k-значной логики f справедливы неравенства*

$$2I_{B_L}(f) - 2 \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2I_{B_L}(f) + 1.$$

4.3.2. Достижимость нижней и верхней оценок. Для любого $k \geqslant 3$ построим семейство функций k-значной логики, для которых в следствии к теореме 12 достигается нижняя оценка, т. е. для которых справедливо равенство

$$L_{B_L}(f) = 2I_{B_L}(f) - 2.$$

Сначала выделим в лемму несложное соотношение спада функции и спада отрицания Лукасевича этой функции.

Лемма 31. *Для любой функции k-значной логики ($k \geqslant 2$) выполняется соотношение*

$$d(N_L(f)) \leqslant (d(f)+1)(k-1).$$

Следующая лемма показывает в каком направлении нужно искать функции, на которых достигается нижняя оценка следствия к теореме 12.

Лемма 32. *Пусть $k \geqslant 3$, схема S над базисом B_L является минимальной для функции k-значной логики f и удовлетворяет условию*

$$L_{B_L}(S) = 2I_{B_L}(f) - 2.$$

Тогда истинны следующие утверждения:

1) *последний элемент схемы S является инвертором,*

2) *на входы в точности двух инверторов схемы S подаются переменные.*

Доказательство. Отметим, что из условия $L_{B_L}(S) = 2I_{B_L}(f) - 2$ следует неравенство $I_{B_L}(f) \geqslant 2$. Также заметим, что в минимальной схеме выход монотонного элемента либо является выходом схемы, либо подается на вход инвертора.

Пусть схема S над базисом B_L имеет канонический вид, представленный на рис. 1. В силу леммы 29 верно равенство $l_0(S) + l_1(S) = 0$, т. е. в каноническом представлении схемы S подсхемы S_0 и S_r не содержат элементов.

Из отсутствия элементов в подсхеме S_r следует, что $t_r = 1$ и инвертор e_{r1} является выходом схемы S.

Положим $a = I_{B_L}(S) - I_{B_L}(f)$. Тогда, учитывая, что на вход каждого инвертора, кроме t_1 инверторов, подается выход уникального монотонного элемента, получаем

$$L_{B_L}(S) = 2I_{B_L}(S) - t_1 = 2I_{B_L}(f) + 2a - t_1.$$

По условию, $L_{B_L}(f) = 2I_{B_L}(f) - 2$. Поэтому

$$a = \frac{t_1}{2} - 1.$$

Следовательно, величина t_1 — количество инверторов, на входы которых подаются переменные — положительна и четна.

Применяя необходимое число раз лемму 25, а также лемму 31, получаем

$$d(f) + 1 \leqslant (t_1(k-1)+1)k^{I_{B_L}(f)+a-t_1-1}(k-1) + 1 = \\ = \frac{(t_1(k-1)+1)(k-1)}{k^{(t_1/2)+1}} k^{I_{B_L}(f)-1} + 1.$$

Для любых натуральных t, I и k при выполнении условий $t \geqslant 3$, $k \geqslant 3$ и $I \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\frac{(t(k-1)+1)(k-1)}{k^{(t/2)+1}} k^{I-1} \leqslant k^{I-1} - 1.$$

Кроме того, из равенства $I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$, устанавливаемого теоремой 4, следует неравенство

$$k^{I_{B_L}(f)-1} < d(f) + 1.$$

Объединение последних соотношений при $t_1 \geqslant 3$ приводит к противоречию:

$$d(f) + 1 \leqslant \frac{(t_1(k-1)+1)(k-1)}{k^{(t_1/2)+1}} k^{I_{B_L}(f)-1} + 1 \leqslant k^{I_{B_L}-1} < d(f) + 1.$$

Таким образом, установлено, что $t_1 = 2$. Лемма 32 доказана.

В соответствии с информацией, содержащейся в лемме 32, построим при $k \geqslant 3$ бесконечное семейство функций, каждая функция f из которого удовлетворяет равенству $L_{B_L}(f) = 2I_{B_L}(f) - 2$.

Сначала определим *поясковые* функции $P^i(x_1, x_2)$, $i = 0, 1, 2, \ldots 2k-2$, определяемые равенством

$$P^i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 = i; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сразу отметим, что для каждого i, $i = 0, 1, 2, \ldots 2k-2$, найдется такая монотонная функция $m_i(y_1, y_2, y_3, y_4)$, что

$$P^i(x_1, x_2) = m_i(x_1, x_2, N_L(x_1), N_L(x_2)).$$

Для некоторого параметра p, значение которого выберем позже, определим функцию $\varphi_p(z_1, z_2, \ldots, z_q)$, где q — произвольное целое число, удовлетворяющее условию $q \geqslant pk/(k-1)$, следующим образом:

$$\varphi_p(z_1, z_2, \ldots, z_q) = \begin{cases} (k-1)(z_1 + \ldots + z_q + 1) \pmod k, \\ \qquad\qquad \text{если } z_1 + \ldots + z_q \leqslant pk - 1; \\ 0, \qquad\quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что выполняются соотношения

$$d(\varphi_p) = (k-1)p, \quad d(N_L(\varphi_p)) = p - 1.$$

В дальнейшем при выборе параметра p будем следить, чтобы выполнялось условие

$$\lceil \log_k p \rceil < \left\lceil \log_k \big((k-1)p + 1\big) \right\rceil ,$$

которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$I_{B_L}(N_L(\varphi_p)) = I_{B_L}(\varphi_p) - 1.$$

Наконец, определим функцию f_p от $(2k-1)q+2$ переменных равенством

$$f_p(x_1, x_2, z_{01}, \ldots, z_{0q}, \ldots, z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q}) = \\ = \bigvee_{i=0}^{2k-2} P^i(x_1, x_2) \cdot \varphi(z_{i1}, \ldots, z_{iq}),$$

где $x \vee y = \max(x, y)$, $x \cdot y$ — произведение переменных x и y по модулю k.

Для спада функции f_p справедливы равенства

$$d(f_p) = (2k-1)d(\varphi_p) = (2k-1)(k-1)p.$$

Построение схемы, реализующей функцию f_p над базисом B_L, начнем с построения для упорядоченной системы функций

$$N_L(\varphi_p(z_{01}, \ldots, z_{0q})), N_L(\varphi_p(z_{11}, \ldots, z_{1q})), \ldots, N_L(\varphi_p(z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q}))$$

схемы Σ, реализующий для этой системы $(2k-1)$-переключатель

$$g(y_0, y_1, \ldots, y_{2k-2}, z_{01}, \ldots, z_{0q}, \ldots, z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q}),$$

удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} g(1, 0, \ldots, 0, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q}) &= N_L(\varphi_p(z_{01}, \ldots, z_{0q})), \\ g(0, 1, \ldots, 0, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q}) &= N_L(\varphi_p(z_{11}, \ldots, z_{1q})), \\ &\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ g(0, \ldots, 0, 1, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q}) &= N_L(\varphi_p(z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q})). \end{aligned}$$

В силу леммы 10 схему Σ можно построить так, что будет выполняться неравенство

$$I_{B_L}(\Sigma) \leqslant I_{B_L}(N_L(\varphi_p)).$$

Отметим два факта. Во-первых, функция

$$N_L(g(y_0, y_1, \ldots, y_{2k-2}, z_{01}, \ldots, z_{0q}, \ldots, z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q}))$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} N_L(g(1, 0, \ldots, 0, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q})) &= \varphi_p(z_{01}, \ldots, z_{0q}), \\ N_L(g(0, 1, \ldots, 0, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q})) &= \varphi_p(z_{11}, \ldots, z_{1q}), \\ &\ \ldots \\ N_L(g(0, \ldots, 0, 1, z_{01}, \ldots, z_{2k-2,q})) &= \varphi_p(z_{2k-2,1}, \ldots, z_{2k-2,q}). \end{aligned}$$

Во-вторых, система функций $P^0(x_1, x_2)$, $P^1(x_1, x_2), \ldots, P^{2k-2}(x_1, x_2)$ может быть реализована подсхемой Σ_0 над базисом B_L, на входы которой подаются функции x_1, x_2, $N_L(x_1)$ и $N_L(x_2)$ и состоящей только из монотонных элементов.

Теперь на основе схем Σ и Σ_0 следующим образом построим схему $\widetilde{S}$, реализующую функцию f_p. На первые $2k-1$ входов схемы Σ подадим выходы схемы Σ_0, состоящей только из монотонных элементов; на входы подсхемы Σ_0 подадим переменные x_1 и x_2, а также выходы двух инверторов, на входы которых, в свою очередь, также подаются переменные x_1 и x_2; наконец, выходом строящейся схемы $\widetilde{S}$ объявим дополнительный инвертор, на вход которого подается выход подсхемы Σ.

Схема $\widetilde{S}$ по построению реализует функцию f_p. Подсчитаем количество инверторов в схеме $\widetilde{S}$: на входы двух инверторов подаются переменные x_1 и x_2, в подсхеме Σ_0 нет инверторов, в подсхеме Σ не более $I_{B_L}(N_L(\varphi_p))$ инверторов, еще один инвертор — это выход схемы $\widetilde{S}$. Таким образом,

$$I_{B_L}\big(\widetilde{S}\big) \leqslant I_{B_L}(N_L(\varphi_p)) + 3.$$

В схеме $\widetilde{S}$ выходы некоторых монотонных элементов могут подаваться на входы монотонных элементов. Преобразуя естественным образом схему $\widetilde{S}$ так, чтобы выходы монотонных элементов подавались только на входы инверторов, получим схему S, реализующую функцию f_p и для которой выполняются соотношения

$$\begin{gathered} I_{B_L}(S) = I_{B_L}\big(\widetilde{S}\big), \\ L_{B_L}(S) = 2\big(I_{B_L}(S) - 2\big) + 2. \end{gathered}$$

Таким образом, с использованием теоремы 4 имеем:

$$L_{B_L}(f_p) \leqslant L_{B_L}(S) = 2I_{B_L}\big(\widetilde{S}\big) - 2 \leqslant 2I_{B_L}(N_L(\varphi_p)) + 4 = 2\left\lceil \log_k p \right\rceil + 4.$$

С другой стороны, применяя теорему 4, получаем

$$I_{B_L}(f_p) = \left\lceil \log_k (d(f_p) + 1) \right\rceil = \left\lceil \log_k ((2k-1)(k-1)p + 1) \right\rceil.$$

Учитывая уже наложенное на параметр p условие

$$\left\lceil \log_k p \right\rceil < \left\lceil \log_k \big((k-1)p + 1\big) \right\rceil,$$

получаем неравенство

$$L_{B_L}(f_p) \leqslant 2\left\lceil \log_k \big((k-1)p+1\big)\right\rceil + 2.$$

Теперь наложим еще одно условие на выбор параметра p — потребуем выполнения равенства

$$\lceil \log_k((2k-1)(k-1)p+1)\rceil = \left\lceil \log_k \big((k-1)p+1\big)\right\rceil + 2.$$

В случае выполнения этого условия справедливо равенство

$$I_{B_L}(f_p) = \left\lceil \log_k \big((k-1)p+1\big)\right\rceil + 2.$$

Тогда при выполнении обоих условий справедливы соотношения

$$L_{B_L}(f_p) \leqslant 2(I_{B_L}(f_p)-2)+2 = 2I_{B_L}(f_p)-2.$$

Итак, если при выборе параметра p выполняются условия

$$\lceil \log_k p\rceil < \left\lceil \log_k \big((k-1)p+1\big)\right\rceil,$$
$$\lceil \log_k((2k-1)(k-1)p+1)\rceil = \left\lceil \log_k \big((k-1)p+1\big)\right\rceil + 2,$$

то для функции f_p достигается нижняя оценка из теоремы 12:

$$L_{B_L}(f_p) = 2I_{B_L}(f_p) - 2 = \lceil \log_k(d(f_p)+1)\rceil - 2.$$

Чтобы выполнялись наложенные на параметр p ограничения, достаточно, например, положить $p=k^m$, где m — произвольное натуральное число.

Вопрос о достижимости верхней оценки из теоремы 12 тесно связан с задачей о нахождении точного значения функции Шеннона сложности реализации функций k-значной логики схемами в базисе B_L, определяемой равенством

$$L_{B_L}(n) = \max L_{B_L}(f),$$

где максимум берется по всем функциям k-значной логики f от n переменных.

Напомним, что в конце предыдущего параграфа введена величина $T(k,n)$, на единицу превосходящая максимально возможный спад у функций k-значной логики от n переменных. Для значений $T(k,n)$ справедливы равенства

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Непосредственно из теоремы 12 следует, что

$$2\lceil \log_k T(k,n)\rceil - 1 \leqslant L_{B_L}(n) \leqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil + 1.$$

Перейдем к уточнению этих оценок.

Обозначим через U_k множество натуральных чисел n, удовлетворяющих двум условиям: 1) число $T(k,n)-1$ не является степенью числа k; 2) остаток от деления $n-1$ на k не превосходит $(k-3)/2$.

Определим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом. Зафиксируем одну произвольную цепь, не содержащую наборы 0^n и $(k-1)^n$ и имеющую при таких ограничениях максимально возможную длину, равную $(k-1)n-1$ (в качестве такой цепи можно взять цепь, состоящую из лексикографически упорядоченных наборов, начиная с набора $(0, \ldots, 0, 1)$ и заканчивая набором $(k-2, k-1, \ldots, k-1)$). На последовательности наборов этой цепи зададим функцию φ последовательностью значений

$$0, 1, \ldots, k-1, 0, 1, \ldots, k-1, 0, 1, \ldots$$

На остальных наборах значение функции φ зададим равенством $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (k-1)(1 + x_1 + \ldots + x_n) \pmod k$. И, наконец, при выполнении условия $n \in U_k$ переопределим значение функции φ на наборе $(k-1, \ldots, k-1)$, положив его равным $k-1$.

Лемма 33. *Функция k-значной логики $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Если $n \notin U_k$, то выполняются соотношения $d(\varphi) = T(k,n) - 1$, $T(k,n) - 2 \leqslant d(N_L(\varphi)) \leqslant T(k,n) - 1$.*

2. *Если $n \in U_k$, то справедливы равенства $d(\varphi) = d(N_L(\varphi)) = T(k,n) - 2$.*

3. *При $n \geqslant k+1$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется цепь C_i наборов из E_k^n, удовлетворяющая условию $d_{C_i}(\varphi; \{N_L(x_i)\}) = d(\varphi)$.*

4. *При $n \geqslant k+2$ для каждого s, $2 \leqslant s \leqslant n$, и любых $i_1, \ldots, i_s$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, найдется цепь $C_{i_1 \ldots i_s}$ наборов из E_k^n, удовлетворяющая условию $d_{C_{i_1 \ldots i_s}}(\varphi; \{N_L(x_{i_1}), \ldots, N_L(x_{i_s})\}) \geqslant d(\varphi) - (s-2)(k-1)$.*

Лемма 34. *Пусть функция k-значной логики f удовлетворяет условию*

$$\lceil \log_k (d(N_L(f)) + 1) \rceil < \lceil \log_k (d(f) + 1) \rceil .$$

Тогда выполняется неравенство

$$L_{B_L}(f) \leqslant 2 \lceil \log_k (d(f) + 1) \rceil .$$

Доказательство. Используя очевидное равенство $N_L(N_L(f)) = f$ и применяя для функции $N_L(f)$ верхнюю оценку из теоремы 12, получаем следующую цепочку неравенств

$$L_{B_L}(f) \leqslant L_{B_L}(N_L(f)) + 1 \leqslant 2 \lceil \log_k (d(N_L(f)) + 1) \rceil + 2 \leqslant$$
$$\leqslant 2(\lceil \log_k (d((f) + 1) \rceil - 1) + 2 = 2 \lceil \log_k (d(f) + 1) \rceil .$$

Лемма 34 доказана.

Обозначим через R_k множество натуральных чисел n, удовлетворяющих условию: число $T(k,n) - 1$ является степенью числа k.

Отметим, что все числа из множества R_k не делятся на k.

Лемма 35. *Пусть $n \in R_k$ и для функции k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство $d(f) = T(k,n) - 1$. Тогда выполняется неравенство $d(N_L(f)) \leqslant d(f) - 1$.*

Доказательство. Для всех функций $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих максимально возможный спад среди функций k-значной логики от n переменных, выполняется неравенство $\xi(0, \ldots, 0) \geqslant \xi(k-1, \ldots, k-1)$. В случае когда n не делится на k, это соотношение превращается в строгое неравенство. Поэтому в этом случае функция $N_L(\xi)$ не может иметь максимальный спад.

Теорема 13 [40]. *При $k \geqslant 3$ и $n \geqslant k+2$ для функции Шеннона сложности реализации функций k-значной логики схемами в базисе B_L верно равенство*

$$L_{B_L}(n) = \begin{cases} 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil, & \text{если } n \in R_k; \\ 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil + 1, & \text{если } n \in \mathbb{N} \setminus R_k. \end{cases}$$

Доказательство. *Верхняя оценка.* В силу теоремы 12 для любого натурального n выполняется неравенство

$$L_{B_L}(n) \leqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil + 1,$$

которое дает искомую верхнюю оценку в случае $n \notin R_k$.

Пусть теперь $n \in R_k$. Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k отдельно рассмотрим два случая.

Случай 1°. Пусть выполняется $\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil < \lceil \log_k T(k,n)\rceil$. Тогда, используя верхнюю оценку теоремы 12, имеем:

$$L_{B_L}(f) \leqslant 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil + 1 \leqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil - 1.$$

Случай 2°. Пусть выполняется $\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil = \lceil \log_k T(k,n)\rceil$. Тогда, учитывая, что число $T(k,n)-1$ является степенью числа k, из условия случая следует равенство $d(f) = T(n,k)-1$. Далее, в силу леммы 35 выполняется неравенство $d(N_L(f)) \leqslant d(f)-1$. Следовательно,

$$\lceil \log_k(d(N_L(f))+1)\rceil \leqslant \lceil \log_k d(f)\rceil = \log_k(T(k,n)-1) < \lceil \log_k T(k,n)\rceil.$$

Используя оценку из случая 1 для функции $N_L(f)$, получаем:

$$L_{B_L}(f) \leqslant L_{B_L}(N_L(f)) + 1 \leqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil.$$

Нижняя оценка. Рассмотрим введенную выше функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Пусть S — некоторая минимальная схема для функции φ в базисе B_L.

Сначала докажем справедливость неравенства

$$L_{B_L}(S) \geqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil + l_1(S).$$

Если выполняется неравенство $l_0(S) \geqslant 1$, то в силу лемм 28, 29 и 32 справедливы соотношения

$$L_{B_L}(S) \geqslant 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1)\rceil - 1 + l_0(S) + l_1(S) \geqslant 2\lceil \log_k T(k,n)\rceil + l_1(S).$$

Теперь считаем, что выполняется равенство $l_0(S) = 0$. В этом случае в схеме S есть инверторы, на входы которых подаются переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, $s \geqslant 1$. Рассмотрим разбиение схемы S на подсхемы S' и S'', где подсхема S' содержит только инверторы, на входы которых подаются входы схемы (переменные), а подсхема S'' — все остальные элементы схемы S.

В силу леммы 33 при $s = 1$ найдется цепь C, такая что выполняется условие $d_C(\varphi; \{N_L(x_{i_1})\}) = d(\varphi)$, а при $s \geqslant 2$ найдется цепь C, для которой справедливо неравенство $d_C(\varphi; \{N_L(x_{i_1}), \ldots, N_L(x_{i_s})\}) \geqslant d(\varphi) - (s-2)(k-1)$.

Применяя лемму 28 для цепи C и системы $G=\{N_L(x_{i_1}),\ldots,N_L(x_{i_s})\}$, в силу равенства $F_{S'}=G$ получаем:

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'')\geqslant 2\left\lceil\log_k\left(d_C(\varphi;G)+1\right)\right\rceil-1.$$

Учитывая, что $L_{B_L}(S)=L_{B_L}(S'')+s$, $l_1(S)=l_1(S'')$ и $l_0(S'')\geqslant 1$, при $s=1$ имеем неравенства

$$L_{B_L}(S)>2\left\lceil\log_k\left(d(\varphi)+1\right)\right\rceil+l_1(S)=2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S),$$

а при $s\geqslant 2$ выполняются соотношения

$$L_{B_L}(S)\geqslant s+l_0(S'')-l_1(S'')+2\left\lceil\log_k\left(d_C(\varphi;G)+1\right)\right\rceil-1\geqslant$$
$$\geqslant s+2\left\lceil\log_k\left(T(k,n)-(s-2)(k-1)\right)\right\rceil+l_1(S)\geqslant 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S).$$

Таким образом, в любом случае для схемы S выполняется соотношение

$$L_{B_L}(S)\geqslant 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S).$$

Заметим, что из этого соотношения в силу очевидного неравенства $l_1(S)\geqslant 0$ непосредственно следует требуемая нижняя оценка в случае, когда выполняется условие $n\in R_k$.

Теперь предполагаем, что выполняется условие $n\notin R_k$. Тогда число $T(k,n)-1$ не является степенью числа k. Следовательно,

$$\left\lceil\log_k(T(k,n)-1)\right\rceil=\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil.$$

Применяя лемму 33, получаем

$$\left\lceil\log_k(d(N_L(\varphi))+1)\right\rceil\geqslant\left\lceil\log_k(T(k,n)-1)\right\rceil=\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1°. Пусть последний (выходной) элемент схемы S — инвертор. Тогда схема S_0, получающаяся из схемы S путем удаления этого инвертора, является минимальной схемой в базисе B_L для функции $N_L(\varphi)$. Используя леммы 28, 29 и 32 и учитывая неравенство $l_1(S_0)\geqslant 1$ (верное ввиду того, что последним элементом схемы S_0 не может быть инвертор), получаем:

$$L_{B_L}(\varphi)=L_{B_L}(S)=L_{B_L}(S_0)+1\geqslant$$
$$\geqslant 2\left\lceil\log_k(d(N_L(\varphi))+1)\right\rceil-1+l_1(S_0)+1\geqslant 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+1.$$

Случай 2°. Пусть последнему элементу схемы S приписана монотонная функция из базиса B_L.

Тогда выполняется неравенство $l_1(S)\geqslant 1$. Поэтому

$$L_{B_L}(\varphi)=L_{B_L}(S)\geqslant 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S)\geqslant 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+1.$$

Теорема 13 доказана.

З а м е ч а н и е. Условие $n\geqslant k+2$ из теоремы 13 можно ослабить, однако совсем обойтись без ограничения на n с сохранением справедливости для функции Шеннона $L_{B_L}(n)$ формулы из теоремы 13 невозможно. Так, при $k\geqslant 3$ справедливы равенства $L_{B_L}(2)=3$ и $L_{B_L}(3)=3$, т. е. $L_{B_L}(2) = 2\lceil \log_k T(k,2)\rceil - 1$ и $L_{B_L}(3) = 2\lceil \log_k T(k,3)\rceil$, при этом множество R_k не содержит число 3 ни при каких $k \geqslant 3$.

Замечание. Для функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ при условии $n \notin R_k$ верхняя оценка из теоремы 12 неулучшаема, так как в этом случае верно равенство $L_{B_L}(\varphi) = 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1)\rceil + 1$, а при условии $n \in R_k$ выполняется равенство $L_{B_L}(\varphi) = 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1)\rceil$. Последний случай ввиду справедливости для любого k, $k \geqslant 2$, равенства

$$R_k = \left\{ \frac{k}{(k-1)^2}\left(k^{(k-1)t+k-2} - k^2 + 3k - 3\right) + k - 1 \mid t = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

дает бесконечную серию функций, для которых ни нижняя оценка, ни верхняя оценка теоремы 12 не являются точными.

4.4. Сложность в булевом базисе из всех монотонных функций и отрицания. В предыдущих двух разделах параграфа в теоремах 8, 10 и 12 для сложности произвольной функции k-значной логики в бесконечных базисах B_P и B_L установлены верхние и нижние оценки сложности, отличающиеся всего на единицу для базиса B_P и не более чем на тройку для базиса B_L. Но установить точное значение сложности для произвольной функции k-значной логики, к сожалению, не удается в общем случае ни для базиса B_P, ни для базиса B_L. Покажем, как это можно сделать для случая $k = 2$.

При $k = 2$ функции k-значной логики $x + 1 \pmod k$ и $k - 1 - x$ «схлопываются» в обычное булево отрицание, а бесконечные базисы B_P и B_L в этом случае совпадают. И со сложностной точки зрения булев базис B_-, состоящий из всех монотонных булевых функций и булевого отрицания, является, условно говоря, базисом B_L, а не базисом B_P — оценки схемной сложности в базисе B_P доказывались при условии $k \geqslant 3$, а в базисе B_L — для произвольного $k \geqslant 2$.

Сначала уточним в случае $k = 2$ устанавливаемую теоремой 12 нижнюю оценку и, тем самым, несколько уменьшим разрыв между верхней и нижней оценками. В некотором смысле следующая лемма является булевым аналогом леммы 32 — в многозначном случае обычная сложность почти всегда не менее удвоенной инверсионной сложности без единицы и исключения прописаны в лемме 32, а в булевом случае, как сейчас будет показано, таких исключений нет.

Лемма 36. *Для любой булевой функции f справедливы неравенства*

$$2\lceil \log_2(d(f)+1)\rceil - 1 \leqslant L_{B_-}(f) \leqslant 2\lceil \log_2(d(f)+1)\rceil + 1.$$

Доказательство. Следствие к теореме 12 гарантирует для произвольной булевой функции f выполнение неравенств

$$2\lceil \log_2(d(f)+1)\rceil - 2 \leqslant L_{B_-}(f) \leqslant 2\lceil \log_2(d(f)+1)\rceil + 1.$$

Для того, чтобы установить справедливость утверждения леммы, достаточно показать невозможность достижения нижней границы в этих оценках.

Предположим, это возможно, т. е. для некоторой булевой функции f выполняется равенство

$$L_{B_-}(f) = 2\lceil \log_2(d(f)+1)\rceil - 2.$$

В силу теоремы 1 это предположение можно переписать так: $L_{B_-}(f)=2I(f)-2$. Последнее равенство при $I(f)\leqslant 2$ невозможно, поэтому $I(f)\geqslant 3$.

Пусть минимальная для функции f схема S над базисом B_- имеет канонический вид, представленный на рис. 1. В силу леммы 29 истинно равенство $l_0(S)+l_1(S)+v_2(d(f)+1)=0$, т. е. в каноническом представлении схемы S подсхемы S_0 и S_r не содержат элементов. Из отсутствия элементов в подсхеме S_r следует, что $t_r=1$ и элемент e_{r1} является выходом схемы S.

Отдельно рассмотрим два случая в зависимости от того, сколько отрицаний в схеме S находится до подсхемы S_1, т. е. от значения величины t_1.

Случай 1°. Пусть выполняется условие $t_1=1$. Тогда в схеме S на вход каждого инвертора, кроме одного, подается выход монотонного элемента, причем в силу минимальности схемы все эти монотонные элементы различны. Поэтому

$$L_{B_-}(f)=L(S)\geqslant 2I(S)-1\geqslant 2I(f)-1=2\left\lceil\log_2(d(f)+1)\right\rceil-1,$$

что противоречит предположению.

Случай 2°. Пусть выполняется условие $t_1\geqslant 2$. Положим $a=I(S)-I(f)$. Тогда, учитывая, что на вход каждого инвертора, кроме t_1 инверторов, подается выход уникального монотонного элемента, получаем

$$L_{B_-}(f)\geqslant 2I(S)-t_1=2I(f)+2a-t_1.$$

По предположению $L_{B_-}(f)=2I(f)-2$. Следовательно,

$$a\leqslant\frac{t_1}{2}-1.$$

Далее, сначала применяем лемму 31, которая в булевом случае превращается в очевидное неравенство $|d(f)-d(\overline{f})|\leqslant 1$. Затем последовательно для каждого элемента по отдельности, начиная с последнего монотонного элемента, выход которого подается на вход являющегося выходом схемы инвертора, применяем лемму 25 и удаляем очередной элемент до тех пор, пока не останутся только t_1 инверторов, на входы которых подаются входы схемы. Учитывая, что использование дополнительного монотонного элемента не увеличивает спад реализуемой на выходах всех элементов схемы системы функций, получаем:

$$d(f)+1\leqslant(t_1+1)2^{I(S)-t_1-1}+1=(t_1+1)2^{I(f)-1}\,2^{a-t_1}+1\leqslant$$
$$\leqslant\frac{t_1+1}{2^{(t_1/2)+1}}2^{I(f)-1}+1.$$

Для любых натуральных t и I при выполнении условий $t\geqslant 2$ и $I\geqslant 3$ справедливо неравенство

$$\frac{t+1}{2^{(t/2)+1}}2^{I-1}\leqslant 2^{I-1}-1.$$

Но тогда получаем противоречие:

$$d(f)+1\leqslant\frac{t_1+1}{2^{(t_1/2)+1}}2^{I(f)-1}+1\leqslant 2^{I(f)-1}<d(f)+1.$$

Лемма 36 доказана.

Отметим, что теорема Маркова позволяет записать неравенства из леммы 36 более компактно:

$$2I(f)-1\leqslant L_{B_-}(f)\leqslant 2I(f)+1.$$

Теперь можно переходить к исследованию возможности установить точное значение сложности над базисом B_- произвольной булевой функции. Но сначала отметим несколько фактов, которые затрудняют нахождение точного значения сложности.

1. Если схема S — минимальная относительно меры сложности L_{B_-}, то из этого, вообще говоря, не следует, что S — минимальная схема относительно меры сложности I. В качестве простого примера рассмотрим функцию

$$\varphi = x\overline{yz}.$$

Для функции φ выполняются соотношения

$$I(\varphi)=1,\quad L_{B_-}(\varphi)=3.$$

Первое равенство очевидно, а второе следует из того, что никакая схема в базисе B_-, состоящая из не более двух элементов, не может реализовывать функцию φ, так как, с одной стороны, функция φ не является отрицанием монотонной функции, а, с другой стороны, функция φ не является монотонной и по переменной y, и по переменной z.

При этом функция φ может быть реализована в базисе B_- схемой из двух инверторов и одного монотонного элемента в соответствии с формулой

$$\varphi = \overline{\omega\left(\overline{x},y,x\right)},$$

где $\omega = x\vee yz\in M$.

2. Несколько более сложный пример показывает, что существуют функции, у которых любая минимальная схема в базисе B_- не является минимальной относительно инверсионной сложности. Положим

$$\psi(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)=\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2y_1\vee\overline{x}_1x_2y_2\vee x_1\overline{x}_2y_3\vee x_1x_2y_4}.$$

Функция $\psi(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)$ — это отрицание известной универсальной функции порядка 2 (или мультиплексора порядка 2). Нетрудно установить, что

$$d\left(\overline{\psi}\right)=2,\quad d(\psi)=3,$$

причем максимум (по цепям) спада функций $\overline{\psi}$ и ψ достигается, например, на двух таких цепях:

$$C_1=(000000),(001000),(011000),(011100),(111100),(111111);$$
$$C_2=(000000),(001000),(101000),(101010),(111010),(111111).$$

В силу теоремы Маркова верны равенства $I(\psi)=I(\overline{\psi})=2$. Кроме того, из представления

$$\psi(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)=\overline{h(\overline{x}_1,x_1,\overline{x}_2,x_2,,y_1,y_2,y_3,y_4)},$$

где функция

$$h(z_{01}, z_{11}, z_{02}, z_{12}, y_1, y_2, y_3, y_4) = z_{01}z_{02}y_1 \vee z_{01}z_{12}y_2 \vee z_{11}z_{02}y_3 \vee z_{11}z_{12}y_4$$

является монотонной, следует, что для функции ψ в базисе B_- можно построить схему, состоящую из трех инверторов и одного монотонного элемента, т. е. $L_{B_-}(\psi) \leqslant 4$.

Предположим, что для функции ψ найдется минимальная относительно меры сложности L_{B_-} схема S, содержащая 2 инвертора, т. е. удовлетворяющая условию $I(S) = I(\psi)$. В силу минимальности схемы S верно неравенство $L_{B_-}(S) \leqslant 4$. Покажем, что для схемы S выполняется хотя бы одно из двух условий: $l(S_0) = 0$ или $l(S_1) = 0$. Действительно, если $l(S_0) \geqslant 1$ и $l(S_1) \geqslant 1$, то на вход каждого из инверторов подается выход монотонного элемента, а выходом схемы является еще один монотонный элемент — противоречие с неравенством $L_{B_-}(S) \leqslant 4$.

Если выполняется условие $l(S_1) = 0$, то в схеме S последний элемент — инвертор, а на его вход подается функция $\overline{\psi}$, у которой спад равен 2 и поэтому реализующая ее подсхема содержит в силу теоремы Маркова не менее двух инверторов — противоречие с тем, что в схеме S два инвертора.

Если выполняется условие $l_0(S) = 0$, то один из входов схемы подается на вход инвертора. Если на вход этого инвертора подается переменная x_1, то, заменив его на элемент, реализующий константу 1, и подав вместо переменной x_1 на вход схемы константу 0, получим новую схему, содержащую всего один инвертор, но реализующую функцию, имеющую спад 2 на цепи, состоящей из первых четырех наборов цепи C_1, — противоречие с теоремой Маркова. Аналогично возникает противоречие и в случаях, если на вход инвертора подается другая переменная: если это переменная x_2 или переменная y_1, то заменяем отрицание переменной на 0, а саму переменную на 1 и рассматриваем цепь из последних четырех наборов цепи C_1; если это переменная y_3 или переменная y_4, то заменяем отрицание переменной на 1, а саму переменную на 0 и рассматриваем цепь из первых четырех наборов цепи C_1; если это переменная y_2, то заменяем отрицание переменной на 1, а саму переменную на 0 и рассматриваем цепь из первых четырех наборов цепи C_2.

Таким образом, для функции ψ любая минимальная относительно меры сложности L_{B_-} схема содержит не менее 3 инверторов, а значит, не является минимальной относительно инверсионной сложности.

Нахождение точного значения сложности произвольной булевой функции f над базисом B_- в силу неравенств

$$2\left\lceil \log_2(d(f)+1) \right\rceil - 1 \leqslant L_{B_-}(f) \leqslant 2\left\lceil \log_2(d(f)+1) \right\rceil + 1$$

можно свести к описанию двух семейств булевых функций: семейства функций f, для которых справедливо равенство

$$L_{B_-}(f) = 2\left\lceil \log_2(d(f)+1) \right\rceil - 1,$$

и семейства функций f, удовлетворяющих неравенству

$$L_{B_-}(f) \leqslant 2\left\lceil \log_2(d(f)+1) \right\rceil.$$

Прежде чем приступить к описанию этих семейств, дадим дополнительные определения и сформулируем несколько простых утверждений.

Лемма 37. *Пусть S — минимальная схема в базисе B_{-} для функции f и ни один вход схемы S не подается ни на какой инвертор. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{B_{-}}(f) \geqslant 2I(f).$$

Доказательство. В силу минимальности схемы S на вход инвертора не может подаваться выход другого инвертора. Кроме того, по условию, на вход инвертора не может подаваться вход схемы. Следовательно, на вход каждого инвертора подается выход монотонного элемента, причем из-за минимальности схемы все такие монотонные элементы реализуют разные функции и, значит, уникальны. Поэтому

$$L_{B_{-}}(f) = L(S) \geqslant 2I(S) \geqslant 2I(f).$$

Лемма 37 доказана.

Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *удовлетворяет граничному условию*, если для этой функции верны следующие утверждения:

1) $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$;
2) $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$;
3) $d(f) = 2^k$ для некоторого натурального k.

На основании теоремы Маркова сформулируем на языке инверсионной сложности критерий выполнения булевой функцией граничного условия.

Лемма 38. *Булева функция f удовлетворяет граничному условию тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$I\left(\overline{f}\right) = I(f) - 1.$$

Отметим, что в силу соотношения

$$\left|I(f) - I\left(\overline{f}\right)\right| \leqslant 1$$

равенство $I\left(\overline{f}\right) = I(f) - 1$ в лемме 38 можно заменить на неравенство $I\left(\overline{f}\right) < I(f)$.

Следующая лемма демонстрирует, что для функции, удовлетворяющей граничному условию, верхнюю оценку из леммы 36 можно улучшить как минимум на единицу.

Лемма 39. *Если булева функция f удовлетворяет граничному условию, то справедливо неравенство $L_{B_{-}}(f) \leqslant 2I(f)$.*

Доказательство. Для любой булевой функции в силу верхней оценки из леммы 36 верны соотношения

$$L_{B_{-}}(f) \leqslant L_{B_{-}}(\overline{f}) + 1 \leqslant 2I(\overline{f}) + 2.$$

Применение леммы 38 завершает доказательство леммы 39.

Теперь введем еще одно свойство булевых функций, наличие или отсутствие которого также значительно влияет на возможности усилить верхнюю оценку из леммы 36.

Булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *u-равномерной по переменным* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < i_2, \ldots < i_p \leqslant n$, если для любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \{0, 1\}^p$ функция $f_{\tilde{\sigma}}(x_1, \ldots, x_n)$, получающаяся из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путем подстановки вместо переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ значений $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ соответственно, удовлетворяет условию

$$\lceil \log_2(d(f_{\tilde{\sigma}}) + 1) \rceil \leqslant \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil - u.$$

Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является *(p, u)-равномерной*, если найдутся такие переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является u-равномерной по этим переменным.

Перейдем к описанию семейства булевых функций, удовлетворяющих условию $L_{B_-}(f) = 2I(f) - 1$.

Л е м м а 40. *Если для булевой функции f справедливо равенство*

$$L_{B_-}(f) = 2I(f) - 1$$

и для функции f существует минимальная схема в базисе B_-, в которой последний элемент — инвертор, то функция f удовлетворяет граничному условию и либо функция f — отрицание переменной, либо функция $\overline{f}$ является $(1, 1)$-равномерной или $(3, 2)$-равномерной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — минимальная схема для функции f, у которой последний элемент e — инвертор. Без ограничения общности считаем, что это не единственный элемент в схеме, так как в ином случае утверждение леммы очевидно. Отметим, что тогда в силу нечетности величины $L(f)$ верно неравенство $L(S) \geqslant 3$.

Итак, на вход элемента e подается функция $\overline{f}$, поэтому

$$L_{B_-}(\overline{f}) \leqslant L_{B_-}(f) - 1 = 2I(f) - 2.$$

Следовательно, верно равенство $I(\overline{f}) = I(f) - 1$, так как в противном случае получалось бы противоречие с леммой 36:

$$L_{B_-}(\overline{f}) \leqslant 2I(f) - 2 \leqslant 2I(\overline{f}) - 2 = 2\left\lceil \log_2(d(\overline{f}) + 1) \right\rceil - 2.$$

Таким образом, в силу леммы 38 функция f удовлетворяет граничному условию.

Обозначим через t_1 количество инверторов в схеме S, на входы которых подаются входы схемы. В силу леммы 37 истинно неравенство $t_1 \geqslant 1$.

Положим $a = I(S) - I(f)$. В силу минимальности схемы S выходы всех монотонных элементов подаются на входы инверторов. С другой стороны, на входы всех инверторов, кроме t_1 первых, подаются выходы монотонных элементов. Следовательно,

$$L_{B_-}(S) = t_1 + 2(I(S) - t_1) = 2I(S) - t_1 = 2I(f) + 2a - t_1.$$

Поэтому, учитывая минимальность схемы S и значение величины сложности функции f, получаем равенство

$$a = \frac{t_1 - 1}{2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает нечетность величины t_1.

Далее, применяя необходимое число раз лемму 25, а также лемму 38, получаем

$$d(f)+1 \leqslant (t_1+1)2^{I(S)-t_1-1}+1=(t_1+1)2^{I(f)+a-t_1-1}+1=\frac{(t_1+1)\,2^{I(f)}}{2^{(t_1+3)/2}}+1.$$

Для всех значений t_1, удовлетворяющих условию $t_1 \geqslant 5$, справедливо неравенство

$$\frac{(t_1+1)\,2^{I(f)}}{2^{(t_1+3)/2}}+1 \leqslant 2^{I(f)-1},$$

которое приводит к противоречию:

$$d(f)+1 \leqslant 2^{I(f)-1} < d(f)+1.$$

Таким образом, допустимыми значениями параметра t_1 являются только 1 и 3, при этом значение параметра a будет равно 0 или 1 соответственно.

Итак, если для функции f, имеющей минимальную схему с последним элементом инвертором, выполняется равенство $L_{B_-}(f)=2I(f)-1$, то, во-первых, функция f удовлетворяет граничному условию, а во-вторых, любая минимальная схема S для функции f либо содержит в точности $I(f)$ инверторов и ровно на один из них подается вход схемы, либо содержит в точности $I(f)+1$ инвертор и ровно на 3 из них подаются входы схемы. Подробнее рассмотрим эти два возможных случая.

Случай 1°. Пусть S — минимальная схема для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $L_{B_-}(S)=2I(f)-1$, $I(S)=I(f)$, последний элемент схемы S — инвертор, на вход ровно одного инвертора схемы S подается вход схемы.

Рассмотрим схему S', получающуюся из схемы S удалением последнего инвертора, т. е. элемента e_{r1} (если рассматривать каноническое представление схемы S). Схема S' реализует функцию $\overline{f}$. В силу минимальности схемы S справедливы равенства

$$I(\overline{f})=I(S')=I(S)-1=I(f)-1.$$

В схеме S' выделим первый инвертор, т. е. элемент e_{11}. Без ограничения общности будем считать, что на вход этого инвертора подается переменная x_1. В свою очередь преобразуем схему S' в схему S'', заменив инвертор e_{11} на еще один вход схемы, которому припишем новую переменную y. Тем самым новая схема S'' реализует некоторую функцию $g(x_1,\ldots,x_n,y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1)=\overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$,

2) $I(g)\leqslant I(f)-2$.

Тогда для любого значения σ, $\sigma\in\{0,1\}$ верны следующие соотношения:

$$\left\lceil \log_2(d(\overline{f(\sigma,x_2,\ldots,x_n)})+1)\right\rceil = \lceil \log_2(d(g(\sigma,x_2,\ldots,x_n,\overline{\sigma}))+1)\rceil \leqslant$$
$$\leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1,x_2,\ldots,x_n,y))+1)\rceil = I(g)\leqslant I(f)-2=I(\overline{f})-1.$$

Значит, функция $\overline{f}$ является 1-равномерной по переменной x_1, а следовательно, $(1,1)$-равномерной.

Случай 2°. Пусть S — минимальная схема для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $L_{B_-}(S) = 2I(f) - 1$, $I(S) = I(f) + 1$, последний элемент схемы S — инвертор, на вход ровно трех инверторов схемы S подаются входы схемы.

Также как и в первом случае рассмотрим схему S', получающуюся из схемы S удалением последнего инвертора, т. е. элемента e_{r1}. Схема S' реализует функцию $\overline{f}$.

В схеме S' выделим три инвертора, на входы которых подаются входы схемы, т. е. выделим элементы e_{11}, e_{12} и e_{13}. Без ограничения общности будем считать, что на входы этих инверторов подаются переменные x_1, x_2 и x_3. В свою очередь, преобразуем схему S' в схему S'', заменив инверторы e_{11}, e_{12} и e_{13} на три дополнительных входа схемы, которым припишем новые переменные y_1, y_2 и y_3. Тем самым новая схема S'' реализует некоторую функцию $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$,

2) $I(g) \leqslant I(S'') \leqslant I(S) - 4 = I(f) - 3$.

Тогда для любого набора $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \{0, 1\}^3$ верны следующие соотношения:

$$\left\lceil \log_2(d(\overline{f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \ldots, x_n)}) + 1) \right\rceil =$$
$$= \lceil \log_2(d(g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \ldots, x_n, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3)) + 1) \rceil \leqslant$$
$$\leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3)) + 1) \rceil = I(g) \leqslant I(f) - 3 = I(\overline{f}) - 2.$$

Значит, функция $\overline{f}$ является 2-равномерной по переменным x_1, x_2 и x_3, а следовательно, $(3, 2)$-равномерной.

Лемма 40 доказана.

Л е м м а 41. *Если для булевой функции f справедливо равенство*

$$L_{B_-}(f) = 2I(f) - 1$$

и для функции f существует минимальная схема в базисе B_-, в которой последний элемент — монотонный, то функция f является $(2, 2)$-равномерной или $(4, 3)$-равномерной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — минимальная схема для функции f, у которой последний элемент — монотонный.

Обозначим через t_1 количество инверторов в схеме S, на входы которых подаются входы схемы. В силу леммы 37 истинно неравенство $t_1 \geqslant 1$.

Положим $a = I(S) - I(f)$. В силу минимальности схемы S выходы всех монотонных элементов подаются на входы инверторов. С другой стороны, на входы всех инверторов, кроме t_1 первых, подаются выходы монотонных элементов. Следовательно,

$$L_{B_-}(S) = t_1 + 2(I(S) - t_1) + 1 = 2I(S) - t_1 + 1 = 2I(f) + 2a - t_1 + 1.$$

Поэтому, учитывая минимальность схемы S и значение величины сложности функции f, получаем равенство

$$a = \frac{t_1}{2} - 1.$$

Отсюда, в частности, вытекает четность величины t_1.

Далее, применяя необходимое число раз лемму 25, получаем

$$d(f)+1 \leqslant (t_1+1)2^{I(S)-t_1} = (t_1+1)2^{I(f)-1}\, 2^{a-t_1+1} \leqslant \frac{t_1+1}{2^{t_1/2}}\, 2^{I(f)-1}.$$

Отсюда при $t_1 \geqslant 6$ получаем противоречие:

$$d(f)+1 \leqslant 2^{I(f)-1} < d(f)+1.$$

Таким образом, все значения параметра t_1, отличные от 2 и 4, невозможны. Осталось рассмотреть случаи $t_1=2$ и $t_1=4$. Отметим, что в этих случаях значения параметра a равны, соответственно, 0 и 1.

Случай 1°. Пусть S — минимальная схема для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $L(S)=2I(f)-1$, $I(S)=I(f)$, последний элемент схемы S — монотонный элемент, на вход ровно двух инверторов схемы S подаются входы схемы.

В схеме S выделим те два инвертора, на входы которых подаются переменные. Без ограничения общности будем считать, что это переменные x_1 и x_2. Преобразуем схему S в схему S', заменив выделенные инверторы на два дополнительных входа схемы, которым припишем новые переменные y_1, y_2. Тем самым новая схема S' реализует некоторую функцию $g(x_1,\ldots,x_n,y_1,y_2)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2)=f(x_1,\ldots,x_n)$,

2) $I(g) \leqslant I(f)-2$.

Тогда для любого набора (σ_1,σ_2), $(\sigma_1,\sigma_2)\in\{0,1\}^2$, верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\lceil \log_2(d(f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,\ldots,x_n))+1)\rceil =\\ &\qquad = \lceil \log_2(d(g(\sigma_1,\sigma_2,x_3,\ldots,x_n,\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2))+1)\rceil \leqslant\\ &\qquad\quad \leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2))+1)\rceil = I(g) \leqslant I(f)-2.\end{aligned}$$

Значит, функция f является 2-равномерной по переменным x_1 и x_2, а следовательно, $(2,2)$-равномерной.

Случай 2°. Пусть S — минимальная схема для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $L(S)=2I(f)-1$, $I(S)=I(f)+1$, последний элемент схемы S — монотонный элемент, на вход ровно четырех инверторов схемы S подаются входы схемы.

В схеме S выделим те четыре инвертора, на входы которых подаются переменные. Без ограничения общности будем считать, что это переменные x_1,x_2,x_3,x_4. Преобразуем схему S в схему S', заменив выделенные инверторы на четыре дополнительных входа схемы, которым припишем новые переменные y_1,y_2,y_3,y_4. Тем самым новая схема S' реализует некоторую функцию $g(x_1,\ldots,x_n,y_1,y_2,y_3,y_4)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4)=f(x_1,\ldots,x_n)$,

2) $I(g) \leqslant I(f)-3$.

Тогда для любого двоичного набора $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$ верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\lceil \log_2(d(f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,x_5,\ldots,x_n))+1)\rceil =\\ &\qquad = \lceil \log_2(d(g(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,x_5,\ldots,x_n,\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\overline{\sigma}_3,\overline{\sigma}_4))+1)\rceil \leqslant\\ &\qquad\quad \leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,y_3,y_4))+1)\rceil = I(g) \leqslant I(f)-3.\end{aligned}$$

Значит, функция f является 3-равномерной по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, а следовательно, $(4, 3)$-равномерной.

Лемма 41 доказана.

Теперь перейдем к доказательству того факта, что необходимые для справедливости равенства $L_{B_-}(f) = 2I(f) - 1$ условия лемм 40 и 41 являются и достаточными. Основой этого доказательства является следующее утверждение.

Лемма 42. *Если булева функция f является (p, u)-равномерной, то справедливо неравенство $L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f)+p+1-2u$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является u-равномерной по переменным $x_1, \ldots, x_p$. Построим для функции f схему в базисе B_- требуемой сложности.

В силу u-равномерности функции f для любого двоичного набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ для функции

$$f_{\tilde{\sigma}}(x_{p+1}, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

истинно неравенство $I(f_{\tilde{\sigma}}) \leqslant I(f) - u$.

Построение схемы, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе B_-, начнем с того, что для упорядоченной системы

$$f_{0\ldots00}, f_{0\ldots01}, f_{0\ldots10}, \ldots, f_{1\ldots11},$$

состоящей из 2^p функций от переменных $x_{p+1}, \ldots, x_n$, построим схему Σ, реализующую для этой системы 2^p-переключатель

$$g(y_{0\ldots00}, y_{0\ldots01}, \ldots, y_{1\ldots11}, x_{p+1}, \ldots, x_n),$$

удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}
g(1, 0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n) &= f_{0\ldots00}(x_{p+1}, \ldots, x_n),\\
g(0, 1, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n) &= f_{0\ldots01}(x_{p+1}, \ldots, x_n),\\
&\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\\
g(0, 0, \ldots, 1, x_{p+1}, \ldots, x_n) &= f_{1\ldots11}(x_{p+1}, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

В силу леммы 10 схему Σ можно построить так, что будет выполняться неравенство

$$I(\Sigma) \leqslant \max_{\tilde{\sigma}} I(f_{\tilde{\sigma}}) \leqslant I(f) - u.$$

Отдельно построим схему Σ_0 из монотонных элементов, на входы которой подаются функции $x_1, \ldots, x_p, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_p$ и реализующую все конъюнкции вида $x_1^{\sigma_1} \ldots x_p^{\sigma_p}$.

Теперь, если для каждого из 2^p двоичных наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ конъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \ldots x_p^{\sigma_p}$, реализованную схемой Σ_0, подать на вход схемы Σ, которому ранее была приписана переменная $y_{\sigma_1\ldots\sigma_p}$, то полученная схема $\widetilde{S}$ будет реализовывать функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Подсчитаем число инверторов в схеме $\widetilde{S}$: на входы p инверторов подаются переменные $x_1, \ldots, x_p$, в подсхеме Σ_0 нет инверторов, в подсхеме Σ не более $I(f) - u$ инверторов. Таким образом,

$$I\bigl(\widetilde{S}\bigr) \leqslant I(f) + p - u.$$

В схеме $\widetilde{S}$ выходы некоторых монотонных элементов могут подаваться на входы монотонных элементов. Преобразуя естественным образом схему $\widetilde{S}$ так, чтобы выходы монотонных элементов подавались только на входы инверторов, получим схему S, реализующую в базисе B_- функцию f и для которой выполняются соотношения

$$I(S) = I(\widetilde{S}),$$
$$L(S) = 2(I(S) - p) + p + 1 \leqslant 2(I(f) - u) + p + 1 = 2I(f) + p + 1 - 2u.$$

Лемма 42 доказана.

Из леммы 42 следует, что для справедливости равенства $L(f)=2I(f)-1$ условия леммы 41 являются не только необходимыми, но и достаточными. Теперь на основе леммы 42 установим достаточность для выполнения равенства $L_{B_-}(f) = 2I(f) - 1$ и условий леммы 40. Для этого можно просто подставить соответствующие параметры равномерности в следующее утверждение.

Л е м м а 43. *Если булева функция f удовлетворяет граничному условию, а функция $\overline{f}$ является (p,u)-равномерной, то справедливо неравенство*
$$L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f) + p - 2u.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 38 из того, что функция f удовлетворяет граничному условию, следует равенство $I(\overline{f}) = I(f) - 1$. Далее, применяя лемму 42, получаем

$$L_{B_-}(\overline{f}) \leqslant 2I(\overline{f}) + p + 1 - 2u = 2I(f) + p - 2u - 1.$$

Для завершения доказательства осталось использовать очевидное неравенство $L_{B_-}(f) \leqslant L_{B_-}(\overline{f}) + 1$.

Лемма 43 доказана.

Перейдем к описанию семейства булевых функций, удовлетворяющих неравенству $L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f)$.

Л е м м а 44. *Если для булевой функции f выполняется неравенство*

$$L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f),$$

то выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) *функция f удовлетворяет граничному условию;*

2) *функция f является $(1,1)$-равномерной;*

3) *функция f является $(3,2)$-равномерной;*

4) *функция f является $(5,3)$-равномерной;*

5) *функция $\overline{f}$ является $(2,2)$-равномерной, но не удовлетворяет граничному условию;*

6) *функция $\overline{f}$ является $(4,3)$-равномерной, но не удовлетворяет граничному условию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ справедливо неравенство $L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f)$, а сама функция не удовлетворяет граничному условию. Пусть S — минимальная схема для функции f. Рассмотрим два случая в зависимости от того, к какому типу относится последний (выходной) элемент схемы S.

Случай 1°. Пусть последний элемент схемы S — инвертор. Тогда, удалив из схемы S этот инвертор, получим схему S', реализующую функцию $\overline{f}$. По условию функция f не удовлетворяет граничному условию. Поэтому в силу леммы 38 верно неравенство $I(\overline{f}) \geqslant I(f)$. Из минимальности схемы S следует минимальность схемы S', поэтому $L_{B_-}(\overline{f}) = L(S')$.

Покажем, что для функции $\overline{f}$ верно равенство $L_{B_-}(\overline{f}) = 2I(\overline{f}) - 1$. Действительно, в противном случае ввиду леммы 36 выполнялось бы неравенство $L_{B_-}(\overline{f}) \geqslant 2I(\overline{f})$, которое приводит к противоречию с условием леммы:

$$L_{B_-}(f) = L(S) = L(S') + 1 = L_{B_-}(\overline{f}) + 1 \geqslant 2I(\overline{f}) + 1 \geqslant 2I(f) + 1.$$

Отметим, что функция $\overline{f}$ не может удовлетворять граничному условию, так как в противном случае в силу леммы 38 верно равенство $I(f) = I(\overline{f}) - 1$ и поэтому ввиду минимальности схем S и S' имеем цепочку равенств

$$L_{B_-}(f) = L_{B_-}(\overline{f}) + 1 = 2I(\overline{f}) = 2I(f) + 2,$$

которая противоречит не только условиям леммы, но даже и верхней оценке из леммы 36.

Таким образом, для функции $\overline{f}$ верно равенство $L_{B_-}(\overline{f}) = 2I(\overline{f}) - 1$ и у минимальной для функции $\overline{f}$ схемы S' последний элемент является монотонным элементом. Тогда для функции $\overline{f}$ выполняются условия леммы 41. Поэтому функция $\overline{f}$ является $(2, 2)$-равномерной или $(4, 3)$-равномерной.

Случай 2°. Пусть последний элемент схемы S является монотонным элементом. Из условий леммы, минимальности схемы S и леммы 36 следует, что выполняется одно из двух следующих равенств: $L(S) = 2I(f) - 1$ или $L(S) = 2I(f)$. Отдельно рассмотрим эти два случая.

Случай 2.1°. Пусть верно равенство $L(S) = 2I(f) - 1$. Тогда выполняются условия леммы 41. Следовательно, функция f является $(2, 2)$-равномерной или $(4, 3)$-равномерной. Если функция f является $(2, 2)$-равномерной, то, очевидно, она является $(3, 2)$-равномерной. Аналогично, если функция f является $(4, 3)$-равномерной, то она является $(5, 3)$-равномерной.

Случай 2.2°. Пусть верно равенство $L(S) = 2I(f)$. Обозначим через t_1 количество инверторов схемы S, на входы которых подаются входы схемы. Изучим вопрос, чему может быть равно значение t_1.

Положим $a = I(S) - I(f)$. В схеме S в силу ее минимальности выходы всех монотонных элементов подаются на входы инверторов или на выход схемы. С другой стороны, на входы всех инверторов, кроме t_1 первых, подаются выходы монотонных элементов. Следовательно,

$$L_{B_-}(S) = t_1 + 2(I(S) - t_1) + 1 = 2I(S) - t_1 = 2I(f) + 2a - t_1 + 1.$$

Поэтому, учитывая минимальность схемы S и условия леммы, получаем равенство

$$a = \frac{t_1 - 1}{2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает нечетность величины t_1. Далее, применяя необходимое число раз лемму 25, получаем

$$d(f) + 1 \leqslant (t_1 + 1) 2^{I(S) - t_1} = (t_1 + 1) 2^{I(f) + a - t_1} = \frac{(t_1 + 1)\, 2^{I(f)}}{2^{(t_1+1)/2}}.$$

Для всех значений t_1, удовлетворяющих условию $t_1 \geqslant 7$, справедливо неравенство

$$\frac{(t_1+1)\,2^{I(f)}}{2^{(t_1+1)/2}} \leqslant 2^{I(f)-1},$$

которое приводит к противоречию:

$$d(f)+1 \leqslant 2^{I(f)-1} < d(f)+1.$$

Таким образом, допустимыми значениями параметра t_1 являются только 1, 3 и 5, при этом значение параметра a будет 0, 1 и 2 соответственно.

Итак, в условиях случая 2.2° установлено, что для функции f некоторая минимальная схема S либо содержит в точности $I(f)$ инверторов и ровно на один из них подается выход схемы, либо содержит в точности $I(f)+1$ инвертор и ровно на 3 из них подаются входы схемы, либо содержит в точности $I(f)+2$ инверторов и ровно на 5 из них подаются входы схемы. Подробнее рассмотрим эти три возможных случая.

Случай 2.2.1°. Пусть S — минимальная в базисе B_- схема для функции $f(x_1,\dots,x_n)$, $L(S)=2I(f)$, $I(S)=I(f)$, последний элемент схемы S — монотонный элемент, на вход ровно одного инвертора схемы S подается вход схемы.

В схеме S выделим первый инвертор, т. е. элемент e_{11}, если рассматривать каноническое представление схемы S. Без ограничения общности будем считать, что на вход этого инвертора подается переменная x_1. Преобразуем схему S в схему S', заменив инвертор e_{11} на еще один вход схемы, которому припишем новую переменную y. Тем самым новая схема S' реализует некоторую функцию $g(x_1,\dots,x_n,y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1,\dots,x_n,\overline{x}_1)=f(x_1,\dots,x_n)$,

2) $I(g)\leqslant I(f)-1$.

Тогда для любого значения σ, $\sigma\in\{0,1\}$ верны следующие соотношения:

$$\lceil\log_2(d(f(\sigma,x_2,\dots,x_n))+1)\rceil = \lceil\log_2(d(g(\sigma,x_2,\dots,x_n,\overline{\sigma}))+1)\rceil \leqslant$$
$$\leqslant \lceil\log_2(d(g(x_1,x_2,\dots,x_n,y))+1)\rceil = I(g)\leqslant I(f)-1.$$

Значит, функция f является 1-равномерной по переменной x_1, а следовательно, $(1,1)$-равномерной.

Случай 2.2.2°. Пусть S — минимальная в базисе B_- схема для функции $f(x_1,\dots,x_n)$, $L(S)=2I(f)$, $I(S)=I(f)+1$, последний элемент схемы S — монотонный элемент, на вход ровно трех инверторов схемы S подаются входы схемы.

В схеме S выделим те три инвертора, на входы которых подаются переменные. Без ограничения общности будем считать, что это переменные x_1, x_2 и x_3. Преобразуем схему S в схему S', заменив выделенные инверторы на три дополнительных входа схемы, которым припишем новые переменные y_1, y_2, y_3. Тем самым новая схема S' реализует некоторую функцию $g(x_1,\dots,x_n,y_1,y_2,y_3)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1,\dots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=f(x_1,\dots,x_n)$,

2) $I(g)\leqslant I(f)-2$.

Тогда для любого набора $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \{0, 1\}^3$ верны следующие соотношения:

$$\lceil \log_2(d(f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \ldots, x_n)) + 1) \rceil =$$
$$= \lceil \log_2(d(g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \ldots, x_n, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3)) + 1) \rceil \leqslant$$
$$\leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3)) + 1) \rceil = I(g) \leqslant I(f) - 2.$$

Значит, функция f является 2-равномерной по переменным x_1, x_2 и x_3, а следовательно, $(3, 2)$-равномерной.

Случай 2.2.3°. Пусть S — минимальная в базисе B_- схема для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $L(S) = 2I(f)$, $I(S) = I(f) + 2$, последний элемент схемы S — монотонный элемент, на вход ровно пяти инверторов схемы S подаются входы схемы.

В схеме S выделим те пять инверторов, на входы которых подаются переменные. Без ограничения общности будем считать, что это переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Преобразуем схему S в схему S', заменив выделенные инверторы на пять дополнительных входов схемы, которым припишем новые переменные y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Тем самым новая схема S' реализует некоторую функцию $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $g(x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5) = f(x_1, \ldots, x_n)$,

2) $I(g) \leqslant I(f) - 3$.

Тогда для любого набора $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \in \{0, 1\}^5$ верны следующие соотношения:

$$\lceil \log_2(d(f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, x_6, \ldots, x_n)) + 1) \rceil =$$
$$= \lceil \log_2(d(g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, x_6, \ldots, x_n, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \overline{\sigma}_4, \overline{\sigma}_5)) + 1) \rceil \leqslant$$
$$\leqslant \lceil \log_2(d(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)) + 1) \rceil = I(g) \leqslant I(f) - 3.$$

Значит, функция f является 3-равномерной по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, а следовательно, $(5, 3)$-равномерной.

Лемма 44 доказана.

Доказательство того, что для выполнения неравенства $L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f)$ необходимое условие, сформулированное в лемме 44, является и достаточным, вытекает из лемм 42 и 39, а также следующего утверждения.

Лемма 45. *Если функция $\overline{f}$ не удовлетворяет граничному условию, но является (p, u)-равномерной, то для функции f справедливо неравенство*

$$L_{B_-}(f) \leqslant 2I(f) + p - 2u + 2.$$

Доказательство. Так как функция $\overline{f}$ не удовлетворяет граничному условию, то по лемме 38 верно соотношение $I(f) \geqslant I(\overline{f})$. Далее, применяя лемму 42, получаем

$$L_{B_-}(\overline{f}) \leqslant 2I(\overline{f}) + p + 1 - 2u \leqslant 2I(f) + p - 2u + 1.$$

Для завершения доказательства осталось использовать очевидное неравенство $L_{B_-}(f) \leqslant L_{B_-}(\overline{f}) + 1$.

Лемма 45 доказана.

Таким образом, леммы 36, 40–45 дают полное решение задачи о нахождении точного значения сложности произвольной булевой функции при реализации схемами над изучаемым бесконечным базисом. Объединим результаты этих лемм в одну теорему.

Теорема 14 [49]. *Величина сложности реализации произвольной булевой функции схемами в базисе, состоящим из отрицания и всех монотонных булевых функций, однозначно определяется из трех следующих утверждений:*

I. *Для любой булевой функции f справедливы неравенства*

$$2\lceil\log_2(d(f)+1)\rceil - 1 \leqslant L_{B_-}(f) \leqslant 2\lceil\log_2(d(f)+1)\rceil + 1.$$

II. *Для булевой функции f равенство*

$$L_{B_-}(f) = 2\lceil\log_2(d(f)+1)\rceil - 1$$

истинно только в двух следующих случаях:

1) *функция f удовлетворяет граничному условию и либо функция f — отрицание переменной, либо функция $\overline{f}$ является $(1,1)$-равномерной или $(3,2)$-равномерной;*

2) *функция f является $(2,2)$-равномерной или $(4,3)$-равномерной.*

III. *Для булевой функции f неравенство*

$$L_{B_-}(f) \leqslant 2\lceil\log_2(d(f)+1)\rceil$$

выполняется тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

1) *функция f удовлетворяет граничному условию;*

2) *функция f является $(1,1)$-равномерной;*

3) *функция f является $(3,2)$-равномерной;*

4) *функция f является $(5,3)$-равномерной;*

5) *функция $\overline{f}$ является $(2,2)$-равномерной, но не удовлетворяет граничному условию;*

6) *функция $\overline{f}$ является $(4,3)$-равномерной, но не удовлетворяет граничному условию.*

Замечание. В приведенном доказательстве теоремы 14 практически не используется каноническое представление минимальной схемы в базисе B_- (а в доказательстве из [49] совсем не используется), хотя исходное доказательство существенно на него опиралось.

Замечание. Конструктивность доказательств лемм 39, 42, 43, 45, верхней оценки теоремы Маркова и леммы о переключателе позволяет для произвольной булевой функции описать метод построения минимальной схемы в базисе B_-.

§ 5. Немонотонная сложность функций k-значной логики

Теорема 4 устанавливает точное значение немонотонной сложности для произвольной функции k-значной логики над двумя естественными базисами $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$, где $N_P(x)$ — отрицание Поста, т. е. функция $x+1 \pmod k$, а $N_L(x)$ — отрицание Лукасевича, т. е. функции $k-1-x$:

$$I_{B_P}(f) = \lceil \log_2(d(f)+1) \rceil\,, \qquad I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f)+1) \rceil\,.$$

В случае произвольного базиса B вида $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_k \setminus M$ $(i = 1, \ldots, p,\ p \geqslant 1)$, где функциям из множества M приписан нулевой вес, а функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — единичный, из результатов работ [36, 95] следует, что найдется такая константа $c(B)$, что для любой функции k-значной логики f выполняются неравенства

$$\left\lceil \log_{u(B)}(d(f)+1) \right\rceil - c(B) \leqslant I_B(f) \leqslant \left\lceil \log_{u(B)}(d(F)+1) \right\rceil\,,$$

(здесь $u(B)$ — инверсионная сила базиса B, характеристика базиса, определенная в § 3).

Эти оценки далеки от окончательных, так как константа $c(B)$ может оказаться сколь угодно большой: для любого заданного значения N найдется базис B_N вида $M \cup \{h_N\}$ и функция g_N, для которых справедливо неравенство $\left\lceil \log_{u(B)}(d(g_N)+1) \right\rceil - I_{B_N}(g_N) > N$.

В булевом случае теорема 3 устанавливает в некотором смысле окончательный результат: для любой булевой функции f и любого базиса B описанного вида справедливо равенство

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil\,,$$

где $D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}$.

Для случая реализации функций k-значной логики существенное продвижение получено в работе [46] (см. также [45]): установлено, что для любой функции k-значной логики f и для произвольного базиса B указанного вида выполняются неравенства

$$\left\lceil \log_{u(B)}\!\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right) \right\rceil - (\log_2 k + 2) \leqslant I_B(f) \leqslant \left\lceil \log_{u(B)}\!\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right) \right\rceil + k^3.$$

Эти оценки усилены в [47].

Основным результатом настоящего параграфа является доказательство следующих оценок немонотонной сложности функций многозначной логики.

Теорема 15[48]. *Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда для любой функции k-значной логики f справедливы неравенства*

$$\log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) - 1 < I_B(f) < \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) + 3 \log_2 k + 3.$$

5.1. Нижняя оценка. В основе доказательства нижней оценки немонотонной сложности функций k-значной логики лежат идеи из работы [95], которые позже были развиты в [46, 48].

Лемма 46. *Пусть последовательность $A = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ элементов множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ для некоторого натурального l обладает следующим свойством: для всякой подпоследовательности $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$ последовательности A, удовлетворяющей условию*

$a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_t}$, *выполняется неравенство* $t \leqslant l$. *Тогда последовательность* A *можно разбить на* l *непересекающихся неубывающих подпоследовательностей* $A_1, \ldots, A_l$. *удовлетворяющих следующему свойству: для любых двух идущих подряд элементов* a_i *и* a_{i+1} *последовательности* A, *лежащих, соответственно, в подпоследовательностях* $A_{j(i)}$ *и* $A_{j(i+1)}$, *в случае выполнения неравенства* $j(i) > j(i+1)$ *должно выполняться и неравенство* $a_i > a_{i+1}$.

Доказательство. Проведем индукцию по параметру l.

Если параметр равен 1, то последовательность A не убывает. Следовательно, сама последовательность A и является искомым разбиением на l последовательностей.

Пусть для всех значений параметра, не превосходящих $l-1$, утверждение леммы справедливо. Докажем его для значения параметра, равного l.

Если в последовательности A не существует подпоследовательности $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$ длины в точности l, удовлетворяющей условию $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_l}$, то достаточно воспользоваться предположением индукции. Если же хотя бы одна такая подпоследовательность существует, то выпишем все эти подпоследовательности длины l (пусть их будет p штук, $p \geqslant 1$):

$$a_{i(1,1)}, a_{i(2,1)}, \ldots, a_{i(l,1)};$$

$$a_{i(1,2)}, a_{i(2,2)}, \ldots, a_{i(l,2)};$$

$$\ldots$$

$$a_{i(1,p)}, a_{i(2,p)}, \ldots, a_{i(l,p)}.$$

Отметим следующий важный факт: условие $i(1,j_1) < i(1,j_2)$ влечет соотношение $a_{i(1,j_1)} \leqslant a_{i(1,j_2)}$. Действительно, если бы было верно неравенство $a_{i(1,j_1)} > a_{i(1,j_2)}$, то для подпоследовательности

$$a_{i(1,j_1)}, a_{i(1,j_2)}, a_{i(2,j_2)}, \ldots, a_{i(l,j_2)}$$

длины $l+1$ выполнялись бы соотношения

$$a_{i(1,j_1)} > a_{i(1,j_2)} > a_{i(2,j_2)} > \ldots > a_{i(l,j_2)},$$

что противоречит условию леммы.

Теперь в качестве искомой подпоследовательности A_l возьмем упорядоченную по увеличению значения номера (в последовательности A) последовательность элементов множества $\{a_{i(1,1)}, a_{i(1,2)}, \ldots, a_{i(1,p)}\}$.

Пусть $a_i \in A_l$, $a_{i+1} \notin A_l$. Покажем, что тогда $a_i > a_{i+1}$. Действительно, по построению элемент a_i — начало некоторой строго убывающей подпоследовательности длины l последовательности A. Если было бы верно неравенство $a_i \leqslant a_{i+1}$, то, заменив в этой подпоследовательности элемент a_i на элемент a_{i+1}, получили бы строго убывающую подпоследовательность длины l, начинающуюся с элемента a_{i+1}, что противоречит отсутствию элемента a_{i+1} в подпоследовательности A_l.

После удаления подпоследовательности A_l из исходной последовательности A для любой подпоследовательности $a_{i(1)}, a_{i(2)}, \ldots, a_{i(t)}$ получившейся последовательности, удовлетворяющей соотношениям $a_{i(1)} > a_{i(2)} > \ldots > a_{i(t)}$, выполняется неравенство $t \leqslant l-1$. Применение предположения индукции завершает доказательство леммы.

Лемма 47. *Пусть схема S реализует над базисом B функцию k-значной логики f. Тогда справедливо неравенство*

$$d(f) \leqslant D(B)u(B)\frac{(u(B))^{I_B(S)}-1}{u(B)-1}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по величине $I_B(S)$.

Если $I_B(S)=0$, то функция f монотонна. Следовательно, $d(f)=0$.

Пусть для любой схемы S' над базисом B, для которой справедливо соотношение $I_B(S') \leqslant I_B(S)-1$, утверждение леммы выполняется.

В схеме S со входами $x_1, \ldots, x_n$ выделим первую относительно некоторой правильной нумерации (т. е. нумерации, при которой на входы элементов не могут подаваться выходы элементов с бóльшими номерами) вершину, которой приписана какая-либо функция из множества $\{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, Функциональный элемент, соответствующий этой вершине, обозначим через E, а функцию из немонотонной части базиса B, приписанную элементу E, обозначим через ω_E. Пусть на выходе элемента E реализуется функция $h(x_1, \ldots, x_n)$. Преобразуем схему S, удалив из нее элемент E, создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S' реализует функцию $g(y, x_1, \ldots, x_n)$, для которой выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g\left(h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n\right).$$

Кроме того, справедливо равенство $I_B(S') = I_B(S)-1$.

Пусть цепь

$$C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$$

имеет падение $d(f)$.

Рассмотрим последовательность C' наборов длины $n+1$:

$$(h(\widetilde{\alpha}_1), \widetilde{\alpha}_1), \ldots, (h(\widetilde{\alpha}_r), \widetilde{\alpha}_r).$$

Последовательность C', вообще говоря, не является цепью, так как последовательность

$$C_h = \left(h(\widetilde{\alpha}_1), \ldots, h(\widetilde{\alpha}_r)\right),$$

вообще говоря, не является неубывающей. Обозначим через l наименьшее натуральное значение, для которого для всякой подпоследовательности $\left(h(\widetilde{\alpha}_{i_1}), h(\widetilde{\alpha}_{i_2}), \ldots, h(\widetilde{\alpha}_{i_t})\right)$ последовательности C_h, удовлетворяющей условию $h(\widetilde{\alpha}_{i_1}) > h(\widetilde{\alpha}_{i_2}) > \ldots > h(\widetilde{\alpha}_{i_t})$, выполняется неравенство $t \leqslant l$. Отметим, что выполняются неравенства $l \leqslant u(\omega_E) \leqslant u(B)$.

В соответствии с леммой 46 разобьем последовательность C_h на l непересекающихся неубывающих последовательностей $C_{h1}, \ldots, C_{hl}$. Пусть p — минимальное значение среди всех значений индекса i, для которых элементы $h(\widetilde{\alpha}_i)$ и $h(\widetilde{\alpha}_{i+1})$ последовательности C_h лежат в разных подпоследовательностях. Без ограничения общности можно считать, что выполняется неравенство $h(\widetilde{\alpha}_i) > h(\widetilde{\alpha}_{i+1})$ (в ином случае присоединим начальный кусок первой подпоследовательности ко второй подпоследовательности). Полученное разбиение последовательности C_h индуцирует разбиение последовательности C' на подпоследовательности $C'_1, C'_2, \ldots, C'_l$. Каждая из последовательностей наборов C'_j, $j=1,2,\ldots,l$, является цепью наборов длины $n+1$.

Отметим, что первые разряды в наборах последовательности C' уменьшают свое значение не более $d(h)\leqslant d(\omega_E)$ раз. Поэтому в силу построения разбиения последовательности C' при движении от элемента с номером $p+1$ последовательности C' к ее концу количество переходов от одной подпоследовательности к подпоследовательности с меньшим номером не превосходит величины $d(\omega_E)-1$. Следовательно, при движении от начала последовательности C' к ее концу количество всех переходов от одной подпоследовательности к другой также не превосходит величины $ld(\omega_E)$.

Из этих соображений вытекает оценка

$$d(f)=d_C(f)\leqslant d_{C'_1}(g)+d_{C'_2}(g)+\ldots+d_{C'_l}(g)+ld(\omega_E).$$

По предположению индукции для i, $i=1,2,\ldots,l$, выполняются соотношения

$$d_{C'_i}(g)\leqslant d(g)\leqslant D(B)u(B)\frac{(u(B))^{I_B(S')}-1}{u(B)-1}=D(B)u(B)\frac{(u(B))^{I_B(S)-1}-1}{u(B)-1}.$$

Окончательно, учитывая неравенства $l\leqslant u(\omega_E)\leqslant u(B)$, $d(\omega_E)\leqslant D(B)$, получаем:

$$\begin{aligned}d(f)=d_C(f)\leqslant d_{C'_1}(g)+d_{C'_2}(g)+\ldots+d_{C'_l}(g)+u(B)D(B)\leqslant\\ \leqslant D(B)u(B)\left(u(B)\frac{(u(B))^{I_B(S)-1}-1}{u(B)-1}+1\right)=D(B)u(B)\frac{(u(B))^{I_B(S)}-1}{u(B)-1}.\end{aligned}$$

Лемма 47 доказана.

Л е м м а 48. *Для произвольной функции k-значной логики f справедливо неравенство*

$$I_B(f)>\log_{u(B)}\left(\frac{d(f)}{D(B)}+1\right)-\log_{u(B)}\frac{u(B)}{u(B)-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой схемы S, реализующей в базисе B функцию f, в силу леммы 2 выполняется соотношение

$$\frac{d(f)}{D(B)}\leqslant\frac{(u(B))^{I_B(S)+1}-u(B)}{u(B)-1}.$$

Поэтому

$$\frac{d(f)}{D(B)}+1\leqslant\frac{(u(B))^{I_B(f)+1}-1}{u(B)-1}=(u(B))^{I_B(f)}+\frac{(u(B))^{I_B(f)}-1}{u(B)-1}<(u(B))^{I_B(f)}\,\frac{u(B)}{u(B)-1}.$$

Логарифмируя, получаем нужное неравенство. Лемма 48 доказана.

Из леммы 48 непосредственно следует нижняя оценка теоремы 15.

5.2. Верхняя оценка. Основой для доказательства верхней оценки будет соответствующая лемма о переключателе. На этот раз нам потребуется утверждение, аналогичное лемме 10, но справедливое уже для базиса, содержащего несколько немонотонных функций. Формулировка будет более громоздкой, но при этом она позволит не переделывать доказательство леммы 10. Предварительно дадим некоторые дополнительные определения.

Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда для фиксированной немонотонной функции ψ из базиса B произвольную схему S над базисом B будем называть *ψ-правильной*, если существует такая правильная нумерация всех элементов схемы S, что среди всех элементов схемы, которым приписаны немонотонные функции базиса, наименьший номер имеет элемент, которому приписана функция ψ. Будем также схему считать ψ-правильной, если всем элементам схемы приписаны монотонные функции базиса.

Доказательство следующей леммы почти полностью совпадает с доказательством леммы 10.

Лемма 49. *Пусть базис B вида $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$, содержит немонотонную функцию ψ; пусть для функций $f_1, \ldots, f_s$ и некоторого натурального A найдутся ψ-правильные схемы $S_1, \ldots, S_s$ над базисом B, реализующие эти функции и удовлетворяющие условию $I_B(S_j) \leqslant A$, $j = 1, \ldots, s$. Тогда для упорядоченного набора функций $(f_1, \ldots, f_s)$ найдется s-переключатель g и такая реализующая его ψ-правильная схема S над базисом B, что выполняется неравенство $I_B(S) \leqslant A$.*

Лемма 50. *Пусть $f \in P_k$, $\psi \in P_k \setminus M$, $B = M \cup \{\psi\}$, $d(f) \leqslant \frac{d(\psi)}{(k-1)^2} - 1$. Тогда*

$$I_B(f) \leqslant \lceil \log_2 k \rceil.$$

Доказательство. Пусть функции f и ψ зависят от s и t переменных соответственно.

Положим

$$\chi_i(x_1, \ldots, x_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi(x_1, \ldots, x_t) \geqslant i; \\ 0, & \text{если } \psi(x_1, \ldots, x_t) < i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Отметим, что если пара $\left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right)$ наборов из E_k^t является обрывом для функции ψ, то эта пара наборов является обрывом хотя бы для одной из функций $\chi_i(x_1, \ldots, x_t)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Поэтому справедливо неравенство

$$d(\chi_1) + d(\chi_2) + \ldots + d(\chi_{k-1}) \geqslant d(\psi).$$

Обозначим через φ функцию из построенного множества $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}\}$, имеющую наибольшее значение спада. Очевидно, что выполняются соотношения

$$d(\varphi) \geqslant \frac{d(\psi)}{k-1}, \quad I_B(\varphi) = 1.$$

Положим $q = \lceil \log_2 k \rceil$. Представим исходную функцию $f = f(\widetilde{x})$ в виде набора из q функций $f_1(\widetilde{x}), f_2(\widetilde{x}), \ldots, f_q(\widetilde{x})$ в соответствии с двоичным представлением:

$$f = f_1 2^{q-1} + f_2 2^{q-2} + \ldots + f_{q-1} 2^1 + f_q 2^0.$$

Отметим, что для получения функции $f(\widetilde{x})$ из функций $f_1(\widetilde{x})$, $f_2(\widetilde{x}), \ldots, f_q(\widetilde{x})$ достаточно использовать только монотонные функции.

Теперь докажем, что для каждого i, $i=1,\ldots,q$, истинно неравенство

$$d(f_i)\leqslant 2^{i-1}(d(f)+1).$$

Это соотношение вытекает из следующего утверждения.

Пусть подпоследовательность идущих подряд элементов максимальной (неуплотняемой) цепи наборов из множества E_k^s для некоторого $i\in\{1,2,\ldots,q\}$ содержит 2^{i-1} обрывов для функции f_i. Тогда среди этих 2^{i-1} обрывов для функции f_i есть хотя бы один обрыв для функции f.

Действительно, пусть это не так, т. е. найдется подпоследовательность идущих подряд наборов исходной последовательности, в которой для функции f_i содержится 2^{i-1} обрывов, а для функции f обрывы отсутствуют. Тогда в этой подпоследовательности найдется, в свою очередь, подпоследовательность $\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_{2^i}$, удовлетворяющая условиям:

1) $f_i(\widetilde{\beta}_{2j-1})=1$, $j=1,\ldots,2^{i-1}$;

2) $f_i(\widetilde{\beta}_{2j})=0$, $j=1,\ldots,2^{i-1}$;

3) $f(\widetilde{\beta}_1)\leqslant f(\widetilde{\beta}_2)\leqslant\ldots\leqslant f(\widetilde{\beta}_{2^i})$.

Так как для любых двух соседних наборов $\widetilde{\beta}_a$ и $\widetilde{\beta}_{a+1}$ выполняются соотношения $f_i(\widetilde{\beta}_a)\neq f_i(\widetilde{\beta}_{a+1})$ и $f(\widetilde{\beta}_a)\leqslant f(\widetilde{\beta}_{a+1})$, то справедливы неравенства $f(\widetilde{\beta}_a)<f(\widetilde{\beta}_{a+1})$. С учетом этих неравенств получаем также неравенства

$$f(\widetilde{\beta}_{2j-1})\geqslant 2^{q-i}+(j-1)2^{q-i+1},\quad f(\widetilde{\beta}_{2j})\geqslant j2^{q-i+1},\qquad j=1,\ldots,2^{i-1}.$$

Тем самым при $j=2^{i-1}$ получаем неравенство $f(\widetilde{\beta}_{2^i})\geqslant 2^q$, что невозможно.

Таким образом, неформально говоря, для любой максимальной цепи среди любых идущих подряд 2^i обрывов для функции f_i найдется хотя бы один обрыв для функции f. Поэтому

$$d(f)\geqslant\left\lfloor\frac{d(f_i)}{2^{i-1}}\right\rfloor>\frac{d(f_i)}{2^{i-1}}-1.$$

Следовательно,

$$d(f_i)<(d(f)+1)2^{i-1}.$$

Таким образом, для любого i, $i=1,\ldots,q$, с учетом условий леммы выполняются неравенства

$$d(f_i)<(d(f)+1)(k-1)\leqslant\frac{d(\psi)}{k-1}\leqslant d(\varphi).$$

Отсюда, в силу того, что и функции f_i, и функция φ принимают не более двух значений, имеем:

$$I_B(f_i)\leqslant I_{M\cup\{\varphi\}}(f_i)\leqslant 1,\quad i=1,\ldots,q.$$

Как уже отмечалось, из функций f_i, $i=1,\ldots,q$, можно построить монотонную формулу для функции f, поэтому $I_B(f)\leqslant q=\lceil\log_2 k\rceil$. Лемма 50 доказана.

Непосредственно из леммы 50 вытекает следующее утверждение.

Лемма 51. *Пусть* $f\in P_k$, $\psi\in P_k\setminus M$, $B\supseteq M\cup\{\psi\}$, $D(B)=d(\psi)$, $d(f)\leqslant\frac{D(B)}{(k-1)^2}$. *Тогда для функции f найдется ψ-правильная схема в базисе B, удовлетворяющая условию*

$$I_B(S)\leqslant\lceil\log_2 k\rceil+1.$$

Лемма 52. *Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда для любой функции f найдется немонотонная функция ψ из базиса B, для которой существует ψ-правильная схема S, реализующая функцию f над базисом B и удовлетворяющая условию*

$$I_B(S) \leqslant \left\lceil \log_{u(B)} \max\left(\frac{(k-1)^2 d(f)}{D(B)}, 1\right)\right\rceil + \lceil \log_2 k \rceil + 1.$$

Доказательство. Пусть $u(B) = s$, $D(B) = t$. Выберем в базисе B функцию $\omega(x_1, \ldots, x_l)$, удовлетворяющую условию $u(\omega) = s$, и функцию φ, удовлетворяющую условию $d(\varphi) = t$. Положим $B' = M \cup \{\omega, \varphi\}$. Искомую ψ-правильную схему S будем строить в базисе B' и в качестве функции ψ будет выступать либо функция φ, либо функция ω.

Утверждение леммы будем доказывать индукцией по величине

$$W(f) = \left\lceil \log_s \max\left(\frac{(k-1)^2 d(f)}{t}, 1\right)\right\rceil, \quad W(f) = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем при $W(f) = 0$ роль функции ψ из формулировки леммы будет выполнять функция φ, а при $W(f) \geqslant 1$ — функция ω.

База индукции: $W(f) = 0$. В этом случае выполняется неравенство $d(f) \leqslant t/(k-1)^2$. Тогда в силу леммы 51 для функции f найдется φ-правильная схема S над базисом $M \cup \{\varphi\}$, а следовательно, и над базисом B', удовлетворяющая неравенству $I_{B'}(S) \leqslant \lceil \log_2 k \rceil + 1$.

Шаг индукции. Пусть $W(f) \geqslant 1$ и для любой функции g, для которой справедливо соотношение $W(g) \leqslant W(f) - 1$, утверждение, доказываемое по индукции, выполняется.

Будем считать, что функция f зависит от n переменных. Обозначим через T_1 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) \leqslant s^{W(f)-1} t/(k-1)^2$, т. е.

$$T_1 = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \mid d_C(f) \leqslant s^{W(f)-1} t/(k-1)^2 \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha}\}.$$

Далее, для $i = 2, \ldots, s-1$ обозначим через T_i множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C наборов из множества $E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) \leqslant s^{W(f)-1} t/(k-1)^2$, т. е.

$$T_i = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}) \mid d_C(f) \leqslant s^{W(f)-1} t/(k-1)^2$$
$$\text{для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha},\ C \subset E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})\}.$$

Наконец, положим

$$T_s = E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{s-1}).$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha} \in T_i$ и $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta} \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}$, $i = 1, \ldots, s$.

Теперь докажем, что для любой цепи C наборов из множества T_s также выполняется неравенство $d_C(f) \leqslant s^{W(f)-1} t/(k-1)^2$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_s с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_s}(f) > s^{W(f)-1} t$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}_s$ не лежит в множестве T_{s-1}, то найдется цепь C_{s-1} с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_{s-1}$, $\widetilde{\alpha}_{s-1} \in T_{s-1}$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_s$, $\widetilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_{s-1}}(f) > s^{W(f)-1}t/(k-1)^2$. Аналогично, последовательно для $i = s-2, \ldots, 1$ устанавливаем существование цепи C_i с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_i \in T_i$, и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, $\widetilde{\alpha}_{i+1} \in T_{i+1}$, для которой выполняется неравенство $d_{C_i}(f) > s^{W(f)-1}t/(k-1)^2$.

Тогда для цепи $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ справедливы соотношения

$$d_C(f) = d_{C_1}(f) + \ldots + d_{C_s}(f) > s\frac{s^{W(f)-1}t}{(k-1)^2} = \frac{s^{W(f)}t}{(k-1)^2} \geqslant d(f),$$

что противоречит определению величины $d(f)$.

Далее для $i = 1, \ldots, s$ положим

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}; \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_i; \\ k-1, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_{i+1} \cup \ldots \cup T_s. \end{cases}$$

В силу определения функций f_i выполняются неравенства

$$d(f_i) \leqslant \frac{s^{W(f)-1}t}{(k-1)^2}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Поэтому

$$W(f_i) = \left\lceil \log_s \max\left(\frac{(k-1)^2 d(f_i)}{t}, 1\right)\right\rceil \leqslant \left\lceil \log \max\left(s^{W(f)-1}, 1\right)\right\rceil = W(f) - 1,$$
$$i = 1, \ldots, s.$$

В силу определения величины $s = u(\omega)$ найдется цепь

$$(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1l}), (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2l}), \ldots, (\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sl}),$$

удовлетворяющая условию

$$\omega(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1l}) > \omega(\beta_{21}, \ldots, \beta_{2l}) > \ldots > \omega(\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sl}).$$

Функции $\xi_1, \ldots, \xi_l$ определим равенствами

$$\xi_j(x_1, \ldots, x_n) = \beta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, l,$$

справедливыми для всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i.

Далее положим $b_i = \omega(\beta_{i1}, \ldots, \beta_{il})$, $i = 1, \ldots, s$.

Теперь определим функции $\lambda_j(x)$, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j; \\ 1, & \text{если } x \geqslant j. \end{cases}$$

И, наконец, введем функции $\mu_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, s$:

$$\mu_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}; \\ 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in T_i \cup \ldots \cup T_s. \end{cases}$$

Отметим, что все введенные функции монотонны.

Теперь рассмотрим упорядоченный набор функций $(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_s(\widetilde{x}))$. Отметим, что выполняются соотношения $W(f_i) \leqslant W(f)-1$, $i=1, \ldots, s$.

В случае истинности равенства $W(f) = 1$ для каждой функции f_i, $i=1, \ldots, s$, по доказанному найдется φ-правильная схема S_i над базисом B', удовлетворяющая неравенству $I_{B'}(S_i) \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil$.

При выполнении соотношения $W(f) \geqslant 2$ для каждой функции f_i, для которой верно равенство $W(f_i) = W(f) - 1$, по предположению индукции найдется ω-правильная схема S_i над базисом B', удовлетворяющая неравенству $I_{B'}(S_i) \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil$, а для каждой функции f_j, для которой верно соотношение $W(f_j) \leqslant W(f) - 2$, по предположению индукции выполняется неравенство $I_{B'}(f) \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil - 1$, и следовательно найдется ω-правильная схема S_j над базисом B', удовлетворяющая неравенству $I_{B'}(S_j) \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil$.

Таким образом, в любом случае выполнены условия леммы 49. Применяя эту лемму, получаем, что найдется s-переключатель $g(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x})$ набора функций $(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_s(\widetilde{x}))$ и схема S_g, реализующая функцию g над базисом B' и удовлетворяющая условию $I_{B'}(S_g) \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil$.

Перестроим схему S_g, реализующую функцию $g(z_1, \ldots, z_s, \widetilde{x})$ над базисом B', подав на входы, соответствующие переменным z_i, $i = 1, \ldots, s$, функции

$$Z_i(x_1, \ldots, x_n) = \min \left\{ \lambda_{b_i} \left(\omega(\xi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \xi_l(x_1, \ldots, x_n)) \right), \mu_i(x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

Учитывая, что функция $Z_i(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в единицу на наборах из множества T_i, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_i справедливы равенства

$$g(Z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Z_s(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) = \\ = f_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

$i = 1, \ldots, s$.

Для реализации функций $Z_1, \ldots, Z_s$ помимо использования монотонных функций потребовалось лишь однократное использование функции ω.

Схема S реализует функцию f над базисом B', является ω-правильной и для нее справедливы соотношения

$$I_{B'}(S) \leqslant I_{B'}(S_g) + 1 \leqslant W(f) + \lceil \log_2 k \rceil + 1.$$

Лемма 52 доказана.

Лемма 53. *Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда для любой функции k-значной логики f справедливо неравенство*

$$I_B(f) \leqslant \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) + \lceil \log_2 k \rceil + 2 \log_{u(B)}(k-1) + 2.$$

Лемма 53 непосредственно следует из леммы 52 и завершает доказательство верхней оценки теоремы 15.

5.3. Дополнительные замечания о немонотонной сложности функций многозначной логики. И нижняя и верхняя оценки, сформулированные в теореме 15, несколько слабее соответствующих оценок из лемм 48 и 53.

Во многих случаях из леммы 48 вытекает неравенство

$$I_B(f) \geqslant \left\lceil \log_{u(B)} \left(\frac{d(f)}{d(B)} + 1 \right) \right\rceil ,$$

в котором величина в правой части очень похожа на точное значение немонотонной сложности булевых функций, установленное в теореме 3, с той лишь разницей, что у булевых функций инверсионная сила базиса всегда равна 2. Однако в случае реализации функций многозначной логики указанная нижняя оценка может как совпадать с величиной немонотонной сложности, так и отличаться от нее с ростом значности логики k на величину порядка $\log k$.

Например, с одной стороны, для функций k-значной логики f и φ, $\varphi \notin M$, принимающих только два значения, немонотонная сложность функции f в базисе $B_1 = M \cup \{\varphi\}$ определяется равенством

$$I_{B_1}(f) = \left\lceil \log_{u(B_1)} \left(\frac{d(f)}{d(B_1)} + 1 \right) \right\rceil ,$$

а с другой стороны, при реализации отрицания Лукасевича N_L в базисе $B_2 = M \cup \{x_1 + x_2 + \ldots + x_m \pmod 2\}$ справедливо равенство

$$I_{B_2}(N_L) = \lceil \log_2 k \rceil ,$$

в то время как при всех достаточно больших m верно равенство

$$\left\lceil \log_{u(B_2)} \left(\frac{d(f)}{d(B_2)} + 1 \right) \right\rceil = 1.$$

Последний пример также показывает, что в случае реализации функций многозначной логики немонотонная сложность функции f в базисе B, вообще говоря, не определяется только параметрами $d(f)$, $D(B)$ и $u(B)$. Действительно, при достаточно больших значениях m при реализации в базисе B_2 функции g, принимающей два значения и удовлетворяющей условию $d(g) = d(N_L)$, истинно равенство $I_{B_2}(g) = 1$, а следовательно, и равенство $I_{B_2}(f) - I_{B_2}(g) = \lceil \log_2 k \rceil - 1$.

При формулировке верхней оценки теоремы 15 на основании оценки из леммы 53 во главу угла была поставлена компактность формулировки при некотором огрублении самой оценки. Это связано с тем, что качественный результат формулировка теоремы предоставляет очень наглядно, а до окончательного результата, заключающегося в нахождении точного значения немонотонной сложности каждой функции многозначной логики в произвольном базисе описанного вида, еще очень далеко. Последняя задача представляется очень тяжелой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. А. О нижних оценках сложности функций многозначной логики над бесконечными базисами // Прикладная дискретная математика. — 2015. — № 29. — С. 5–16.
2. Берелехис И. А. О схемной сложности некоторых предполных замкнутых классов в базисах, содержащих элементы с нулевыми весами. — Дипломная работа / Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет. — 2022.

3. Варшавский В. И. О сложности схем глубины два, построенных из пороговых элементов // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 139, № 6. — С. 1325–1328.
4. Варшавский В. И. Функциональные возможности и синтез пороговых элементов // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 139, № 5. — С. 1071–1074.
5. Варшавский В. И. Некоторые вопросы теории логических сетей, построенных из пороговых элементов // Вопросы теорий математических машин. — 1962. — № 2. — С. 52–106.
6. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — ФИЗМАТЛИТ, 2009.
7. Гаврилов М. А. Теория релейно-контактных схем. — М.: Издательство АН СССР, 1950.
8. Гринчук М. И. О сложности реализации булевых функций в трех классах схем в базисе, состоящем из всех симметрических функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 1. — С. 3–8.
9. Захарова Е. Ю. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 9. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 317–320.
10. Золотых Н. Ю. Расшифровка пороговых и близких к ним функций. — Дис. ... д-ра / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. — 2013.
11. Зуев Ю. А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 306, № 3. — С. 528–530.
12. Зуев Ю. А. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 5–61.
13. Карпова Н. А. О некоторых свойствах функций Шеннона // Математические заметки. — 1970. — Т. 8, вып. 5. — С. 663–674.
14. Карпова Н. А. Некоторые замечания об асимптотическом поведении функции Шеннона // Проблемы кибернетики. Вып. 30. — М.: Наука, 1975. — С. 313–318.
15. Карпова Н. А. О сложности класса схем из многополюсных функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 67–84.
16. Карпова Н. А. О сложности класса схем из информационно бедных многополюсных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С. 155–164.
17. Карпова Н. О сложности реализации функций алгебры логики в некоторых бесконечных базисах // Методы дискретного анализа в теории булевых функций и схем. Вып. 35. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1980. — С. 9–14.
18. Касим-Заде О. М. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1994. — № 6. — С. 40–44.
19. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 2. — С. 44–49.
20. Касим-Заде О. М. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — № 4. — С. 59–61.
21. Касим-Заде О. М. Об одном методе получения оценок сложности схем над бесконечными базисами // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 247–254.
22. Касим-Заде О. М. Об одном методе получения оценок сложности схем над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 41–65.
23. Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2012. — № 6. — С. 55–57.
24. Касим-Заде О. М. О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 3. — С. 55–57.
25. Комбаров Ю. А. Нижняя оценка схемной сложности линейной функции в одном бесконечном базисе // Математические вопросы кибернетики. Вып. 20. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — С. 81–119.
26. Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику» / Ответственный редактор А. Б. Угольников. — Издание 2-е, исправленное и дополненное. — М.: Изд-во Московского университета, 2023.

27. Коршунов А. Д. Сложность вычислений булевых функций // Успехи математических наук. — 2012. — Т. 67, вып. 1. — С. 97–168.
28. Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в бесконечных базисах // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2011. — № 1. — С. 22–26.
29. Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 1. — С. 56–59.
30. Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики над произвольными базисами // Фундаментальная и прикладная математика. — 2015. — Т. 20, № 6. — С. 155–158.
31. Кочергин В. В. Теория вентильных схем (современное состояние) // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Вып. VII. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2013. — С. 23–40.
32. Кочергин В. В. Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках // Математические вопросы кибернетики. Вып. 20. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. — С. 119–257.
33. Кочергин В. В. О работах О. М. Касим-Заде в области теории сложности и теории многозначных логик // Чебышеский сборник. — 2022. — Т. 23, № 2. — С. 121–150.
34. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами // Прикладная дискретная математика. — 2015. — № 30. — С. 24–31.
35. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций k-значной логики // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, № 4. — С. 80–90.
36. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Немонотонная сложность как обобщение инверсионной сложности // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс [XXI century: Resumes of the Past and Challenges of the Present plus]. — 2017. — 04(38). — С. 98–105.
37. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Оценки немонотонной сложности логических схем // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы 5-й Российской школы-семинара (Улан-Удэ, 8–12 авг. 2017 г.). — Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2017. — С. 48–52.
38. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Поведение функции Шеннона сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVIII Международной конференции (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М: МАКС Пресс, 2017. — С. 142–144.
39. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О схемной сложности функций k-значной логики в одном бесконечном базисе // Прикладная математика и информатика. — 2018. — № 58. — С. 21–34.
40. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 42–74.
41. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Немонотонная сложность логических схем и близкие задачи // Синтаксис и семантика логических систем: материалы 6-й Международной школы-семинара. (Монголия, Ханх, 11–16 авг. 2019 г.). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. — С. 62–67.
42. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности систем функций k-значной логики в двух бесконечных базисах // Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 17–22 июня 2019 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2019. — С. 129–131.
43. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Точное значение немонотонной сложности булевых функций // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 1. — С. 32–41.
44. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О немонотонной сложности функций k-значной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы заочного семинара XIX Международной конференции. — Казань, 2020. — С. 69–71.
45. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Оценки немонотонной сложности функций многозначной логики // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2020. — Т. 162, № 3. — С. 311–321.
46. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Нижняя оценка немонотонной сложности функций многозначной логики // Материалы XIV Международного семинара «Дис-

кретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2022 г.). — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2022. — С. 74–77. — URL: https://keldysh.ru/dms.
47. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Уточнение оценок немонотонной сложности функций k-значной логики // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, вып. 6. — С. 849–862.
48. Кочергин В. В., Михайлович А. В. Точное значение схемной сложности булевых функций в одном бесконечном базисе // Математические заметки. — [в печати].
49. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия высших учебных заведений. Серия радиофизика. — 1958. — № 1. — С. 120–140.
50. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 63–97.
51. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 1964. — С. 25–47.
52. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
53. Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 109–140.
54. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984. — (2-е издание: 2024 г.)
55. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // Доклады АН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 917–919.
56. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем булевых функций // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 3. — С. 477–479.
57. Нечипорук Э. И. О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 139, № 6. — С. 1302–1303.
58. Нечипорук Э. И. О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 123–160.
59. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 1964. — С. 49–62.
60. Нечипорук Э. И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 155, № 2. — С. 299–301.
61. Нечипорук Э. И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 111–160.
62. Подольская О. В. О нижних оценках сложности схем в базисе антицепных функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 2. — С. 17–23.
63. Подольская О. В. Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 3. — С. 95–107.
64. Подольская О. В. Об оценках функций Шеннона сложности схем в некоторых бесконечных базисах // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.). — М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2016. — С. 150–152.
65. Подольская О. В. Оценки сложности булевых функций в некоторых бесконечных базисах. — Дис. ... канд. / Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2017.
66. Подольский В. В. Вопросы теории сложности вычислений в алгебраических и логических структурах. — Дис. ... д-ра / Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2021.
67. Редькин Н. П. О синтезе схем из пороговых элементов для некоторых классов булевых функций // Кибернетика. — 1970. — № 5. — С. 6–9.
68. Сергеев И. С. О сложности схем и формул ограниченной глубины над базисом из многовходовых элементов // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 2. — С. 120–137.
69. Сергеев И. С. Многоярусное представление и сложность схем из многовходовых элементов // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2020. — № 3. — С. 42–46.
70. Угольников А. Б. О сложности схем в вырожденных базиса // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1998. — № 6. — С. 22–26.

71. Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2004. — № 3. — С. 52–55.
72. Шоломов Л. А. О некоторых классах логических функций, связанных с пороговыми // Проблемы кибернетики. Вып. 13. — М.: Наука, 1965. — С. 97–113.
73. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
74. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.
75. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
76. Amano K., Maruoka A., Tarui J. On the negation-limited circuit complexity of merging // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 126, No. 1. — P. 3–8. — 5th Annual International Computing and combinatorics Conference.
77. Amano K., Maruoka A. A Superpolynomial Lower Bound for a Circuit Computing the Clique Function with at most $(1/6)\log\log n$ Negation Gates // SIAM Journal on Computing. — 2005. — V. 35, No. 1. — P. 201–216. — DOI: 10.1137/S0097539701396959.
78. Beals R., Nishino T., Tanaka K. On the Complexity of Negation-Limited Boolean Networks // SIAM Journal on Computing. — 1998. — V. 27, No. 5. — P. 1334–1347. — DOI: 10.1137/S0097539794275136.
79. Blais E., Canonne C., Oliveira I., Servedio R., Tan L.-Y. Learning circuits with few negations // Electronic Colloquium on Computational Complexity. — 2014. — No. 144.
80. Dancik V. Complexity of Boolean functions over bases with unbounded fan-in gates // Information Processing Letters. — 1996. — V. 57, No. 1. — P. 31–34.
81. Diciunas V. On the Positive and the Inversion Complexity of Boolean Functions // RAIRO Theor. Informatics Appl. — 1993. — V. 27, No. 4. — P. 283–293. — DOI: 10.1051/ITA/1993270402831.
82. Fischer M. J. Lectures on network complexity. — University of Frankfurt, Germany, 1974.
83. Fischer M. J. The complexity of negation-limited networks — A brief survey // Automata Theory and Formal Languages / ed. by H. Brakhage. — Springer: Berlin, Heidelberg, 1975. — P. 71–82.
84. Fischer M. J. Lectures on network complexity. Tech. Rep. TR-1104. — Department of Computer Science, Yale University, 1996.
85. Gilbert E. N. Lattice theoretic properties of frontal switching functions // Journal of Mathematical Physics. — 1954. — V. 33. — P. 56–67. — [Русский перевод: Гилберт Э. Н. Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций // Кибернетический сборник. Вып. 1. — М.: ИЛ, 1960. — С. 175–188].
86. Golovnev A., Gőős M., Reichman D., Shinkar I. String Matching: Communication, Circuits, and Learning // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. — 2019. — V. 145. — 56:1–56:20.
87. Guo S., Komargodski I. Negation-limited formulas // Theoretical Computer Science. — 2017. — V. 660. — P. 75–85. — DOI: 10.1016/J.TCS.2016.11.027.
88. Guo S., Malkin T., Oliveira I. C., Rosen A. The Power of Negations in Cryptography // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 9014. — Springer: Berlin, Heidelberg, 2015. — P. 36–65.
89. Jukna S. Boolean Function Complexity: Advances and Frontiers. — Springer: Berlin, Heidelberg, 2012. — DOI: 10.1007/978-3-642-24508-4.
90. Keister W., Ritchie A. E., Washburn S. H. The design of switching circuits. — D. van Nostrand Company: New York, Toronto, 1951.
91. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V. Inversion Complexity of Functions of Multi-Valued Logic. — arXiv: 1510.05942 [cs.DM]. — URL: https://arxiv.org/abs/1510.05942.
92. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V. Some Extensions of Inversion Complexity of Boolean Functions. — arXiv: 1506.04485 [cs.DM]. — URL: https://arxiv.org/abs/1506.04485.
93. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V. Asymptotics of growth for non-monotone complexityof multi-valued logic function systems // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — V. 14. — P. 1100–1107.

94. Lai H. C., Muroga S. Logic Networks with a Minimum Number of NOR(NAND) Gates for Parity Functions of n Variables // IEEE Transactions on Computers. — 1987. — V. C–36. — P. 157–166.
95. Morizumi H. A Note on the Inversion Complexity of Boolean Functions in Boolean Formulas. — arXiv: 0811.0699 [cs.CC]. — URL: https://arxiv.org/abs/0811.0699.
96. Morizumi H. Limiting negations in formulas // Automata, languages and programming. 36th international colloquium, ICALP 2009, Rhodes, Greece, July 5–12, 2009. Proceedings, Part I. — Berlin: Springer, 2009. — C. 701–712. — DOI: 10.1007/978-3-642-02927-1_58.
97. Morizumi H. Limiting negations in non-deterministic circuits // Theor. Comput. Sci. — 2009. — V. 410, No. 38–40. — P. 3988–3994. — DOI: 10.1016/J.TCS.2009.05.018.
98. Morizumi H., Suzuki G. Negation-Limited Inverters of Linear Size // IEICE Transactions on Information and Systems. — 2010. — V. E93.D, No. 2. — P. 257–262. — DOI: 10.1587/transinf.E93.D.257.
99. Muller D. E. Complexity in Electronic Switching Circuits // IRE Trans. Electron. Comput. — 1956. — V. 5. — P. 15–19.
100. Nakamura K., Tokura N., Kasami T. Minimal Negative Gate Networks // IEEE Transactions on Computers. — 1972. — V. C–21, No. 1. — P. 5–11. — DOI: 10.1109/T-C.1972.223425.
101. Pippenger N. The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths // Mathematical systems theory. — 1979. — V. 12, No. 4. — P. 325–346.
102. Santha M., Wilson C. Limiting Negations in Constant Depth Circuits // SIAM Journal on Computing. — 1993. — V. 22, No. 2. — P. 294–302. — DOI: 10.1137/0222022.
103. Savage J. E. The Complexity of Computing. — Wiley, 1976. — [Русский перевод: Сэвидж Д. Э. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998].
104. Sung S. C., Tanaka K. Limiting Negations in Bounded-Depth Circuits: An Extension of Markov's Theorem // Algorithms and Computation / ed. by T. Ibaraki, N. Katoh, H. Ono. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2003. — P. 108–116.
105. Tanaka K., Nishino T., Beals R. Negation-limited circuit complexity of symmetric functions // Inf. Process. Lett. — 1996. — Sept. — V. 59, No. 5. — P. 273–279. — DOI: 10.1016/0020-0190(96)00115-9.
106. Wegener I. The Complexity of the Parity Function in Unbounded Fan-In, Unbounded Depth Circuits // Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 85. — P. 155–170.
107. Winder R. O. Threshold logic. — PhD thesis / Dept. Math., Prinston University. — 1962.
108. Winder R. O. Bounds on Threshold Gate Realizability // IEEE Trans. Electron. Comput. — 1963. — V. 12. — P. 561–564.
109. Winder R. O. Threshold Logic Asymptotes // IEEE Transactions on Computers. — 1970. — Apr. — V. C–19, No. 4. — P. 349–353. — DOI: 10.1109/T-C.1970.222921.

Поступило в редакцию 29 II 2024,
окончательный вариант 15 VIII 2024