



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Березин, В.Д. Левченко,
А.Ю. Перепёлкина

Безынтерполяционный LBM
на неравномерных сетках с
оператором столкновения
TRT

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Березин А.В., Левченко В.Д., Перепёлкина А.Ю. Безынтерполяционный LBM на неравномерных сетках с оператором столкновения TRT // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 19. 32 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-19>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-19>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

А. В. Березин, В. Д. Левченко, А. Ю. Перепёлкина

Безынтерполяционный LBM
на неравномерных сетках
с оператором столкновения TRT

Москва
2024

А. В. Березин, В. Д. Левченко, А. Ю. Перепёлкина

Безынтеполяционный LBM на неравномерных сетках с оператором столкновения TRT

Метод решёточных уравнений Больцмана (LBM) — это современная численная схема решения задач гидродинамики. LBM отличается простотой реализации и большим потенциалом к модифицированию. Одним из приоритетных направлений развития LBM является корректное построение схемы на неравномерных пространственных сетках. Это позволяет снизить общее число вычислений, однако на текущий момент влечёт за собой необходимость интерполяции данных и зачастую лишает схему преимуществ классического LBM. Мы разработали и протестировали безынтеполяционный метод построения атермического узлового LBM на неравномерных сетках с оператором столкновения TRT. Метод основан на использовании различных шаблонов LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки вместе с двухступенчатой процедурой перекалибровки популяций, отвечающих разным шаблонам LBM.

Ключевые слова: метод решёточных уравнений Больцмана; масштабирование решётки; перекалибровка популяций LBM; перекалибровка моменты; TRT оператор столкновения

A. Berezin, V. Levchenko, A. Perepelkina

Interpolation – free LBM on non-uniform grids with TRT collision operator

Lattice Boltzmann method (LBM) is a modern numerical scheme for solving fluid dynamics problems. LBM is easy to implement and it has a great potential for modifications. One of the priority LBM development directions is the correct construction of such a scheme on non-uniform spatial grids. However, at the moment, it requires interpolation and often deprives the scheme of the classical LBM advantages. We developed and tested an interpolation – free method for constructing athermal node – based LBM on non-uniform meshes with the TRT collision operator. The method is based on the use of different LBM stencils near the transition boundary of a non-uniform grid, together with a two – step procedure for transformation of populations corresponding to different LBM stencils.

Key words: Lattice – Boltzmann method; grid refinement; LBM populations transformation; moment matching; TRT collision operator

1 Введение

Метод решёточных уравнений Больцмана (LBM) [1] — это численная схема решения задач гидрогазодинамики, в основе которой лежит применение квадратурных формул для вычисления скоростных моментов кинетической функции распределения: плотности, скорости потока и температуры. При этом моменты линейным образом выражаются через популяции — дискретные значения функции распределения. Эволюция популяций определяется системой дискретных кинетических уравнений Больцмана. Каждое из уравнений отвечает фиксированной скорости c_i , с которой популяция перемещается по пространственной решётке. Набор скоростей c_i называется шаблоном LBM.

Одним из важных и развивающихся направлений LBM является корректное построение этой схемы на неравномерных пространственных сетках [2–7]. Измельчение сетки только в необходимой ограниченной области позволяет значительно снизить общее число вычислений, тем самым повысив эффективность метода. На текущий момент построение схемы LBM вблизи границы сеток с разными пространственными шагами влечёт за собой необходимость интерполяции данных по пространству и/или времени [2–13], что может снизить порядок аппроксимации LBM и привести к нарушению законов сохранения.

Текущая работа является продолжением работ [14–16], также посвящённым построению безынтерполяционного метода LBM на неравномерных сетках. В основе метода лежит использование различных шаблонов LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки. При этом на шаге переноса популяции запрашиваются только из уже имеющихся узлов сетки, и интерполяция данных не требуется. Однако при этом возникает необходимость перекалибровки — локального перехода от набора популяций, соответствующих одному из шаблонов, к набору популяций другого шаблона. В данной работе мы расширяем уже известные результаты путём распространения метода на схему LBM с оператором столкновения TRT, который обладает значительно большим потенциалом для контроля точности и стабильности. Кроме того, предложены новые, более перспективные шаблоны LBM для узлов вблизи границы перехода неравномерной сетки. С их помощью построены две схемы безынтерполяционного LBM на неравномерных сетках с оператором столкновения TRT.

Эффективность приведённых в работе схем исследована на двух двумерных тестах: моделирование течения Пуазейля с измельчением сетки вблизи границ канала, а также отражение акустической волны от границы перехода неравномерной сетки.

В работе используются тензорные обозначения. При этом индексы i, j относятся к номерам популяций, а индексы a, b, d — к декартовым координатам. Таким образом, к примеру, c_{ia} — a -я декартова компонента i -й скорости шаблона LBM.

Повторяющиеся в произведении индексы стандартным образом предполагают суммирование по этим индексам. Однако далее исключением в этом правиле станет индекс i , суммирование по которому всегда будет указываться явно.

2 Описание метода

Мы начнём с обзора классического метода LBM и введём в рассмотрение оператор столкновения TRT. Далее обсудим общие принципы построения безынтерполяционного LBM на неравномерных сетках и рассмотрим вопрос перехода между наборами популяций разных шаблонов LBM. В конце приведём некоторые детали численной реализации рассмотренных схем.

2.1 Схема LBM. TRT оператор столкновения.

Кинетическое уравнение Больцмана в отсутствие внешней силы имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \Omega, \quad (1)$$

где $f(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$ — одночастичная функция распределения, зависящая от времени, координаты пространства и скорости соответственно, а $\Omega[f]$ — оператор столкновения.

Макроскопические параметры течения (плотность $\rho(t, \mathbf{r})$, скорость течения $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, температура $T(t, \mathbf{r})$) определяются моментами функции распределения:

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^n} f d^n \boldsymbol{\xi}, \quad \rho \mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\xi} f d^n \boldsymbol{\xi}, \quad \rho(u^2 + nT) = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\xi}^2 f d^n \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

где n — размерность рассматриваемого пространства.

Решением (1), отвечающим нулевому оператору столкновения и удовлетворяющим соотношениям (2), является равновесная функция распределения

$$f^{\text{eq}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho}{(\sqrt{2\pi}\xi_0)^n} e^{-(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{u})^2/2\xi_0^2}, \quad T = \xi_0^2. \quad (3)$$

Применим численное квадратурное интегрирование для вычисления моментов (2). При этом, с учётом вида частного решения (3), введём в рассмотрение весовой множитель

$$\omega(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\xi_0)^n} e^{-\boldsymbol{\xi}^2/2\xi_0^2}. \quad (4)$$

Допустим, что построена квадратурная формула, имеющая требуемый порядок аппроксимации. Для произвольной функции $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ при этом

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{\xi}) d^n \xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\boldsymbol{\xi})}{\omega(\boldsymbol{\xi})} \omega(\boldsymbol{\xi}) d^n \xi = \left/ \frac{\boldsymbol{\xi} = \xi_0 \mathbf{v}}{d^n \xi = \xi_0^n d^n v} \right/ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\xi_0 \mathbf{v})}{\omega(\xi_0 v)} e^{-v^2/2} d^n v \simeq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{w_i \varphi(\mathbf{c}_i)}{\omega(c_i)}, \quad (5)$$

где $\mathbf{c}_i \equiv \xi_0 \mathbf{v}_i$ — набор дискретных скоростей LBM, \mathbf{v}_i — точка квадратуры с весом w_i , m — полное число точек. Применяя (5) для вычисления моментов (2), находим

$$\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}{\omega(c_i)} = \sum_{i=0}^{m-1} f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{m-1} f_i \mathbf{c}_i, \quad \rho(u^2 + nT) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i c_i^2. \quad (6)$$

В равенствах (6) определены дискретные значения кинетической функции распределения, популяции

$$f_i(t, \mathbf{r}) \equiv \frac{w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i)}{\omega(c_i)} = (\sqrt{2\pi} \xi_0)^n w_i f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) e^{c_i^2/2\xi_0^2}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (7)$$

Для популяций (7) равновесной функции распределения (3) получаем

$$f_i^{\text{eq}} = \rho w_i e^{(2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} - u^2)/2\xi_0^2}. \quad (8)$$

В данной работе используется классическая схема LBM [1], требующая квадратур по крайней мере пятого порядка аппроксимации и применимая для атермических течений с небольшой скоростью потока, $u \ll \xi_0$. При этом можно разложить (8) и прийти к стандартному представлению равновесных популяций

$$f_i^{\text{eq}} \simeq \rho w_i \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{\xi_0^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - (\xi_0 u)^2}{2\xi_0^4} \right), \quad (9)$$

которые в точности удовлетворяют соотношениям (6) (в этом случае опять же $T = \xi_0^2$). Подчеркнём, что выражение (9) зависит как от выбора точек квадратуры \mathbf{v}_i , так и от выбора параметра ξ_0 .

Неравновесной частью популяции называется

$$f_i^{\text{neq}} \equiv f_i - f_i^{\text{eq}}. \quad (10)$$

Благодаря соотношениям (6) макроскопические параметры системы выражаются через дискретные популяций f_i . Эволюция популяций во времени определяется набором дискретных кинетических уравнений Больцмана,

которые можно получить, положив в (1) $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{c}_i$ и домножив равенство, в соответствии с (7), на $w_i/\omega(c_i)$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = \Omega_i, \quad \Omega_i[f_i] \equiv \frac{w_i}{\omega(c_i)} \Omega|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{c}_i}. \quad (11)$$

Для численного решения уравнений (11) введём равномерную пространственную сетку с шагом Δx по каждой из декартовых осей. Дискретизируем (11), разбив эволюцию популяций, соответствующую дискретному временному шагу Δt , на два последовательных этапа,

- шаг переноса: $\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad \Rightarrow$
 $f_{i, \text{pre}}(t + \Delta t, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}_i) = f_{i, \text{post}}(t, \mathbf{r}), \quad \Delta \mathbf{r}_i \equiv \Delta t \mathbf{c}_i; \quad (12)$

- шаг столкновения: $\frac{\partial f_i}{\partial t} = \Omega_i \quad \Rightarrow$
 $f_{i, \text{post}}(t + \Delta t, \mathbf{r}) = f_{i, \text{pre}}(t + \Delta t, \mathbf{r}) + \Omega_i[f_i]. \quad (13)$

При этом индексы «post» и «pre» в (12), (13) обозначают постстолкновительные и предстолкновительные популяции соответственно.

Чтобы удовлетворить последнему условию в (12), которое позволяет популяциям f_i перемещаться строго по выбранной пространственной сетке, необходимо нормировать набор скоростей \mathbf{c}_i согласно выбранным шагам Δt , Δx . Это можно сделать соответствующим выбором параметра ξ_0 . К примеру, для стандартного набора скоростей D2Q9, отвечающего квадратуре с точками

$$\{\mathbf{v}_i^{\text{D2Q9}}\} = \{(0, 0), (0, \pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{3}, 0), (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})\}, \quad (14)$$

необходимо положить $\xi_0 = \Delta x/(\sqrt{3}\Delta t)$.

С учётом вышесказанного численная схема LBM принимает простой вид: на шаге переноса популяции f_i перемещаются строго по дискретной пространственной решётке согласно своим скоростям \mathbf{c}_i , а на этапе столкновения локально получают приращение согласно (13).

Шаблон LBM обычно называют набор дискретных скоростей \mathbf{c}_i и соответствующих им весов w_i , однако для удобства изложения в текущей работе мы расширим определение шаблона, включив в него все свободные параметры схемы, необходимые для осуществления одного шага переноса (12), а именно:

- веса и точки квадратуры w_i, \mathbf{v}_i ;
- шаг по времени Δt ;
- параметр ξ_0^2 .

В соответствии с вышесказанным, в дополнение к стандартному обозначению шаблона $DnQm$, которое характеризует только квадратуру (напомним, что n — размерность пространства, m — число точек квадратуры), мы будем указывать в скобках параметры Δt и ξ_0^2 — $DnQm(\Delta t, \xi_0^2)$. К примеру, широко используемый шаблон D2Q9, отвечающий сетке с $\Delta t = \Delta x = 1$ и квадратуре (14), в наших терминах обозначается как D2Q9(1, 1/3).

Обсудим смысл величины ξ_0 . В вышеприведённых выкладках ξ_0 является свободным параметром, который позволяет масштабировать набор дискретных скоростей \mathbf{c}_i , тем самым выступая дополнительной переменной при построении шаблонов. Исходя из (3), ξ_0^2 можно придать смысл температуры или квадрата скорости звука. Также ξ_0^2 всегда можно представить в виде $\xi_0^2 = \varkappa(\Delta x/\Delta t)^2$, где безразмерный множитель $\varkappa > 0$ определяется только квадратурой используемого шаблона. Таким образом, при заданных квадратуре и шаге по времени ξ_0 определяет пространственный масштаб шаблона.

В текущей работе мы будем использовать оператор столкновения TRT [17, 18], который имеет вид

$$\Omega_i^{\text{TRT}} = -\frac{\omega^+ + \omega^-}{2} f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}}, \quad (15)$$

где популяция с номером \bar{i} отвечает противоположной дискретной скорости:

$$w_{\bar{i}} = w_i, \quad \mathbf{v}_{\bar{i}} = -\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{c}_{\bar{i}} = -\mathbf{c}_i. \quad (16)$$

Для нулевой популяции, отвечающей нулевой скорости $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$, индекс противоположной популяции совпадает с индексом исходной — $\bar{0} = 0$.

Параметр ω^+ в (15) связан с вязкостью моделируемого течения (приложение A),

$$\nu = \Delta t \xi_0^2 \left(\frac{1}{\omega^+ \Delta t} - \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

а ω^- является свободным параметром.

Хотя изначально оператор столкновения TRT определяется с помощью параметров ω^+ и ω^- , с точки зрения физического моделирования удобнее указывать две другие величины — уже приведённую вязкость ν (17), а также параметр

$$\Lambda = \left(\frac{1}{\omega^+ \Delta t} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\omega^- \Delta t} - \frac{1}{2} \right), \quad (18)$$

который можно использовать для контроля точности и стабильности вычислений [18]. При выборе Λ стоит убедиться, что параметр ω^- не сильно превышает единицу, в согласии с требованиями классического LBM [1].

Наконец отметим, что оператор столкновения TRT редуцируется к оператору столкновения BGK [19] в случае

$$\omega^+ = \omega^- \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda = \left(\frac{\nu}{\Delta t \xi_0^2} \right)^2. \quad (19)$$

2.2 Неравномерные сетки

Приведём метод построения безынтерполяционного LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки. В текущей работе мы рассматриваем двумерную сетку с шагами Δt , Δx , которая в некоторой области пространства уточняется в два раза и по времени, и по пространству (рис. 1), переходя в мелкую сетку с параметрами

$$\Delta t_f = \Delta t/2, \quad \Delta x_f = \Delta x/2. \quad (20)$$

Прежде чем перейти к описанию метода необходимо уточнить, что существуют две парадигмы шага переноса (12) в LBM: Push и Pull. В случае парадигмы Push предстолкновительный набор популяций в узле решётки с координатой \mathbf{r}_0 определяется шаблонами других узлов, т.е. необходимо взять те популяции других узлов, которые при переносе согласно своим шаблонам попадут в рассматриваемый. В случае парадигмы Pull предстолкновительный набор популяций в узле решётки определяется шаблоном именно этого узла, т.е. популяции «запрашиваются» из других узлов согласно дискретному набору скоростей шаблона рассматриваемого узла.

Если речь идёт о равномерной пространственной сетке, то парадигмы Push и Pull приводят к одинаковым численным схемам. Однако в случае неравномерных сеток это не так. В текущей работе мы следуем парадигме Pull шага переноса.

Центральной идеей нашего метода построения безынтерполяционного LBM на неравномерных сетках является использование различных шаблонов LBM вблизи границы перехода. А именно, для каждого узла грубой и мелкой сетки наборы векторов

$$\Delta \mathbf{r}_i = -\Delta t \mathbf{c}_i, \quad \Delta \mathbf{r}_{i,f} = -\Delta t_f \mathbf{c}_i, \quad (21)$$

соответственно, должны строго накладываться на рассматриваемую пространственную сетку. При этом в парадигме Pull шага переноса не требуется дополнительная информация о популяциях в межузловом пространстве или в иные моменты времени (рис. 2). Таким образом, нет необходимости в процедуре интерполяции.

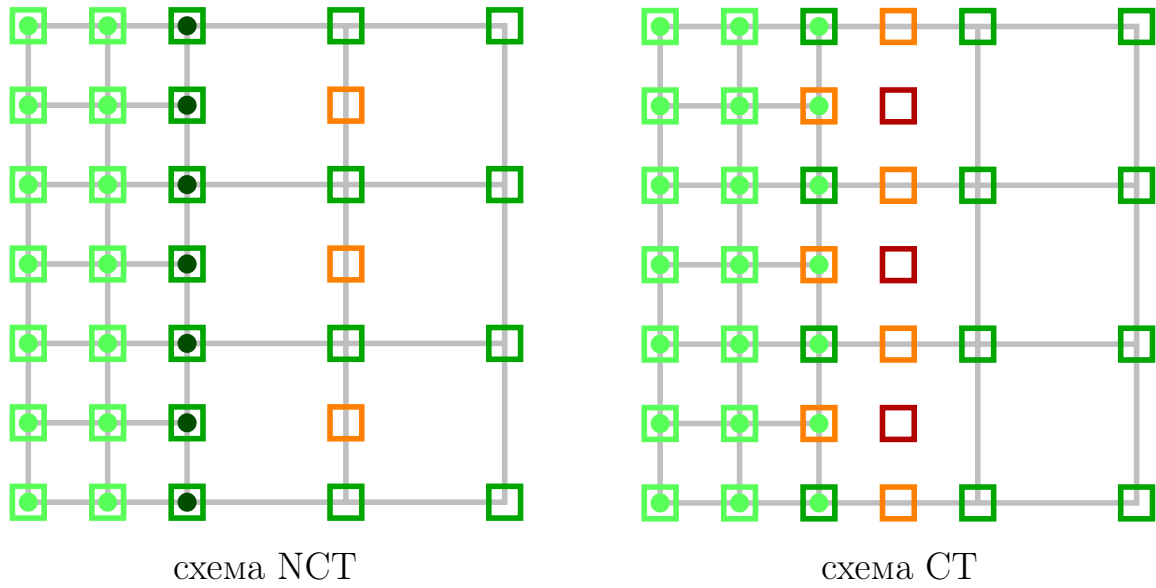


Рис. 1: Две схемы безынтерполяционного LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки. Квадраты соответствуют шагу LBM на целых шагах по времени, а круги — на полуцелых. Цвет соответствует используемому шаблону согласно приложению В.

Используя указанный метод, можно строить различные схемы безынтерполяционного LBM на неравномерных сетках. Мы исследуем две схемы, приведённые на рис. (1). В областях равномерной сетки обе схемы используют шаблоны \blacktriangle D2Q9(1, 1/3) и \blacktriangle D2Q9(1/2, 1/3) соответственно. В области вблизи границы перехода первая схема дополнительно использует шаблоны \blacktriangle D2Q9(1/2, 4/3) и \blacktriangle D2Q13¹(1, 1/3), а вторая — снова шаблон \blacktriangle D2Q13¹(1, 1/3), его повернутую на 90° версию \blacktriangle D2Q13²(1, 1/3), а также шаблон \blacktriangle D2Q13³(1, 1/3). Подробная информация об указанных шаблонах приведена в приложении В.

Принципиальное различие двух рассматриваемых схем заключается в том, что для схемы СТ все используемые шаблоны имеют одно и то же значение параметра ξ_0 , т.е. отвечают одной и той же температуре сетки. В схеме же NCT используется шаблон \blacktriangle D2Q9(1/2, 4/3), значительно отличающийся по масштабу от остальных шаблонов на сетке.

В приведённых выше схемах узлы вблизи границы перехода неравномерной сетки на шаге переноса запрашивают популяции из узлов с набором популяций другого шаблона. Чтобы найти такие популяции, необходимо уметь локально переходить от набора популяций, отвечающего одному шаблону, к набору, отвечающему другому шаблону. Такую процедуру мы будем называть перекалибровкой популяций.

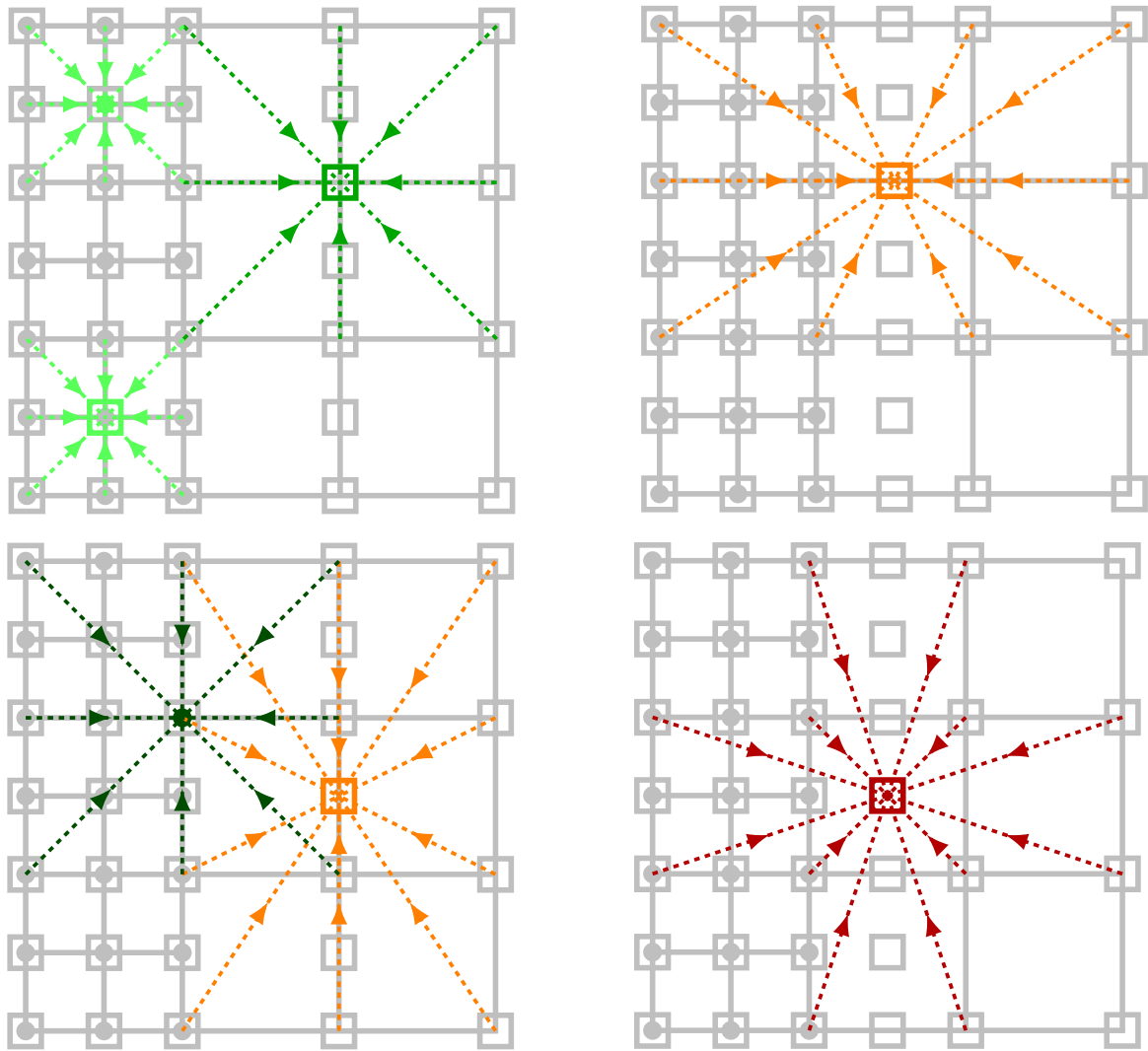


Рис. 2: Схема шага переноса для каждого используемого в работе шаблона LBM.

2.3 Перекалибровка популяций

Приведём методы локальной по времени и пространству перекалибровки популяций между двумя произвольными шаблонами. Эти методы могут различаться в зависимости от типов шаблонов участвующих в перекалибровке наборов популяций, а также от того, в какой момент делается перекалибровка — до или после столкновения.

2.3.1 Перекалибровка наборов популяций, отвечающих шаблонам с одинаковыми квадратурами

Сначала рассмотрим случай перекалибровки предстолкновительных популяций между шаблонами $S_1 = DnQm(\Delta t_1, \xi_{0,1}^2)$ и $S_2 = DnQm(\Delta t_2, \xi_{0,2}^2)$,

которые отвечают одной и той же квадратуре. При этом неравновесные части популяций в первом порядке разложения по числу Кнудсена ϵ , исходя из разложения Чепмена–Энскога (приложение А) — согласно (75), (78), имеют вид

$$f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} = \frac{\omega^+ + \omega^-}{4\omega^+\omega^-} \left(\Gamma_i + \frac{\Xi_i}{\xi_0} \right) - \frac{\omega^+ - \omega^-}{4\omega^+\omega^-} \left(\Gamma_i - \frac{\Xi_i}{\xi_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_i}{\omega^+} + \frac{\Xi_i}{\xi_0 \omega^-} \right), \quad (22)$$

где Γ_i и Ξ_i — выражения, зависящие только от квадратуры шаблона и макроскопических параметров течения:¹

$$\Gamma_i = \rho w_i (-2\partial_a u_a + v_{ia} v_{ib} (\partial_a u_b + \partial_b u_a)), \quad (23)$$

$$\Xi_i = w_i \left(-v_{ia} \partial_b \left(\rho \left(u^2 \delta_{ab} + 2u_a u_b \right) \right) + v_{ia} v_{ib} v_{id} \partial_d (\rho u_a u_b) \right). \quad (24)$$

При получении выражения (22) мы также воспользовались равенствами

$$\Gamma_{\bar{i}} = \Gamma_i, \quad \Xi_{\bar{i}} = -\Xi_i, \quad (25)$$

которые следуют из соотношений (16).

Для нахождения формул перекалибровки неравновесную часть популяции (22) необходимо рассматривать совместно с аналогичным выражением для неравновесной части популяции, отвечающей противоположной скорости,

$$f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_i}{\omega^+} - \frac{\Xi_i}{\xi_0 \omega^-} \right). \quad (26)$$

Исходя из (22), (26), находим

$$\Gamma_i = \omega^+ \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right), \quad \Xi_i = \xi_0 \omega^- \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right). \quad (27)$$

Поскольку выражения Γ_i и Ξ_i не зависят от параметров Δt и ξ_0 , они должны совпадать для шаблонов с одинаковой квадратурой. С учётом этого получаем простые формулы перекалибровки между неравновесными частями предстолкновительных популяций:

$$\omega_1^+ \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right) \Big|_{S_1} = \omega_2^+ \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right) \Big|_{S_2}, \quad (28a)$$

$$\xi_{0,1} \omega_1^- \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right) \Big|_{S_1} = \xi_{0,2} \omega_2^- \left(f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}} \right) \Big|_{S_2}, \quad (28b)$$

где значения ω_k^+ , $k \in \{1, 2\}$, определяются исходя из параметров своих шаблонов согласно (17).

¹Обратим внимание, что повторяющийся индекс i в равенствах (23), (24) не предполагает суммирования по нему.

Отметим, что для нулевой популяции, согласно (24), $\Xi_0 = 0$ и формулы (28) переходят в

$$\omega_1^+ f_{0, \text{pre}}^{\text{neq}} \Big|_{S_1} = \omega_2^+ f_{0, \text{pre}}^{\text{neq}} \Big|_{S_2}. \quad (29)$$

Теперь приведём аналог соотношений (28) для постстолкновительных популяций. Дискретизованное кинетическое уравнение Больцмана (12), (13) имеет вид

$$f_{i, \text{post}} = f_{i, \text{pre}} - \Delta t \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - \Delta t \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}}. \quad (30)$$

Вычитая из обеих частей равенства (30) равновесные популяции f_i^{eq} , получаем связь

$$f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} = \left(1 - \Delta t \frac{\omega^+ + \omega^-}{2}\right) f_{i, \text{pre}}^{\text{neq}} - \Delta t \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} f_{\bar{i}, \text{pre}}^{\text{neq}}. \quad (31)$$

Подставляя в (31) выражения для предстолкновительных популяций (22) и принимая во внимание (25), находим

$$f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} = \frac{1}{2\omega^+} \left(1 - \omega^+ \Delta t\right) \Gamma_i + \frac{1}{2\xi_0 \omega^-} \left(1 - \omega^- \Delta t\right) \Xi_i. \quad (32)$$

Используя (32) и (25), выражаем Γ_i и Ξ_i через неравновесные части постстолкновительных популяций:

$$\Gamma_i = \frac{\omega^+}{1 - \omega^+ \Delta t} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right), \quad \Xi_i = \frac{\xi_0 \omega^-}{1 - \omega^- \Delta t} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right). \quad (33)$$

С учётом (33), формулы перекалибровки постстолкновительных популяций принимают вид

$$\frac{\omega_1^+}{1 - \omega_1^+ \Delta t_1} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right) \Big|_{S_1} = \frac{\omega_2^+}{1 - \omega_2^+ \Delta t_2} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} + f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right) \Big|_{S_2}, \quad (34a)$$

$$\frac{\xi_{0,1} \omega_1^-}{1 - \omega_1^- \Delta t_1} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right) \Big|_{S_1} = \frac{\xi_{0,2} \omega_2^-}{1 - \omega_2^- \Delta t_2} \left(f_{i, \text{post}}^{\text{neq}} - f_{\bar{i}, \text{post}}^{\text{neq}}\right) \Big|_{S_2}. \quad (34b)$$

Для нулевой популяции (34) переходит в

$$\frac{\omega_1^+}{1 - \omega_1^+ \Delta t_1} f_{0, \text{post}}^{\text{neq}} \Big|_{S_1} = \frac{\omega_2^+}{1 - \omega_2^+ \Delta t_2} f_{0, \text{post}}^{\text{neq}} \Big|_{S_2}. \quad (35)$$

Обсудим полученные формулы перекалибровок (28), (34). В частном случае, когда шаблоны отличаются только значением параметра Δt и когда оператор столкновения TRT переходит в BGK (19), формулы (34) совпадают

с перекалибровкой в работе [8], а формулы (28) совпадают с перекалибровкой в [12].

Подобно частному случаю перекалибровки в работе [12], формулы (28) обладают небольшим преимуществом — они справедливы для произвольных значений параметра ω^+ , в то время как формулы (34) неприменимы, если хотя бы для одного из шаблонов $\omega^+ = 1/\Delta t$.

Наконец отметим, что перекалибровки (28), (34) можно значительно упростить, если пренебречь квадратичными по скорости u слагаемыми, положив в формулах выше

$$\Xi_i = 0, \quad f_i^{\text{neq}} = \bar{f}_i^{\text{neq}}. \quad (36)$$

Однако, исходя из проведённых далее тестов, это может негативно сказаться на порядке аппроксимации схемы.

2.3.2 Перекалибровка наборов популяций, отвечающих шаблонам с одинаковыми параметрами Δt и ξ_0^2

Перейдём к перекалибровке между шаблонами $S_1 = \text{DnQ}m_1(\Delta t, \xi_0^2)$ и $S_2 = \text{DnQ}m_2(\Delta t, \xi_0^2)$. Поскольку выражение (22) нетривиально зависит от точек квадратуры, мы не можем использовать тот же подход, что и раньше. Тем не менее, так как наборы популяций указанных шаблонов отвечают моментам одной и той же непрерывной функции распределения, можно применить перекалибровку моментами [20–23]. При этом связь популяций (как предстолкновительных, так и постстолкновительных) задаётся исходя из равенства моментов функции распределения, к примеру для двумерного случая

$$\left(\sum_i c_{ix}^p c_{iy}^q f_i \right) \Big|_{S_1} = \left(\sum_i c_{ix}^p c_{iy}^q f_i \right) \Big|_{S_2}, \quad (37)$$

где общее количество равенств определяется порядком аппроксимации используемых квадратур:

$$p + q \leq 5 \quad p, q \in \mathbb{N}_0. \quad (38)$$

Отметим, что в дополнение к равенствам (37) мы можем написать явную связь популяций, отвечающих одной и той же скорости c_i . В нашем случае это популяции f_0 , отвечающие нулевой скорости. Из (7) следует

$$\frac{f_0}{w_0 \xi_0^2} \Big|_{S_1} = \frac{f_0}{w_0 \xi_0^2} \Big|_{S_2}. \quad (39)$$

Соотношения (37), (39) являются системой линейных алгебраических уравнений относительно популяций шаблона, к которому мы хотим перейти. Эта система может быть недоопределённой, и число независимых уравнений

в ней может оказаться меньше числа искомым популяций. В этом случае используются равенства (37) для большего порядка аппроксимации, $p + q > 6$, но исходные моменты рассчитываются с помощью соответствующей узлу равновесной функции распределения.

2.3.3 Общий случай перекалибровки

Теперь обсудим самый общий случай перекалибровки между произвольными шаблонами одной размерности. Рассмотрение двух типов перекалибровок в разделах 2.3.1 и 2.3.2 продиктовано тем, что они не являются взаимозаменяемыми.

Перекалибровку раздела 2.3.1 нельзя использовать для разных квадратур, так как при этом неравновесные части популяций сложным образом зависят от точек квадратур и их отношение не сводится к отношению параметров шаблонов, как в формулах (28) и (34).

В свою очередь, перекалибровку раздела 2.3.2 нельзя использовать в случае различных значений параметров Δt или ξ_0 , поскольку в этом случае численные схемы ЛВМ отвечают уравнениям Больцмана (1) с разными операторами столкновения из-за отличия параметра ω^+ в силу (17), и поэтому нельзя гарантировать равенства несохраняющихся моментов функции распределения.

Тем не менее, применяя оба приведённых метода последовательно, можно перекалибровывать наборы популяций между произвольными шаблонами:

$$\begin{array}{ccc}
 & DnQm_1(\Delta t_2, \xi_{0,2}^2) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 DnQm_1(\Delta t_1, \xi_{0,1}^2) & & DnQm_2(\Delta t_2, \xi_{0,2}^2) \cdot \quad (40) \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & DnQm_2(\Delta t_1, \xi_{0,1}^2) &
 \end{array}$$

В процессе такой двухступенчатой перекалибровки появляется «фантомный» промежуточный шаблон, который участвует в схеме только формально. Далее такие шаблоны не будут указываться явно.

Два пути перекалибровки в (40) отвечают разному порядку применения перекалибровок разделов 2.3.1 и 2.3.2. В согласии с последующими тестами эти пути являются эквивалентными.

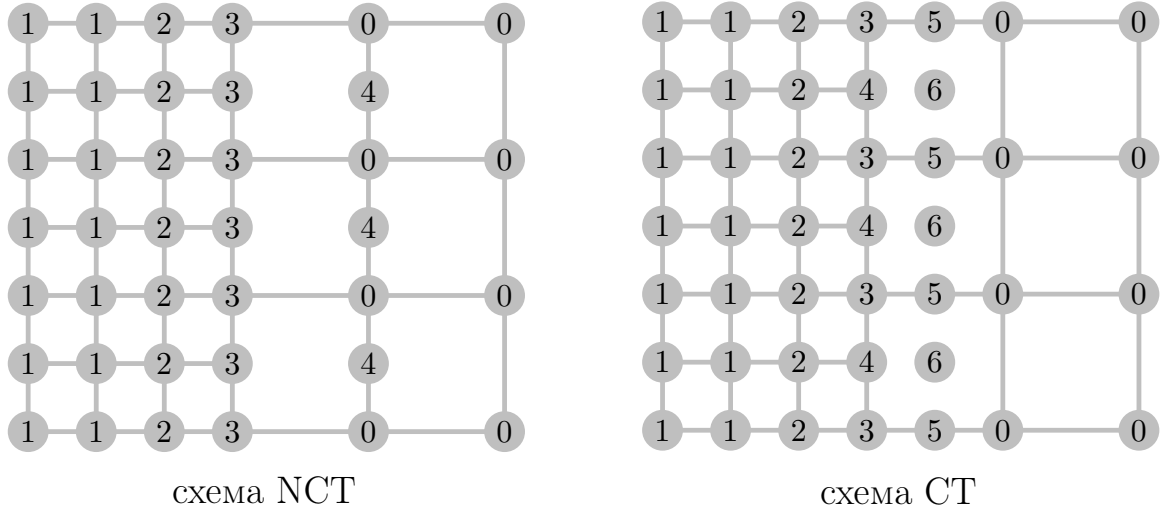


Рис. 3: Распределение флагов для описания алгоритма безынтерполяционного LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки в двух рассматриваемых схемах.

2.4 Описание алгоритма

Мы предложим описание алгоритмов двух рассматриваемых схем безынтерполяционного LBM, не вдаваясь глубоко в детали численной реализации.

Алгоритмы одного полного шага LBM $t \rightarrow t + \Delta t$ обеих схем основаны на распределении флагов по узлам сетки, рис. 3. Узлы, отвечающие разным флагам, тем или иным образом требуют особой обработки. Множество узлов с флагом l будем обозначать как N_l .

Для схемы NCT используется алгоритм 1, для схемы СТ используется алгоритм 2. Перекалибровка запрашиваемых постстолкновительных популяций происходит по верхнему пути в (40). Код написан на языке C++ с применением библиотеки Aiwlib [24].

3 Тесты

В последующих тестах мы исследуем схемы на двумерной прямоугольной сетке с шагами

$$\Delta t = 1, \quad \Delta x = 1. \quad (41)$$

В зависимости от задачи, часть области измельчается до сетки (20). Явные размеры области моделирования H_x , H_y зависят от расположения областей мелкой сетки и для каждого теста будут указаны далее.

Algorithm 1: шаг LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки для схемы NCT

Input: набор популяций в каждом узле сетки в момент времени $t - \Delta t$

Output: набор популяций в каждом узле сетки в момент времени t

$N_0, N_3 \leftarrow \blacktriangle$ D2Q9(1, 1/3); $N_1, N_2 \leftarrow \blacktriangle$ D2Q9(1/2, 1/3);

$N_4 \leftarrow \blacktriangle$ D2Q13¹(1, 1/3);

foreach n **do**

if $n \in \{N_0, N_1\}$ **then** шаг переноса без перекалибровок;

else if $n \in N_2$ **then** шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle \leftarrow \blacktriangle$;

else шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle \leftarrow \blacktriangle$;

end

foreach $n \in N_3$ **do**

 сохранить набор предстолкновительных популяций;

$n \leftarrow \blacktriangle$ D2Q9(1/2, 4/3);

 шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle \leftarrow \blacktriangle$

end

foreach $n \in \{N_1, N_2, N_3\}$ **do** шаг столкновения;

foreach n **do**

if $n \in N_1$ **then** шаг переноса без перекалибровок;

else if $n \in N_2$ **then** шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle \leftarrow \blacktriangle$;

end

foreach n **do**

if $n \in N_3$ **then**

 вернуть набор предстолкновительных популяций;

$n \leftarrow \blacktriangle$ D2Q9(1, 1/3);

 шаг столкновения

end

Algorithm 2: шаг LBM вблизи границы перехода неравномерной сетки для схемы СТ

Input: набор популяций в каждом узле сетки в момент времени $t - \Delta t$

Output: набор популяций в каждом узле сетки в момент времени t

$N_0, N_3 \leftarrow \blacktriangle D2Q9(1, 1/3); N_1, N_2 \leftarrow \blacktriangle D2Q9(1/2, 1/3);$

$N_4 \leftarrow \blacktriangle D2Q13^1(1, 1/3);$

$N_5 \leftarrow \blacktriangle D2Q13^2(1, 1/3);$

$N_6 \leftarrow \blacktriangle D2Q13^3(1, 1/3);$

foreach n **do**

if $n \in \{N_0, N_1\}$ **then** шаг переноса без перекалибровок;

else if $n \in N_2$ **then** шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle, \blacktriangle \leftarrow \blacktriangle;$

else if $n \in N_3$ **then** шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle \leftarrow \blacktriangle;$

else if $n \in \{N_4, N_5\}$ **then** шаг переноса с перекалибровками

$\blacktriangle, \blacktriangle \leftarrow \blacktriangle;$

else шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle, \blacktriangle \leftarrow \blacktriangle;$

end

foreach $n \in \{N_3, N_4\}$ **do**

 сохранить набор предстолкновительных популяций;

$n \leftarrow \blacktriangle D2Q9(1/2, 1/3);$

 шаг переноса с перекалибровками $\blacktriangle, \blacktriangle \leftarrow \blacktriangle$

end

foreach $n \in \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ **do** шаг столкновения;

foreach $n \in \{N_1, N_2\}$ **do** шаг переноса без перекалибровок;

foreach n **do**

if $n \in \{N_3, N_4\}$ **then**

 вернуть набор предстолкновительных популяций;

if $n \in N_3$ **then** $n \leftarrow \blacktriangle D2Q9(1, 1/3);$

else $n \leftarrow \blacktriangle D2Q13^1(1, 1/3);$

 шаг столкновения

end

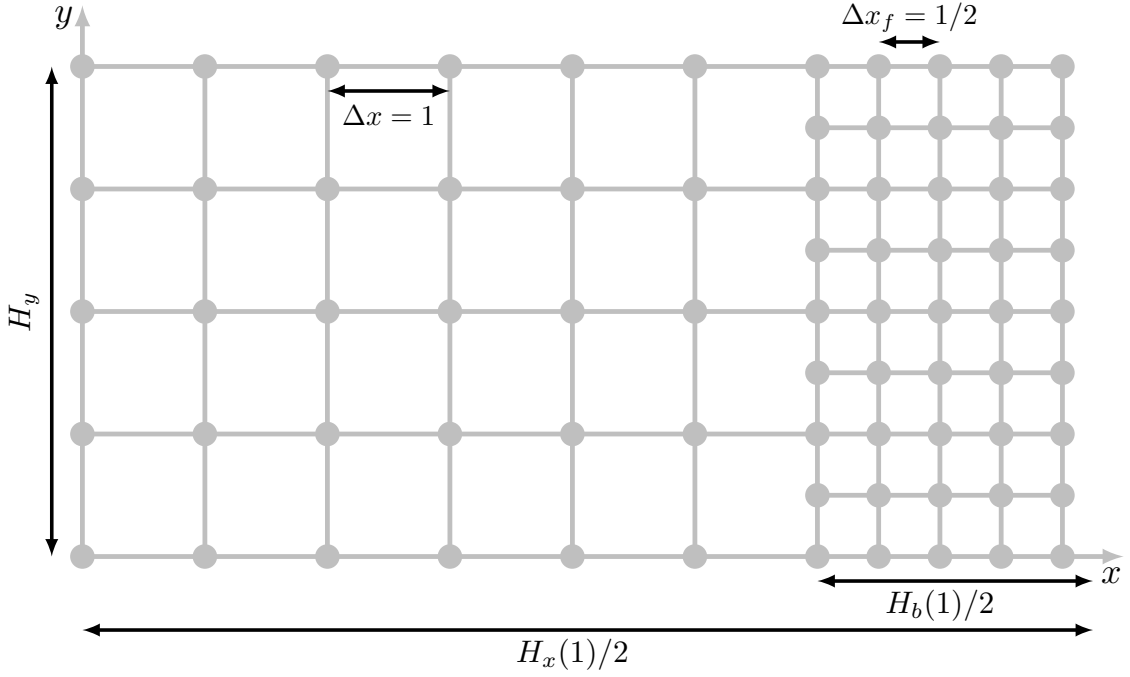


Рис. 4: Правая половина области моделирования течения Пуазёйля на неравномерной сетке при значении масштабирующего параметра $\mathcal{R} = 1$.

3.1 Течение Пуазёйля

Стационарное двумерное течение Пуазёйля является решением уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \rho = \text{const}, \quad (42)$$

в присутствии постоянного градиента давления $\nabla p = (0, -g)$ с дополнительными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y), \quad \mathbf{u} \left(-\frac{H_x}{2}, y \right) = \mathbf{u} \left(\frac{H_x}{2}, y \right) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, y + H_y) = \mathbf{u}(x, y). \quad (43)$$

При этом решением (42) является

$$u_x = 0, \quad u_y(x) = \frac{g H_x^2}{8 \rho \nu} \left(1 - \frac{4x^2}{H_x^2} \right). \quad (44)$$

Для моделирования течения Пуазёйля на неравномерной сетке разобьём часть области вблизи стенок до мелкой сетки, как показано на рис. 4. Размеры области при этом равны

$$H_x(\mathcal{R}) = 2^{\mathcal{R}+3} \Delta x + \Delta x_f, \quad H_b(\mathcal{R}) = 2^{\mathcal{R}+1} \Delta x + \Delta x_f \simeq \frac{H_x^{\mathcal{R}}}{4}, \quad H_y = 4 \Delta x, \quad (45)$$

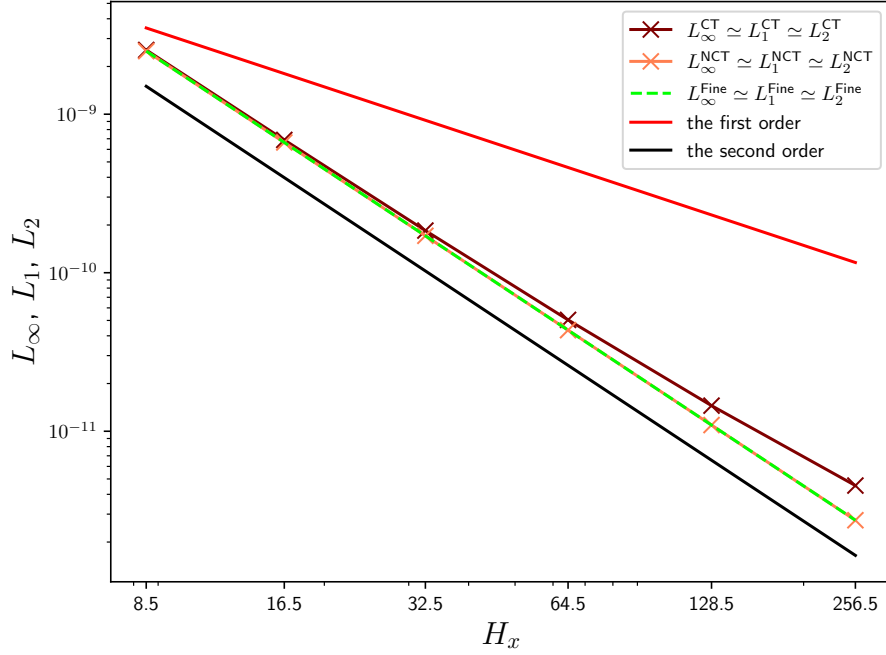


Рис. 5: Ошибка при моделировании течения Пуазёйля по нормам L_1 , L_2 и L_∞ в зависимости от размера области H_x . Параметры моделирования: $g = 10^{-8}$, $\nu = \sqrt{3}/24$, $\Lambda = 3/16$.

где $\mathcal{R} \in \mathbb{N}_0$ — масштабирующий параметр. По оси x применяются «bounce-back» граничные условия [1], по оси y — периодические.

Чтобы границы области моделирования по оси x в точности соответствовали (45), мы используем выделенное значение параметра Λ оператора TRT, $\Lambda = 3/16$. При этом граница области моделирования отстоит от крайних узлов ровно на расстояние $\Delta x_f/2$ [18].

Чтобы учесть градиент давления, мы добавляем на шаге столкновения поправку $\Delta u_y = g\tau/\rho$ к скорости в равновесных популяциях [25].

В начальный момент времени

$$\rho|_{t=0} = 1, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad (46)$$

а популяции берутся равновесными. Со временем система переходит в стационарное состояние.

С целью определить порядки аппроксимации построенных схем мы моделируем течение Пуазёйля для шести значений параметра $0 \leq \mathcal{R} \leq 5$, рассчитывая ошибку по нормам²

$$L_\infty(H_x) = \left(\frac{H_x(0)}{H_x} \right)^2 \max_n |u_y^{\text{num}} - u_y|, \quad (47)$$

²Приведённое выражение масштабирует ошибку к значению $\mathcal{R} = 0$, чтобы норма отвечала одному и тому же решению уравнения Навье–Стокса.

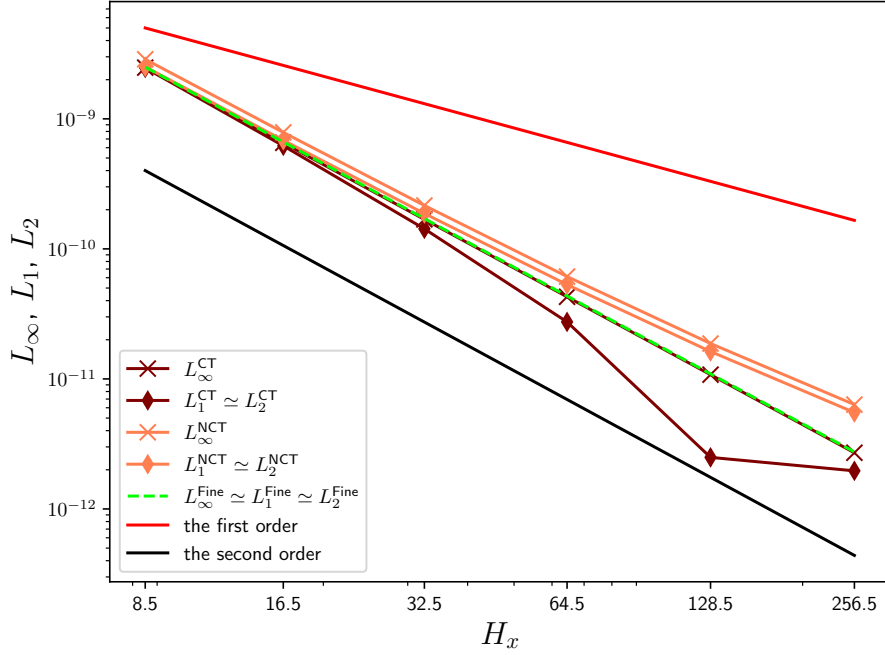


Рис. 6: Ошибка при моделировании течения Пуазёйля по нормам L_1 , L_2 и L_∞ в зависимости от размера области H_x . Параметры моделирования: $g = 10^{-8}$, $\nu = 0.2$, $\Lambda = 3/16$.

$$L_k(H_x) = \left(\frac{H_x(0)}{H_x} \right)^2 \sqrt[k]{ \frac{\sum_n |u_y^{\text{num}} - u_y|^k dS(n)}{\sum_n dS(n)} }, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (48)$$

где $dS = \Delta x^2$ для узлов, находящихся на грубой сетке, $dS_f = \Delta x_f^2$ для узлов на точной сетке и $dS_b = \Delta x_f(\Delta x - \Delta x_f)$ для узлов строго на границе. Для всех остальных дополнительных узлов в рассматриваемых схемах dS зануляется.

Результаты моделирования течения Пуазёйля для двух значений вязкости приведены на рис. 5, 6. Как можно видеть, обе схемы сохранили второй порядок аппроксимации, и, более того, их ошибка по всем нормам близка к ошибке течения Пуазёйля, смоделированного на полностью мелкой сетке того же размера.

3.2 Отражение двумерной акустической волны

В качестве ещё одного теста рассмотрим распространение двумерной акустической волны, задаваемой начальными условиями [26]

$$\rho(x)|_{t=0} = \rho_0 \left(1 + A \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{2R^2} \right) \right), \quad u_x(x)|_{t=0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} c_s, \quad (49)$$

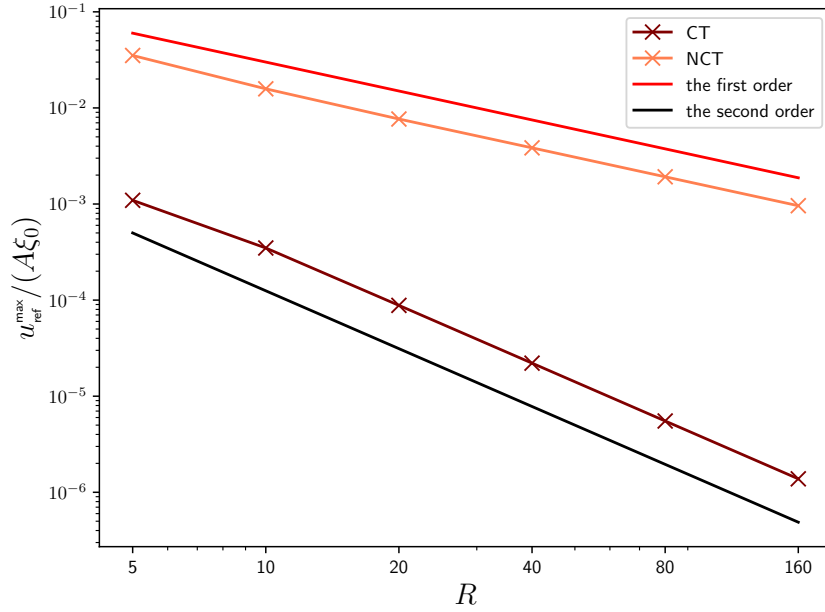


Рис. 7: Отношение амплитуды скорости отражённой волны к амплитуде скорости исходной волны в зависимости от ширины волны R . Параметры моделирования: $\rho_0 = 1$, $A = 10^{-4}$, $x_0 = 2000$, $c_s = 1/\sqrt{3}$, $\nu = 10^{-6}$, $\Lambda = 9 \times 10^{-12}$.

где ρ_0 — плотность вдали от волны, A — безразмерная амплитуда волны, x_0 — центр волны, R — ширина волны, c_s — скорость звука.

Область моделирования представляет из себя прямоугольную сетку с размерами $H_x = 8000.5$, $H_y = 3$, левая половина области уточняется до мелкой сетки. Волна (49) задаётся в центре точной сетки, $x_0 = 2000$, и распространяется вправо, к границе перехода сеток. По обеим осям используются периодические граничные условия. Начальные популяции берутся равновесными.

При переходе на крупную сетку волна порождает паразитную отражённую волну, распространяющуюся в противоположном направлении [26]. В качестве ошибки схемы мы используем отношение амплитуды скорости отражённой волны к амплитуде скорости изначальной волны. Скорость звука выбираем равной значению ξ_0 у подавляющего большинства шаблонов в схеме, $c_s = 1/\sqrt{3}$. Чтобы пренебречь собственным затуханием волны, выбирается малое значение вязкости $\nu = 10^{-6}$.

Графики указанной ошибки в зависимости от ширины волны R (т.е. от её пространственного разрешения) приведены на рис. 7. Как можно видеть, схема СТ, как и ранее, показывает второй порядок аппроксимации, в то время как схема NCT в этом тесте демонстрирует первый порядок.

4 Заключение

Разработаны две безынтерполяционные схемы атермического узлового LBM на неравномерных сетках с оператором столкновения TRT. Каждая из схем использует собственный набор шаблонов LBM в области границы перехода неравномерной сетки, что позволяет избежать интерполяции данных. При этом не нарушается простота и эффективность классического LBM. В частности, схемы демонстрируют высокую точность и сохранение второго порядка аппроксимации в большинстве тестов.

Для перехода между наборами популяций, которые отвечают разным шаблонам, построен универсальный способ их локальной перекалибровки. Применение оператора столкновения TRT, обладающего дополнительным свободным параметром по сравнению с оператором BGK, расширяет возможности метода безынтерполяционного LBM в плане контроля точности и стабильности вычислений.

В работе приведены только двумерные тесты с измельчением сетки лишь вдоль одной из осей, однако изложенная теория равнозначно применима как для произвольного масштабирования сетки, так и для трёхмерного моделирования.

А Разложение Чепмена – Энского для оператора столкновения TRT

Дискретизованное кинетическое уравнение Больцмана для популяций ЛВМ имеет вид:

$$f_i(t + \Delta t, \mathbf{r} + \Delta t \mathbf{c}_i) - f_i(t, \mathbf{r}) = \Delta t \Omega_i. \quad (50)$$

Предполагая наличие второго порядка аппроксимации, разложим левую часть в (50):

$$\Delta t D_i f_i + \frac{\Delta t^2}{2} D_i^2 f_i + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \Delta t \Omega_i, \quad D_i \equiv \partial_t + \mathbf{c}_i \partial_{\mathbf{r}}. \quad (51)$$

Избавимся от вторых производных, входящих в (51). Для этого подействуем на (51) оператором $\Delta t D_i / 2$ и получим равенство

$$\frac{\Delta t^2}{2} D_i^2 f_i + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \frac{\Delta t^2}{2} D_i \Omega_i. \quad (52)$$

Вычтя (52) из (51) и оставив только слагаемые второго порядка по Δt , придём к уравнению, удобному для дальнейшего анализа:

$$D_i f_i = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} D_i\right) \Omega_i. \quad (53)$$

Рассмотрим произвольный оператор столкновения, линейный по неравновесным частям популяций³

$$\Omega_i = -\alpha_{ij} (f_j - f_j^{\text{eq}}), \quad (54)$$

где α — симметричная матрица постоянных коэффициентов.

Приступим к анализу Чепмена – Энского, введя разложения популяций и их производных по параметру ϵ , имеющему смысл числа Кнудсена [1]:

$$f_i = f_i^{\text{eq}} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \dots, \quad \partial_t = \epsilon \partial_t^{(1)} + \epsilon^2 \partial_t^{(2)} + \dots, \quad \partial_a = \epsilon \partial_a^{(1)}. \quad (55)$$

Подставив (55) в (53) с оператором столкновения (54), получаем

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\partial_t^{(1)} + \epsilon \partial_t^{(2)} + c_{ia} \partial_a^{(1)} \right) \left(f_i^{\text{eq}} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} \right) \\ = -\epsilon \alpha_{ij} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\epsilon \partial_t^{(1)} + \epsilon^2 \partial_t^{(2)} + \epsilon c_{ia} \partial_a^{(1)} \right) \right) \left(f_j^{(1)} + \epsilon f_j^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Разделяя (56) для разных порядков по ϵ , получаем в двух низших порядках

$$\mathcal{O}(\epsilon) : \quad \left(\partial_t^{(1)} + c_{ia} \partial_a^{(1)} \right) f_i^{\text{eq}} = -\alpha_{ij} f_j^{(1)}, \quad (57)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^2) : \quad \partial_t^{(2)} f_i^{\text{eq}} + \left(\partial_t^{(1)} + c_{ia} \partial_a^{(1)} \right) \left(\delta_{ij} - \frac{\alpha_{ij} \Delta t}{2} \right) f_j^{(1)} = -\alpha_{ij} f_j^{(2)}. \quad (58)$$

³Повторяющийся индекс j в равенстве (54) предполагает суммирование по нему.

Отметим, что поскольку на шаге столкновения не должны изменяться физические моменты, справедливы соотношения

$$\sum_i \alpha_{ij} f_j^{\text{neq}} = \sum_i f_i^{\text{neq}} = 0, \quad \sum_i c_{ia} \alpha_{ij} f_j^{\text{neq}} = \sum_i c_{ia} f_i^{\text{neq}} = 0. \quad (59)$$

Далее, в соответствии с (57) и (58), мы будем предполагать выполнение (59) для популяций в каждом порядке разложения по ϵ , т.е.

$$\sum_i \alpha_{ij} f_j^{(n)} = 0, \quad \sum_i c_{ia} \alpha_{ij} f_j^{(n)} = 0, \quad (60a)$$

$$\sum_i f_i^{(n)} = 0, \quad \sum_i c_{ia} f_i^{(n)} = 0, \quad n \geq 1. \quad (60b)$$

Домножая (57) на 1, c_{ib} и суммируя по индексу i с использованием соотношений (60), находим макроскопические уравнения первого порядка по ϵ :

$$\partial_t^{(1)} \rho + \partial_a^{(1)} (\rho u_a) = 0, \quad (61)$$

$$\partial_t^{(1)} (\rho u_b) + \partial_a^{(1)} \Pi_{ab}^{\text{eq}} = 0, \quad (62)$$

где

$$\Pi_{ab}^{\text{eq}} \equiv \sum_i c_{ia} c_{ib} f_i^{\text{eq}}. \quad (63)$$

Аналогичным образом, домножив (58) на 1, c_{ib} и просуммировав по индексу i , находим два макроскопических уравнения второго порядка по ϵ :

$$\partial_t^{(2)} \rho = 0, \quad (64)$$

$$\partial_t^{(2)} (\rho u_b) + \partial_a^{(1)} \left(\Pi_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} \Pi_{ab}^{*(1)} \right) = 0, \quad (65)$$

в которых введены обозначения

$$\Pi_{ab}^{(1)} \equiv \sum_i c_{ia} c_{ib} f_i^{(1)}, \quad \Pi_{ab}^{*(1)} \equiv \Delta t \sum_i c_{ia} c_{ib} \alpha_{ij} f_j^{(1)}. \quad (66)$$

Суммируя равенства (61), (64) и (62), (65), домножив их на соответствующий порядок ϵ , получаем макроскопические уравнения

$$\partial_t \rho + \partial_a (\rho u_a) = 0, \quad \partial_t (\rho u_b) + \partial_a \left(\Pi_{ab}^{\text{eq}} + \epsilon \left(\Pi_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} \Pi_{ab}^{*(1)} \right) \right) = 0. \quad (67)$$

Для определения $\Pi_{ab}^{(1)}$ и $\Pi_{ab}^{*(1)}$ необходимо выразить $f_i^{(1)}$ через физические моменты функции распределения. Если матрица α обратима, это можно сделать с помощью равенства (57):

$$f_i^{(1)} = - \left(\alpha^{-1} \right)_{ij} D_j^{(1)} f_j^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}), \quad D_j^{(1)} \equiv \partial_t^{(1)} + c_{ja} \partial_a^{(1)}. \quad (68)$$

Следовательно, выражения (66) можно переписать в виде

$$\Pi_{ab}^{(1)} = \sum_i c_{ia} c_{ib} (\alpha^{-1})_{ij} D_j^{(1)} f_j^{\text{eq}}, \quad \Pi_{ab}^{*(1)} = \Delta t \sum_i c_{ia} c_{ib} D_i^{(1)} f_i^{\text{eq}}, \quad (69)$$

откуда видно, что выражение для $\Pi_{ab}^{*(1)}$ не зависит от выбора столкновительного члена (от матрицы α), в отличие от $\Pi_{ab}^{(1)}$.

Обратим внимание на то, что обратимость матрицы α не является критерием обратимости шага столкновения (приложение С).

Используя соотношения (61), (62), выразим производную по времени, которая присутствует в (68), через производные по координатам:

$$\begin{aligned} \partial_t^{(1)} f_i^{\text{eq}} &= \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial \rho} \partial_t^{(1)} \rho + \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial u_a} \partial_t^{(1)} u_a \\ &= -\frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial \rho} \partial_a^{(1)} (\rho u_a) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial u_a} \left(\partial_b^{(1)} \Pi_{ab}^{\text{eq}} - u_a \partial_b^{(1)} (\rho u_b) \right), \end{aligned} \quad (70)$$

после чего

$$f_i^{(1)} = (\alpha^{-1})_{ij} \left(\partial_a^{(1)} (\rho u_a) \frac{\partial f_j^{\text{eq}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\partial_b^{(1)} \Pi_{ab}^{\text{eq}} - u_a \partial_b^{(1)} (\rho u_b) \right) \frac{\partial f_j^{\text{eq}}}{\partial u_a} + c_{ja} \partial_a^{(1)} f_j^{\text{eq}} \right). \quad (71)$$

Выражения (67), (69), (71) справедливы для любого приближения равновесной функции распределения и любого линейного члена столкновения с обратимой матрицей α .

В случае стандартных равновесных популяций (9) можно получить

$$\Pi_{ab}^{\text{eq}} = \rho (\xi_0^2 \delta_{ab} + u_a u_b), \quad \Pi_{ab}^{*(1)} = -\Delta t \rho \xi_0^2 \left(\partial_a^{(1)} u_b + \partial_b^{(1)} u_a \right) + \Delta t \partial_d^{(1)} (\rho u_a u_b u_d). \quad (72)$$

Предполагая скорость потока u малой, в выражении для $\Pi_{ab}^{*(1)}$ необходимо удержать тот же порядок по u , что и в равновесных популяциях, тем самым пренебрегая вторым слагаемым:

$$\Pi_{ab}^{\text{eq}} = \rho (\xi_0^2 \delta_{ab} + u_a u_b), \quad \Pi_{ab}^{*(1)} \simeq -\Delta t \rho \xi_0^2 \left(\partial_a^{(1)} u_b + \partial_b^{(1)} u_a \right). \quad (73)$$

Также для стандартной равновесной функции первая поправка по ϵ для неравновесной части функции распределения (71) принимает вид

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= w_j (\alpha^{-1})_{ij} \left(-\rho \partial_a^{(1)} u_a + \frac{c_{ja} c_{jb}}{2\xi_0^2} \rho \left(\partial_a^{(1)} u_b + \partial_b^{(1)} u_a \right) \right. \\ &\quad - \frac{c_{ja}}{2\xi_0^2} \partial_b^{(1)} \left(\rho \left(u^2 \delta_{ab} + 2u_a u_b \right) \right) + \frac{c_{ja} c_{jb} c_{jd}}{2\xi_0^4} \partial_d^{(1)} (\rho u_a u_b) \\ &\quad \left. + \frac{u^2 \delta_{ab} + 2u_a u_b}{2\xi_0^2} \partial_b^{(1)} (\rho u_a) - \frac{c_{ja} c_{jb}}{2\xi_0^4} \left(u_a u_b \partial_d^{(1)} (\rho u_d) + 2u_a u_d \partial_d^{(1)} (\rho u_b) \right) \right), \end{aligned} \quad (74)$$

где, как и в (73), следует пренебречь кубическими по u слагаемыми в последней строке, получив

$$f_i^{(1)} \simeq w_j (\alpha^{-1})_{ij} \left(-\rho \partial_a^{(1)} u_a + \frac{c_{ja} c_{jb}}{2\xi_0^2} \rho (\partial_a^{(1)} u_b + \partial_b^{(1)} u_a) - \frac{c_{ja}}{2\xi_0^2} \partial_b^{(1)} (\rho (u^2 \delta_{ab} + 2u_a u_b)) + \frac{c_{ja} c_{jb} c_{jd}}{2\xi_0^4} \partial_d^{(1)} (\rho u_a u_b) \right). \quad (75)$$

Принимая во внимание соотношения для суммирования дискретных скоростей c_{ia} , легко увидеть, что и для представления (74), и для (75) в точности выполняются соотношения (60a), как и предполагалось. Выполнение равенств (60b) должно гарантироваться явным видом α .

Далее мы будем исследовать частный случай оператора столкновения TRT (15). Матрицу столкновения оператора TRT можно представить в виде

$$\alpha_{ij}|_{\text{TRT}} \equiv \omega_{ij} = \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} \delta_{ij} + \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} \bar{\delta}_{ij}, \quad (76)$$

где

$$\bar{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \bar{i}; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (77)$$

и индекс \bar{i} обозначает номер популяции, соответствующей противоположной скорости (16).

Отметим, что выражение для обратной матрицы ω^{-1} можно также представить в простом виде

$$(\omega^{-1})_{ij} = \frac{\omega^+ + \omega^-}{\omega^+ \omega^-} \delta_{ij} - \frac{1}{\omega^+ \omega^-} \omega_{ij} = \frac{\omega^+ + \omega^-}{2\omega^+ \omega^-} \delta_{ij} - \frac{\omega^+ - \omega^-}{2\omega^+ \omega^-} \bar{\delta}_{ij}. \quad (78)$$

Используя (78), для $\Pi_{ab}^{(1)}$ находим

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{(1)} &= \sum_i c_{ia} c_{ib} f_i^{(1)} = - \sum_i c_{ia} c_{ib} D_i^{(1)} (\omega^{-1})_{ij} f_j^{\text{eq}} \\ &= - \left(\frac{\omega^+ + \omega^-}{2\omega^+ \omega^-} \sum_i c_{ia} c_{ib} D_i^{(1)} f_i^{\text{eq}} - \frac{\omega^+ - \omega^-}{2\omega^+ \omega^-} \sum_i c_{ia} c_{ib} D_{\bar{i}}^{(1)} f_{\bar{i}}^{\text{eq}} \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Первая сумма в (79) с точностью до коэффициента представляет из себя выражение для $\Pi_{ab}^{*(1)}$ (69), а вторая, принимая во внимание (16), ничем не отличается от первой, и, следовательно,

$$\Pi_{ab}^{(1)} = \frac{\omega^+ + \omega^-}{2\Delta t \omega^+ \omega^-} \Pi_{ab}^{*(1)} - \frac{\omega^+ - \omega^-}{2\Delta t \omega^+ \omega^-} \Pi_{ab}^{*(1)} = \frac{1}{\Delta t \omega^+} \Pi_{ab}^{*(1)}. \quad (80)$$

При этом уравнение течения жидкости принимает вид

$$\partial_t(\rho u_b) + \partial_a \left(\Pi_{ab}^{\text{eq}} + \left(\frac{1}{\Delta t \omega^+} - \frac{1}{2} \right) \epsilon \Pi_{ab}^{*(1)} \right) = 0. \quad (81)$$

В случае стандартной равновесной функции (9), используя (73), приходим к хорошо известному уравнению Навье – Стокса

$$\partial_t(\rho u_b) + \partial_a(\rho u_a u_b) = -\xi_0^2 \partial_b \rho + \Delta t \xi_0^2 \left(\frac{1}{\Delta t \omega^+} - \frac{1}{2} \right) \partial_a (\rho (\partial_a u_b + \partial_b u_a)). \quad (82)$$

В Шаблоны LBM, используемые в работе

$D_n Q_m(\Delta t, \xi_0^2)$	цветовая идентификация	точки квадратуры \mathbf{v}_i (по оболочкам)	число точек в оболочке	веса w_i
D2Q9(1, 1/3)	▲	(0, 0)	1	4/9
D2Q9(1/2, 1/3)	▲	$(\pm\sqrt{3}, 0), (0, \pm\sqrt{3})$	4	1/9
D2Q9(1/2, 4/3)	▲	$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$	4	1/36
D2Q13 ¹ (1, 1/3)	▲	(0, 0)	1	1/9
		$(0, \pm\sqrt{3}/2)$	2	37/144
		$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/2)$	4	23/288
		$(0, \pm 3\sqrt{3}/2)$	2	1/48
		$(\pm\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3}/2)$	4	1/288
D2Q13 ² (1, 1/3)	▲	повёрнутый на $\pi/2$ шаблон D2Q13 ¹ (1, 1/3)		
D2Q13 ³ (1, 1/3)	▲	(0, 0)	1	1/9
		$(\pm\sqrt{3}/2, \pm\sqrt{3}/2)$	4	7/36
		$(\pm\sqrt{3}/2, \pm 3\sqrt{3}/2),$ $(\pm 3\sqrt{3}/2, \pm\sqrt{3}/2)$	8	1/72

С Критерий обратимости шага столкновения

Обратимость шага столкновения можно выразить в виде следующих равенств для предстолкновительных и постстолкновительных популяций:

$$f_i^{\text{post}} = f_i^{\text{pre}} - \Delta t \alpha_{ij} (f_j^{\text{pre}} - f_j^{\text{eq}}), \quad f_i^{\text{pre}} = f_i^{\text{post}} + \Delta t \beta_{ij} (f_j^{\text{post}} - f_j^{\text{eq}}), \quad (83)$$

где β — некая матрица, позволяющая произвести обращение. Подставив первое из равенств (83) во второе, находим соотношение

$$\left(\alpha_{ij} - \beta_{ik} (\delta_{jk} - \Delta t \alpha_{jk}) \right) (f_j^{\text{pre}} - f_j^{\text{eq}}) = 0, \quad (84)$$

которое должно выполняться для любых неравновесных частей предстолкновительных популяций. Таким образом, обратимость шага столкновения зависит от обратимости матрицы $(I - \Delta t \alpha)$, т.е. шаг обратим, когда

$$\det \alpha \neq \frac{1}{(\Delta t)^m}. \quad (85)$$

Список литературы

- [1] The lattice Boltzmann method: principles and practice / Krüger Timm, Halim Kusumaatmaja, Alexandr Kuzmin et al. // Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. — 2016.
- [2] Lattice Boltzmann method on quadtree grids / Yu Chen, Qinjun Kang, Qingdong Cai, Dongxiao Zhang // Physical Review E. — 2011. — Vol. 83, no. 2. — P. 026707.
- [3] An adaptive mesh refinement strategy with conservative space-time coupling for the lattice-Boltzmann method / Stephen Guzik, Xinfeng Gao, Todd Weisgraber et al. // 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. — 2013. — P. 866.
- [4] Touil Hatem, Ricot Denis, Lévêque Emmanuel. Direct and large-eddy simulation of turbulent flows on composite multi-resolution grids by the lattice Boltzmann method // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 256. — P. 220–233.
- [5] Grid refinement for entropic lattice Boltzmann models / Benedikt Dorschner, Nils Frapolli, Shyam S Chikatamarla, Ilya V Karlin // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 053311.
- [6] Fakhari Abbas, Geier Martin, Lee Taehun. A mass-conserving lattice Boltzmann method with dynamic grid refinement for immiscible two-phase flows // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 315. — P. 434–457.
- [7] A generic, mass conservative local grid refinement technique for lattice-Boltzmann schemes / Martin Rohde, Drona Kandhai, JJ Derksen, Harry EA Van den Akker // International journal for numerical methods in fluids. — 2006. — Vol. 51, no. 4. — P. 439–468.
- [8] Filippova Olga, Hänel Dieter. Grid refinement for lattice-BGK models // Journal of computational Physics. — 1998. — Vol. 147, no. 1. — P. 219–228.
- [9] Filippova Olga, Hänel Dieter. A novel lattice BGK approach for low Mach number combustion // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 158, no. 2. — P. 139–160.
- [10] Grid refinement in lattice Boltzmann methods based on volumetric formulation / Hudong Chen, Olga Filippova, J. Hoch et al. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2006. — Vol. 362, no. 1. — P. 158–167.

- [11] Flow simulation with locally-refined LBM / Ye Zhao, Feng Qiu, Zhe Fan, Arie Kaufman // Proceedings of the 2007 symposium on Interactive 3D graphics and games. — 2007. — P. 181–188.
- [12] Dupuis Alexandre, Chopard Bastien. Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm // Physical Review E. — 2003. — Vol. 67, no. 6. — P. 066707.
- [13] Geier Martin, Greiner Andreas, Korvink Jan G. Bubble functions for the lattice Boltzmann method and their application to grid refinement // The European Physical Journal Special Topics. — 2009. — Vol. 171, no. 1. — P. 173–179.
- [14] Березин Арсений Владимирович, Иванов Антон Валерьевич, Перепёлкина Анастасия Юрьевна. Безынтерполяционный LBM на неравномерных сетках // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2022. — no. 65. — P. 1–20.
- [15] Березин Арсений Владимирович, Иванов Антон Валерьевич, Перепёлкина Анастасия Юрьевна. Безынтерполяционный LBM на неравномерных сетках // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2023. — Vol. 26, no. 3. — P. 235–252.
- [16] Berezin A.V., Ivanov A.V., Perepelkina A.Yu. LBM without Interpolation on Non-Uniform Grids // Numerical Analysis and Applications. — 2023. — Vol. 16, no. 3. — P. 193–207.
- [17] Ginzburg Irina, Verhaeghe Frederik, d’Humières Dominique. Two-relaxation-time lattice Boltzmann scheme: About parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions // Communications in computational physics. — 2008. — Vol. 3, no. 2. — P. 427–478.
- [18] Ginzburg Irina, Verhaeghe Frederik, d’Humières Dominique. Study of simple hydrodynamic solutions with the two-relaxation-times lattice Boltzmann scheme // Communications in computational physics. — 2008. — Vol. 3, no. 3. — P. 519–581.
- [19] Qian Yue-Hong, d’Humières Dominique, Lallemand Pierre. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation // Europhysics letters. — 1992. — Vol. 17, no. 6. — P. 479.
- [20] Dorschner Benedikt, Bösch Fabian, Karlin Ilya V. Particles on demand for kinetic theory // Physical review letters. — 2018. — Vol. 121, no. 13. — P. 130602.

- [21] Regularization and the Particles-on-Demand method for the solution of the discrete Boltzmann equation / E. Zipunova, A. Perepelkina, A. Zakirov, S. Khilkov // Journal of Computational Science. — 2021. — Vol. 53. — P. 101376.
- [22] К вопросу о консервативности метода PonD решения дискретного уравнения Больцмана / А.В. Закиров, Б.А. Корнеев, В.Д. Левченко, А.Ю. Перепёлкина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2019. — no. 35. — P. 1–19.
- [23] Зипунова Е.В., Перепёлкина А.Ю. Разработка явных и консервативных схем для решеточных уравнений Больцмана с адаптивным переносом // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2022. — no. 7. — P. 1–20.
- [24] Ivanov A., Khilkov S. Aiwlib library as the instrument for creating numerical modeling applications // Scientific Visualization. — 2018. — Vol. 10, no. 1. — P. 110–127.
- [25] Sukop MC. DT Thorne, Jr. Lattice Boltzmann Modeling Lattice Boltzmann Modeling. — Springer, 2006.
- [26] Analysis and reduction of spurious noise generated at grid refinement interfaces with the lattice Boltzmann method / Thomas Astoul, Gauthier Wissocq, Jean-François Boussuge et al. // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 418. — P. 109645.