



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 34 за 2024 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.Ю. Царегородцев](#)

Баллистическое проектирование орбит космического аппарата с использованием гравитационных манёвров в проектах изучения приполярных областей Солнца из внеэклиптических положений

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Царегородцев А.Ю. Баллистическое проектирование орбит космического аппарата с использованием гравитационных манёвров в проектах изучения приполярных областей Солнца из внеэклиптических положений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 34. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-34>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-34>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.Ю. Царегородцев

**Баллистическое проектирование
орбит космического аппарата
с использованием гравитационных
манёвров в проектах изучения
приполярных областей Солнца
из внеэклиптических положений**

Москва — 2024

А.Ю. Царегородцев

Баллистическое проектирование орбит космического аппарата с использованием гравитационных манёвров в проектах изучения приполярных областей Солнца из внеэклиптических положений

Проведение космических научных экспериментов по изучению приполярных областей Солнца невозможно без баллистического проектирования орбит с большим наклоном к плоскости солнечного экватора. В отечественном проекте «Интергелиозонд» необходимо реализовать наклонение орбиты не менее 30 градусов. Прямое маневрирование космического аппарата с целью увеличения наклона к плоскости солнечного экватора требует больших затрат характеристической скорости. Минимизации затрат при построении орбит с большим наклоном возможно достигнуть только с использованием цепочек гравитационных манёвров у планет Солнечной системы, методы и алгоритмы построения которых рассмотрены в данной работе.

Ключевые слова: Интергелиозонд, гравитационный манёвр, гелиоцентрическая орбита с большим наклоном, минимизация характеристической скорости

A.Y. Tsaregorodtsev

Ballistic design of spacecraft's orbits using gravity-assist maneuvers in projects for studying the solar circumpolar regions from positions over ecliptic

Conducting space scientific experiments to study the circumpolar regions of the Sun is impossible without ballistic design of orbits with a high inclination to the plane of the solar equator. In the domestic Interheliozond project, it is necessary to implement an orbital inclination of at least 30 degrees. Direct maneuvering of the spacecraft in order to increase the inclination to the plane of the solar equator requires high costs of characteristic speed. Minimizing the costs of constructing orbits with a high inclination can only be achieved using chains of gravity assist maneuvers for the planets of the Solar System, the methods and algorithms for constructing which are considered in this paper.

Key words: Interheliozond, gravity assist maneuver, heliocentric orbit with high inclination, minimization of characteristic speed

Введение

В настоящее время разрабатывается отечественный проект «Интергелиозонд» [1], предназначенный для изучения космическим аппаратом (КА) приполярных областей Солнца с наклонённых к солнечному экватору гелиоцентрических орбит. Манёвры по изменению наклона являются наиболее затратными по характеристической скорости, поэтому целесообразно использовать цепочки гравитационных манёвров (ГМ) для выведения КА на целевую орбиту.

Задаче повышения наклона гелиоцентрической орбиты КА с целью исследования приполярных областей Солнца уделяется большое внимание [2–6]. В работе [2] рассмотрена задача повышения наклона к плоскости солнечного экватора с помощью пассивных гравитационных манёвров около Земли и Юпитера. Рассмотрены вопросы, связанные с поиском компромисса между близостью целевой орбиты КА к Солнцу, необходимой для точности наблюдений, и сложностью системы тепловой защиты КА. Также в работе [2] приведён схематичный вид Солнца с гелиоцентрических орбит с различным наклоном к плоскости солнечного экватора (рис. 1).

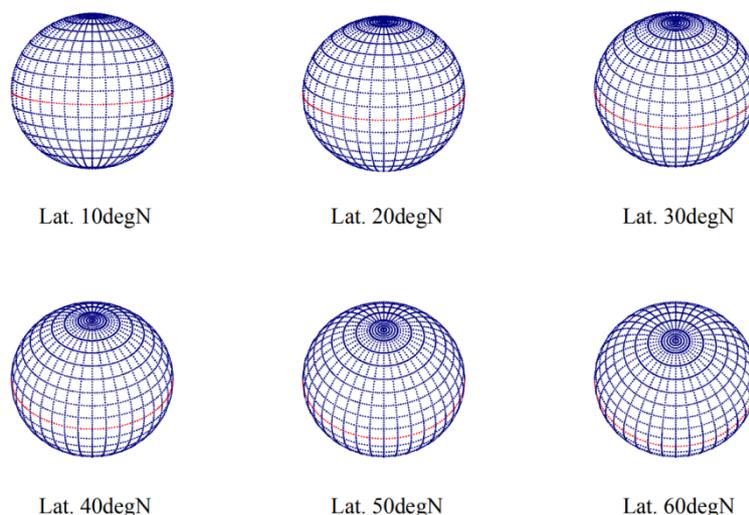


Рис. 1. Схематичный вид Солнца с гелиоцентрических орбит с различным наклоном к плоскости солнечного экватора (заимствован из [2])

Из рис. 1 видно, что наклона 30° к плоскости солнечного экватора достаточно для обзора приполярных областей Солнца. Так как с увеличением требуемого наклона целевой орбиты растёт и время проведения миссии, а значит, и затраты на её проведение, данное ограничение рассматривается во многих работах по баллистическому проектированию миссий данного типа.

В работах [3, 4] рассмотрена задача повышения наклона к плоскости эклиптики с помощью цепочки пассивных гравитационных маневров, предложена методика решения задачи, основанная на использовании диаграмм

Тиссерана-Пуанкаре, приведены оценки вариации наклона при пролёте крупных тел Солнечной системы.

В работе [5] рассмотрена задача повышения наклона к плоскости эклиптики с помощью цепочки пассивных гравитационных маневров у Земли и у Венеры, проведён анализ предложенных баллистических схем.

В работе [6] рассмотрена задача повышения наклона к плоскости солнечного экватора, предложена баллистическая схема с использованием двигателя малой тяги на участке траектории Земля-Земля с последующим гравитационным манёвром у Земли и дальнейшим повышением наклона с помощью пассивных гравитационных манёвров у Венеры.

В данной работе предлагается эффективный метод построения траекторий выведения КА на орбиту с большим наклоном к солнечному экватору. Задача выведения традиционно разбивается на два этапа [3]: разгон и повышение наклона. На разгонном этапе предлагается использовать активные гравитационные манёвры с Венерой, Землей и Марсом. Для решения задачи повышения наклона предложен алгоритм поиска оптимальной по времени подъёма схемы, на основе вычислительных экспериментов сделан вывод об оптимальности схем с использованием резонанса 1:1 между орбитальными периодами КА после совершения ГМ и планеты. Рассмотрены 19 различных цепочек разгонных ГМ, найдены локально-оптимальные траектории с отлётом в эпоху с 2027 по 2037 год, определены возможные эффективные баллистические схемы для реализации проекта «Интергелиозонд».

Публикация подготовлена по материалам дипломной работы, выполненной на факультете космических исследований МГУ имени М.В. Ломоносова.

Схема решения задачи повышения наклона

Наименее сложной схемой решения задачи повышения наклона является схема с последовательностью ГМ у одной и той же планеты (например, Венеры [3–6]), осуществляемых в одной и той же точке её орбиты. Планету, около которой совершается цепочка повышающих ГМ, в дальнейшем будем называть вспомогательной.

Известно, что наклонение к плоскости орбиты вспомогательной планеты, которое может получить орбита КА при совершении любой цепочки ГМ около неё, ограничено сверху и определяется асимптотической скоростью КА относительно планеты при совершении ГМ [3]:

$$\sin i \leq \frac{v_{\infty}}{v_{nl}},$$

где v_{∞} – асимптотическая скорость КА, v_{nl} – скорость планеты, i – наклонение гелиоцентрической орбиты КА к плоскости орбиты планеты.

Из данной формулы следует, что величина асимптотической скорости для достижения высокого наклона должна быть довольно большой (например, для достижения наклона 30° к плоскости орбиты Венеры необходима величина асимптотической скорости около 17.5 км/с). Достичь такой асимптотической скорости можно, например, с использованием двигателей малой тяги [6] и (или) дополнительных разгонных ГМ у других тел Солнечной системы [2–5].

Так как после любой цепочки пассивных ГМ у вспомогательной планеты асимптотическая скорость КА не меняется, то множество концов возможных векторов асимптотической скорости КА лежит на сфере, которую ещё называют v_∞ -сферой [7]. На v_∞ -сфере можно построить так называемые резонансные линии – множества концов векторов асимптотической скорости, таких что соответствующие периоды орбиты КА и орбиты вспомогательной планеты соотносятся как целые числа. Если КА при отлёте из сферы действия планеты имеет асимптотическую скорость, лежащую на резонансной линии, то он вновь встретится с планетой в этой же точке через целое число периодов обращения планеты. При совершении новых ГМ конец вектора асимптотической скорости КА может либо перемещаться по одной резонансной линии, либо перескакивать между соседними, пока не достигнет максимума наклона. Использование резонансных линий является необходимым условием решения задачи повышения наклона гелиоцентрической орбиты КА, так как максимум наклона может быть не достигнут за один ГМ.

Далее будут рассмотрены задачи разгона и повышения наклона, а также алгоритмы их решения.

Разгонный этап

Рассматривается задача оптимизации перелёта КА к вспомогательной планете с помощью цепочки ГМ в следующей постановке: векторы положения и скорости планет рассчитываются по аналитическим формулам задачи двух тел [8], начальные условия соответствуют эфемеридам DE430 [9], а движение КА рассматривается в рамках модели точечных сфер действия [3, 8].

На момент отлёта КА находится на круговой околоземной орбите с высотой 200 км. Поиск траектории перелёта от Земли к планете для совершения ГМ осуществляется с помощью метода Иццо [10]. Результатом решения задачи Ламберта является вектор $\mathbf{v}_{3\infty}$ отлётной асимптотической скорости от Земли. Импульс, выдаваемый двигателями КА на круговой околоземной орбите, необходимый для достижения заданной величины отлётной асимптотической скорости, рассчитывается с помощью следующей формулы [11]:

$$\Delta v_0 = \sqrt{|\mathbf{v}_{3\infty}|^2 + \frac{2\mu_3}{r_0}} - \sqrt{\frac{\mu_3}{r_0}},$$

где μ_3 – гравитационный параметр Земли, $r_0 = 6571$ км – радиус околоземной орбиты КА.

После совершения ГМ у i -й планеты осуществляется перелёт либо к следующей, либо к вспомогательной планете с целью повышения наклона. Пусть $\mathbf{v}_{\Pi\infty}^+$ – подлётная асимптотическая скорость при совершении ГМ, $\mathbf{v}_{\Pi\infty}^-$ – необходимая для перелёта к другой планете отлётная асимптотическая скорость, определяемая по результатам решения соответствующей задачи Ламберта, φ_{Π} – угол между введёнными векторами. Пусть μ_{Π} – гравитационный параметр планеты, а r_{Π}^{Π} – минимальная величина радиуса перицентра пролётной гиперболы, которая в данной задаче принимается равной сумме радиуса планеты и высоты пролёта 400 км. Следующее уравнение позволяет найти необходимый для совершения ГМ радиус перицентра r_{π} :

$$\varphi_{\Pi} = \arcsin \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\Pi} + r_{\pi} |\mathbf{v}_{\Pi\infty}^+|^2} + \arcsin \frac{\mu_{\Pi}}{\mu_{\Pi} + r_{\pi} |\mathbf{v}_{\Pi\infty}^-|^2}.$$

Если $r_{\pi} \geq r_{\pi}^{\Pi}$, то считается, что совершение ГМ возможно. Импульс активного ГМ в перицентре пролётной гиперболы рассчитывается по следующей формуле [11]:

$$\Delta v_{\Pi} = \left| \sqrt{|\mathbf{v}_{\Pi\infty}^+|^2 + \frac{2\mu_{\Pi}}{r_{\pi}}} - \sqrt{|\mathbf{v}_{\Pi\infty}^-|^2 + \frac{2\mu_{\Pi}}{r_{\pi}}} \right|.$$

По приведённым выше формулам рассчитываются суммарные затраты характеристической скорости.

Задача разгона ставится следующим образом: минимизируется суммарная характеристическая скорость при ограничении на максимальное наклонение к плоскости солнечного экватора, достижимое после совершения цепочки повышающих ГМ у вспомогательной планеты, а время разгона ограничивается 3.5 годами:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \Delta v_i \xrightarrow{t_0 \dots t_{n+1}} \min, \\ i_{\max} \geq 30^\circ, \\ t_{n+1} - t_0 \leq 3.5, \end{aligned}$$

где n – количество ГМ, t_0 – момент отлёта от Земли, $t_1 \dots t_n$ – моменты совершения ГМ, t_{n+1} – момент подлёта к вспомогательной планете.

Для решения данной задачи выбрана следующая вычислительная схема. Так как в результате вычислительных экспериментов выяснено, что локальных минимумов в задаче достаточно много, то сначала проводится минимизация на

сетке – дата отлёта, даты пролёта планет и дата подлёта к вспомогательной планете варьируются с шагом в одни сутки. Для каждого набора дат вычисляются суммарные затраты характеристической скорости, среди них выбираются десять с минимальными значениями. Далее полученные решения используются как начальное приближение для метода градиентного спуска.

Повышающий этап

В данном разделе рассмотрена задача повышения наклонения с помощью ГМ у вспомогательной планеты. Приведён алгоритм расчёта точек пересечения конуса отлётных скоростей и резонансной линии, оценено время подъёма к точке максимума наклонения по различным резонансным линиям.

Пересечение конуса скоростей и резонансной линии

Пусть $\mathbf{r}_{nl} = (x, y, z)^T$, \mathbf{v}_{nl} – радиус-вектор и вектор скорости планеты в точке совершения ГМ. Введем ортонормированную систему координат:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_{nl}}{|\mathbf{v}_{nl}|}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{r}_{nl}}{|\mathbf{r}_{nl}|} \times \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1. \quad (1)$$

В ней скорость планеты записывается как $\mathbf{v}_{nl} = (v_{nl}, 0, 0)^T$, где v_{nl} – модуль скорости планеты.

Пусть $\mathbf{v}^- = (v_x^-, v_y^-, v_z^-)^T$ – вектор подлётной асимптотической скорости, $\mathbf{v}^+ = (v_x^+, v_y^+, v_z^+)^T$ – вектор отлётной асимптотической скорости. На повышающем этапе будем рассматривать только пассивные ГМ, поэтому $v_\infty = |\mathbf{v}^-| = |\mathbf{v}^+|$.

Для того чтобы после ГМ КА вышел на резонансную с планетой орбиту, необходимо, чтобы периоды орбиты КА и планеты соотносились как целые числа:

$$\frac{T}{T_{nl}} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Согласно третьему закону Кеплера справедливо следующее соотношение, связывающее период эллиптической орбиты с большой полуосью:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (3)$$

Из интеграла энергии следует, что в случае эллиптического движения для скорости тела на орбите с заданной большой полуосью a в точке с заданным

расстоянием r от притягивающего центра справедливо следующее соотношение:

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (4)$$

Подставив формулы (4) и (3) в (2), получим соотношение, связывающее скорость планеты и скорость КА после совершения ГМ:

$$\frac{2\mu_C}{r_{nl}} - |\mathbf{v}_{nl} + \mathbf{v}^+|^2 = \left(\frac{2\mu_C}{r_{nl}} - |\mathbf{v}_{nl}|^2 \right) \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\mu_C}{a_{nl}} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{2}{3}},$$

где μ_C – гравитационный параметр Солнца, a_{nl} – большая полуось орбиты планеты.

После преобразований можно получить следующее выражение:

$$2v_x^+ v_{nl} = \frac{\mu_C}{a_{nl}} \left(1 - \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right) - v_\infty^2.$$

Таким образом, резонансную линию можно представить как решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} v_x^+ = \frac{\mu_C}{2v_{nl} a_{nl}} \left(1 - \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{v_\infty^2}{2v_{nl}}, \\ (v_x^+)^2 + (v_y^+)^2 + (v_z^+)^2 = v_\infty^2, \end{cases}$$

или в параметризованном виде:

$$\begin{cases} v_x^+ = \frac{\mu_C}{2v_{nl} a_{nl}} \left(1 - \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{v_\infty^2}{2v_{nl}}, \\ v_y^+ = \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^+)^2} \cos \theta, \\ v_z^+ = \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^+)^2} \sin \theta, \\ \theta \in [0, 2\pi). \end{cases} \quad (5)$$

Из полученной системы уравнений следует, что резонансные линии представляют собой окружности на v_∞ -сфере, причём плоскости, в которых лежат данные окружности, перпендикулярны вектору скорости вспомогательной планеты.

После пассивного ГМ вектор скорости КА в планетоцентрической системе координат поворачивается на угол φ :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_{nl}}{\mu_{nl} + r_{\pi} v_{\infty}^2}.$$

В связи с тем, что после пассивного ГМ может меняться только направление асимптотической скорости, а модуль остается тем же, все возможные концы векторов отлётной асимптотической скорости лежат на пересечении конуса с углом полураствора φ и v_{∞} -сферы. При фиксированном радиусе перицентра пролётной гиперболы получившийся конус пересекает v_{∞} -сферу по окружности. Получившаяся окружность может как пересекать резонансную линию в одной или двух точках, так и не пересекать её вообще. Конус скоростей может задаваться скалярным произведением отлётной и подлётной асимптотической скоростей:

$$v_x^- v_x^+ + v_y^- v_y^+ + v_z^- v_z^+ = v_{\infty}^2 \cos \varphi.$$

Используя параметризацию резонансной линии (5), получим её пересечение с конусом отлётных асимптотических скоростей:

$$v_x^- v_x^+ + v_y^- \sqrt{v_{\infty}^2 - (v_x^+)^2} \cos \theta + v_z^- \sqrt{v_{\infty}^2 - (v_x^+)^2} \sin \theta = v_{\infty}^2 \cos \varphi,$$

тогда

$$v_y^- \cos \theta + v_z^- \sin \theta = \frac{v_{\infty}^2 \cos \varphi - v_x^- v_x^+}{\sqrt{v_{\infty}^2 - (v_x^+)^2}}. \quad (6)$$

Получим уравнение относительно θ вида $\cos \theta + a \sin \theta = b$. Оно имеет решение в области действительных чисел при $a^2 - b^2 + 1 \geq 0$:

$\theta = 2 \arctg \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 1}}{b + 1} \right)$. При $a^2 - b^2 + 1 = 0$ решение единственно. В данном

случае $a = \frac{v_z^-}{v_y^-}$, $b = \frac{v_{\infty}^2 \cos \varphi - v_x^- v_x^+}{v_y^- \sqrt{v_{\infty}^2 - (v_x^+)^2}}$. Если $a^2 - b^2 + 1 < 0$, то решений нет,

следовательно, после совершения ГМ невозможно выйти на выбранную резонансную линию. При $a^2 - b^2 + 1 = 0$ получаем касание конуса отлётных скоростей и резонансной линии. Наконец, если $a^2 - b^2 + 1 > 0$, то существуют 2 решения, соответствующие двум значениям отлётной асимптотической скорости, лежащим на резонансной линии, которые могут быть получены после совершения ГМ при минимальном радиусе перицентра пролётной гиперболы.

Максимальное наклонение к плоскости орбиты вспомогательной планеты на резонансной линии и на сфере асимптотических скоростей

Пусть $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ – радиус-вектор планеты на момент совершения ГМ в системе координат (1), $\mathbf{v} = (v_x^+ + v_{nl}, v_y^+, v_z^+)$ – вектор гелиоцентрической скорости КА после совершения ГМ. Известно выражение для наклонения орбиты при заданном радиус-векторе и векторе скорости тела [8]:

$$i = \arccos\left(\frac{\mathbf{c}_z}{|\mathbf{c}|}\right),$$

где \mathbf{c} – вектор интеграла площадей, равный векторному произведению радиус-вектора тела на вектор его скорости. После совершения ГМ вектор интеграла площадей КА вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (yv_z^+, -xv_z^+, xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl})).$$

Тогда можно записать следующую формулу для связи наклонения и кинематического вектора КА после совершения ГМ:

$$\cos i = \frac{xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl})}{\sqrt{(y^2 + x^2)(v_z^+)^2 + (xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl}))^2}}.$$

Выразив тангенс наклонения через косинус, получим

$$\operatorname{tg}^2 i = \frac{(y^2 + x^2)(v_z^+)^2}{(xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl}))^2}.$$

Используем в этом выражении параметризацию резонансной линии (5):

$$\operatorname{tg} i = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^+)^2} \sin \theta}{x \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^+)^2} \cos \theta - y(v_x^+ + v_{nl})}.$$

Приравняв к нулю значение производной по θ , получим следующее соотношение:

$$\cos \theta = \frac{x \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^+)^2}}{y(v_{nl} + v_x^+)}. \quad (7)$$

С использованием соотношения (7) можно получить угол параметризации θ , соответствующий максимуму наклонения на заданной резонансной линии.

Заметим, что отношение x к y всегда мало вследствие построения системы координат (1) и малости эксцентриситета планет Солнечной системы, поэтому θ , соответствующий максимальному наклонению на резонансной линии, близок к $\pm 90^\circ$.

Задача максимизации наклонения на всей v_∞ -сфере ставится как задача поиска условного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{v_z^+}{xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl})} \rightarrow \max, \\ (v_x^+)^2 + (v_y^+)^2 + (v_z^+)^2 = v_\infty^2. \end{cases}$$

Запишем функцию Лагранжа для данной задачи:

$$L(v_x^+, v_y^+, v_z^+, \lambda) = \frac{v_z^+}{xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl})} + \lambda \left((v_x^+)^2 + (v_y^+)^2 + (v_z^+)^2 - v_\infty^2 \right).$$

Приравняем частные производные функции Лагранжа к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda \left(xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl}) \right)^2 v_x^+ = -yv_z^+, \\ 2\lambda \left(xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl}) \right)^2 v_y^+ = xv_z^+, \\ 2\lambda \left(xv_y^+ - y(v_x^+ + v_{nl}) \right)^2 v_z^+ = -xv_y^+ + y(v_x^+ + v_{nl}), \\ (v_x^+)^2 + (v_y^+)^2 + (v_z^+)^2 = v_\infty^2. \end{cases}$$

В результате решения данной системы уравнений получим вектор отлётной асимптотической скорости КА после совершения ГМ, соответствующий экстремуму наклонения:

$$\begin{cases} v_x^+ = -\frac{v_\infty^2}{v_{nl}}, \\ v_y^+ = \frac{xv_\infty^2}{yv_{nl}}, \\ v_z^+ = \pm \sqrt{v_\infty^2 - \frac{v_\infty^4}{v_{nl}^2} - \frac{x^2 v_\infty^4}{y^2 v_{nl}^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что полученные соотношения (8) дают значение асимптотической скорости, соответствующей максимуму наклонения к плоскости орбиты вспомогательной планеты, поэтому они используются только

в качестве начального приближения при поиске максимума наклонения к плоскости солнечного экватора с помощью метода градиентного спуска.

Поиск резонансной линии с минимальным временем подъёма

Проведём оценку времени подъёма по резонансной линии. Допустим, что на момент первого подлёта к вспомогательной планете вектор подлётной асимптотической скорости КА лежит на резонансной линии, причем компонента v_z^- равна нулю. Найдем минимальное время, необходимое для выхода на орбиту с максимальным наклонением, при подъёме по этой резонансной линии. Запишем условие возможности перескока с резонансной линии в точку максимума наклонения после финального ГМ:

$$v_x^- v_x^+ + v_y^- v_y^+ + v_z^- v_z^+ = v_\infty^2 \cos \varphi.$$

Здесь вектор подлётной асимптотической скорости находится на резонансной линии, вектор отлётной асимптотической скорости соответствует максимуму наклонения (8). Подставим соответствующие выражения, получим

$$v_x^- \frac{v_\infty^2}{v_{nl} \sqrt{v_\infty^2 - (v_x^-)^2}} + \frac{x v_\infty^2}{y v_{nl}} \cos \theta + \sqrt{v_\infty^2 - \frac{v_\infty^4}{v_{nl}^2} - \frac{x^2 v_\infty^4}{y^2 v_{nl}^2}} \sin \theta = \frac{v_\infty^2 \cos \varphi}{\sqrt{v_\infty^2 - (v_x^-)^2}}.$$

В предположении малости отношения $\frac{x}{y}$ получим следующее выражение:

$$\sin \theta = \frac{v_\infty^2 v_{nl} \cos \varphi + v_x^- v_\infty^2}{v_{nl} \sqrt{\left(v_\infty^2 - (v_x^-)^2\right) \left(v_\infty^2 - \frac{v_\infty^4}{v_{nl}^2}\right)}}.$$

Таким образом, получаем минимальное значение параметра θ_b , необходимое для выхода в точку максимального наклонения.

Найдём максимальное приращение $\Delta\theta$ за один ГМ. Из симметрии задачи следует, что максимальная величина $\Delta\theta$ постоянна на всей резонансной линии и зависит только от угла полураствора конуса отлётных асимптотических скоростей φ и асимптотической скорости v_∞ . Поэтому максимальное приращение угла параметризации $\Delta\theta$ можно рассчитать, например, для момента первого подлёта, по формуле (6).

Следующее выражение определяет количество ГМ, необходимых для того, чтобы попасть в точку с максимальным наклонением с помощью подъёма по резонансной линии:

$$N = \left\lceil \frac{\theta_b}{\Delta\theta} \right\rceil + 1,$$

где $\lceil \quad \rceil$ – операция округления вверх.

Время повторной встречи с планетой после осуществления ГМ на резонансной линии рассчитывается как mT_{nl} . Тогда время достижения точки максимального наклона рассчитывается по следующей формуле:

$$T_{\theta} = m \left\lceil \frac{\theta_{\text{в}}}{\Delta\theta} \right\rceil.$$

Ниже, в таблице 1, приведены оценки времени достижения максимального наклона в периодах обращения Венеры для различных резонансных линий при подлётной асимптотической скорости КА 17.5 км/с относительно Венеры и высоте перицентра пролётной гиперболы 400 км. Красным цветом выделены те резонансные линии, с которых нельзя выйти в точку максимального наклона, для них $\theta_{\text{в}}$ было положено равным 90 градусам.

Таблица 1

Время подъёма к максимуму наклона по различным резонансным линиям при совершении повышающей цепочки ГМ у Венеры

Резонанс, m:n	1:2	2:3	3:4	1:1	5:4	4:3	3:2	2:1
Время повышения наклона	4	8	12	6	30	24	18	12

Из таблицы видно, что наиболее быстрый подъём обеспечивает резонансная линия 1:1. Данное утверждение выполняется для диапазона асимптотических скоростей от 15.4297 км/с (это минимальная асимптотическая скорость, необходимая для обеспечения наклона 30° к плоскости солнечного экватора при повышении наклона с помощью ГМ у Венеры) до 17.7755 км/с (при большей скорости выйти в максимум наклона с резонансной линии 1:1 становится невозможно).

Аналогичный результат можно получить и для повышающей цепочки ГМ у Земли при асимптотической скорости 15 км/с и высоте перицентра пролётной гиперболы 400 км (таблица 2).

Таблица 2

Время подъёма к максимуму наклона по различным резонансным линиям при совершении повышающей цепочки ГМ у Земли

Резонанс, m:n	1:2	2:3	3:4	1:1	5:4	4:3	3:2	2:1
Время повышения наклона, лет	3	6	9	3	20	16	12	8

В некоторых случаях после совершения разгонных ГМ подлётная асимптотическая скорость может быть больше необходимой для выхода на орбиту с наклоном 30° , тогда подъём по резонансной линии можно завершить, не выходя в точку максимального наклона.

Минимизация времени повышения наклона с использованием комбинации резонансных линий

Несмотря на оптимальность резонансной линии 1:1 по времени подъёма при совершении монорезонансной цепочки ГМ, отдельную задачу представляет собой эффективное использование комбинационной последовательности резонансных линий.

Для решения данной задачи предлагается следующий алгоритм. Напомним, что результатом решения задачи разгона является вектор подлётной асимптотической скорости к вспомогательной планете. Далее, с учетом ограничений на минимальный радиус перицентра пролётной гиперболы, а, следовательно, и на угол поворота асимптотической скорости, решается задача поиска множества резонансных линий, на которые можно выйти после совершения ГМ. Предлагается ограничиться основными резонансными линиями 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 1:1, 5:4, 4:3, 3:2 и 2:1. Далее рассчитываются векторы отлётных асимптотических скоростей, лежащие на резонансных линиях, на которые можно выйти после совершения первого ГМ. Для каждого полученного вектора асимптотической скорости вновь проводится расчёт множества резонансных линий, на которые можно выйти после нового ГМ, и соответствующих отлётных асимптотических скоростей. Данная процедура повторяется до тех пор, пока не станет возможен выход в максимум наклона либо в точку с наклоном не менее 30° к плоскости солнечного экватора. Затем среди всех полученных цепочек ГМ выбирается цепочка с минимальным временем повышения наклона.

Для всех рассмотренных в следующем разделе цепочек разгонных ГМ после совершения разгона был применен описанный алгоритм минимизации времени повышения наклона. Отметим, что во всех случаях оптимальной повышающей цепочкой являлась либо монорезонансная с использованием резонанса 1:1, либо она же, но с первичным стартом с резонансной линии 3:2 (в случае невозможности выхода на резонансную линию 1:1 после первого ГМ) с дальнейшим переходом на 1:1.

Результаты вычислительных экспериментов

Проведён расчёт траекторий разгона КА с последующим повышением наклона его орбиты с помощью ГМ у Венеры и у Земли с отлётом в эпоху с 2027 по 2037 год. Далее в таблицах 3–8 приведены результаты вычислительных экспериментов – параметры траекторий выведения и итоговых гелиоцентрических орбит КА. В таблицы внесены траектории с

характеристической скоростью не более 5.5 км/с и временем выведения на целевую орбиту не более 5 лет.

В первом столбце таблиц 3–8 приведена дата отлёта. Во втором – характеристическая скорость в км/с: величины импульсов отлёта (Δv_0), импульсов активных гравитационных манёвров ($\Delta v_i, i > 0$) и сумма импульсов (\sum). Прочерк «–» в таблице означает, что импульс близок к нулю и ГМ может считаться пассивным. В третьем столбце приведена схема повышения наклона (используемые для повышения наклона резонансные линии). В четвертом столбце – общее время выведения КА на целевую орбиту (Δt). В последнем столбце таблиц 3–8 приведены параметры целевой орбиты – наклонение (i), радиус перигелия (r_π) и афелия (r_a).

Повышение наклона с помощью цепочки гравитационных манёвров у Венеры

В таблице 3 приведены параметры траекторий выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Венера–Земля–Венера и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 3

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с				Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Δv_2	\sum			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
07.06.2029	5.10	0.09	0.03	5.22	1:1–1:1–1:1	3.96	31.08	0.52	0.77
07.06.2037	5.00	0.23	0.01	5.24	1:1–1:1–1:1	3.95	31.13	0.53	0.77

Для данной цепочки разгонных ГМ было найдено только 2 траектории (таблица 3) с практически одинаковыми затратами топлива и временем выведения на целевую орбиту.

Также были рассмотрены цепочки разгонных ГМ Марс–Венера, Марс–Земля–Венера, Венера–Марс–Венера, Венера–Марс–Земля–Венера, Венера–Земля–Марс–Венера, Марс–Венера–Марс–Венера, Марс–Венера–Земля–Венера, Марс–Земля–Марс–Венера с последующим повышением наклона с помощью ГМ у Венеры. Для данных цепочек найти траектории, удовлетворяющие поставленным ограничениям, не удалось.

Повышение наклона с помощью цепочки гравитационных манёвров у Земли

В таблице 4 приведены параметры траекторий выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Венера–Земля и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 4

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с			Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Σ			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
05.12.2027	3.96	–	3.96	1:1–1:1	4.57	32.43	0.71	1.03
16.03.2028	3.92	–	3.92	1:1–1:1	3.65	30.01	0.73	0.99
05.06.2029	3.83	–	3.83	1:1–1:1	4.57	30.56	0.74	0.98
21.10.2029	4.00	–	4.00	1:1–1:1	3.64	30.52	0.72	1.02
21.05.2031	4.15	–	4.15	1:1–1:1–1:1	4.65	30.00	0.72	0.98
01.12.2032	4.82	–	4.82	1:1–1:1–1:1	4.71	30.00	0.67	1.01
25.03.2034	3.81	–	3.81	1:1–1:1	4.60	30.94	0.73	1.00
28.08.2034	4.90	–	4.90	1:1–1:1	3.60	30.01	0.67	1.00
29.11.2035	3.95	–	3.95	1:1–1:1	4.57	32.41	0.70	1.02
14.03.2036	3.93	–	3.93	1:1–1:1	3.65	30.00	0.73	0.99
02.06.2037	3.83	–	3.83	1:1–1:1	4.58	30.71	0.74	0.98
21.10.2037	4.00	–	4.00	1:1–1:1	3.64	30.53	0.72	1.02

Минимальным затратам топлива среди приведённых в таблице 4 соответствует траектория с отлётом 25.03.2034. Минимальному времени выведения соответствует траектория с отлётом 28.08.2034.

В таблице 5 приведены параметры траекторий выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Марс–Земля и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 5

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с			Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Σ			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
05.10.2028	4.24	0.46	4.70	1:1–1:1	4.63	30.34	0.72	1.01
24.10.2030	3.94	–	3.94	1:1–1:1	4.67	30.54	0.71	1.02
25.11.2032	3.82	0.45	4.27	1:1–1:1	4.68	30.03	0.69	1.02
25.08.2037	4.28	–	4.28	1:1–1:1	4.69	30.00	0.72	1.01

Минимальным затратам топлива среди приведённых в таблице 5 соответствует траектория с отлётом 24.10.2030. Время выведения для приведённых траекторий отличается лишь на несколько суток.

В таблице 6 приведены параметры единственной найденной траектории выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Венера–Марс–Земля и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 6

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с				Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Δv_2	Σ			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
14.06.2030	4.60	0.44	–	5.05	1:1–1:1	4.93	36.11	0.61	1.15

В таблице 7 приведены параметры единственной найденной траектории выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Венера–Земля–Венера–Земля и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 7

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с					Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Δv_2	Δv_3	Σ			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
11.05.2034	4.11	–	–	–	4.11	1:1	4.51	31.94	0.62	1.16

В таблице 8 приведены параметры траекторий выведения с использованием цепочки разгонных ГМ Венера–Марс–Венера–Земля и целевой гелиоцентрической орбиты КА.

Таблица 8

Дата отлёта	Характеристическая скорость, км/с					Схема повышения наклона	Δt , лет	Параметры итоговой орбиты		
	Δv_0	Δv_1	Δv_2	Δv_3	Σ			i , град.	r_π , а.е.	r_a , а.е.
15.08.2034	4.14	–	–	–	4.14	1:1–1:1	3.76	30.11	0.73	1.01
21.08.2034	4.24	0.03	–	0.10	4.37	1:1	3.76	30.13	0.74	1.02

Минимальным затратам топлива среди приведённых в таблице 8 соответствует траектория с отлётом 15.08.2034.

Также были рассмотрены цепочки разгонных ГМ Марс–Венера–Марс–Земля, Марс–Земля–Марс–Земля, Марс–Земля–Венера–Земля с последующим повышением наклона с помощью ГМ у Земли. Для данных цепочек найти траектории, удовлетворяющие поставленным ограничениям, не удалось.

Заключение

Представлены методы и алгоритмы решения задачи повышения наклона орбиты космического аппарата к плоскости солнечного экватора до 30° для реализации научного эксперимента путём проведения цепочки гравитационных манёвров.

Решение задачи обеспечивается реализацией гравитационных манёвров у Земли, Венеры и Марса.

Проведённый анализ показал, что повышение наклона с выполнением гравитационных манёвров у Земли требует меньшего времени выведения по сравнению с баллистическими схемами с использованием ГМ около Венеры. Отметим, однако, что при использовании гравитационных манёвров около Венеры достигается более близкая к Солнцу орбита.

В работе представлена возможная эффективная баллистическая схема для реализации проекта «Интергелиозонд» на эпоху с 2027 по 2037 год:

Для минимизации затрат топлива на заданном интервале дат вылета следует использовать цепочку разгонных ГМ Венера–Земля с последующим повышением наклона с использованием гравитационных манёвров у Земли, дата вылета – 25.03.2034 (см. Таблицу 4). Требуемая характеристическая скорость – 3.81 км/с, время выведения космического аппарата на целевую орбиту – 4.6 года.

Для минимизации времени выведения космического аппарата на целевую орбиту следует использовать цепочку разгонных ГМ Венера–Земля с

последующим повышением наклона с использованием гравитационных манёвров у Земли, дата вылета – 28.08.2034 (см. Таблицу 4). Требуемая характеристическая скорость – 4.9 км/с, время выведения космического аппарата на целевую орбиту – 3.6 года.

Библиографический список

- [1] Kuznetsov V.D., Zelenyi L.M., Zimovets I.V., (...), Venedictov Y., Berghofer G. The Sun and heliosphere explorer – the Interhelioprobe mission. *Geomagnetism and Aeronomy*, 2016, 56 (7), p. 781-841.
- [2] Kawakatsu Y. V_{∞} Direction Diagram and its Application to Swingby design, 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, September 28-October 2 2009, Toulouse, France
- [3] Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В. и др. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. д.ф.-м.н. Тучина А.Г. Химки: Издатель АО «НПО Лавочкина», 2018. – 232 с., ил.
- [4] Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонов орбит космических аппаратов с использованием гравитационных манёвров // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 4. С. 403-406.
- [5] Sánchez Pérez J.M. Trajectory Design of Solar Orbiter. 23d ISSFD, Pasadena, California, 2012. Paper IMD1_3.
- [6] Константинов М.С. Анализ рациональных последовательностей гравитационных манёвров при выведении КА на гелиоцентрическую орбиту для исследования Солнца // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов. В 4-х томах, Уфа, 19–24 августа 2019 года. Том 1. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 692-694. – EDN OVQVNV.
- [7] Strange N.J., Russell R., Buffington B., Mapping the V_{∞} Globe // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting, AAS Paper 07-277, 2007.
- [8] Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф. Лекции по механике космического полёта. Специальный курс. М.: Издательство Московского Университета, 2018.
- [9] Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S. and Kuchynka P., «The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431» The Interplanetary Network Progress Report, vol. 42-196, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, pp. 1–81, February 15, 2014.
- [10] Izzo D., Revisiting Lambert’s Problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2014.
- [11] Давлетшин Г.З. Активно-гравитационные маневры космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. – 256 с., ил.

Оглавление

Введение	3
Схема решения задачи повышения наклона	4
Разгонный этап	5
Повышающий этап	7
Пересечение конуса скоростей и резонансной линии.....	7
Максимальное наклонение к плоскости орбиты вспомогательной планеты на резонансной линии и на сфере асимптотических скоростей.....	10
Поиск резонансной линии с минимальным временем подъёма.....	12
Минимизация времени повышения наклона с использованием комбинации резонансных линий	14
Результаты вычислительных экспериментов	14
Повышение наклона с помощью цепочки гравитационных манёвров у Венеры.....	15
Повышение наклона с помощью цепочки гравитационных манёвров у Земли	16
Заключение.....	18
Библиографический список.....	19