

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 35 за 2024 г.</u>



Р.М. Узянбаев, Ю.О. Бобренёва, <u>Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга,</u> <u>С.В. Поляков</u>, И.М. Губайдуллин

ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиноватопорового типа

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиновато-порового типа / Р.М. Узянбаев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 35. 17 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-35 https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-35 Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша Российской академии наук

Р.М. Узянбаев, Ю.О. Бобренёва, Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга, С.В. Поляков, И.М. Губайдуллин

Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиновато-порового типа

Узянбаев Р.М., Бобренёва Ю.О., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Поляков С.В., Губайдуллин И.М.

Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиновато-порового типа

Рассматривается процесс двухфазной фильтрации в карбонатном пласте Предложена математическая трещиновато-порового типа. модель в двумерной постановке, разработаны пространственно численный метод решения и параллельный алгоритм его реализации. Математическая модель основана на подходе Баклея-Леверетта. В коллекторе учитывается обмен флюидов между низкопроницаемыми порами и сетью естественных трещин в рамках модели двойной пористости. В основе численного алгоритма лежит применение метода конечных разностей и схемы расщепления по физическим процессам. Для ускорения расчетов используется параллельный алгоритм на основе двумерной декомпозиции области. Проведены численные эксперименты, которые показали, что разработанный алгоритм обладает высокой эффективностью и позволяет рассчитать необходимые характеристики моделируемого физического процесса.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация; конечно-разностные схемы; блочно-параллельная прогонка; высокопроизводительные вычисления; карбонатные коллектора

Uzyanbaev R.M., Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Gubaydullin I.M.

Numerical modeling of piezoconductive processes in a two-dimensional formulation for a fractured-pore type reservoir

The process of two-phase filtration in a carbonate formation of fractured-pore type is considered. A mathematical model in a spatially two-dimensional formulation is proposed, a numerical method for solution and a parallel algorithm for its implementation are developed. The mathematical model is based on the Buckley-Leverett approach. The reservoir takes into account the exchange of fluids between low-permeability pores and natural fracturing, specified within the framework of the dual porosity model. The numerical algorithm is based on the use of the finite difference method and the splitting scheme by physical processes. To speed up calculations, a parallel algorithm based on two-dimensional domain decomposition is used. Numerical experiments were carried out, which showed that the developed algorithm is highly efficient and allows one to calculate the necessary characteristics of the modeled physical process.

Key words: two-phase filtration; finite difference schemes; block-parallel sweep; high performance computing; carbonate reservoirs

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-20047.

1. Введение

Изучение законов движения жидкостей имеет важное значение в технике и естествознании [1]. В последние десятилетия сфера исследования и применения этих явлений значительно расширилась. Особенно актуален этот вопрос при решении задач флюидодинамики в нефтегазовой отрасли [2, 3]. Для изучения динамики жидкостей используются как теоретические методы, так И физические эксперименты. Однако моделирование явлений, возникающих при жидкостей, в лабораторных условиях затруднено. Проведение течении физических экспериментов является дорогостоящим И технически трудоемким [4]. Реальные течения жидкости в коллекторах усложнены факторами [5], различными геологическими фильтрационно-емкостными свойствами пласта. Описывающие их уравнения также имеют сложный характер, где проявляются нелинейность, пространственная многомерность, нестационарность и наличие большого количества переменных [6]. Поэтому математическое моделирование играет важную роль в гидродинамических исследованиях, основной целью которых являются предсказание состояния пласта и определение возможных путей увеличения добычи.

Уравнения, описывающие математическую модель пласта, достаточно сложны, что не всегда позволяет решить их аналитически. Поэтому численное моделирование остается одним из лучших вариантов в таких ситуациях.

В настоящее время при стремительном развитии вычислительных систем, которые способны обрабатывать огромные объемы данных и мгновенно решать сложные задачи, численное исследование задач гидродинамики получило новый импульс. Особенно востребованным численное моделирование задач гидродинамики стало в нефтегазовой отрасли. Однако для его повсеместного внедрения требуется также применение высокопроизводительных вычислительных систем с параллельной архитектурой И разработка соответствующего прикладного программного обеспечения.

В данной работе представлены математическая модель изотермического течения жидкости в карбонатном коллекторе, численный алгоритм расчета и его параллельная реализация. Особенностью используемой математической модели является применение для ее описания инвариантных форм операций векторного анализа (div, grad). Также интересна сама постановка задачи. Дело в том, что карбонатный коллектор относится к типу трещиновато-поровых. В таких коллекторах нефть содержится и в трещинах, и в поровой части (матрице). В этом случае при добыче вытеснение нефти происходит как из трещин, так и из матрицы. При этом проницаемость матрицы отлична от нуля, но имеет очень низкие значения. В процессе разработки пластов при упругом режиме изменение давления быстрее распространяется по системе трещин. В результате этого возникают перетоки жидкости между трещинами и блоками (матрицами) пород. Это в свою очередь приводит к характерному для таких

пород запаздыванию перераспределения давления по сравнению с соответствующим перераспределением давления в однородных пластах при упругом режиме. При этом каждая система описывается собственными фильтрационно-емкостными параметрами.

В качестве примера в данной работе рассматривалась пространственно двумерная постановка задачи, для численного решения которой предложен эффективный параллельный алгоритм. Основу алгоритма составляет метод блочно-параллельной прогонки. Программная реализация выполнена на языке С с использованием стандарта MPI. Программный код позволяет проводить вычисления как на вычислительном кластере, так и на персональном компьютере.

С помощью разработанного программного кода выполнен ряд систематических расчетов задачи. На основе полученных расчетов проведен распараллеливания И эффективности определено оптимальное анализ количество процессов, необходимых для решения системы уравнений в зависимости от размера используемой сетки. Также показано, что получаемое решение соответствует физике моделируемого процесса.

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс фильтрации в трещиновато-поровом коллекторе. Для его теоретического исследования предлагается использовать математическую модель изотермической двухфазной фильтрации жидкости в пространственно двумерной постановке. Особенностью задачи в данном случае является необходимость называемой двойной учета так пористости. Наличие трещиноватости в поровом коллекторе усложняет процесс течения тем, что поры и трещины имеют сильно отличающиеся друг от друга фильтрационные характеристики. При этом в процессе течения жидкости происходит обмен флюида между поровой частью и трещинами [3]. Предлагаемая нами математическая модель формулируется в рамках приближения сплошной среды и описывается системой сильно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Она записывается отдельно для воды и для нефти (которые далее будем называть флюидом).

Движение флюида осуществляется в соответствии с классическим законом Дарси. Итоговые уравнения для двух типов флюида имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\varphi^{\alpha}\rho_{o}^{\alpha}S_{o}^{\alpha})}{\partial t} + \nabla(\rho_{o}^{\alpha}\overline{U_{o}^{\alpha}}) + q_{o}^{\alpha} = 0, \ q_{o}^{m} = -q_{o}^{f} = -\rho_{o}^{m}\sigma\lambda_{o}^{m}(P^{f} - P^{m}),$$
(1)

$$\frac{\partial(\varphi^{\alpha}\rho_{w}^{\alpha}S_{w}^{\alpha})}{\partial t} + \nabla(\varphi_{w}^{\alpha}\overrightarrow{U}_{w}^{\alpha}) + q_{w}^{\alpha} = 0, \ q_{w}^{m} = -q_{w}^{f} = -\rho_{w}^{m}\sigma\lambda_{w}^{m}(P^{f} - P^{m}),$$
(2)

$$\lambda_{o}^{m} = \frac{k^{m} k_{ro}(S_{o}^{m})}{\mu_{o}}, \quad \lambda_{w}^{m} = \frac{k^{m} k_{rw}(S_{w}^{m})}{\mu_{w}},$$
(3)

$$\vec{U}_{o}^{\alpha} = -\frac{k^{\alpha}k_{ro}(S_{o}^{\alpha})}{\mu_{o}} \operatorname{grad}P^{\alpha}, \ \vec{U}_{w}^{\alpha} = -\frac{k^{\alpha}k_{rw}(S_{w}^{\alpha})}{\mu_{w}} \operatorname{grad}P^{\alpha}.$$
(4)

Здесь $\alpha = f, m$, где f – система естественных трещин, m – поровая часть коллектора, o – нефть, w – вода, P^f – пластовое давление в сети трещин (Па), P^m – пластовое давление в поровой части (Па), φ^f – пористость в трещинах, φ^m – пористость в порах, ρ_o^{α} – плотность нефти (г/м³), ρ_w^{α} – плотность воды (г/м³), S_o^f, S_w^f – насыщенности нефти/воды в системе трещин, S_o^m, S_w^m – насыщенности нефти/воды в системе трещин, S_o^m, S_w^m – насыщенности нефти/воды в поровой части, $\overline{U}_o^{\alpha}, \overline{U}_w^{\alpha}$ – скорости течения нефти/воды, σ – коэффициент трещиноватой породы (1/м²), $q_o^{\alpha}, q_w^{\alpha}$ – функции перетока между поровой частью и естественными трещинами, k^{α} – абсолютная проницаемость (м²), k_{rw} , k_{ro} – относительные фазовые проницаемости, μ_o – вязкость воды (Па·с).

Для задачи задаются следующие начальные и граничные условия:

$$P^{m}|_{t=0} = P_{0}, P^{f}(0;0) = P_{b}, \frac{\partial P^{f}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial P^{f}}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \frac{\partial P^{f}}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial P^{f}}{\partial y}\Big|_{y=l} = 0.$$
(5)

Здесь P_0, P_b – начальное и забойное давления.

Система уравнений (1)–(4) с учетом условий (5) является сложной системой уравнений математической физики смешанного типа. Для ее решения будут использованы численные подходы, описанные в работах [7, 8], обобщенные на двумерный случай.

При дискретизации уравнений (1)–(4) используются аппроксимации пространственных дифференциальных операторов на декартовой сетке, полученные в рамках метода конечных разностей. Для исключения проблем, которые могут быть связаны, во-первых, с большим количеством переменных и, во-вторых, со смешанным гиперболическим и параболическим характером исходной модели, применяется метод расщепления по физическим процессам [9]. При его реализации исходная система уравнений (1)–(4) разделяется на два блока: первый отвечает за процесс пьезопроводности, второй – за перенос насыщенностей.

Первый блок уравнений получается путем вынесения функций насыщенностей (по нефти и воде) из-под знака производной по времени в исходной системе. В результате простых математических операций получаем преобразованную систему уравнений, описывающих процесс распределения давления в системе трещин и в матрице. Второй блок получается на основе исходной системы уравнений (1)–(4), но с учетом того, что суммарная насыщенность по воде и нефти равна единице.

Для решения преобразованной системы предлагается численная схема, которая обладает рядом необходимых свойств (существование и единственность решения, неотрицательность плотности и температуры и др.) и обеспечивает устойчивость численного решения по исходным данным. Отметим, что предложенная схема расщепления эквивалентна консервативной разностной аппроксимации уравнений (1)–(4), записанных в дивергентной форме, благодаря введению специальной аппроксимации сеточных функций по времени.

Поясним последнее на конкретном примере. Введем для произвольной функции *a* на соседних временных слоях *t* и $\hat{t} = t + \tau$ (τ – временной шаг) следующие производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции:

$$a_t = (\hat{a} - a) / \tau, a^{(\delta_1)} = \delta_1 \hat{a} + (1 - \delta_1) a.$$

Здесь \hat{a} обозначает значение на временном слое \hat{t} . Интерполяционный вес δ_1 может зависеть от узла пространственной сетки и будет представляться как доля объема пор, предназначенного для свободного движения флюида:

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{(\overline{\varphi})^{\wedge}}}{\sqrt{(\overline{\varphi})^{\wedge}} + \sqrt{(\overline{\varphi})}}.$$
(6)

Здесь $\overline{\phi} = \overline{h}_{xy} \phi$ – пористость в узле, домноженная на пространственный шаг \overline{h}_{xy} , $(\overline{\phi})^{\wedge}$ – значение на временном слое \hat{t} .

Использование вышеуказанных производных и интерполяций при расщеплении позволяет получить необходимое качество итоговой численной схемы. Перейдем теперь к вопросу об её реализации. Поскольку разностные уравнения в обоих блоках представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, то для её решения необходимо использовать либо линеаризацию, либо какой-нибудь итерационный процесс по нелинейности. В данном случае мы остановились на модифицированном методе Ньютона.

В рамках метода Ньютона для расщепленных уравнений пьезопроводности в трещинах получаем следующие выражения:

$$\frac{F^{f}}{\tau} = \frac{(S_{w}^{f})^{(\delta_{l}f)}}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{l}f)}} \Big[\overline{\varphi}^{f} \rho_{w}^{f} \Big]_{t} + \frac{(1 - S_{w}^{f})^{(\delta_{l}f)}}{(\rho_{o}^{f})^{(\delta_{l}f)}} \Big[\overline{\varphi}^{f} \rho_{o}^{f} \Big]_{t} + DIG^{f^{\sim}} = 0,$$

$$DIG^{f^{\sim}} = \frac{1}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{l}f)}} DIN(\rho_{w}^{f}U_{w}^{f})^{\sim} + \frac{1}{(\rho_{o}^{f})^{(\delta_{l}f)}} DIN(\rho_{o}^{f}U_{o}^{f})^{\sim} + \frac{q_{o}^{f^{\sim}}}{(\rho_{o}^{f})^{(\delta_{l}f)}} + \frac{q_{w}^{f^{\sim}}}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{l}f)}},$$

$$(7)$$

где разностная операция $DIN:(\Omega) \to (\omega)$ обозначает аппроксимацию дивергенции $dv \cdot div$, действующую на функции в ячейках (Ω), a^{\sim} обозначает произвольную интерполяцию по времени сеточных функций *a* и \hat{a} .

В результате линеаризации уравнения (7) получаем:

$$\frac{(S_w^f)^{(\delta_l f)\approx}}{(\rho_w^f)^{(\delta_l f)\approx}} \left(\overline{\varphi}^f \rho_w^f \right)_{P_f}^{\prime s} \delta P^f + \frac{(1 - S_w^f)^{(\delta_l f)\approx}}{(\rho_o^f)^{(\delta_l f)\approx}} \left(\overline{\varphi}^f \rho_o^f \right)_{P_f}^{\prime s} \delta P^f + \tau \delta (DIG^{f^-}) = 0 - F^{fs},
\tau \delta (DIG^{f^-}) = \frac{-\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta_l f)\approx}} DIN \left[\left(\frac{\rho_w^f k^f}{\mu_w^f} \right)^s k_{rw}^{ups} GRAN \delta P^f \right] +
\frac{-\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta_l f)\approx}} DIN \left[\left(\frac{\rho_o^f k^f}{\mu_o^f} \right)^s k_{ro}^{ups} GRAN \delta P^f \right] + \frac{\tau}{(\rho_w^f)^{(\delta_l f)\approx}} (\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m)^s \left(\delta P^f - \delta P^m \right) +
\frac{\tau}{(\rho_o^f)^{(\delta_l f)\approx}} \left(\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m \right)^s \left(\delta P^f - \delta P^m \right).$$
(8)

Здесь F^{fs} – разностная аппроксимация левой части уравнения пьезопроводности в трещинах (7) (умноженная на τ), a'_{P} – производная по давлению, $\overline{\sigma} = \overline{h}_{xy}\sigma$ – коэффициент трещиноватой породы в узле, домноженный на пространственный шаг \overline{h}_{xy} , δP – невязка по давлению, $GRAN:(\omega) \rightarrow (\Omega)$ обозначает аппроксимацию градиента grad в ячейках (Ω), действующую на сеточные функции в узлах (ω), $k_{rw\Omega}^{ups}$ – относительная фазовая проницаемость воды в ячейке (Ω), взятая из узла $\omega(\Omega)$ этой ячейки, расположенного вверх по потоку (up) с неявного слоя по времени. В сеточных аппроксимациях a^{\approx} значения на неявном слое по времени \hat{t} берутся на s+1 уже вычисленной итерации, если они связаны с давлением (P^{s+1}), и s-й итерации, если они связаны с водонасыщенностью (S_w^s).

Для расщепленных уравнений пьезопроводности в матрице получаем:

$$\frac{F^{m}}{\tau} = \frac{(S_{w}^{m})^{(\delta_{1}m)}}{(\rho_{w}^{m})^{(\delta_{1}m)}} \left[\overline{\varphi}^{m} \rho_{w}^{m} \right]_{t} + \frac{(1 - S_{w}^{m})^{(\delta_{1}m)}}{(\rho_{o}^{m})^{(\delta_{1}m)}} \left[\overline{\varphi}^{m} \rho_{o}^{m} \right]_{t} + DIG^{m} = 0,$$

$$DIG^{m} = \frac{q_{o}^{m}}{(\rho_{o}^{m})^{(\delta_{1}m)}} + \frac{q_{w}^{m}}{(\rho_{w}^{m})^{(\delta_{1}m)}},$$
(9)

В результате линеаризации уравнения (9) получаем:

$$\frac{(S_{W}^{m})^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_{W}^{m})^{(\delta 1m)\approx}} (\overline{\varphi}^{m} \rho_{W}^{m})_{P_{m}}^{'s} \, \delta P^{m} + \frac{(1 - S_{W}^{m})^{(\delta 1m)\approx}}{(\rho_{o}^{m})^{(\delta 1m)\approx}} (\overline{\varphi}^{m} \rho_{o}^{m})_{P_{m}}^{'s} \, \delta P^{m} + \tau \delta (DIG^{m\approx}) = 0 - F^{ms},$$

$$\tau \delta (DIG^{m\approx}) = \frac{-\tau (\rho_{W}^{m} \overline{\sigma} \lambda_{W}^{m})^{s}}{(\rho_{W}^{m})^{(\delta 1m)s}} (\delta P^{f} - \delta P^{m}) - \frac{\tau (\rho_{o}^{m} \overline{\sigma} \lambda_{o}^{m})^{s}}{(\rho_{o}^{m})^{(\delta 1m)s}} (\delta P^{f} - \delta P^{m}).$$

$$10)$$

Здесь F^{ms} — разностная аппроксимация левой части уравнения пьезопроводности в поровой части коллектора (9) (умноженная на τ).

Уравнения (7), (8) после преобразований можно представить в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно приращений давления в трещинах δP^{f} :

$$-A_{p(kj)}^{y}\delta P_{(k,j-1)}^{f^{*}} + \left(C_{p(kj)}^{*} + C_{p(kj)}^{**} + C_{p(kj)}^{y}\right)\delta P_{(kj)}^{f^{*}} - B_{p(kj)}^{y}\delta P_{(k,j+1)}^{f^{*}} = \Phi_{p(kj)},$$

$$\left(C_{p(kj)}^{*} \cdot \left(\delta P_{(kj)}^{f}\right)\right) + \left(C_{p(kj)}^{**} \cdot \left(\delta P_{(kj)}^{f}\right)\right) - A_{p(kj)}^{x}\delta P_{(k-1,j)}^{f} + C_{p(kj)}^{x}\delta P_{(k,j)}^{f} - (11)$$

$$B_{p(kj)}^{x}\delta P_{(k+1,j)}^{f} = \Phi_{p(kj)}^{*},$$

где k, j – индексы разностной сетки вдоль осей x, y.

Коэффициенты (11) выглядят следующим образом:

$$\begin{split} &A_{p(kj)}^{x} = \frac{\tau}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{x,(k-\frac{1}{2},j)}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k-\frac{1}{2},j)}^{s} k_{rw(k-\frac{1}{2},j)}^{ups_x}} \right\} + \\ &\frac{\tau}{\left[\left(\rho_{o}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{x,(k-\frac{1}{2},j)}} \left(\frac{\rho_{o}^{f}k^{f}}{\mu_{o}^{f}}\right)_{(k-\frac{1}{2},j)}^{s} k_{ro(k-\frac{1}{2},j)}^{ups_x}} \right\}, \\ &B_{p(kj)}^{x} = \frac{\tau}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{x,(k+\frac{1}{2},j)}} \left(\frac{\rho_{o}^{f}k^{f}}{\mu_{o}^{f}}\right)_{(k+\frac{1}{2},j)}^{s} k_{rw(k+\frac{1}{2},j)}^{ups_x}} \right\}, \\ &\frac{\tau}{\left[\left(\rho_{o}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{x,(k+\frac{1}{2},j)}} \left(\frac{\rho_{o}^{f}k^{f}}{\mu_{o}^{f}}\right)_{(k+\frac{1}{2},j)}^{s} k_{ro(k+\frac{1}{2},j)}^{ups_x}} \right\}, \\ &A_{p(kj)}^{y} = \frac{\tau}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{y,(k,j-\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{o}^{f}k^{f}}{\mu_{o}^{f}}\right)_{(k,j-\frac{1}{2})}^{s} k_{rw(k,j-\frac{1}{2})}^{ups_y}} \right\}, \\ &\frac{\tau}{\left[\left(\rho_{o}^{f}\right)^{(\delta_{l}f)\approx}\right]_{(k,j)}^{\approx}} \left\{ \frac{1}{h_{y,(k,j-\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{o}^{f}k^{f}}{\mu_{o}^{f}}\right)_{(k,j-\frac{1}{2})}^{s} k_{ro(k,j-\frac{1}{2})}^{ups_y}} \right\}, \end{split}$$

$$\begin{split} B_{p(k)}^{y} &= \frac{\tau}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{(\delta_{f})^{x}}\right]_{(k,j)}^{z}} \left\{\frac{1}{h}_{y,(k,j+\frac{1}{2})} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} k^{ups-y}}{m(k,j+\frac{1}{2})}\right\} + \\ &= \frac{\tau}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{(\delta_{f})^{x}}\right]_{(k,j)}^{z}} \left\{\frac{1}{h}_{y,(k,j+\frac{1}{2})} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} k^{ups-y}}{\mu_{w}^{f}}\right\}, \\ C_{p(k)} &= \frac{(S_{w}^{f})^{(\delta_{f})^{x}}}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{f})^{x}}} \left(\overline{\varphi}^{f}\rho_{w}^{f}\right)_{y,(k,j+\frac{1}{2})}^{s} k^{ups}}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{f})^{z}}} \left(\overline{\varphi}^{f}\rho_{w}^{f}\right)_{y,(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{(1-S_{w}^{f})^{(\delta_{f})^{x}}}{(\rho_{w}^{f})^{(\delta_{f})^{z}}} \left(\overline{\varphi}^{f}k^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{(\rho_{w}^{f}k^{f})^{s}} \left\{\frac{1}{h_{(k+\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{h_{(k,\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{h_{(k,j+\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{h_{(k,j+\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{h_{(k,\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{s}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{\left[\left(\rho_{w}^{f}\right)^{s}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{h_{(k,\frac{1}{2})}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{f}}\right)_{(k,j+\frac{1}{2})}^{s} + \frac{1}{\left[\left(\rho_{w}^{f}k^{f}\right)^{s}} \left(\frac{\rho_{w}^{f}k^{f}}{\mu_{w}^{$$

,

$$\Phi_{p(kj)} = -F^{fs} - \tau \left\{ \frac{\left(\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m\right)^s}{\left(\rho_w^f\right)^{\left(\delta 1 f\right)^s}} + \frac{\left(\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m\right)^s}{\left(\rho_o^f\right)^{\left(\delta 1 f\right)^s}} \right\} \Phi^{ms},$$

$$\Phi_{p(kj)}^* = -F^{fs*} - \tau \left\{ \frac{\left(\rho_w^m \overline{\sigma} \lambda_w^m\right)^s}{\left(\rho_w^f\right)^{\left(\delta 1 f\right)^s}} + \frac{\left(\rho_o^m \overline{\sigma} \lambda_o^m\right)^s}{\left(\rho_o^f\right)^{\left(\delta 1 f\right)^s}} \right\} \Phi^{ms*},$$

где (k, j) – индексация в узлах по x и y соответственно, $(k \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$ – индексация в ячейках по x и y соответственно. В коэффициенты $C_{p(kj)}^{x}, C_{p(kj)}^{y}$, выделены соответствующие блоки из суммарного диагонального коэффициента $C_{p(kj)}$ в соответствии с принципом построения аддитивной разностной схемы. F^{fs} берется из (7). Аналогичным образом в аддитивной разностной схеме определяются невязки $\Phi_{p(kj)}^{x}, \Phi_{p(kj)}^{y}$. s_{x}, s_{y} относительные фазовые проницаемости воды в ячейке Ω , взятые из узла $w(\Omega)$ этой ячейки, расположенного вверх по потоку (ups_x, ups_y) по оси x и y с неявного временного слоя (s).

Аналогичные выкладки можно повторить для уравнений (9), (10) и получить другую СЛАУ подобного же типа.

Для решения СЛАУ типа (11) с блочно-трехдиагональной матрицей было предложено использовать итерационный метод переменных направлений [10] и алгоритмы прогонки. Особенностью выбранного итерационного метода является то, что он обладает быстрой сходимостью (число итераций пропорционально логарифму из числа неизвестных), а также относительной простотой распараллеливания на решетке вычислителей при использовании алгоритмов параллельной прогонки, использованной нами для решения пространственно одномерных задач [7].

В заключение данного пункта отметим, что итоговая численная схема была реализована в виде программы на языке ANSI C/C++, вычисления распараллелены с помощью стандарта MPI. В численных расчетах были получены зависимости давления и насыщенностей по времени и пространству для различных значений проницаемости системы естественных трещин. Полученное численное решение сравнивали с промысловыми данными и получали совпадение с отклонением не более 7%. Более подробно это изложено в п. 3.

3. Решение задачи

Для реализации выбранных разностных схем на суперкомпьютере применить необходимо один ИЗ подходов распараллеливания, соответствующий «скалярному» (однопроцессорному) численному алгоритму. Наиболее эффективным для решения многомерных задач на суперкомпьютере с распределенной памятью считается принцип геометрического параллелизма, который предполагает проведение декомпозиции расчетной области на равные (по числу узлов сетки) подобласти, соответствующие числу процессоров случае, учитывая геометрические (вычислителей). В нашем свойства (топологию) исходной расчетной области (а именно ее прямоугольность), можно применить декомпозицию двух типов: линейную или квадратичную. Первая предполагает разбиение области по одной из координат, вторая – по двум координатам. В соответствии с типами декомпозиции возникают различные варианты алгоритма распараллеливания, а также топологии межпроцессорных связей, которые условно называют «линейка» И «прямоугольная решетка». В общем случае будем считать используемую топологию прямоугольной решеткой с параметрами p_1, p_2 и общим числом параллельных процессов $p = p_1 p_2$.

Параллельный алгоритм решения двумерной задачи в целом повторяет основные этапы расчета в одномерном случае [11]. Особенностью двумерного случая является декомпозиция двумерной расчетной сетки на решетку доменов последовательное решение на каждом шаге И по времени двух пространственных подзадач: ПО неявному итерационному матричному алгоритму (для давлений) и по явному безытерационному матричному упрощения дальнейшего алгоритму (для сатураций). Для описания параллельного алгоритма воспользуемся следующей абстрактной формой записи получаемых алгебраических задач:

$$\hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}} - \Lambda_{h}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{i_{1}i_{2}} + \tau \mathbf{F}_{i_{1}i_{2}}, \quad \Lambda_{h}\hat{\mathbf{y}} \equiv \Lambda_{x,h}\hat{\mathbf{y}} + \Lambda_{y,h}\hat{\mathbf{y}},$$

$$\Lambda_{x,h}\hat{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{B}_{x,i_{1}i_{2}}\left(\hat{\mathbf{y}}_{i_{1}+1,i_{2}} - \hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}}\right) - \mathbf{A}_{x,i_{1}i_{2}}\left(\hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}} - \hat{\mathbf{y}}_{i_{1}-1,i_{2}}\right),$$

$$\Lambda_{y,h}\hat{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{B}_{y,i_{1}i_{2}}\left(\hat{\mathbf{y}}_{i_{1},i_{2}+1} - \hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}}\right) - \mathbf{A}_{y,i_{1}i_{2}}\left(\hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}} - \hat{\mathbf{y}}_{i_{1},i_{2}-1}\right)$$
(12)

И

$$\hat{\mathbf{y}}_{i_{1}i_{2}} = \mathbf{y}_{i_{1}i_{2}} + \Lambda_{h}\mathbf{y} + \tau\mathbf{F}_{i_{1}i_{2}}, \quad \Lambda_{h}\mathbf{y} \equiv \Lambda_{x,h}\mathbf{y} + \Lambda_{y,h}\mathbf{y},
\Lambda_{x,h}\mathbf{y} \equiv \mathbf{B}_{x,i_{1}i_{2}}\left(\mathbf{y}_{i_{1}+1,i_{2}} - \mathbf{y}_{i_{1}i_{2}}\right) - \mathbf{A}_{x,i_{1}i_{2}}\left(\mathbf{y}_{i_{1}i_{2}} - \mathbf{y}_{i_{1}-1,i_{2}}\right),
\Lambda_{y,h}\mathbf{y} \equiv \mathbf{B}_{y,i_{1}i_{2}}\left(\mathbf{y}_{i_{1},i_{2}+1} - \mathbf{y}_{i_{1}i_{2}}\right) - \mathbf{A}_{y,i_{1}i_{2}}\left(\mathbf{y}_{i_{1}i_{2}} - \mathbf{y}_{i_{1},i_{2}-1}\right).$$
(13)

Здесь у и $\hat{\mathbf{y}}$ – векторы размерности 2, соответствуют искомым функциям (давлениям или сатурациям) на нижнем и верхнем слоях по времени; \mathbf{A}_{x,i,i_2} ,

 \mathbf{B}_{x,i_1i_2} , \mathbf{A}_{y,i_1i_2} , \mathbf{B}_{y,i_1i_2} – матричные коэффициенты размерности 2x2, индексы i_1 , i_2 пробегают множество узлов сетки по соответствующей координате: $i_1 = 0, ..., N_1$, $i_2 = 0, ..., N_2$. Подразумевается, что на границах изменения индексов системы (12), (13) естественным образом переходят в соответствующие граничные условия.

Система (12) разрешается с помощью итерационного матричного метода переменных направлений, записываемого в виде:

$$\hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s+1/2} - \alpha_{1}\Lambda_{x,h}\hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s+1/2} = \hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s} + \alpha_{1}\Lambda_{y,h}\hat{\mathbf{y}}^{s} + \alpha_{1}\mathbf{G}_{i_{l_{2}}},
\hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s+1} - \alpha_{2}\Lambda_{y,h}\hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s+1} = \hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{s+1/2} + \alpha_{2}\Lambda_{x,h}\hat{\mathbf{y}}^{s+1/2} + \alpha_{2}\mathbf{G}_{i_{l_{2}}},
\mathbf{G}_{i_{l_{2}}} \equiv \mathbf{y}_{i_{l_{2}}} + \tau\mathbf{F}_{i_{l_{2}}}, \quad s = 0, 1, 2, ..., \quad \hat{\mathbf{y}}_{i_{l_{2}}}^{0} = \mathbf{y}_{i_{l_{2}}},$$
(14)

где $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ – итерационные параметры.

Каждый этап итерационной схемы (14) подразумевает применение параллельной прогонки по соответствующему направлению. В результате параллелизма оказывается другой неиспользуемый ресурсом при распараллеливании индекс сетки. Фактически получается, что на каждом этапе необходимо выполнить независимо $N_2 + 1$ или $N_1 + 1$ параллельных матричных прогонок. Ввиду нестационарности задачи и относительно медленного развития течения количество итераций в данном алгоритме невелико (оно обычно составляет не более 10 и падает до 1 при выходе решения на стационар). В результате эффективность такого распараллеливания оказывается высокой, хотя, безусловно, она зависит от размерностей сетки N₁, N₂, количеств параллельных процессов в решетке p_1 , p_2 , а также от скорости интерконнекта.

Система уравнений (13) является фактически явным пересчетом решения на новом слое и распараллеливается тривиальным способом. Теоретическая эффективность такого способа распараллеливания составляет 100%. Фактическая эффективность опять определяется параметрами N_1 , N_2 , p_1 , p_1 и скоростью интерконнекта. В данном случае имеется в виду именно скорость передачи данных от одного параллельного процесса к другому в единицах Гбит/с. Для К100 она составляет 56 Гбит/с, для сервера imm10 – 20 Гбит/с. Наш алгоритм не зависит от перепада давления ввиду того, что используется перенормировка неизвестных функций и прямой алгоритм обращения матрицы (алгоритм прогонки в рамках схемы переменных направлений).

Тестирование параллельной реализации и последующие модельные расчеты были выполнены на суперкомпьютере K100 (2xCPU Intel Xeon X5670, 2.93 GHz, 12 ядер на узле, всего узлов 64) и на сервере imm10 (2xCPU Intel Xeon E5-2680 v4 @ 2.40GHz, 14 ядер (28 потоков), в сумме 56 параллельных потоков), установленных в ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [12]. Использованное программное обеспечение: ОС Centos и OpenSuse,

компиляторы GNU gcc, параллельный интерфейс MPICh. При реализации программы использовались только стандартные библиотеки libc и libmpi.

Они подтвердили высокую эффективность алгоритма в целом и его корректность с точки зрения воспроизведения физики процесса. Последнее отражено в следующем разделе.

4. Результаты

Математическая модель (1)–(5) реализована численно. Получена и проанализирована пространственно-временная динамика процессов изменения давления в скважине, которая после длительного бездействия была запущена в работу. Для задачи задавались следующие входные параметры:

 $P^{f} = 250 \cdot 10^{5} \text{ (Pa)}, \ \varphi^{f} = 0.01, \ \rho_{w} = 1118 \text{ (kg/m^{3})}, \ \rho_{o} = 730 \text{ (kg/m^{3})}, \ S_{w} = 0.4, \ \sigma = 0.12 \text{ (1/m^{2})}, \ k^{f} = 1 \times 10^{-11} \text{ (m^{2})}, \ k^{m} = 1 \times 10^{-16} \text{ (m^{2})}, \ k_{rw} = 7.7 S_{w}^{4} - 12.07 S_{w}^{3} + 6.9 S_{w}^{2} - 1.8 S_{w} \text{ +0.2}, \ k_{ro} = 0.03 S_{w}^{2} + 0.002 S_{w} + 0.0002, \ \mu_{o} = 0.67 \cdot 10^{-3} \text{ (Pa·s)}, \ \mu_{w} = 0.86 \cdot 10^{-3} \text{ (Pa·s)}, \ P_{0}^{f} = 200 \cdot 10^{5} \text{ (Pa)}.$

Размеры расчетной сетки определяются постоянными пространственными шагами hx=0.1 м hy=0.1 м и общим количеством пространственных шагов N=100, что составляет 10 метров. Шаг по времени задается равным $\tau=0.1$ секунды при общем времени 2 часа и варьируется в зависимости от количества итераций.

На рисунке 1 представлено распределение давления около скважины с координатой (0;0) в момент ее запуска в работу.



Рис. 1. Распределение давления около скважины в момент ее запуска в работу

На рисунке 2 представлены распределения давления вокруг работающей скважины на конечный момент времени (2 часа) при абсолютных значениях проницаемости $k^{f} = 1 \times 10^{-11}$ (m²) и $k^{f} = 1 \times 10^{-13}$ (m²) соответственно. При большей проницаемости фронт низкого давления вокруг скважины больше.



Рис. 2. Распределение давления около скважины в конечный момент времени при абсолютных значениях проницаемости $k^{f} = 1 \times 10^{-11} \text{ (m}^{2})$ и $k^{f} = 1 \times 10^{-13} \text{ (m}^{2})$

На рисунке 3 изображено изменение водонасыщенности по пространству при абсолютных значениях проницаемости в трещинах $k^{f} = 1 \times 10^{-11}$ (m²) и $k^{f} = 1 \times 10^{-13}$ (m²). По графикам отмечается, что рост водонасыщенности в трещинах при $k^{f} = 1 \times 10^{-11}$ (m²) происходит быстрее.



Рис. 3. Распределение водонасыщенности около скважины в конечный момент времени при абсолютных значениях проницаемости $k^{f} = 1 \times 10^{-11} \text{ (m}^{2})$ и $k^{f} = 1 \times 10^{-13} \text{ (m}^{2})$

Расчеты проведены на К100 и сервере imm10 ЦКП ИПМ им М.В. Келдыша РАН. Полученные ускорения и эффективности показали (см. рисунок 4), что для К100 лучший результат для расчетной сетки с параметрами N_1 = 1000, N_2 =1000 достигается на конфигурации $p_1 x p_1$ =6x6 = 36 =12x3 (при этом используются три узла К100). На сервере imm10 лучший результат распараллеливания достигается на конфигурации $p_1 x p_1$ =7x7 = 49.

Падение эффективности связано исключительно с малым размером сетки. Однако для заданной точности расчета увеличение размера сетки нецелесообразно. Большая сетка в подобных задачах используется в случае, когда рассчитывается пучок или разветвленная сеть скважин. В этой ситуации ускорение и эффективность будут существенно выше.



Рис. 4. Ускорение (нижний график) и эффективность (верхний график) расчёта для суперкомпьютера К100 и сервера imm10 ЦКП ИПМ им М.В.Келдыша РАН

5. Заключение

работе методами математической физики исследовался процесс B массопереноса двухфазной жидкости в рамках модели двойной пористости в карбонатном трещиновато-поровом коллекторе. Флюидодинамический процесс работающей добывающей рассматривался для скважины. Предложены математическая модель и численный метод на декартовой сетке. В основе численного метода находятся метод конечных разностей и схемы расщепления по физическим процессам и пространственным координатам. Для ускорения расчета был реализован параллельный алгоритм, который предполагал декомпозицию расчетной области на решетку доменов одинаковой мощности и применение блочно-параллельной прогонки. Расчеты проведены на суперкомпьютере К100 и сервере imm10, расположенных в ЦКП ИПМ им М.В. Келдыша РАН. Для апробации предложенного подхода была проведена серия вычислительных экспериментов. Численные эксперименты показали, что разработанный алгоритм обладает высокой эффективностью, а сама численная позволяет получить результаты, метолика адекватные моделируемому физическому процессу. В результате расчета построены распределения давления вокруг для работающей добывающей скважины на момент ее запуска в работу, а также в момент остановки. Проведено сравнение скорости распределения давления при различных значениях абсолютной проницаемости трещин. Представлены графики ускорения и эффективности расчета.

Библиографический список

- 1. Aguilera R. Naturally Fractured Reservoirs. Tulsa, Oklahoma: T. Pennwell Corp, 1980.
- 2. Kuchuk F., Biryukov D., Fitzpatrick T. Fractured-reservoir modeling and interpretation // SPE J. 2015. V. 20, No. 5. P. 983–1004.
- 3. Teklu T.W., Akinboyewa J., Alharthy N., Torchuk M.A., Aisumaiti A.M., Dhabi A., Kazemi H., Graves R.M. Pressure and rate analysis of fractured low permeability gas reservoirs: numerical and analytical dual-porosity models // Paper presented at the SPE Unconventional Gas Conference and Exhibition, Muscat, Oman, January 2013. https://doi.org/10.2118/163967-MS.
- 4. Pattay P.W. Transient pressure behaviour in fractured reservoirs // Paper presented at the European Petroleum Conference, The Hague, Netherlands, October 1998. https://doi.org/10.2118/52080-STU.
- 5. Nelson N.A. Geologic analysis of naturally fractured reservoirs. Woburn: Butterworth-Heinemann, 2001.

- 6. Chu H., Liao X., Chen Zh., He Yo., Zou J., Zhang J., Zhao J., Wei J. A numerical model for pressure transient analysis in fractures reservoirs with poorly connected fractures // Paper presented at the SPE Trinidad and Tobago Section Energy Resources Conference, Port of Spain, Trinidad and Tobago, June 2018. https://doi.org/10.2118/191246-MS.
- Uzyanbaev R., Bobreneva Yu., Poveshchenko Yu., Podryga V., Polyakov S. Modeling of two-phase fluid flow processes in a fractured-porous type reservoir using parallel computations // In: Sokolinsky, L., Zymbler, M. (eds) Parallel Computational Technologies. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2022. Vol. 1618, pp. 276–292.
- 8. Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Uzyanbaev R.M., Rahimly P.I., Mazitov A.A., Gubaydullin I.M. One approach to numerical modeling of the heat and masstransfers of two-phase fluids in fractured-porous reservoirs // Mathematics. 2023. V. 11, No.18. Art. 3991 (16 p.).
- 9. Марчук Г.И. Методы расщепления. Москва: Наука, 1988.
- 10.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
- 11.Узянбаев Р.М., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Поляков С.В., Бобренёва Ю.О., Рагимли П.И., Губайдуллин И.М. Использование параллельных технологий для расчетов флюидодинамических процессов в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом неизотермичности // В сборнике: Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2023). Короткие статьи и описания плакатов. Материалы XVII всероссийской научной конференции с международным участием. Челябинск, 2023. С. 246. DOI: 10.14529/pct2023.
- 12.ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. http://ckp.kiam.ru.

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Постановка задачи	4
3.	Решение задачи	.11
4.	Результаты	.13
5.	Заключение	.16
Биб	Библиографический список16	