



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский,  
И.В. Попов, Н.Л. Лепе

## Адаптивная искусственная вязкость в расчетах на неравномерных сетках

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Адаптивная искусственная вязкость в расчетах на неравномерных сетках / В.А. Гасилов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 40. 17 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-40>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-40>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, И.В. Попов, Н.Л. Лепе**

**Адаптивная искусственная вязкость в расчетах  
на неравномерных сетках**

**Москва — 2024**

*Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Попов И.В., Лене Н.Л.*

**Адаптивная искусственная вязкость в расчетах на неравномерных сетках**

Предложена модификация адаптивной искусственной вязкости для численного решения газодинамических задач при использовании неравномерных разностных сеток. Построение соответствующей однородной консервативной разностной схемы выполнено для одномерных постановок задач. Получены оценки величины искусственной вязкости, достаточной для монотонизации решения. Оценки учитывают неоднородность распределений газодинамических величин (плотность, давление, внутренняя энергия...) в области течения, а также неравномерность расчётной сетки. Апробация модифицированной методики выполнена в численных экспериментах с известными тестовыми задачами. Показана возможность получения высокоточных решений на сетках с весьма существенной разницей размеров соседних расчетных ячеек.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, газовая динамика, разностная схема, адаптивная искусственная вязкость

*Vladimir Anatolievich Gasilov, Alexander Yurievich Krukovskiy, Igor Viktorovich Popov, Nikolai Leonidovich Lepe*

**Adaptive artificial viscosity in calculations via non-uniform grids**

The paper concerns with some adaptive artificial viscosity technique which is proposed for the numerical solution of gas-dynamic problems using non-uniform difference grids. The construction of a corresponding conservative difference scheme is developed for one-dimensional problem formulations. We've estimated the viscosity value bounds which give sufficient conditions for preserving a monotonicity property of the solution. The estimations take into account both the heterogeneity of gas-dynamic quantities (density, pressure, internal energy...) in the flow region, and the unevenness of the computational grid. Approbation of the modified methodology is carried out by calculating a number of well-known test problems. Computational experiments demonstrate a possibility of high-precision calculations via using grids incorporating adjacent computational cells with a great difference in sizes.

**Key words:** mathematical modeling, gas dynamics, difference scheme, adaptive artificial viscosity

## Введение

Целью разработки модифицированного метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [1] было повышение точности решения задач газовой динамики при использовании весьма неравномерных расчетных сеток с сохранением по возможности свойств метода АИВ, проявляемых в расчетах на сетках с равномерным распределением расчетных узлов. В разработке модификации АИВ были учтены методы построения и результаты использования в газодинамических расчетах сеток, адаптированных к структурам течения [2-4].

Публикации, посвященные расчетам на неравномерных сетках, в основном содержат методические разработки, основанные на предположении о гладком изменении размеров сеточных ячеек. Под этим обычно понимается правило распределения сеточных элементов, квазиравномерное согласно определению А.А. Самарского: шаги такой сетки должны удовлетворять условию  $h_{i+1} = h_i + O(h_i^2)$  (см., например, введение к монографии [4]). Методики, ориентированные на расчеты с сетками, не удовлетворяющими условию квазиравномерности, в основном связаны с адаптивными сетками иерархической либо нерегулярной структуры [5-7].

Для создания модификации АИВ при определении величины искусственной вязкости оказалось необходимым не ограничиваться обычно применяемым в таких случаях анализом по принципу «замороженных» коэффициентов (см., например, [8]). Было проведено более полное исследование, в котором учтены неоднородность распределения рассчитываемых газодинамических переменных, а также неравномерность расчетной сетки. При этом были использованы общие принципы построения однородных разностных схем [9]. В итоге разработки построена однородная разностная схема, аппроксимирующая исходную систему уравнений газодинамики на неравномерной сетке. Валидация модифицированной методики АИВ на известных тестовых задачах [10] показала удовлетворительную точность разностных решений даже в случае многократной разницы размеров соседних ячеек на сетках, построенных со сгущением в областях локализации больших градиентов газодинамических переменных.

## 1. Постановка задачи

Разностную схему с адаптивной искусственной вязкостью рассмотрим для случая одномерных задач газовой динамики. Будем использовать эйлерово описание течения в декартовой системе координат. Соответствующую систему дифференциальных уравнений запишем в виде [11]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, \\
\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Iu + p) &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u) &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использованы общепринятые обозначения:  $t, x$  – независимые переменные,  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $I = \rho u$  – механический импульс,  $E = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2}{2}$  – полная энергия,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия. Система уравнений замыкается калорическим уравнением состояния  $p = p(\rho, \varepsilon)$ , например уравнением состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты Пуассона.

Начально-краевая задача для системы (1) рассматривается в области  $D(x, t)$  ( $t \geq T_0, L_1 \leq x \leq L_2$ ). Начальные распределения газодинамических величин  $\rho, u, I, E$  в некоторых точках могут иметь разрывы. Поскольку основное внимание в работе уделяется свойствам численного решения внутри расчетной области, то граничные условия реализованы простейшими способами, позволяющими обеспечить устойчивый счет.

## 2. Построение разностной схемы второго порядка аппроксимации с поправками Лакса-Вендроффа

Воспользуемся методом построения явных разностных схем со вторым порядком аппроксимации относительно шага по времени в областях гладкости решения. Введем сетку по времени  $\omega_\tau(t_0 = T_0, t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = 0, 1, \dots)$  с переменными, вообще говоря, шагами  $\tau_n$ . Функции, относящиеся к моментам времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , будем отмечать верхними индексами  $n$  и  $n+1$ :  $r^n = r(t_n)$ ,  $r^{n+1} = r(t_{n+1})$ , где  $r = \rho, u, I, E, p$ . Разностную производную по времени от некоторой сеточной функции обозначим как

$$r_t^n = \frac{r^{n+1} - r^n}{\tau_n}.$$

Рассмотрим способ построения аппроксимаций к системе (1) на примере уравнения неразрывности, взяв за основу метод Лакса-Вендроффа [1]. Для начала получим уравнение, которое является дифференциально-разностным приближением к уравнению неразрывности. Для этого воспользуемся представлением плотности газа  $\rho = \rho(x)$  в виде многочлена Тейлора от шага сетки  $\tau_n$ , ограничившись слагаемыми до  $O(\tau^2)$ :

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \tau_n \frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\tau_n^2}{2} \frac{\partial^2 \rho^n}{\partial t^2} + \dots$$

Разностную производную  $\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=t_n}$  найдем с помощью уравнения неразрывности, записанного при  $t=t^n$ :

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)^n.$$

Вторую производную по времени от плотности  $\rho(x)$  получим, дифференцируя уравнение неразрывности по времени и выразив производную по времени от импульса  $\rho u$  через плотность потока импульса  $\rho u^2 + p$  из уравнения баланса импульса:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^2 + p).$$

В результате получается следующее дифференциально-разностное уравнение баланса массы:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_n} + \frac{\partial W_\rho^n}{\partial x} = 0,$$

где поток вещества вычисляется по формуле

$$W_\rho^n = (\rho u)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_\rho^n.$$

Выражение  $\frac{\tau_n}{2} L W_\rho^n$  представляет собой поправку Лакса-Вендроффа:

$$L W_\rho^n = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p)^n. \quad (2)$$

Аналогично находятся поправки Лакса-Вендроффа для уравнений импульса и полной энергии

$$W_I^n = (Iu + p)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_I^n, \quad W_E^n = ((E + p)u)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_E^n. \quad (3)$$

Поправки Лакса-Вендроффа в аппроксимациях уравнений балансов импульса и энергии соответственно имеют вид

$$L W_I^n = \left( \frac{\partial}{\partial x}(Iu^2) + 3u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n, \quad (4)$$

$$L W_E^n = \left( \frac{\partial}{\partial x}((E + p)u^2) + \left( \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2}u^2 \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n. \quad (5)$$

Соответствующие дифференциально-разностные уравнения можно записать единообразно в виде

$$\frac{r^{n+1} - r^n}{\tau_n} + \frac{\partial W_r^n}{\partial x} = 0, \quad r = \rho, I, E. \quad (6)$$

Для последующих выкладок в поправках Лакса-Вендроффа выделим слагаемые, в которые входят производные от плотности, импульса и полной энергии газа:

$$LW_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + \varphi, \quad (7)$$

$$LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x} + 2\rho(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 3u\varphi, \quad (8)$$

$$LW_E = (u^2 + \zeta_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} m^2 - \frac{(\gamma - 1)^2 m}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} m^2} \right] \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + \zeta_m \frac{u^2}{2} \varphi, \quad (9)$$

где переменная  $\varphi$  с учетом зависимости  $p=p(\rho, S)$  выражается через производную от энтропии  $S$  в виде

$$\varphi = \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial S}{\partial x},$$

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} - \text{скорость звука, } \zeta_m = \frac{1 + \frac{5}{2}(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}, \quad M = \frac{u}{c}, \quad 1 \leq \zeta_m \leq 5.$$

### 3. Сетка по переменной $x$ . Аппроксимация

В расчетной области  $L_1 \leq x \leq L_2$  введем неравномерную сетку  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$  узлов по пространственной переменной  $x$ :  $x_1 = L_1 < x_2 < \dots < x_N = L_2$ , а также сетку  $\bar{\Omega}'_h = \Omega'_h \cup \Gamma'_h$  потоковых узлов  $\bar{x}_{1/2} \equiv L_1$ ,  $\bar{x}_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\bar{x}_{N+1/2} \equiv L_2$ .

Граничные узлы  $x_1, x_N \in \Gamma_h$ ,  $\bar{x}_{1/2}, \bar{x}_{N+1/2} \in \Gamma'_h$ . Введем шаги сеток  $\bar{\Omega}_h$  и  $\bar{\Omega}'_h$ :  $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , и  $\bar{h}_i = \bar{x}_{i+1/2} - \bar{x}_{i-1/2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  соответственно.

Здесь  $\bar{h}_1 = 0.5h_{3/2}$ ,  $\bar{h}_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$ ,  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $\bar{h}_N = 0.5h_{N-1/2}$ . К узлам исходной сетки  $x_i$  будем относить искомые функции  $\rho_i$ ,  $u_i$ ,  $I_i = \rho_i u_i$ ,  $E_i$ ,  $p_i$ . К узлам потоковой сетки  $\bar{x}_{i+1/2}$  отнесём разностные аппроксимации производных, например

$$\rho_{x_{i+1/2}} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{h_{i+1/2}}, \quad u_{x_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \text{ и т.д.,}$$

а также средние величины

$$\bar{\rho}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i), \quad \bar{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i) \text{ и т.д.}$$

На границе области положим

$$\bar{\rho}_{1/2} \equiv \rho_1, \quad \bar{u}_{1/2} = u_1, \quad \bar{\rho}_{N+1/2} \equiv \rho_N, \quad \bar{u}_{N+1/2} = u_N \text{ и т.д.}$$

К потоковым узлам будем относить сеточные аналоги потоков  $W_{i+1/2}^r$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $r = \rho, I, E$ .

Шаблон аппроксимации с расположением узлов основной и потоковой сеток приведен на рис. 1.

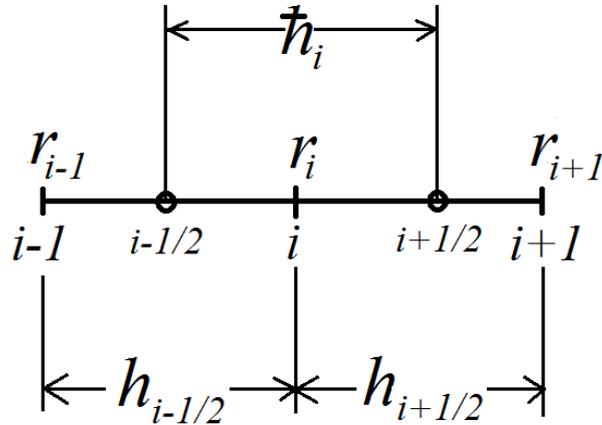


Рис. 1 Шаблон аппроксимации потоков в уравнениях балансов массы, импульса и энергии

Разностные отношения величин, задаваемых в потоковых узлах, определяются следующим образом:

$$W_{\dot{x}_i}^r = \frac{W_{i+1/2}^r - W_{i-1/2}^r}{h_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad r = \rho, I, E.$$

Конструкция искусственной вязкости далее будет получена с использованием поправок Лакса-Вендроффа (2), (4), (5). Для наших целей будет достаточно взять только те слагаемые поправок, в которые входят сомножителями производные от плотности, импульса и энергии.

$$LW_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x}, \quad LW_E = (u^2 + \zeta_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (10)$$

Поправки в таком «усеченном» виде позволяют получить выражение для искусственной вязкости, которое будет пригодно в предельном случае малых возмущений газодинамических величин, распространяющихся по однородному «фоновому» потоку. Заметим, что в акустическом приближении вполне можно ограничиться поправками (10) и пренебречь другими слагаемыми, входящими в (7)-(9), как величинами второго порядка малости.

Потоки в разностном уравнении баланса массы аппроксимируем в следующей форме, записанной с использованием индексных обозначений:

$$\begin{aligned} W_{\rho i+1/2} &= (\overline{\rho u})_{i+1/2} - \frac{\tau}{2} (LW_\rho)_{i+1/2}, \quad (LW_\rho)_{i+1/2} = (\rho u^2 + p)_{xi+1/2} \\ W_{I i+1/2} &= (\overline{\rho u})_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} + \bar{p}_{i+1/2} - \frac{\tau}{2} (LW_I)_{i+1/2}, \quad (LW_I)_{i+1/2} = (Iu^2)_{xi+1/2} + 3\bar{u}_{i+1/2} p_{xi+1/2} + \gamma \bar{p}_{i+1/2} \bar{u}_{xi+1/2} \\ (LW_E)_{i+1/2} &= ((E+p)u^2)_{xi+1/2} + \left( \frac{\bar{c}_{i+1/2}^2}{\gamma-1} + \frac{3}{2} (\bar{u}_{i+1/2})^2 \right) p_{xi+1/2} + \gamma \bar{p}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} u_{xi+1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$W_{Ei+\frac{1}{2}} = (\overline{\rho u})_{i+\frac{1}{2}} \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \overline{p}_{i+\frac{1}{2}} \overline{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} (LW_E)_{i+\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Здесь } \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}u_i}{2}, \quad \overline{c}_{i+\frac{1}{2}}^2 \equiv \gamma \frac{\overline{p}_{i+\frac{1}{2}}}{\overline{\rho}_{i+\frac{1}{2}}}.$$

В граничных узлах  $\overline{x}_{\frac{1}{2}} = L_1$  и  $\overline{x}_{N+\frac{1}{2}} = L_2$  поправки Лакса-Вендроффа положим равными нулю:

$$LW_{\frac{1}{2}}^r = LW_{N-\frac{1}{2}}^r = 0, \quad r = \rho, I, E,$$

чтобы обеспечить дивергентность разностной схемы.

Разностную аппроксимацию уравнений (6) представим в обычной балансной форме [9], учитывая выражения для потоков (11):

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau_n} + \frac{W_{ri+\frac{1}{2}}^n - W_{ri-\frac{1}{2}}^n}{\hbar_i} = 0, \quad r = \rho, I, E,$$

#### 4. Оценка величины искусственной вязкости

Вводимая в разностные уравнения искусственная диссипация, очевидно, должна быть по возможности минимальной, необходимой для подавления нефизичных осцилляций решения. Примем во внимание тот факт, что осцилляции сеточной природы не возникают, если разностная схема удовлетворяет условиям принципа максимума [9]. Найдем ограничения на коэффициенты разностной схемы, при которых эти условия выполнены. Отсюда мы получим выражение для искусственной вязкости.

Проведем соответствующие выкладки для уравнения неразрывности. Разностный аналог уравнения неразрывности с учетом искусственной вязкости представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{1}{\hbar_i} \left( \overline{u}_{i+1/2} \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} - \overline{u}_{i-1/2} \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2} \right) - \\ & - \frac{\tau}{2\hbar_i} \left[ \frac{\rho_{i+1} (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) - \rho_i (u_i^2 + c_i^2)}{h_{i+1/2}} - \frac{\rho_i (u_i^2 + c_i^2) - \rho_{i-1} (u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2)}{h_{i-1/2}} \right] = \\ & = \frac{1}{\hbar_i} \left( q_{i+1/2} \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{h_{i+1/2}} - q_{i-1/2} \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь обозначены величины:  $q_{i+1/2}$  – искусственная вязкость,  $c_i^2 = \frac{p_i}{\rho_i}$ .

Преобразуем (12) к виду

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} = & \rho_i^n - \frac{\tau}{2\hbar_i} \left( \bar{u}_{i+1/2} \rho_{i+1} + (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) \rho_i - \bar{u}_{i-1/2} \rho_{i-1} \right) + \\ & + \frac{\tau^2}{2\hbar_i} \left[ \frac{u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2}{h_{i+1/2}} \rho_{i+1} - (u_i^2 + c_i^2) \left( \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) \rho_i \right] + \\ & + \frac{u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2}{h_{i-1/2}} \rho_{i-1} + \frac{\tau}{\hbar_i} \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \rho_{i+1} - \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \rho_i^n + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \rho_{i-1} \right). \end{aligned}$$

В итоге расчетная формула для  $(\rho_i)^{n+1}$  приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} = & \left( -\frac{\tau}{2\hbar_i} \bar{u}_{i+1/2} + \frac{\tau^2}{2\hbar_i} \frac{u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2}{h_{i+1/2}} + \frac{\tau}{\hbar_i} \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \right) \rho_{i+1} + \\ & + \left( 1 - \frac{\tau}{2\hbar_i} (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) - \frac{\tau^2}{2\hbar_i} (u_i^2 + c_i^2) \left( \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) - \frac{\tau}{\hbar_i} \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \right) \rho_i^n + \\ & + \left( \frac{\tau}{2\hbar_i} \bar{u}_{i-1/2} + \frac{\tau^2}{2\hbar_i} \frac{u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2}{h_{i-1/2}} + \frac{\tau}{\hbar_i} \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \rho_{i-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для установления условий принципа максимума перепишем уравнение (13) в виде

$$\rho_i^{n+1} = A_i \rho_{i+1} + B_i \rho_i + C_i \rho_{i-1} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_i = & \frac{\tau}{2\hbar_i} \left( -\bar{u}_{i+1/2} + \frac{\tau}{h_{i+1/2}} (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) + 2 \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \right), \\ B_i = & 1 - \frac{\tau}{\hbar_i} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) + \frac{\tau}{2} (u_i^2 + c_i^2) \left( \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) + \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \right], \\ C_i = & \frac{\tau}{2\hbar_i} \left( \bar{u}_{i-1/2} + \frac{\tau}{h_{i-1/2}} (u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2) + 2 \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (13) будет подчиняться принципу максимума при выполнении следующих условий:  $A_i \geq 0$ ,  $B_i \geq 0$ ,  $C_i \geq 0$  и  $A_i + B_i + C_i \leq 1$  (см. [9]).

Условие  $A_i \geq 0$  будет выполнено, когда в соответствии с выражениями (13) будут выполнены неравенства

$$q_{i+1/2} \geq \frac{h_{i+1/2}}{2} \left( \bar{u}_{i+1/2} - \frac{\tau}{h_{i+1/2}} (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) \right),$$

что приводит к оценке

$$q_{i+1/2} \geq \left( \bar{Q}_{i+1/2} \right)_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i+1/2}}{2} \left[ |u_{i+1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i+1/2}} \left( u_{i+1}^2 + \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}} \right) \right]. \quad (16)$$

Условие  $C_i \geq 0$  будет выполнено, когда

$$q_{i-1/2} \geq (\bar{Q}_{i-1/2})_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i-1/2}}{2} \left[ |u_{i-1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i-1/2}} \left( u_{i-1}^2 + \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right) \right]. \quad (17)$$

Заменим в (16)  $u_{i+1}^2$  и в (17)  $u_{i-1}^2$  на меньшие (или такие же) величины  $\tilde{u}_{i+1/2}^2 = \min(u_{i+1}^2, u_i^2)$ ;  $\tilde{u}_{i-1/2}^2 = \min(u_i^2, u_{i-1}^2)$ .

Заменим также на меньшие (или равные) величины в (16)  $\frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}$  и в (17)  $\frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}}$ :

$$\tilde{c}_{i+1/2}^2 = \min\left(\frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}, \frac{p_i}{\rho_i}\right), \quad \tilde{c}_{i-1/2}^2 = \min\left(\frac{p_i}{\rho_i}, \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}}\right).$$

Потребуем, чтобы во всех ячейках разностной сетки выполнялось более сильное условие, чем (16)–(17):

$$q_{i+1/2} \geq (Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i+1/2}}{2} \left[ |u_{i+1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i+1/2}} (\tilde{u}_{i+1/2}^2 + \tilde{c}_{i+1/2}^2) \right]. \quad (18)$$

$(Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)}$  будет положительной величиной, если

$$\Delta t < \frac{h_{i+1/2} |u_{i+1/2}|}{\tilde{u}_{i+1/2}^2 + \tilde{c}_{i+1/2}^2} \quad (19)$$

Найдем, при каких условиях для коэффициента  $B_i$  справедливо неравенство  $B_i \geq 0$ . Для этого перепишем второе из равенств (14) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\hbar_i} \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) &= 1 - \frac{\Delta t}{\hbar_i} \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{\Delta t}{\hbar_i} \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{(\Delta t)^2}{2\hbar_i h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \\ &- \frac{(\Delta t)^2}{2\hbar_i h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right). \end{aligned}$$

Условие  $B_i \geq 0$  выполнено, если справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} &\leq \frac{(Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)}}{h_{i+1/2}} + \frac{(Q_{i-1/2})_{\max}^{(\rho)}}{h_{i-1/2}} = \frac{\hbar_i}{\Delta t} - \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \\ &- \frac{\Delta t}{2h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = \frac{h_{i+1/2}}{2\Delta t} + \frac{h_{i-1/2}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \frac{\Delta t}{2h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь учтено, что  $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$ .

Потребуем выполнение более сильного неравенства, чем (20). Заменим

$$\frac{u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}}{h_{i+1/2}} \text{ и } \frac{u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}}{h_{i-1/2}}$$

соответственно на большие (или равные) величины

$$\frac{\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2}{h_{i+1/2}} \text{ и } \frac{\bar{u}_{i-1/2}^2 + \bar{c}_{i-1/2}^2}{h_{i-1/2}},$$

где  $\bar{u}_{i+1/2}^2 = \max(u_i^2 + u_{i+1}^2)$ ,  $\bar{c}_{i+1/2}^2 = \max\left(\frac{p_i}{\rho_i}, \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}\right)$ ,  $\bar{u}_{i-1/2}^2 = \max(u_i^2 + u_{i-1}^2)$ ,

$$\bar{c}_{i-1/2}^2 = \max\left(\frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}}, \frac{p_i}{\rho_i}\right).$$

Отсюда вытекает ограничение на величину вязкости в виде

$$q_{i+1/2} \leq (Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)} = \frac{0.5 h_{i+1/2}^2 - |u_{i+1/2}| h_{i+1/2} - \frac{\Delta t}{2} (\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2)}{\Delta t}, \quad (21)$$

которое должно быть выполнено для всех ячеек разностной сетки.

Условие (21) означает, что

$$\frac{h_{i+1/2}^2}{\Delta t} - |u_{i+1/2}| h_{i+1/2} - \Delta t (u_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2) > 0, \text{ или } \Delta t < \frac{h_{i+1/2} |u_{i+1/2}|}{\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2}. \quad (22)$$

Ограничим шаг по времени  $\Delta t$  сильнее, чем следует из (22):

$$\frac{h_{i+1/2}^2}{\Delta t} - 2|u_{i+1/2}| h_{i+1/2} > 0,$$

или

$$\Delta t < \frac{h_{i+1/2}}{2|u_{i+1/2}|}. \quad (23)$$

Условие (22) гарантирует выполнение неравенства  $B_i \geq 0$ .

Если  $\bar{c}_{i+1/2}^2 > u_{i+1/2}^2$ , то для шага  $\Delta t$  необходимо выполнение ограничения (21), в противном случае  $\Delta t$  ограничивается неравенством (23).

При проведении расчетов величина искусственной вязкости должна определяться из неравенств (18) и (21)

$$(Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)} \leq q_{i+1/2}^{\rho} \leq (Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)}. \quad (24)$$

## 5. Результаты вычислительных экспериментов

Для проверки предложенного модифицированного метода адаптивной искусственной вязкости были рассчитаны три тестовые задачи. Мотивация выбранных тестовых задач состоит в том, что они позволяют

продемонстрировать возможность использования неравномерных сеток с большой разницей размеров соседних ячеек в расчетах течений с сильными и слабыми разрывами, а также в тех случаях, когда начальные распределения газодинамических величин немонотонны.

В расчетах тестовых задач на границах расчетной области будем сохранять те же значения искомых функций, что и в начальный момент времени. Поскольку основное внимание уделяется качеству воспроизведения волновых структур внутри расчетной области, расчеты выполнены на интервалах времени, в течение которых возмущения не достигают границ.

Первый тест – задача Shu-Osher [12]. В этом тесте ударная волна набегаёт на акустическую волну. Расчетная область представляет собой отрезок  $-5 \leq x \leq 5$ , точка разрыва  $x = -4$ . Начальные данные на левом участке от -5 до -4 имеют значения соответственно для плотности, скорости и давления (3,857143, 2,629369, 10,33333), а на правом интервале  $(1 + 0.2 \cdot \sin 5x, 0, 1)$ . Ударная волна в процессе расчета набегаёт на среду с синусоидальным профилем плотности. Расчет проводился до момента времени 1.8. При прохождении ударной волны с числом Маха  $M = 3$  через профилированную плотность возникают осцилляции плотности с различными частотами отличными от начальной частоты.

При тестировании метода АИВ с постоянным шагом расчеты проводились на сетке с 2000 ячейками. Для модифицированного метода АИВ с переменным шагом сетка была с тем же количеством расчетных узлов, но со сгущением в области формирования осцилляций за ударной волной с перепадом в величины ячейки 2 раза.

Расчеты показали, что точность решения повышается, но увеличивается число временных шагов, это связано с уменьшением шага во времени, так как для обеспечения устойчивости разностной схемы требуется меньшее число Куранта. Однако для получения той же точности в исследуемой области на равномерной сетке потребуется количество узлов примерно в два раза больше, соответственно, время расчета увеличится почти в два раза. Результаты расчета представлены на рис. 2 на равномерной сетке – красный цвет, на неравномерной сетке – зелёный цвет.

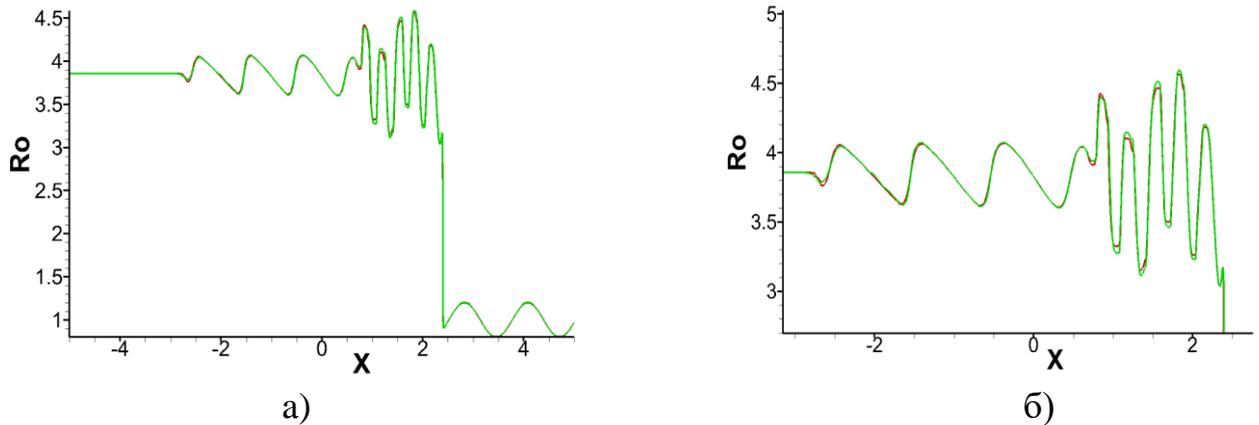


Рис. 2. Результаты расчета задачи Shu-Osher на равномерной и на неравномерной сетках. Рис 2а: профиль плотности на всей сетке. Рис. 2б: профиль плотности в области сгущения сетки  $-3 < x < 2.5$  (измельчение шага в два раза)

Второй тест [13] – это решение задачи о распаде сильного разрыва при сильных перепадах давления и плотности, что приводило к возникновению сильной ударной волны. В начальный момент времени перепад плотности составлял 8 безразмерных единиц, перепад давления – 320 единиц. Скорость газа была принята равной нулю во всей расчетной области, т.е. на отрезке  $0 < x < 300$ . Разрыв в начальный момент находился в точке  $x = 150$ . Расчеты данной задачи показали, что использование неравномерных сеток для метода АИВ не столь эффективно, так как решение представляет собой кусочно-постоянную функцию плотности. Здесь важно правильно по возможности точно рассчитать положение разрывов и подавить осцилляции численной природы на константном решении. Заметим также, что неравномерность сетки не приводит к ухудшению качества результатов расчета. Результаты расчетов представлены на рис. 3 на равномерной сетке – красный цвет, на неравномерной сетке – зелёный цвет.

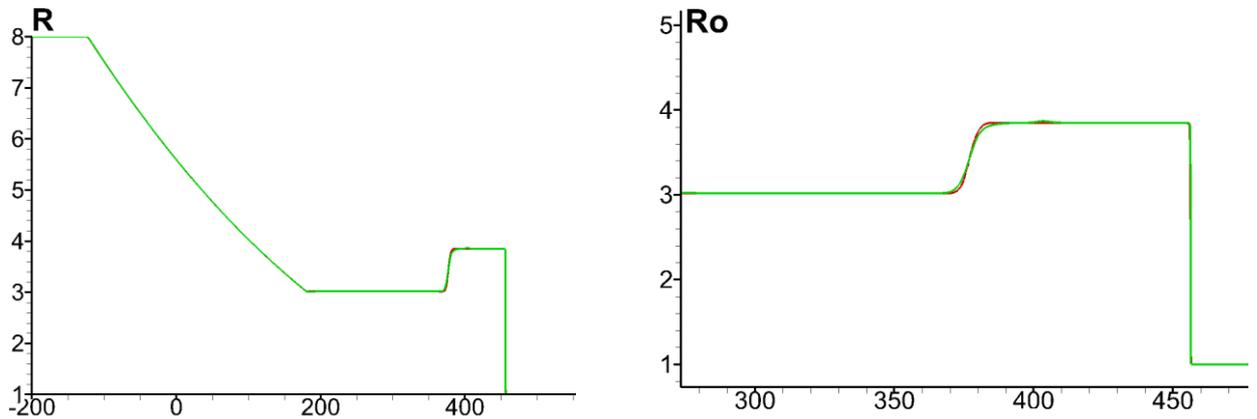


Рис. 3. Результаты расчетов задачи Сода на равномерной и неравномерной сетках. Области сгущения сетки: 1)  $140 < x < 160$ , 2)  $250 < x < 600$  (измельчение шага в два раза)

Последним тестом рассматривалась задача, называемая в работе [8, 9] «TestPeak». В этой же работе отмечалось, что большинство методик, например, WAFT, WAFC и другие, не дают заданное значение амплитуды пика, равное 39. Поэтому, чтобы повысить значение амплитуды пика, необходимо увеличивать количество расчетных точек в области формирования пика и до момента завершения расчета, т.е. до момента времени  $T = 0.0039$ .

На равномерной и неравномерной сетках число узлов одинаково: 1600. На неравномерной сетке уменьшение разностного шага в области  $0.5 \leq x \leq 0.56$  в 10 раз повысило значение амплитуды плотности почти в 2 раза. Следовательно, для рассматриваемого теста переменный шаг является принципиально важным требованием, позволяющим существенно улучшить результат расчёта при фиксированном числе разностных ячеек.

Результаты расчетов представлены на рисунке 4, на равномерной сетке – красный цвет, на неравномерной сетке – зелёный цвет.

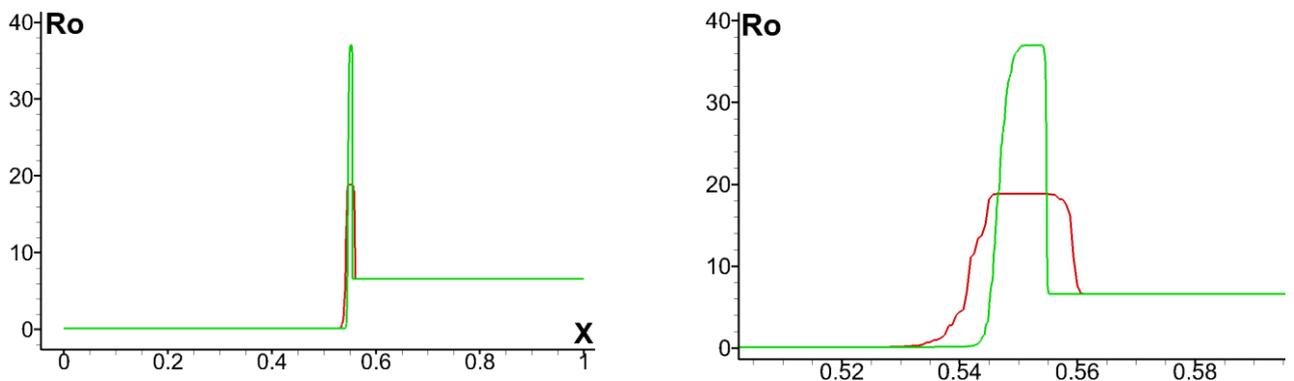


Рис. 4. Результаты расчетов распространения сильной ударной волны на равномерной (красный) и неравномерной (зеленый) сетках. Шаг разностной сетки измельчен в 10 раз в области  $0.5 \leq x \leq 0.56$

## Заключение

Разработанная модификация метода АИВ в численных экспериментах показала хорошую точность при использовании неравномерных расчетных сеток. Для сеток, которые не удовлетворяют условию квазиравномерности [11], метод позволяет сохранить качественные и количественные характеристики структур в рассчитываемом течении.

Предложенный метод достаточно прост в реализации и позволяет создавать экономичные алгоритмы расчетов течений при наличии локальных областей больших градиентов газодинамических величин. Вычислительные эксперименты, приведенные в данной работе, показали, что адаптивная вязкость позволяет производить вычисления с сохранением свойств монотонности и устойчивости разностных решений при весьма большой разнице размеров соседних сеточных ячеек. Так, например, один из тестов рассчитан на сетке, в которой размеры соседних ячеек отличаются на порядок величины. Расчеты тестовых и практических задач показали также, что сумма коэффициентов в (14), как правило, близка к единице. Качество предложенной разностной схемы не ухудшается при изменении отношения  $\bar{u}^2 / \bar{c}^2$  в весьма широком диапазоне.

## Список литературы

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. – М.: Красанд, 2015. 200 с.
2. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // ДАН СССР, Т. 302, № 5, 1988. С. 1078-1081.
3. Калиткин Н.Н., Кузнецов И.О., Панченко С.Л. Метод квазиравномерных сеток в бесконечной области // ДАН, Т. 374, № 5. С.598-601.
4. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б, Альшина Е.А., Рогов. Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. – М.: Физматлит, 2005. 224 с.
5. Berger M. J., Olinger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations // Journal of Computational Physics. V. 53 (3), 1984. P. 484-512. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90073-1.
6. Berger, M. J., Colella, P. (1989). Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // Journal of Computational Physics. V. 82 (1), 1989. P. 64-84. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90035-1.
7. Василевский В.Ф., Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности на адаптивных сетках нерегулярной структуры / Препринт ИПМ № 124, М., 1990. 31 с.
8. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. 440 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1971. 553 с.

10. Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. 424 с.
11. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 2009. 653 p.
12. Shu C., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // Journal of Computational Physics, V. 83, 1989. P.32-78.
13. Liska R., Wendroff B.. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations // SIAM Journal on Scientific Computing, V. 25(3), 2003. P.31-84. DOI: 10.1137/S1064827502402120.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Построение разностной схемы второго порядка аппроксимации с поправками Лакса-Вендроффа .....	4
3. Сетка по переменной $x$ . Аппроксимация.....	6
4. Оценка величины искусственной вязкости .....	8
5. Результаты вычислительных экспериментов .....	11
Заключение.....	15
Список литературы.....	15