



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Влияние спиральности и
альфа-эффекта на
сжимаемую гидромагнитную
турбулентность
астрофизических дисков с
глобальным магнитным
полем

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Влияние спиральности и альфа-эффекта на сжимаемую гидромагнитную турбулентность астрофизических дисков с глобальным магнитным полем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 41. 44 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-41>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-41>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Колесниченко

**Влияние спиральности и альфа-эффекта
на сжимаемую гидромагнитную
турбулентность астрофизических дисков
с глобальным магнитным полем**

Москва — 2024

Колесниченко А.В.

Влияние спиральности и альфа-эффекта на сжимаемую гидромагнитную турбулентность астрофизических дисков с глобальным магнитным полем.

Аннотация. Влияние сжимаемости и вращения на турбулентный перенос в спиральных гидромагнитных потоках при наличии осредненного поля скоростей и глобального магнитного поля исследуется с помощью феноменологического подхода. Флуктуирующие эффекты, входящие при этом в осредненные МГД-уравнения через их корреляционные вклады и представляющие собой напряжение Рейнольдса, турбулентную электродвижущую силу и ряд других корреляционных функций, моделируются (при отсутствии отражательной симметрии мелкомасштабных движений плазмы) с помощью эволюционных уравнений и четырех спиральных статистических характеристик турбулентности, которыми являются: полная турбулентная энергия плазмы, скорость ее диссипации, турбулентная поперечная спиральность, турбулентная остаточная энергия и турбулентная остаточная спиральность. Четыре эволюционных уравнения для этих объемных спиральных величин, объединенные с МГД-уравнениями среднего поля, формируют, в частности, самосогласованную динамо-модель. Работа направлена на моделирование влияния эффектов сжимаемости и вращения на динамические процессы в гидромагнитной спиральной турбулентности гео- и астрофизических объектов различной природы.

Ключевые слова: турбулентный астрофизический диск, эффекты сжимаемости, магнитная, поперечная и остаточная спиральности, теория динамо.

Kolesnichenko Aleksandr Vladimirovich

Influence of helicity and alpha effect on compressible hydromagnetic turbulence of astrophysical discs with strong magnetic field.

Abstract. The influence of compressibility and rotation on turbulent transport in spiral hydromagnetic flows in the presence of an averaged velocity field and a global magnetic field is investigated using a phenomenological approach. The fluctuating effects, which are included in the averaged MHD equations through their correlation contributions and represent the Reynolds stress, turbulent electromotive force, and a number of other correlation functions, are modelled (at absence of reflection symmetry of small-scale plasma motions) using evolutionary equations and four spiral statistical characteristics of turbulence, which are: total turbulent plasma energy, dissipation rate, turbulent transverse helicity, turbulent residual energy and turbulent residual helicity. Four evolution equations for these bulk helicity quantities combined with the MHD mean-field equations leads, in particular, to a self-consistent dynamo model. The work is aimed at modelling the influence of compressibility effects on dynamical processes in hydromagnetic spiral turbulence of geo- and astrophysical objects of different nature.

Key words: turbulent astrophysical disc, compressibility effects, magnetic, transverse and residual helicity, dynamo theory.

ВВЕДЕНИЕ

Теория спиральной турбулентности в электропроводящей среде успешно используется для анализа динамических явлений, связанных с астро- и геофизическими объектами различной природы (например, с галактическими газовыми дисками, с аккреционными дисками, с индуцированными мелкомасштабной турбулентностью магнитными полями в галактике, динамическими процессами в конвективной зоне Солнца и во внешнем ядре Земли и т.д.). Представителями сферических объектов являются, например, Земля и Солнце, а цилиндрических – вращающиеся аккреционные диски вокруг астрофизических объектов большой массы.

В последнее время весьма интенсивно исследуются разнообразные когерентные вихревые структуры в обычной турбулентной жидкости, которые оказывают определяющее влияние на динамические характеристики турбулентных сред, в частности на эволюцию структурных параметров немагнитных турбулентных астрофизических дисков (см., например, *Kolesnichenko, 2024*). С фактической точки зрения наиболее богата подобными диссипативными структурами сильная турбулентность в термодинамически открытой системе, когда при очень высоких числах Рейнольдса Re (определяемых интегральным масштабом, характеристической скоростью и кинематической вязкостью) нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье-Стокса и соответствующими краевыми условиями. Однако в тех случаях, когда поток свободен от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скорости при вращении диска), развитая турбулентность в пределе больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения.

Вместе с тем существует турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (так называемый закон четности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ координат. Примером такой турбулентности является, в частности, пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического немагнитного аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется гиротропной (или спиральной от английского слова «*helicity*») и возникает под влиянием

массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). Впервые на важность влияния спиральности локализованных вихревых возмущений на эволюцию трехмерной турбулентности обратил внимание Моффат (Moffatt, 1969), который и нашел связанный с ней интегральный инвариант $H_K(\mathbf{x}, t) := \langle \mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}'' \rangle$ – среднюю вихревую спиральность, представляющий собой меру правостороннего и левостороннего закручивания силовых линий вихревого поля скоростей, связанного с турбулентным движением жидкости (другими словами являющийся мерой структурного или топологического свойства мелкомасштабных колебаний).

Средняя вихревая спиральность – это псевдоскаляр, который не является положительно определенной величиной и меняет знак при переходе от левой к правой системе координат (или наоборот). Заметим, что здесь и далее везде в качестве операции осреднения используется статистико-математическое осреднение по ансамблю возможных реализаций случайных гидротермодинамических полей (см., например, Монин, Яглом, 1996). Напомним также, что только благодаря введению в рассмотрение так называемой магнитной перекрестной (кросс) спиральности $W = \mu_0^{-1} \langle \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ для адекватного описания гидромагнитной турбулентности (не обладающей зеркальной симметрией) удалось объяснить механизм турбулентного динамо в астрофизике (так называемый α -эффект), отвечающий за генерацию и поддержание крупномасштабных магнитных полей $\bar{\mathbf{B}}$ у планет, звезд и галактик (Hamba, 1992; Yoshizawa, Yokoi, 1993)

Реальная турбулентность во вращающемся звездном аккреционном диске также имеет спиральный характер. Это связано с тем, что мелкомасштабное пульсационное поле скоростей \mathbf{u}'' при наличии вращения дискового вещества с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$ (аксиальный вектор) и анизотропии, вызванной, например, воздействием поля силы тяжести \mathbf{g} или поля вертикального градиента температуры $\nabla\theta$ (полярные векторы), не обладает отражательной симметрией относительно экваториальной плоскости диска, т.е. относительно преобразования $z \rightarrow -z$. Последнее означает, что в таком анизотропном мелкомасштабном пульсационном поле скоростей вихревые левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятными, чем правовращательные, или наоборот.

Один из важнейших аспектов феноменологической теории спиральной гидромагнитной турбулентности связан с детальным исследованием взаимодействия между гидродинамической турбулентностью и магнитной турбулент-

ностью при наличии сильного глобального магнитного поля. В гидромагнитных (МГД) потоках существует сложное взаимодействие между осредненными и флуктуирующими плотностью, скоростью и магнитным полем. Даже однородное магнитное поле сильно изменяет динамические свойства гидромагнитной турбулентности, в отличие от чисто гидродинамической турбулентности, в динамике которой, как известно, доминирует вихревое (турбулентное) искажение однородного поля скоростей. Еще одним из важных аспектов, требующим особого рассмотрения при определении структуры различных астрофизических объектов, является учет сверхзвукового эффекта сжимаемости турбулентной плазмы, на который, к сожалению, до последнего времени мало обращалось внимания. Однако именно сжимаемость турбулентной плазмы может приводить как к усилению, так и к подавлению генерации мелкомасштабных флуктуаций структурных параметров дисковой среды при их взаимодействии с осредненным гидродинамическим полем и глобальным магнитным полем (Liou и др., 1995; Yoshizawa и др., 1997; Adumitroaie и др., 1999). Кроме этого, при моделировании эволюции радиационно-доминирующих областей аккреционных дисков необходимо принимать во внимание и наличие излучения, поскольку в них (например, в звездных дисках с рентгеновскими лучами и т.п.) преобладает радиационное давление.

Построение модели, отвечающей всем перечисленным требованиям, является одной из сложных задач в исследовании сжимаемой спиральной гидромагнитной турбулентности. К сожалению, в настоящее время какой-либо строгой феноменологической теории сжимаемой (сверхзвуковой) гидромагнитной турбулентности не существует. Вместе с тем только наличие количественно надежной теории подобной турбулентности позволило бы глубже понять многие динамические явления в астрофизике, например, особенности генерации дополнительного магнитного поля при движении сжимаемой проводящей среды, перенос углового момента дискового проводящего вещества на периферию диска или выделение тепла в нем при аккреции.

В связи со сказанным в представленной работе особое внимание уделялось конструированию феноменологической модели гидромагнитной спиральной турбулентности, учитывающей влияние сжимаемости на процесс генерации турбулентности в МГД-системах при осредненных скорости, магнитном поле, плотности и температуре. При этом предполагалось, что хорошо развитая турбулентность обуславливается и приходит к квазиравновесному состоянию самой турбулентности, независимо от ее происхождения (см., например, Hawley, Balbus, 1991). При конструировании модели турбулентное движение плазмы

раскладывалось нами на среднее значение и отклонение, или флуктуацию, от среднего значения, состоящую из случайных суперпозиций взаимодействующих между собой мелкомасштабных волновых мод (образующих так называемую турбулентную надструктуру). Флуктуирующие эффекты, входящие при этом в осредненные МГД-уравнения через их корреляционные вклады, представляют собой разнообразные турбулентные потоки, турбулентную электродвижущую силу и многие другие корреляционные функции, для которых необходимо иметь замыкающие соотношения. В работе все турбулентные потоки моделируются вблизи структурного равновесия линейными функциями от термодинамических сил, т.е. связаны с градиентами осредненных структурных параметров через коэффициенты переноса. В случае отсутствия отражательной симметрии мелкомасштабных движений проводящей среды эти коэффициенты зависят от ряда статистических дескрипторов (идентификаторов) МГД-турбулентности, которыми являются: турбулентная энергия вещества плазмы $b := \langle \frac{1}{2} |\mathbf{u}''|^2 \rangle$, скорость ее диссипации $\bar{\rho} \langle \varepsilon \rangle := \overline{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}''}$, турбулентная магнитная энергия $\langle b_M \rangle := \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\bar{\rho}\mu_0$ и скорость ее диссипации $\langle \varepsilon_M \rangle := \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \bar{\rho}\sigma_e$, турбулентная поперечная (кросс) спиральность $W = \mu_0^{-1} \langle \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ (корреляция между флуктуациями скорости и магнитного поля), остаточная энергия турбулентности $K_R := \langle b \rangle - \langle b_M \rangle$ (разница между турбулентными гидродинамической и магнитной энергиями) и, наконец, турбулентная остаточная спиральность $H = \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}'} - \langle (\nabla \times \mathbf{u}'') \cdot \mathbf{u}'' \rangle$ (разница между токовой H_M и кинетической H_K спиральностями) (Yoshizawa, Yokoi, 1993; Yokoi и др., 2008; Yoshizawa и др., 2004). Именно эти дескрипторы, часто используемые для представления свойств развитой турбулентности, играют ключевую роль в плазменных спиральных явлениях (в частности таких, как турбулентное динамо). Эффект динамо возникает в турбулентных потоках при огромных числах Рейнольдса (например, во внешнем ядре Земли $Re \sim O(10^8)$ и в галактиках $Re \sim O(10^{11})$), когда мелкомасштабные флуктуации скорости и внешнего магнитного поля приводят к генерации дополнительных (наведенных) магнитных полей, вызывающих электрические токи проводимости, параллельные или антипараллельные вектору магнитного поля, а также влияют на поле скорости через силу Лоренца. Для указанных статистических дескрипторов необходимо привлекать к рассмотрению эволюционные уравнения, которые, наряду с осредненными МГД-уравнениями, должны решаться численно одновременно самосогласованным образом. По этой причине правильный выбор соответствующих дескрип-

торов при моделировании спиральных явлений в турбулентной плазме имеет ключевое значение.

Таким образом, в данной работе в приближении сжимаемой магнитной гидродинамики получена замкнутая система гидромагнитных уравнений масштаба среднего движения плазмы, для которой спиральные эффекты существенно влияют на динамику происходящих в ней гидромеханических и электромеханических процессов. Важно отметить, что при разработке модели сжимаемой среды нами, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением МГД-уравнений по ансамблю возможных реализаций, систематически было использовано массово-взвешенное осреднение Фавра (Favre, 1969), позволяющее в значительной степени как упростить структуру осредненных гидромагнитных уравнений, так и выявить важные сверхзвуковые эффекты в развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса в зависимости от степени сжимаемости плазмы.

С целью более наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса вещества плазмы и флуктуирующего магнитного поля в работе приведены различные энергетические уравнения, позволяющие отслеживать возможные механизмы перекачки энергии из одной формы в другую, например, гравитационной и кинетической энергии осредненного движения в магнитную энергию и т.п. Особое внимание в работе уделяется турбулентной электродвижущей силе, которая играет центральную роль в появлении турбулентного динамо.

В настоящее время в гео-и астрофизических приложениях турбулентные движения исследуются с помощью того или иного типа моделирования. Такими моделями являются модели замыкания первого и второго порядка (см., например, Marov, Kolesnichenko, 2013). Напряжения Рейнольдса, турбулентная электродвижущая сила и другие важные корреляционные функции, которые фигурируют в осредненных МГД-уравнениях для осредненных скорости и магнитного поля, моделируются в данной работе с помощью линейных замыкающих соотношений с включением в рассмотрение моделей замыкания второго порядка (эволюционных уравнений, записанных при высоких значениях гидродинамического и магнитного чисел Рейнольдса) для статистических величин $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $W(\mathbf{x}, t)$, $K(\mathbf{x}, t) := \langle b \rangle + \langle b_M \rangle$, $K_R(\mathbf{x}, t) := \langle b \rangle - \langle b_M \rangle$ и $H(\mathbf{x}, t)$ сжимаемого турбулентного поля, что приводит, в конечном счете, к самосогласованной модели турбулентности для магнито-гидродинамической плазмы.

Отметим еще раз, что работа направлена на моделирование эффектов сжимаемости в турбулентных потоках в спиральной плазме звездных аккрецион-

ных дисков (и в связанных с ними коронах) и в термоядерной плазме. Ее основной целью является моделирование влияния сжимаемости на динамические процессы в гидромагнитной турбулентности, например, такие как генерация наведенного магнитного, образование турбулентной энергии плазмы и флуктуирующего магнитного поля и их диссипация, перекачка энергии из одной формы в другую и т.д. Конечной целью этого исследования является разработка моделей сжимаемой турбулентности, которые способны работать в высокоскоростном режиме.

Используемый в работе подход является развитием ранее разработанного автором подхода к моделированию сжимаемой турбулентности, основанного на надежных термодинамических концепциях (см., например, Колесниченко, 2011, 2014a,b, 2017; Kolesnichenko, Marov, 2007,2008).

1. ОСРЕДНЕННЫЕ МГД-УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ПЛАЗМЫ

Средневзвешенное осреднение Фавра

В турбулентной космической плазме гидродинамическая скорость, температура, плотность и электромагнитные поля являются флуктуирующими величинами. Как известно (см., Favre, 1969), при построении модели развитой турбулентности в сжимаемой среде удобно использовать наряду с обычными (осредненными по Рейнольдсу) средними значениями $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$ некоторых магнитогидродинамических величин $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$ (таких как электромагнитное поле, плотность тока, массовая плотность вещества, давление, молекулярные потоки переноса массы, количества движения и энергии) так называемые средневзвешенные значения $\langle \mathcal{A} \rangle(\mathbf{x},t)$, или средние по Фавру, для некоторых других параметров (например, температуры, внутренней энергии, энтропии, гидродинамической скорости и т.п.), задаваемые соотношением $\langle \mathcal{A} \rangle := \overline{\rho \mathcal{A}} / \bar{\rho}$. Таким образом, для обозначения средних значений физических величин далее мы будем использовать два символа: черта сверху означает осреднение Рейнольдса по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в то время как

угловые скобки будут означать средневзвешенное осреднение Фавра. Двойной штрих используется далее для обозначения мелкомасштабных флуктуаций на фоне среднего течения $\mathcal{A}''(\mathbf{x},t)$ тех величин $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$, которые осреднены по Фавру, $\mathcal{A}(\mathbf{x},t) = \langle \mathcal{A} \rangle + \mathcal{A}''$, ($\overline{\mathcal{A}''} \neq 0$). Приведем здесь употребляемые далее в статье некоторые свойства средневзвешенного осреднения физических величин, которые легко выводятся из его определения и известных постулатов осреднения по Рейнольдсу (см., например, Колесниченко, Маров, 2009):

$$\overline{\langle \mathcal{A} \rangle} = \langle \mathcal{A} \rangle, \quad \langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = \overline{\mathcal{A}}, \quad \overline{\rho' \mathcal{A}'} = \overline{\rho' \mathcal{A}''}, \quad \langle \mathcal{A} \rangle - \overline{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}' \rangle = -\overline{\mathcal{A}''}, \quad \mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}''} + \mathcal{A}' ,$$

$$\overline{\rho \mathcal{A}''} = 0, \quad \overline{\mathcal{A}''} = -\overline{\rho' \mathcal{A}'} / \bar{\rho}, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})'' = \langle \mathcal{A} \rangle \mathcal{B}'' + \langle \mathcal{B} \rangle \mathcal{A}'' + \mathcal{A}'' \mathcal{B}'' - \overline{\rho \mathcal{A}'' \mathcal{B}''} / \bar{\rho}$$

$$\overline{\rho \mathcal{A} \mathcal{B}} = \bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathcal{B} \rangle + \overline{\rho \mathcal{A}'' \mathcal{B}''}, \quad \overline{\nabla \langle \mathcal{A} \rangle} = \nabla \langle \mathcal{A} \rangle, \quad \overline{\rho \mathcal{A} \nabla \mathcal{B}} = \bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \nabla \langle \mathcal{B} \rangle + \overline{\rho \mathcal{A}'' \nabla \mathcal{B}''},$$

$$\overline{\rho \frac{d\mathcal{A}}{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) + \nabla \cdot \overline{\rho \mathcal{A}'' \mathbf{u}''} \equiv \bar{\rho} \frac{D \langle \mathcal{A} \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{(\mathcal{A})}^{turb},$$

где $D/Dt := \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla$ – субстанциональная производная по времени для осредненного континуума; $\mathbf{J}_{(\mathcal{A})}^{turb}(\mathbf{x},t) := \overline{\rho \mathcal{A}'' \mathbf{u}''}$ – турбулентный поток характеристики $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$.

Далее при получении осредненных уравнений магнитной гидродинамики использовано тождество

$$\begin{aligned} \overline{\rho \frac{d(\mathcal{A}'' \mathcal{B}'')}{dt}} &\equiv \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle \mathcal{A}'' \mathcal{B}'' \rangle + \nabla \cdot \overline{\rho \mathcal{A}'' \mathcal{B}'' \mathbf{u}''} = -\mathbf{J}_{(\mathcal{A})}^{turb} \cdot \nabla \langle \mathcal{B} \rangle - \mathbf{J}_{(\mathcal{B})}^{turb} \cdot \nabla \langle \mathcal{A} \rangle + \\ &+ \overline{\mathcal{A}'' (\sigma_{\mathcal{B}} - \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{B}})} + \overline{\mathcal{B}'' (\sigma_{\mathcal{A}} - \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{A}})}, \end{aligned}$$

которое легко может быть получено путем осреднения по Рейнольдсу корреляции $d(\mathcal{A}'' \mathcal{B}'')/dt$ при использовании обобщенного балансового уравнения $\rho d\mathcal{A}/dt = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{A}} + \sigma_{\mathcal{A}}$ для регулярного режима движения проводящей жид-

кости. Здесь $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ – скалярная, векторная или тензорная величина; поток $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$ и скорость образования $\sigma_{\mathcal{A}}$ представляют собой величины, тензорный ранг которых соответственно на один порядок выше и тот же, что и у параметра \mathcal{A} .

Осредненные магнитогидродинамические уравнения

Рассмотрим астрофизическую сжимаемую турбулентность проводящей жидкости при наличии глобального магнитного поля \mathbf{B} и вращения с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ изучаемого космического объекта. При описании развитого турбулентного течения в виде суммы средней $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ и пульсационной $f'(\mathbf{x}, t)$ составляющих гидродинамических полей $f(\mathbf{x}, t)$, осредненные МГД-уравнения, записанные (в международной системе единиц СИ) во вращающейся системе координат, имеют следующий вид (Kolesnichenko, Marov, 2008):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \frac{D \langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = -\nabla (\bar{p} + p_M) + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_M + \mathbf{R}) - \bar{\rho} \nabla \psi - \bar{\rho} \mathbf{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (2)$$

$$\bar{\rho} \frac{D \langle e \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle e \rangle} = -\bar{\rho} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} - \overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_{\Sigma} \rangle, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{\mathbf{E}}, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = \mu_0^{-1} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \sigma_e (\bar{\mathbf{E}} + \mu_0^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle \times \bar{\mathbf{B}} + \mathcal{G}_M). \quad (5)$$

Здесь $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$, $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) := \overline{\rho \mathbf{u}} / \bar{\rho}$ – соответственно осредненные массовая плотность и гидродинамическая скорость плазменного космического вещества в диске ($\rho = \bar{\rho} + \rho'$; $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}''$; $\mathbf{u}''(\mathbf{x}, t)$ – турбулентная пульсация осредненной по Фавру скорости); $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ – соответственно осредненные по Рейнольдсу напряженности электрического и магнитного поля; $\bar{p}(\mathbf{x}, t) := \mathfrak{R} \bar{\rho} \langle \theta \rangle$ – осредненное газодинамическое давление; $\mathfrak{R} := R/m$; R – газовая постоянная;

m – средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p);
 $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \rho \nu \left(\nabla^{sim} \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right)$ – тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами под действием молекулярной кинематической вязкости ν ; $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = -\bar{\rho} \langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle$ – тензор турбулентных напряжений;

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_M(\mathbf{x}, t) := \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B} \mathbf{B}} = \boldsymbol{\tau}_M^{av} + \boldsymbol{\tau}_M^{turb} \quad \text{и} \quad \bar{p}_M := p_M^{av} + p_M^{turb} \quad (6)$$

– осредненный тензор магнитных натяжений и осредненное давление магнитного поля соответственно;

$$\boldsymbol{\tau}_M^{av}(\mathbf{x}, t) := \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B} \mathbf{B}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\tau}_M^{turb}(\mathbf{x}, t) := \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'} \quad (7)$$

– тензоры магнитных натяжений для осредненного магнитного поля и пульсационной составляющей магнитного поля;

$$p_M^{av}(\mathbf{x}, t) := |\overline{\mathbf{B}}|^2 / 2\mu_0 \quad \text{и} \quad p_M^{turb}(\mathbf{x}, t) := \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\mu_0 \quad (8)$$

– давление осредненного магнитного поля и турбулентное магнитное давление электропроводящей жидкости; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (которой для немагнитного космического вещества можно пренебречь, полагая $\mu_0 = 1$; однако для удобства перехода к другим системам единиц измерения в уравнениях МГД параметр μ_0 далее будем оставлять); σ_e – удельный молекулярный коэффициент электропроводности; $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ – осредненная плотность тока проводимости, фигурирующая в осредненных законах Ампера (4) и Ома (5); $\langle e \rangle(\mathbf{x}, t) := \overline{\rho e} / \bar{\rho}$ – осредненное по Фавру удельное значение внутренней энергии $e(\mathbf{x}, t)$ дискового плазменного вещества в МГД-приближении (далее энергию $\langle e \rangle$ будем считать пропорциональной температуре $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\langle e \rangle(\mathbf{x}, t) := c_V \langle \theta \rangle$); $\gamma = c_p / c_V$ – показатель адиабаты; $c_p, c_V = \mathfrak{R} / (\gamma - 1)$ – соответственно удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и теплоемкость при постоянном объеме (далее эти величины будем считать постоянными); $\bar{\mathbf{q}}_{rad}(\mathbf{x}, t)$ – осредненная плотность потока энергии, переносимого излучением.

$$\tilde{\mathbf{q}}^{turb}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{q}^{turb} - \overline{p' \mathbf{u}''}, \quad \mathbf{q}^{turb}(\mathbf{x}, t) \cong c_p \overline{\rho \theta'' \mathbf{u}''} \quad (9)$$

– соответственно приведенный поток тепла и турбулентный тепловой поток

(см. Колесниченко, 2017); $\mathbf{J}_{\langle e \rangle}(\mathbf{x}, t) := \bar{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\text{turb}} + \bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}}$ – полный поток внутренней энергии осредненного движения плазмы; $\mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) := \overline{\rho(1/\rho)''\mathbf{u}''} = \bar{\mathbf{u}}''$ – турбулентный поток осредненного удельного объема, $\langle v \rangle := 1/\bar{\rho}$; $\langle \varepsilon_{\Sigma} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \langle \varepsilon_{\text{M}} \rangle$, где

$$0 \leq \bar{\rho} \langle \varepsilon \rangle := \overline{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}''}, \quad 0 \leq \bar{\rho} \langle \varepsilon_{\text{M}} \rangle := \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \sigma_e \quad (10)$$

– соответственно удельная скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под действием молекулярной кинематической вязкости и удельная скорость диссипации энергии турбулентности под действием пульсирующего магнитного поля. Последнюю величину можно интерпретировать как теплоту Джоуля, связанную с пульсациями электрического тока в турбулентной проводящей среде.

Осредненное уравнение движения. При использовании преобразования

$$-\nabla p_{\text{M}}^{\text{av}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{M}}^{\text{av}} = -\nabla \cdot \left(\frac{|\bar{\mathbf{B}}|^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \bar{\mathbf{B}} \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} \quad (11)$$

осредненному уравнению движения плазмы (2) можно придать следующий вид:

$$\bar{\rho} \frac{D\langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} \cong -\nabla \cdot (\bar{p} + p_{\text{M}}^{\text{turb}}) + \nabla \cdot \mathbf{R}_{\text{K}} + \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} - \bar{\rho} \nabla \psi - \bar{\rho} \boldsymbol{\Omega}_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (12)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_{\text{K}}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau}_{\text{M}}^{\text{turb}} = -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} + \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'} \quad (13)$$

– полный тензор турбулентных напряжений в плазме (так называемый кинетический тензор Рейнольдса для электропроводящей жидкости, находящейся в магнитном поле). Заметим, что приближенная форма (12) уравнения движения (2) справедлива только в случае сильно развитой турбулентности, когда осредненным тензором вязких (молекулярных) напряжений $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}, t)$ можно пренебречь по сравнению с тензором турбулентных напряжений $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение магнитной индукции для средних полей. Исключая из уравнений Максвелла (4) электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$, а из закона Ома (5) ток проводимости $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, можно получить, при использовании формулы векторного ана-

лиза $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$, следующее уравнение магнитной индукции средних полей

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = (\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{R}_M + \nu_M \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}, \quad (14)$$

являющееся одним из основных уравнений осредненной турбулентной магнитной гидродинамики. Здесь

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{x}, t) := - \left(\overline{\mathbf{u}'' \mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B} \mathbf{u}''} \right) \quad (15)$$

– так называемый магнитный тензор Рейнольдса; $\nu_M := 1 / \mu_0 \sigma_e$ – коэффициент молекулярной магнитной вязкости, имеющий такую же размерность, как и коэффициент кинематической вязкости ν , т.е. $\text{см}^2/\text{с}$.

В осредненном уравнении индукции (14) присутствует новый член

$$\nabla \cdot \mathbf{R}_M := \overline{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \nabla) \mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}''} = \nabla \times (\overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}}) = \nabla \times \mathcal{G}_M, \quad (16)$$

играющий роль дополнительного источника, генерирующего крупномасштабное магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ за счет мелкомасштабных спиральных движений. Здесь

$$\mathcal{G}_M(\mathbf{x}, t) := \overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}} = \overline{\rho \mathbf{u}'' \times (\mathbf{B}/\rho)}'', \quad \text{или} \quad (\mathcal{G}_M)_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{R}_M)_{jk} \quad (17)$$

– турбулентная электродвижущая сила, порождаемая мелкомасштабными флуктуациями поля скоростей и магнитного поля и фигурирующая также в осредненном законе Ома (5).

Следует отметить, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД–турбулентности как раз и является конструирование специального замыкающего соотношения для электродвижущей силы $\mathcal{G}_M(\mathbf{x}, t)$ как функции средних полей $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ и $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$, с тем, чтобы при известном поле скоростей $\langle \mathbf{u} \rangle$ можно было найти магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$ из уравнения индукции (14).

Система уравнений (1)-(3) и (14) должна быть дополнена замыкающими соотношениями для турбулентных потоков, а также выражениями для термодинамических и переносных характеристик. При этом граничные и начальные условия для осредненных структурных параметров плазмы не отличаются от

соответствующих условий для неэлектропроводящих сред, но для среднего магнитного поля необходимо привлекать дополнительные условия.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАСШТАБА СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВА ПЛАЗМЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В осредненном турбулентном течении проводящей жидкости, по сравнению с его регулярным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объемов вещества, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума (Колесниченко, 2017).

Балансовое уравнение для осредненной механической энергии плазмы может быть получено путем скалярного умножения обеих сторон уравнения движения (2) на вектор $\langle \mathbf{u} \rangle$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(|\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 + \psi \right) + \nabla \cdot \left\{ -\nabla (\bar{p} + \bar{p}_M) \langle \mathbf{u} \rangle - (\mathbf{R}_K + \boldsymbol{\tau}_M^{av}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = \\ = (\bar{p} + p_M^{turb}) \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - (\mathbf{R}_K + \boldsymbol{\tau}_M^{av}) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение притока тепла для осредненного движения турбулентной плазмы (3) можно переписать в виде:

$$\bar{\rho} \frac{D\langle e \rangle}{Dt} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}}_{rad} + \tilde{\mathbf{q}}^{turb}) \cong -(\bar{p} + p_M^{turb}) \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \frac{\mathbf{R}_M : \nabla \bar{\mathbf{B}}}{\mu_0}, \quad (19)$$

справедливом, однако, только в случае сильно развитого турбулентного поля, при котором в структуре пульсирующих величин \mathbf{u}'' и \mathbf{B}' устанавливается такое стационарно-неравновесное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы [см. (35)]

$$\langle b_\Sigma \rangle := \langle b \rangle + \langle b_M \rangle = \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} + \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\bar{\rho}\mu_0 \quad (20)$$

почти не меняется как во времени, так и в пространстве, $\bar{\rho} D\langle b_\Sigma \rangle / Dt + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma \rangle} \cong 0$ (Колесниченко, 2008, 2017). Здесь $\bar{\rho} \langle b \rangle := \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2 -$

турбулентная энергия вещества плазмы; $\bar{\rho}\langle b_M \rangle := \overline{|\mathbf{B}'|^2}/2\mu_0$ – турбулентная энергия магнитного поля. В этом случае справедливо соотношение

$$-\rho_M^{\text{turb}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : \nabla \bar{\mathbf{B}} \cong \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} - \overline{p'(\nabla \cdot \mathbf{u}'')} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_\Sigma \rangle, \quad (21)$$

с помощью которого получено уравнение (19). Заметим также, что при применении формулы (Kolesnichenko, Marov, 2008)

$$\mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : \nabla \bar{\mathbf{B}} = -\mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} \quad (22)$$

последнее слагаемое в правой части уравнения (19) может быть записано в виде $-\mathcal{G}^M \cdot \bar{\mathbf{j}}$.

Уравнение для турбулентной энергии вещества плазмы $\langle b \rangle := \overline{|\mathbf{u}''|^2}/2\bar{\rho}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D\langle b \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b \rangle} = \mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} + \overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} - \mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - \\ - \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'} + \overline{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_\Sigma \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае сильно развитой турбулентности это уравнение, при учете формул (21) и (22), может быть переписано в более простом виде (Kolesnichenko, 2017):

$$\bar{\rho} \frac{D\langle b \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b \rangle} = \rho_M^{\text{turb}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'}. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{J}_{\langle b \rangle}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \overline{\rho(b + p'/\rho) \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}''} \right\}$ – поток турбулентной энергии проводящего вещества плазмы.

Балансовое уравнение для полной осредненной энергии вещественной составляющей плазмы $E_{\text{tot}}^{\text{sub}}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle / 2 + \langle e \rangle + \langle b \rangle + \psi \right\}$ может быть получено путем суммирования уравнений (18), (19) и (24); в результате имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{DE_{\text{tot}}^{\text{sub}}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{E_{\text{tot}}^{\text{sub}}} = \\ = \bar{\rho}_M \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\boldsymbol{\tau}}_M : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{|\bar{\mathbf{j}}|^2} / \sigma_e - \mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'} + \overline{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'} \equiv \aleph. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_{E_{\text{tot}}^{\text{sub}}}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}} + \mathbf{q}^{\text{turb}} + \overline{\rho(b + p'/\rho) \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}''} + (\bar{\rho} + \rho_{\text{M}}^{\text{turb}}) \langle \mathbf{u} \rangle - (\boldsymbol{\tau}_{\text{M}}^{\text{av}} + \mathbf{R}_{\text{K}}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} \quad (26)$$

– поток полной осредненной энергии вещества турбулентной плазмы.

Энергетические уравнения для энергии магнитной составляющей сжимаемой турбулентной плазмы

Для моделирования турбулентной плазмы следует также принимать во внимание различные виды энергии, связанные влиянием среднего поля (скорости, плотности и температуры потока) на развитие турбулентности при взаимодействии магнитного поля и сжимаемой плазмы.

Балансовое уравнение для осредненной магнитной энергии плазмы

$\langle E_{\text{M}} \rangle := \overline{|\mathbf{B}|^2} / 2\mu_0 \bar{\rho} = E_{\text{M}}^{\text{av}} + \langle b_{\text{M}} \rangle$ имеет вид:

$$\bar{\rho} \frac{D \langle E_{\text{M}} \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle E_{\text{M}} \rangle}^{\text{turb}} = -\mathcal{N}. \quad (27)$$

Здесь

$$E_{\text{M}}^{\text{av}} := \overline{|\bar{\mathbf{B}}|^2} / 2\mu_0 \bar{\rho}, \quad \langle b_{\text{M}} \rangle := \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\mu_0 \bar{\rho} \quad (28)$$

– соответственно плотность магнитной энергии среднего поля и плотность турбулентной магнитной энергии;

$$\mathbf{J}_{\langle E_{\text{M}} \rangle}^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \overline{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{u}'' / 2\mu_0 + \overline{p_{\text{M}} \mathbf{u}''} - \overline{\boldsymbol{\tau}_{\text{M}} \cdot \mathbf{u}''} - v_{\text{M}} \nabla \bar{p}_{\text{M}} + v_{\text{M}} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{M}} \right\} \quad (29)$$

– турбулентный поток магнитной энергии плазмы.

Следует отметить, что поскольку правые части уравнений (25) и (27) отличаются лишь знаком, то плотность полной энергии осредненного континуума $E_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t) = E_{\text{tot}}^{\text{sub}} + \langle E_{\text{M}} \rangle$, равная сумме плотностей (на единицу массы), осредненной энергии вещества плазмы $E_{\text{tot}}^{\text{sub}}$ и осредненной магнитной энергии $\langle E_{\text{M}} \rangle$, сохраняется.

Закон сохранения полной энергии системы. Для целей моделирования проводящего аккреционного диска нам понадобится также закон сохранения осредненной полной энергии дисковой системы E_{tot} , равной сумме осредненной полной энергии электропроводящего вещества

$\langle E \rangle_{\text{tot}}^{\text{sub}} := \left\{ \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle / 2 + \langle e \rangle + \langle b \rangle + \psi \right\}$ и осредненной энергии электромагнитного по-

ля $\langle E \rangle_M(\mathbf{x}, t) := E_M^{\text{av}} + \langle b_M \rangle$. Суммируя уравнения (25) и (27), в результате получим

$$\bar{\rho} \frac{D E_{\text{tot}}}{D t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{E_{\text{tot}}}^{\text{turb}} = Q_{\text{rad}} \quad (30)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_{E_{\text{tot}}}^{\text{turb}} = \left\{ \mathbf{q}^{\text{turb}} + \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle - \left(\overline{|\mathbf{B}|^2} / 2\mu_0 \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} - \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\rho b \mathbf{u}''} \right\}, \quad (31)$$

– диффузионный поток полной энергии электропроводящей среды.

$$\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} := \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \overline{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{u} - \overline{(\mathbf{B}\mathbf{B})} \cdot \mathbf{u} - v_M \nabla \overline{|\mathbf{B}|^2} / 2 + v_M \nabla \cdot \overline{\mathbf{B}\mathbf{B}} \right\} \quad (32)$$

– осредненный вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии электромагнитного поля;

$$Q_{\text{rad}} := -\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_{\text{rad}}} = \mathcal{A} - \mathcal{R} = \int_0^\infty \int_\Omega \rho \kappa_{\nu a} I_\nu d\mathbf{n} d\nu - 4\pi \int_0^\infty \rho \kappa_{\nu a} B_\nu d\nu, \quad (33)$$

где ν , $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ и $B_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ – соответственно частота, спектральная интенсивность и функция внутренних источников излучения; \mathbf{n} – направление движения фотонов, $\kappa_{\nu a}$ – истинный коэффициент поглощения излучения веществом диска (спектральная непрозрачность). Величина \mathcal{A} в выражении (33) соответствует поглощаемой, а величина \mathcal{R} – спонтанно излучаемой радиационной энергии в единице объема в единицу времени. Возможны несколько режимов переноса излучения, которые применимы в различных областях диска в зависимости от темпа аккреции, массы протозвезды и т.п. В частности, если полная оптическая толщина диска $d\tau_\nu = \rho \kappa_{\nu a} ds$ вдоль направления распространения s превосходит единицу, фотоны переносятся к его поверхности путем диффузии. В общем случае спектральная интенсивность $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$, входящая в формулу (33), должна определяться в процессе решения уравнения переноса излучения.

В МГД-приближении вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}}$ может быть преобразован к виду

$$\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} = \left(\overline{|\mathbf{B}|^2} / 2\mu_0 + \bar{\rho} \langle b_M \rangle + \bar{\rho}_M \right) \langle \mathbf{u} \rangle - \overline{\bar{\tau}_M} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \left(\overline{|\mathbf{B}|^2} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{B}} \right) \cdot \mathbf{u}'' -$$

$$-v_M \mu_0^{-1} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\bar{\mathbf{B}}|^2 - \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}} \right) - v_M \nabla p_M^{\text{turb}} + v_M \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_M^{\text{turb}}, \quad (34)$$

причем для сильно развитой турбулентности последние два малых члена, включающие коэффициент v_M , для большинства областей аккреционного диска и короны могут быть опущены (Lazarian, Vishniac, 1999). Их следует принимать во внимание только в областях высоких градиентов магнитного поля, например, в области стохастического перезамыкания магнитных силовых линий.

Если использовать осредненный вектор Пойнтинга

$$\bar{\mathbf{q}}_{\text{Poynt}}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}} = \overline{\rho(E_M + p_M / \rho) \mathbf{u}} - \overline{\boldsymbol{\tau}_M \cdot \mathbf{u}} - v_M \nabla \bar{p}_M + v_M \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_M \right\}, \quad (35)$$

то уравнению (27) для осредненной магнитной энергии можно придать следующий балансый вид:

$$\partial(\bar{\rho} \langle E_M \rangle) / \partial t + \nabla \cdot \left\{ \bar{\mathbf{q}}_{\text{Poynt}} - \bar{p}_M \langle \mathbf{u} \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}}_M \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} = -\mathcal{N}, \quad (36)$$

эквивалентный, как легко проверить, осредненному закону сохранения энергии электромагнитного поля [11]

$$\partial(\bar{\rho} \langle E_M \rangle) / \partial t = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_{\text{Poynt}} - \overline{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}. \quad (37)$$

Уравнение для магнитной энергии среднего поля $|\bar{\mathbf{B}}|^2 / 2\mu_0 \bar{\rho}$. Умножая скалярно осредненное уравнение индукции (14) на $\mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}}$ и учитывая справедливое для осредненных полей соотношение

$$\mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} = -(\nu_M \sigma_e)^{-1} |\bar{\mathbf{j}}|^2 - \nabla \cdot \left\{ -\nabla p_M^{\text{av}} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_M^{\text{av}} \right\}, \quad (38)$$

в результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} E_M^{\text{av}} + \nabla \cdot \left\{ -\nu_M \nabla p_M^{\text{av}} + \nu_M \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_M^{\text{av}} \right\} = \\ -p_M^{\text{av}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}}_M^{\text{av}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \times \mathcal{G}_M - \sigma_e^{-1} |\bar{\mathbf{j}}|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнению (39) можно придать более наглядный вид, если воспользоваться соотношением $|\bar{\mathbf{j}}|^2 = \mu_0^{-2} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2$ и формулой $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})$; в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D}{Dt} E_M^{\text{av}} + \nabla \cdot \left\{ -v_M \nabla p_M^{\text{av}} + v_M \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_M^{\text{av}} - \mu_0^{-1} \boldsymbol{\mathcal{G}}_M \times \bar{\mathbf{B}} \right\} = \\ = -p_M^{\text{av}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\tau}_M^{\text{av}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\mathcal{G}}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - |\bar{\mathbf{j}}|^2 / \sigma_e. \end{aligned} \quad (40)$$

Из правой части этого уравнения видно, что магнитная энергия $E_M^{\text{av}}(\mathbf{x}, t)$ убывает за счет омической диссипации (последний член) и возрастает в результате перехода кинетической энергии среднего движения (второй член) и турбулентной кинетической энергии вещества (третий член) в магнитную энергию среднего поля.

Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle := \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\mu_0 \bar{\rho}$.

Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t)$ может быть получено из разности уравнений (26) и (33):

$$\bar{\rho} \frac{D \langle b_M \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b_M \rangle} = -p_M^{\text{turb}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'} - \overline{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'}, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{J}_{\langle b_M \rangle}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \overline{\rho (E_M + p_M / \rho) \mathbf{u}_i''} - \overline{\boldsymbol{\tau}_M : \mathbf{u}''} + \mu_0^{-1} \boldsymbol{\mathcal{G}}_M \times \bar{\mathbf{B}} \right\} \quad (42)$$

– диффузионный поток турбулентной магнитной энергии плазмы. Из этого уравнения видно, что физической причиной возникновения и поддержания турбулентной магнитной энергии (турбулентного магнитного поля) являются турбулентные электрические токи (слагаемое $\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'}$), возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости при наличии магнитного поля и пульсациях магнитного поля. Последний член уравнения (41) описывает убывание турбулентной магнитной энергии за счет перехода ее в турбулентную энергию среды [см. (24)].

Балансовое уравнение для полной турбулентной энергии плазмы. Складывая теперь (24) и (41), получим балансовое уравнение для полной энергии турбулентности $\langle b_\Sigma \rangle(\mathbf{x}, t) := \langle b \rangle + \langle b_M \rangle$ электропроводящей среды в виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{D \langle b_\Sigma \rangle}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma \rangle} = \\ = -p_M^{\text{turb}} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \boldsymbol{\mathcal{G}}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} + \overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_\Sigma \rangle, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle} := \left\{ \overline{(|\mathbf{u}''|^2/2 + |\mathbf{V}'|^2/2\mu_0 - p')} \mathbf{u}'' - \mu_0^{-1} \left[\overline{(\mathbf{V}' \cdot \mathbf{u}'')} \bar{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{u}'' \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{V}}} \right] \right\} \quad (44)$$

– диффузионный поток полной (кинетической плюс магнитной) турбулентной энергии электропроводящей среды.

Следует отметить, что в пульсационном магнитном поле может содержаться значительная (а по некоторым оценкам даже большая) часть общей энергии турбулентности системы. Из уравнения (43) видно, что джоулева диссипация [член $\bar{p}\langle \epsilon_M \rangle$] приводит к более быстрому затуханию возмущения плазмы, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация, т.е. непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения плазмы. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осредненным течением жидкости. При этом скорость кинематического обмена $\mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ между кинетической энергией среднего движения жидкости [см. (18)] и кинетической энергией вихревого движения системы зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей \mathbf{R} и пульсациями компонент магнитного поля \mathbf{R}_M , так и от сдвига средней скорости $\nabla \langle \mathbf{u} \rangle$, т.е. тензор дисторсии оказывает определенное воздействие на устойчивость течения.

3. ВЫВОД МЕТОДАМИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ ЗАМЫКАЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Основная система осредненных гидромагнитных уравнений, состоящая из уравнений (1)-(3) и (14), является незамкнутой, поскольку содержит наряду со средними значениями параметров состояния, таких как $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$, $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$, $\langle \theta \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t)$, и их производными также и неопределенные корреляционные вторые моменты (турбулентные потоки) $\mathbf{q}^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{R}_K(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{R}_M(\mathbf{x}, t)$, которые появляются в результате осреднения исходных нелинейных гидромагнитных уравнений. В связи с этим обстоятельством возникает главная проблема полуэмпирической теории турбулентности плазмы – проблема замыкания, связанная с необходимостью конструирования определяющих соотношений для перечисленных турбулентных потоков, которые для турбулентного течения электропроводящей среды в присутствии магнитного поля имеют свои специфические особенности. Воспользуемся для этой цели методами неравновесной термодинамики (де Гроот, Мазур, 1964).

Уравнение баланса осредненной энтропии

Термодинамический анализ турбулентной электропроводящей среды мы проведем в предположении, что одноточечные корреляции $\langle \mathcal{A} \mathcal{B} \rangle$ для всех пульсирующих термодинамических параметров $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$ (за исключением скорости течения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$) малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathcal{B} \rangle$ и могут быть опущены. В работе (Колесниченко, 2017) было показано, что в этом случае фундаментальное тождество Гиббса для регулярного движения плазмы справедливо и для осредненных удельной энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ и удельной внутренней энергии $\langle e \rangle(\mathbf{x}, t)$ проводящей жидкости

$$\langle \theta \rangle \frac{D \langle S \rangle}{Dt} = \frac{D \langle e \rangle}{Dt} + \bar{p} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right). \quad (45)$$

Исключая из (45) производные от параметров $\langle e \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$ с помощью уравнений (1) и (3), в результате получим уравнение субстанционального баланса осредненной энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ среды в следующем явном виде:

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle S \rangle + \nabla \cdot \left\{ \frac{\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\text{turb}}}{\langle \theta \rangle} \right\} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}, \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\langle \theta \rangle} \left\{ -\mathbf{J}_{\langle S \rangle} \cdot \nabla \langle \theta \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nu_M \mu_0^{-1} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2 \right\} \geq 0, \\ \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\langle \theta \rangle} \left\{ -\overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} + \mathbf{J}_v^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\rho} \langle \varepsilon_\Sigma \rangle \right\} \equiv \frac{\mathfrak{S}}{\langle \theta \rangle}. \end{array} \right. \quad (47)$$

Величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, определяющая скорость локального производства энтропии $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ проводящей жидкости (обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осредненного движения), всегда положительна. Однако величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ (относящаяся к стоку или притоку осредненной энтропии) может быть разной по знаку и, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами осредненного движения и так называемой подсистемой турбулентного хаоса (Колесниченко, 2017). Таким образом, одной только энтропии $\langle S \rangle$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулентного течения проводящей жидкости, поскольку

для нее не выполняется второй закон термодинамики. Кроме этого, энтропия $\langle S \rangle$ не связана явно с какими-либо параметрами пульсирующего турбулентного хаоса, характеризующими его внутреннюю структуру, в частности с такими ключевыми характеристиками турбулентности, как энергия турбулентности $\langle b \rangle(\mathbf{x}, t)$ и энергия турбулентности магнитного поля $\langle b_M \rangle(\mathbf{x}, t)$. Собственно, по этой причине представляется необходимым при конструировании адекватной термодинамической модели турбулентной электропроводящей среды введение в рассмотрение подсистемы турбулентного хаоса.

*Уравнения баланса энтропии и производство энтропии
для подсистемы турбулентного хаоса*

Термодинамику турбулентности плазмы удобно разрабатывать в рамках двухжидкостного континуума, состоящего из двух открытых и взаимосвязанных подсистем: подсистемы осредненного движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения гидромагнитных уравнений, и подсистемы турбулентного хаоса, связанной с пульсационным движением электропроводящей среды (Колесниченко, 2011). Будем далее считать, что элементарный объем $d\mathbf{x}$ вещества турбулентной плазмы может быть охарактеризован дополнительными экстенсивными переменными состояния, такими как плотность внутренней энергии $e^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ и энтропия $S^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ турбулизации вещества, а также интенсивными переменными состояния, в качестве которых выступают обобщенная температура турбулизации $\theta^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и давление турбулизации $p^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$. При этом важно иметь в виду, что такие термодинамические параметры состояния турбулентного хаоса, как энтропия S^{turb} и энергия e^{turb} турбулизации (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций), вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности теории и не имеют, в общем случае, точной физической интерпретации.

Перейдем теперь к некоторым следствиям из этого формального подхода. Следуя методу Гиббса, выберем в качестве локальной характеристической функции, содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в локально-равновесном (либо в стационарном состоянии), фундаментальное уравнение Гиббса для обобщенной энтропии: $S^{\text{turb}} = S^{\text{turb}}(e^{\text{turb}}, \langle v \rangle)$. Это функциональное соотношение будем считать заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построе-

нии классической термодинамики, следующие определения сопряженных переменных $\theta^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ и $p^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/\theta^{\text{turb}} \equiv \left\{ \partial S^{\text{turb}} / e^{\text{turb}} \right\}_{\langle v \rangle}, \quad p^{\text{turb}} / \theta^{\text{turb}} \equiv \left\{ \partial S^{\text{turb}} / \partial \langle v \rangle \right\}_{e^{\text{turb}}}.$$

Именно в этом случае интенсивным переменным $\theta^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ и $p^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ можно приписать смысл соответственно обобщенной температуры и давления (турбулизации). Тогда дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объема, принимает вид:

$$\theta^{\text{turb}} \frac{D S^{\text{turb}}}{D t} = \frac{D e^{\text{turb}}}{D t} - p^{\text{turb}} \frac{D}{D t} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right). \quad (48)$$

Далее будем отождествлять величину e^{turb} с полной энергией турбулентности электропроводной жидкости $\bar{\rho} e^{\text{turb}} := \bar{\rho} \langle b_{\Sigma} \rangle = \rho |\mathbf{u}''|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0$; тогда $p^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{R}_K : \mathbf{I}) = \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b_{\Sigma} \rangle$. Соответствующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации $S^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ проводящей среды получим из (48) рассмотренным выше способом, используя для этого уравнение (1) для удельного объема $1/\bar{\rho}$ и уравнение (43) для полной турбулентной энергии $\langle b_{\Sigma} \rangle$; в результате получим:

$$\bar{\rho} \frac{D S^{\text{turb}}}{D t} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle}}{\theta^{\text{turb}}} \right\} = \sigma_{S^{\text{turb}}} \equiv \sigma_{S^{\text{turb}}}^{(i)} + \sigma_{S^{\text{turb}}}^{(e)}, \quad (49)$$

$$0 \leq \sigma_{S^{\text{turb}}}^{(i)} = \frac{1}{\theta^{\text{turb}}} \left\{ -\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle} \cdot \frac{\nabla \theta^{\text{turb}}}{\theta^{\text{turb}}} + (\mathbf{R}_K - p^{\text{turb}} \mathbf{I}) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : (\nabla \bar{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\Omega}_0) \right\}, \quad (50)$$

$$\sigma_{S^{\text{turb}}}^{(e)} := \frac{1}{\theta^{\text{turb}}} \left\{ \overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} - \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} - \bar{\rho} \langle \varepsilon_{\Sigma} \rangle \right\} \equiv -\frac{\mathfrak{J}}{\theta^{\text{turb}}}. \quad (51)$$

Здесь величины $\sigma_{S^{\text{turb}}}^{(i)}$ и $\sigma_{S^{\text{turb}}}^{(e)}$ имеют соответственно смысл скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии S^{turb} . Отметим, что отношение отдельных слагаемых уравнения (49) к турбулентному потоку $\mathbf{J}_{(S^{\text{turb}})} := \mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle} / \theta^{\text{turb}}$ либо к производству $\sigma_{S^{\text{turb}}}$ энтропии S^{turb} , вообще говоря,

неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения величины $\mathbf{J}_{(S^{\text{turb}})}(\mathbf{x}, t)$.

Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Таким образом, введение двух энтропий $\langle S \rangle(\mathbf{x}, t)$ и $S^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ конкретизирует наше представление о турбулентном континууме как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы среднего движения проводящей жидкости и подсистемы турбулентного хаоса. Комбинируя (46) и (49), получим уравнение баланса для суммарной $S_{\Sigma}(\mathbf{x}, t) := \langle S \rangle + S^{\text{turb}}$ энтропии системы в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} S_{\Sigma}) + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho} S_{\Sigma} \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\mathbf{J}_{\langle e \rangle}}{\langle \theta \rangle} + \frac{\mathbf{J}_{b_{\Sigma}}}{\theta^{\text{turb}}} \right\} = \sigma_{\Sigma} \geq 0, \quad (52)$$

где $\mathbf{J}_{\langle e \rangle} := \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\text{turb}}$ – поток турбулентной внутренней энергии проводящего вещества; $\sigma_{\Sigma} := \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{S^{\text{turb}}}^{(i)} + \mathfrak{I} \frac{\theta^{\text{turb}} - \langle \theta \rangle}{\theta^{\text{turb}} \langle \theta \rangle}$ – производство суммарной энтропии, связанное с необратимыми процессами в турбулентной плазме; $\mathfrak{I} := -\overline{p' \nabla \cdot \mathbf{u}''} + \mathbf{J}_{\langle v \rangle}^{\text{turb}} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\rho} \langle \epsilon_{\Sigma} \rangle$ – поток энергии перехода между подсистемами осредненного движения и турбулентного хаоса.

Положительная величина $\sigma_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)$ имеет следующую билинейную структуру

$$0 \leq \sigma_{\Sigma} := \mathfrak{I} \frac{\theta^{\text{turb}} - \langle \theta \rangle}{\theta^{\text{turb}} \langle \theta \rangle} + \frac{1}{\langle \theta \rangle} \left\{ -\mathbf{J}_{\langle e \rangle} \cdot \nabla \ln \langle \theta \rangle + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + v_M \mu_0^{-1} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2 \right\} + \frac{1}{\theta^{\text{turb}}} \left\{ -\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle} \cdot \nabla \ln \theta^{\text{turb}} + (\mathbf{R}_K - p^{\text{turb}} \mathbf{I}) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : (\nabla \bar{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\Omega}_0) \right\}. \quad (53)$$

Из (53) видно, что локальное производство σ_{Σ} суммарной энтропии S_{Σ} определяется следующим набором термодинамических потоков

$$\mathbf{J}_{\langle e \rangle}, \mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma} \rangle}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, (\mathbf{R}_K - p^{\text{turb}} \mathbf{I}), \mathbf{R}_M, \mathfrak{I} \quad (54)$$

и сопряженных им термодинамических сил

$$\nabla\left(\frac{1}{\langle\theta\rangle}\right), \quad \nabla\left(\frac{1}{\theta^{\text{turb}}}\right), \quad \frac{1}{\langle\theta\rangle}\nabla\langle\mathbf{u}\rangle, \quad \frac{1}{\theta^{\text{turb}}}\nabla\langle\mathbf{u}\rangle, \quad \theta^{\text{turb}}(\nabla\bar{\mathbf{B}}+\mathbf{\Omega}_0), \quad \frac{\theta^{\text{turb}}-\langle\theta\rangle}{\theta^{\text{turb}}\langle\theta\rangle}. \quad (55)$$

Согласно основному постулату неравновесной термодинамики в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных конститутивных соотношений от сопряженных им макроскопических сил (де Гроот, Мазур, 1964) для осредненных молекулярных потоков, так и для турбулентных потоков, фигурирующих в осредненных уравнениях МГД. Следует иметь в виду, что спектр возможных перекрестных эффектов для турбулентного режима течения электропроводной жидкости значительно расширяется по сравнению с ее регулярным режимом течения. Однако в настоящее время, к сожалению, отсутствуют надежные экспериментальные данные, количественно описывающие многие эффекты такого рода. Кроме того, вклад от любых перекрестных эффектов в общую скорость процессов переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов. С учетом этих замечаний будем далее распространять условие положительности производства суммарной энтропии σ_{Σ} на каждое слагаемое в отдельности, т.е. полагать, что $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} \geq 0$, $\sigma_{S^{\text{turb}}}^{(i)} \geq 0$, $\sigma_{\langle S \rangle, S^{\text{turb}}} \geq 0$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение этого подраздела отметим, что первое слагаемое в правой части выражения (53), описывающее производство энтропии внутри полной системы за счет необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно

$$\sigma_{\langle S \rangle, S^{\text{turb}}} = \mathfrak{Z}(\theta^{\text{turb}} - \langle\theta\rangle) / \theta^{\text{turb}} \langle\theta\rangle \geq 0, \quad (56)$$

и потому «направление» термодинамического потока $\mathfrak{Z}(\mathbf{x}, t)$ определяется знаком функции состояния $X_{\mathfrak{Z}}(\mathbf{x}, t) \equiv (1/\langle\theta\rangle - 1/\theta^{\text{turb}})$. Эту функцию следует рассматривать как сопряженную термодинамическую силу, вызывающую именно этот поток энтропии. Известно, что подобного рода обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является неперемным условием возникновения когерентных структур, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них (Дьярмати, 1974).

Стационарно-неравновесный режим подсистемы турбулентного хаоса

Покажем, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного состояния как раз и определяется притоком отрицательной энтропии ($\sigma_{(S^{\text{turb}})}^e := -\mathfrak{I} / \theta^{\text{turb}} < 0$) от подсистемы осредненного движения. С этой целью проанализируем режим развитого турбулентного движения жидкости – режим стационарно-неравновесной турбулентности, когда в подсистеме турбулентного хаоса устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором $DS^{\text{turb}} / Dt \cong 0$, а поток $\mathbf{J}_{(S^{\text{turb}})}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma \rangle} / \theta^{\text{turb}}$ энтропии турбулизации $S_{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ почти постоянен, $\mathbf{J}_{(S^{\text{turb}})} \cong \text{const}$. Последнее условие означает, что производство энтропии турбулизации $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^i(\mathbf{x}, t)$ так компенсируется ее оттоком $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^e(\mathbf{x}, t)$, что возникновение энтропии турбулизации $S^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t)$ почти отсутствует; тогда $\sigma_{(S^{\text{turb}})} \equiv \sigma_{(S^{\text{turb}})}^e + \sigma_{(S^{\text{turb}})}^i \cong 0$. Так как величина $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^i \geq 0$, то справедливо приближенное равенство $0 > \sigma_{(S^{\text{turb}})}^e \cong -\sigma_{(S^{\text{turb}})}^i$. Таким образом, в этом случае турбулентный хаос должен экспортировать энтропию во «внешнюю среду» (т.е. отдавать количество $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^e$ осредненному движению), для того чтобы скомпенсировать ее производство (количество $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^i$) за счет внутренних необратимых процессов. Другими словами, для поддержания квазистационарного состояния в подсистеме турбулентной надструктуры необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от подсистемы осредненного движения, $\sigma_{(S^{\text{turb}})}^e := -\mathfrak{I} / \theta^{\text{turb}} = -\langle \theta \rangle \sigma_{\langle S \rangle}^e / \theta^{\text{turb}} < 0$. Именно эта поступающая в подсистему турбулентного хаоса негэнтропия расходуется на образование в ней разнообразных упорядоченных (диссипативных) структур (Пригожин, Стенгерс, 1994).

Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии величина оттока энтропии из подсистемы осредненного движения положительна $0 \leq \sigma_{\langle S \rangle}^e = \mathfrak{I} / \langle \theta \rangle$, то скорость обмена энтропией (теплом) между осредненным и турбулентным движениями также положительна, $\mathfrak{I} \geq 0$. Но тогда из неравенства $\sigma_{\langle S \rangle, S^{\text{turb}}} := \mathfrak{I}(\theta^{\text{turb}} - \langle \theta \rangle) / \theta^{\text{turb}} \langle \theta \rangle \geq 0$ следует, что температура турбулизации θ^{turb} выше осредненной температуры $\langle \theta \rangle$, что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации любой дисси-

пативной системы. В соответствии с этим принципом, формирование упорядоченных структур (разномасштабных вихревых образований) в подсистеме турбулентного хаоса при отводе тепла из нее, т.е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи (Пригожин, Стенгерс, 1994).

Кроме этого, в рассматриваемом случае верно приближенное равенство $0 \leq \sigma_{\langle S \rangle}^e = -\theta^{\text{turb}} \sigma_{\langle S^{\text{turb}} \rangle}^e / \langle \theta \rangle \cong \theta^{\text{turb}} \sigma_{\langle S^{\text{turb}} \rangle}^i / \langle \theta \rangle$, и уравнение (46) для энтропии $\langle S \rangle$ принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \langle S \rangle + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho} \langle S \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{\mathbf{J}_{\langle e \rangle}}{\langle \theta \rangle} \right\} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \frac{\theta^{\text{turb}}}{\langle \theta \rangle} \sigma_{\langle S^{\text{turb}} \rangle}^i, \quad (57)$$

где для локального рассеяния энергии $\langle \theta \rangle \sigma_{\langle S \rangle}$ справедливо выражение

$$0 \leq \langle \theta \rangle \sigma_{\langle S \rangle} := -\tilde{\mathbf{q}}^{\text{turb}} \cdot \nabla \ln \langle \theta \rangle + \nu_M \mu_0^{-1} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2 + [\mathbf{R}_K - p^{\text{turb}} \mathbf{I}] : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : (\nabla \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{\Omega}_0). \quad (58)$$

Выражение (58) содержит потоки и термодинамические силы первой и второй тензорных размерностей. Если разложить тензор второго ранга

$$\nabla \langle \mathbf{u} \rangle = \nabla^s \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla^a \langle \mathbf{u} \rangle$$

на симметричную $\nabla^s \langle \mathbf{u} \rangle$ (тензор скорости деформации) и антисимметричную часть $2\nabla^a \langle \mathbf{u} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle \equiv \langle \boldsymbol{\omega} \rangle$, то предпоследнее слагаемое в (58) может быть переписано в виде

$$[\mathbf{R}_K - p^{\text{turb}} \mathbf{I}] : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{R}_K^0 : \mathbf{D}^0, \quad (59)$$

где

$$\mathbf{R}_K^0 \equiv \mathbf{R} + \boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}}, \quad \mathbf{D}^0 := \mathbf{D} - \frac{1}{3} \{ \mathbf{I} : (\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle) \} \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}^0 := \mathbf{R} - \frac{1}{3} (\mathbf{R} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \mathbf{R} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b \rangle \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} := \boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b_M \rangle \mathbf{I} \quad (60)$$

– симметричные тензоры турбулентных напряжений Рейнольдса \mathbf{R} и магнитных натяжений $\boldsymbol{\tau}_M^{\text{turb}}$. Аналогично последнее слагаемое в (58) может быть записано в виде

$$\mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : \nabla \bar{\mathbf{B}} = \mu_0^{-1} \mathbf{R}_M : \{ \nabla^s \bar{\mathbf{B}} + \nabla^a \bar{\mathbf{B}} \} = -\mathcal{G}_M : \bar{\mathbf{j}}. \quad (61)$$

Исходя из выражения (58) при использовании принципа Кюри-Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна (де Гроот, Мазур, 1964)) можно получить (в пренебрежении перекрестными эффектами) следующие определяющие соотношения для турбулентных гидромагнитных потоков:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{\text{turb}}(\mathbf{x}, t) = -\lambda^{\text{turb}} \frac{\langle \theta \rangle}{c_p} \nabla \langle S \rangle \cong -\lambda^{\text{turb}} \left(\nabla \langle \theta \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right), \quad (62)$$

$$\mathbf{R}_K(\mathbf{x}, t) = -\frac{2}{3} \bar{\rho} K_R \mathbf{I} + \bar{\rho} 2v_K^{\text{turb}} \left\{ \nabla^s \langle \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right\} + 2v_{K,M}^{\text{turb}} \nabla^s \bar{\mathbf{B}}, \quad (63)$$

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{x}, t) = 2v_M^{\text{turb}} \nabla^a \bar{\mathbf{B}} - 2v_{M,K}^{\text{turb}} (\nabla^a \langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\Omega}_0) \equiv v_M^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} - v_{M,K}^{\text{turb}} (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle), \quad (64)$$

где $K_R(\mathbf{x}, t) := \langle b \rangle - \langle b_M \rangle$ – так называемая остаточная энергия турбулентности (Pouquet и др., 1976); λ^{turb} , v_K^{turb} , v_M^{turb} , $v_{M,K}^{\text{turb}}$ – соответственно модельные коэффициенты переноса (в общем случае тензоры 2-го или 4-го рангов) турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической и турбулентной вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля, зависящие в общем случае от статистических характеристик спиральной турбулентности $K_R(\mathbf{x}, t)$, $W(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ и $H(\mathbf{x}, t)$.

Определяющее соотношение для вектора радиации, записанное в форме лучистого потока тепла, принимает вид:

$$\mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = -\chi_{\text{rad}} \nabla \langle \theta \rangle = -\frac{16\sigma_B \langle \theta \rangle^3}{3\kappa \bar{\rho}} \nabla \langle \theta \rangle = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa \bar{\rho}} \nabla \langle \theta \rangle^4, \quad (65)$$

справедливый в случае равновесного излучения (например, при локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом внутри оптически толстых дисков). Здесь σ_B , $\chi_{\text{rad}} = 16\sigma_B \langle \theta \rangle^3 / 3\kappa \bar{\rho}$ – соответственно постоянная Стефана–Больцмана и коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности среды, сильно зависящий от температуры и плотности вещества; $\kappa(\rho, \theta)$ – полная непрозрачность среды, которая сложным образом зависит от параметров состояния ρ и θ , а также от степени ионизации и химического состава (см., например, Франк-Каменецкий, 1959; Фридман, Бисикало, 2010) и т.п. В общем случае величина κ определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности. Как известно, доминирующий вклад κ_{ff} в

непрозрачность κ в аккреционном диске вносит нерелятивистское тепловое тормозное излучение, или «свободно-свободные переходы». Связанная с этими процессами поглощения средняя по Росселанду непрозрачность κ определяется формулой Крамерса $\kappa_{ff}(\rho, \theta) = K\rho\theta^{-7/2} \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}$, где $K = 0.32 \times 10^{23}$ – константа. В оптически толстых дисках сравнимую (но все же меньшую) величину $\kappa_{es} = 2 \times 10^{-2}(1 + X) \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}$ вносят «связанно-связанные» переходы в линиях и «связанно-свободные» ионизационные переходы (здесь X – массовая доля водорода в дисковой среде).

Замыкающее соотношение для турбулентной электродвижущей силы. Из соотношений (17) и (64) вытекает следующее выражение для турбулентной электродвижущей силы

$$\mathcal{G}_M(\mathbf{x}, t) = -v_M^{\text{turb}} \mu_0^{-1} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} + v_{M,K}^{\text{turb}} \nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle). \quad (66)$$

Коэффициенты v_M^{turb} и $v_{M,K}^{\text{turb}}$, определяемые пульсационными полями \mathbf{u}'' и \mathbf{B}' , часто можно считать постоянными величинами. Поскольку вектор $\bar{\mathbf{B}}$ является псевдовектором (т.е. он изменяет знак при инверсии пространственных координат), а вектор \mathcal{G}_M представляет собой истинный (полярный) вектор и должен быть образован из различных истинных векторов, то магнитный коэффициент турбулентной вязкости (диффузии) v_M^{turb} должен являться скаляром, в то время как коэффициент $v_{M,K}^{\text{turb}}$ является псевдоскаляром. Часто слагаемое с коэффициентом $v_{M,K}^{\text{turb}}$, описывающее перекрестный эффект, может быть опущено (Coroniti, 1981). Тогда соотношение (66) принимает более простой вид: $\mathcal{G}_M = -v_M^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{B}}$. Подстановка этого выражения в уравнение (14) приводит к следующему уравнению индукции для средних полей:

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} (\bar{\mathbf{B}} / \bar{\rho}) = \bar{\mathbf{B}} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + (v_M + v_M^{\text{turb}}) \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}, \quad (67)$$

из которого следует, что суммарное влияние турбулентной ЭДС \mathcal{G}_M сводится в этом случае просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т.е. $v_M \rightarrow v_M + v_M^{\text{turb}}$. Если коэффициент v_M^{turb} является положительной величиной, то случайное перемешивание турбулентной плазмы (создаваемое пульсациями полей \mathbf{u}'' и \mathbf{B}') не ослабляет, а усиливает диффузионный процесс.

Сделаем теперь чрезвычайно важное замечание по поводу вывода формулы (66) для ЭДС, описываемой вектором \mathcal{G}_M . Этот вывод справедлив только для изотропной (в гидродинамическом смысле) однородной турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей \mathbf{u}'' обладает зеркальной симметрией во всей плазменной среде. В частности, этим свойством обладает турбулентность, возбуждаемая решеткой в однородном течении на некотором расстоянии от решетки. Поскольку неизвестны условия, при которых подобная турбулентность не зеркально симметрична, то этот случай является чисто академическим. Тем не менее его часто принимают во внимание, поскольку он представляет определенный интерес в динамо-теории.

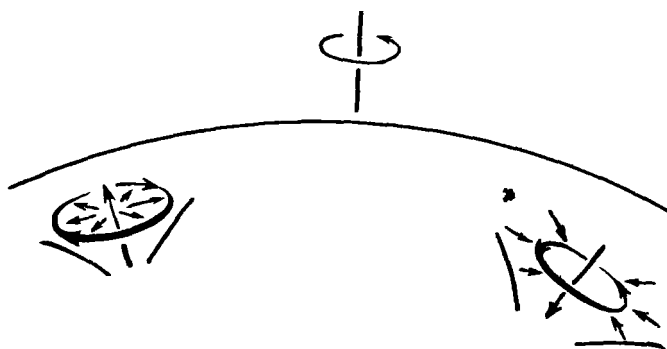


Рис.1. Схематическое изображение, поясняющее, что в северном полушарии Солнца левовинтовые спиральные движения более вероятны, чем правовинтовые.

Вместе с тем для реального вращающегося аккреционного диска (или Солнца) часто реализуется ситуация, при которой, например, в верхней части аккреционного диска (или в северном полушарии Солнца) левовинтовые спиральные движения более вероятны, чем правовинтовые, или наоборот (см. Рис.1). Физическая причина нарушения отражательной симметрии может быть обусловлена также векторным гравитационным полем \mathbf{g} , которое может быть полем градиента интенсивности турбулентности или полем градиента плотности. Вектор электродвижущей силы \mathcal{G}_M , записанный в этом случае в виде (см. Краузе, Рэдлер, 1984)

$$\mathcal{G}_M = -v_M^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{V}} - v_G^{\text{turb}} \mathbf{g} \times \bar{\mathbf{V}},$$

перпендикулярен к полям \mathbf{g} и $\bar{\mathbf{V}}$ и может быть интерпретирован как эффект накачки.

Для турбулентности, находящейся под воздействием силы Кориолиса, турбулентные вихри могут всплывать и опускаться в дисковой среде. При этом зеркальная симметрия пульсационного поля \mathbf{u}'' относительно центральной плоскости диска в общем случае отсутствует, поскольку турбулентность может

обладать так называемой гидродинамической спиральностью $H_K := \langle \mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}'' \rangle$, характеризующей избыток вихрей определенного знака (см. Моффат, 1980; Краузе, Рэдлер, 1984; Yoshizawa и др., 2002). Обобщение формулы (66) на случай отражательно-несимметричной турбулентности принимает следующий вид: (см. Steenbeck и др., 1966)

$$\mathcal{G}_M(\mathbf{x}, t) = \alpha \bar{\mathbf{B}} - v_M^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} + v_{M,K}^{\text{turb}} \boldsymbol{\Omega} \equiv \alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \bar{\mathbf{j}} + \gamma \boldsymbol{\Omega}, \quad (68)$$

где $\boldsymbol{\Omega} := (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle)$; $\gamma = 5/7 v_{K,M}^{\text{turb}}$, $\beta = 5/7 v_M^{\text{turb}}$. Коэффициент спиральности α является псевдоскаляром, и потому альфа-эффект антисимметричен относительно центральной плоскости диска. Свойства симметрии уравнений Максвелла допускают при этом два вида симметрии для собственных решений (мод) уравнения динамо среднего поля [см. (70)]: магнитные поля могут быть антисимметричными относительно экватора (дипольная симметрия) и симметричны относительно экватора (квадрупольная симметрия). В частности, механизм солнечного динамо возбуждает, как правило, преимущественно дипольную осциллирующую моду (так называемое правило Хейла). Простые рассуждения показывают, что для случая изотропного и зеркально симметричного поля скоростей \mathbf{u}'' коэффициент спиральности α равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из нее зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, коэффициент α не должен изменяться, если выполнить преобразование отражения, так как сам ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; отсюда следует, что $\alpha = 0$.

Подставляя выражение (68) в закон Ома (5) и в уравнение индукции (14) для средних полей, получим:

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e^{\text{turb}} (\bar{\mathbf{E}} + \langle \mathbf{u} \rangle \times \bar{\mathbf{B}} + \alpha \bar{\mathbf{B}} + \gamma \boldsymbol{\Omega}), \quad (69)$$

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) \cong (\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0 \alpha \bar{\mathbf{j}} + (v_M + v_M^{\text{turb}}) \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} - \gamma \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (70)$$

где

$$\sigma_e^{\text{turb}} = \frac{\sigma_e}{1 + \mu_0 v_M^{\text{turb}} \sigma_e} = \frac{\sigma_e v_M}{v_M + v_M^{\text{turb}}} \cong \frac{\sigma_e v_M}{v_M^{\text{turb}}} = \frac{1}{\mu_0 v_M^{\text{turb}}}, \quad (71)$$

– турбулентная проводимость σ_e^{turb} , которая в случае развитой турбулентности

меньше молекулярной проводимости σ_e .

В уравнении (70) член с коэффициентом ν_M^{turb} отражает увеличение магнитной диффузии (или турбулентного удельного сопротивления проводящей плазмы) за счет турбулентных флуктуаций. Физический смысл коэффициента α можно пояснить с помощью уравнения (69), которое отражает возникновение осредненного тока проводимости $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, направленного параллельно или антипараллельно вектору $\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t)$ в зависимости от знака α (Краузе, Рэдлер, 1984). Это резко противоречит ламинарному случаю, когда величина $\mathbf{u} \times \mathbf{V}$ порождает ток проводимости \mathbf{j} перпендикулярно вектору \mathbf{V} . Механизм, связанный с коэффициентом α , обычно называют альфа-эффектом или турбулентным динамо. Коэффициент α в статистической теории выражается в терминах двух типов спиральных характеристик турбулентности, а именно, в виде разности магнитной спиральности $H_M := \langle \mu_0^{-1} \mathbf{V}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ и гидродинамической спиральности $H_K := \langle \boldsymbol{\omega}'' \cdot \mathbf{u}'' \rangle$; $\alpha \sim H_M - H_K$ (см. Yoshizawa, 1990). Альфа-эффект, обусловленный гидродинамической и магнитной спиральностями, схематически иллюстрируется с помощью Рис. 2 и 3.

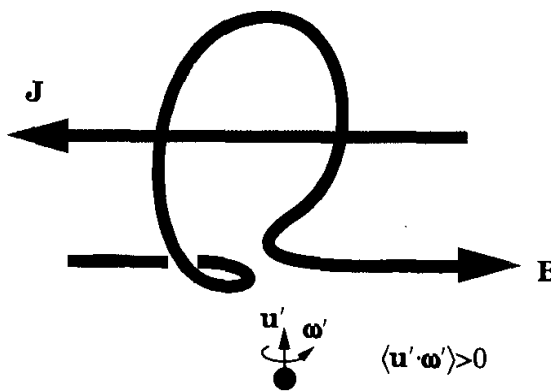
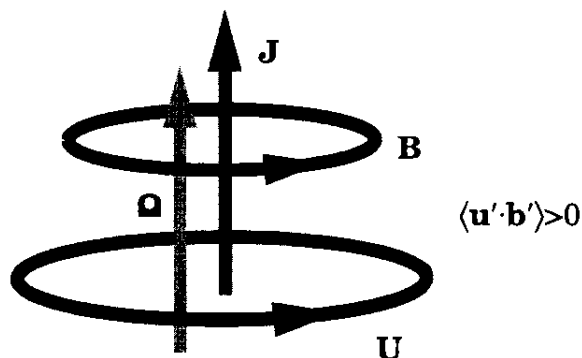


Рис. 2. Магнитная силовая трубка под действием спирального движения жидкости приобретает форму скрученной буквы Q. Петля сопровождается током, который в случае правовинтовых спиральных движений имеет компоненту, антипараллельную магнитному полю

Рис. 3 Схематическое объяснение механизма турбулентного динамо в проводящей плазме с перекрестной магнитной спиральностью



4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПИРАЛЬНОСТЕЙ K , W и H . КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Для того чтобы замкнуть уравнения (62)-(64) и (68), необходимо иметь выражения для коэффициентов переноса в терминах среднего поля и объемных величин, характеризующих спиральное гидромагнитное состояние турбулентного поля. К сожалению, термодинамический подход не позволяет получить явные выражения для коэффициентов ламинарного и турбулентного переноса. Для их определения, как правило, привлекается статистическая теория динамики турбулентности, которая позволяет строить модели на более прочной основе, чем это возможно при использовании эвристических методов (см., например, Краузе, Рэдлер, 1984, Yoshizawa и др., 2002). В частности, статистический подход приводит к следующим выражениям для коэффициентов α , β и γ (Yokoi, 2006):

$$\alpha = C_\alpha K H / \varepsilon, \quad \beta = C_\beta K^2 / \varepsilon, \quad \gamma = C_\gamma K W / \varepsilon. \quad (72)$$

Здесь

$$C_\alpha \cong 0.02, \quad C_\beta \cong 0.055, \quad C_\gamma \cong 0.039;$$

$$K(\mathbf{x}, t) := \left(\overline{|\mathbf{u}''|^2} + \mu_0^{-1} \overline{|\mathbf{B}'|^2} \right) / 2\bar{\rho} \quad (73)$$

– полная турбулентная энергия сжимаемой плазмы (скалярная величина);

$$W(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}'} / \mu_0 \bar{\rho} \quad (74)$$

– турбулентная поперечная (кросс) спиральность (псевдоскалярная величина);

$$H(\mathbf{x}, t) = \left[\mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}'} - \overline{\mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}''} \right] / \bar{\rho} \quad (75)$$

– турбулентная остаточная спиральность (псевдоскалярная величина);

$$\varepsilon_\Sigma(\mathbf{x}, t) := \overline{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}''} / \bar{\rho} + \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \bar{\rho} \sigma_e \cong \overline{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}''} / \bar{\rho} \quad (76)$$

– полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической энергии и магнитной энергии тепло.

Для того чтобы окончательно замкнуть вышеприведенные выражения для транспортных коэффициентов, необходимы эволюционные уравнения для объемных статистических величин $K(\mathbf{x}, t)$, $W(\mathbf{x}, t)$, $H(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$. Эти модельные уравнения второго порядка учитывают важные структурные изменения,

которые проявляются в анизотропии и в особенностях, связанных со сжимаемостью плазменной среды.

Эволюционное уравнение для $K(\mathbf{x}, t)$. Используя балансовое уравнение для полной турбулентной энергии плазмы (43) и предположение о стационарно-неравновесном состоянии гидромагнитной турбулентности [см. (21)], для дескриптора $K(\mathbf{x}, t) := \langle b \rangle + \langle b_M \rangle$ получим

$$\bar{\rho} \frac{DK}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_K \cong -\mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - \mu_0^{-1} \mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \varepsilon_\Sigma, \quad (77)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_K(\mathbf{x}, t) := & -\mu_0^{-1} W \bar{\mathbf{B}} + \overline{\left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0 - p' \right) \mathbf{u}''} - \mu_0^{-1} \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}') \mathbf{B}'} + \\ & + \nu \nabla \left(\overline{|\mathbf{u}''|^2 / 2\rho} \right) + \nu_M \nabla \left(\overline{|\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0\rho} \right) \end{aligned} \quad (78)$$

– диффузионный поток полной турбулентной энергии для сжимаемой проводящей среды; $\varepsilon_\Sigma \simeq \varepsilon$ – суммарная скорость диссипации турбулентной кинетической и магнитной энергий в тепло [см. (10)].

В выражении (78) для потока $\mathbf{J}_K(\mathbf{x}, t)$ полной турбулентной энергии плазмы отдельные составляющие моделируется, согласно работе (Yoshizawa и др., 2002), следующим образом:

$$\mu_0^{-1} \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}') \mathbf{u}''} \cong -\frac{\nu_M}{\sigma_W} \nabla W, \quad \overline{\left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0 - p' \right) \mathbf{u}''} \cong -\frac{\nu_M}{\sigma_K} \nabla K,$$

где σ_K, σ_W – положительные константы. В результате модельная форма уравнения (77) принимает следующий вид:

$$\bar{\rho} \frac{DK}{Dt} \cong \nabla \cdot \left(\mu_0^{-1} W \bar{\mathbf{B}} + \frac{\nu_M^{\text{turb}}}{\sigma_K} \nabla K \right) - \mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}} - \mu_0^{-1} \mathbf{R}_K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \varepsilon_\Sigma. \quad (79)$$

Уравнение для поперечной (кросс) спиральности $W(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}'}$ / $\bar{\rho}\mu_0$ получим, используя следующие уравнения для флуктуаций \mathbf{u}'' и \mathbf{B}' :

$$\frac{D\mathbf{u}''}{Dt} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' - \mu_0^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{B}' + \mathbf{R}_K \right\} \cong$$

$$\cong v\nabla^2 \mathbf{u}'' - \nabla(p'/\rho + |\mathbf{B}'|^2 / 2\rho\mu_0) - \mathbf{u}'' \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \mathbf{B}' + \mu_0^{-1} \mathbf{B}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{B}}, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D\mathbf{B}'}{Dt} + \nabla \cdot \{ \mathbf{u}'' \mathbf{B}' - \mathbf{B}' \mathbf{u}'' - \nabla \times (\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}') \} \cong \\ & \cong \sigma_e^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}' - \mathbf{u}'' \cdot \nabla \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \mathbf{u}'' + \mathbf{B}' \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle. \end{aligned} \quad (81)$$

В результате для поперечной спиральности $W(\mathbf{x}, t)$ можно получить следующее эволюционное уравнение

$$\bar{\rho} \frac{DW}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_W \cong \mathbf{R}_K : \nabla \bar{\mathbf{B}} - \mathcal{G}_M \cdot \boldsymbol{\Omega} - \varepsilon_W, \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_W = & -\mu_0^{-1} K \bar{\mathbf{B}} - \overline{\left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0 - p' \right) \mathbf{B}'} + \mu_0^{-1} \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}') \mathbf{u}''} + \\ & + v\mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \cdot \nabla \mathbf{u}''} + v_M \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla \mathbf{B}'} \end{aligned} \quad (83)$$

– турбулентный диффузионный МГД-поток поперечной спиральности $W(\mathbf{x}, t)$; $\varepsilon_W(\mathbf{x}, t) = (v + v_M) \overline{\nabla \mathbf{u}'' : \nabla \mathbf{B}'}$ – скорость разрушения величины W из-за молекулярно-вязких и резистивных (resistive) эффектов.

В выражении (83) турбулентный поток \mathbf{J}_W спиральности W моделируется согласно статистическому подходу Йошизава (Yoshizawa и др., 2002) как

$$\overline{\left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 + |\mathbf{B}'|^2 / 2\mu_0 - p' \right) \mathbf{B}'} = -\frac{v_M}{\sigma_K} \nabla K, \quad \mu_0^{-1} \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}') \mathbf{u}''} = -\frac{v_M}{\sigma_W} \nabla W,$$

где σ_K σ_W – положительные константы. Если в качестве характерного временного масштаба МГД-турбулентности принять величину W / σ_W , то диссипация

$\varepsilon_W(\mathbf{x}, t)$ моделируется как $\varepsilon_W = C_W \frac{\varepsilon}{K} W$, где C_W – положительная константа, близкая к единице. В результате модельная форма уравнения (81) принимает вид:

$$\bar{\rho} \frac{DW}{Dt} + \nabla \cdot \left\{ -\mu_0^{-1} K \bar{\mathbf{B}} + v_M \left(\frac{\nabla K}{\sigma_K} + \frac{\nabla W}{\sigma_W} \right) \right\} \cong \mathbf{R}_K : \nabla \bar{\mathbf{B}} - \mathcal{G}_M \cdot \boldsymbol{\Omega} - C_W \frac{\varepsilon}{K} W. \quad (84)$$

В заключение заметим, что в работе (Hamba, 1992) было показано, что при моделировании турбулентной электродвижущей силы член динамо, связанный с поперечной спиральностью, часто более важен, чем хорошо изученный альфа-член.

Уравнение для скорости диссипации $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$. Величина $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ подчиняется уравнению с довольно сложной математической структурой, поскольку она не связана с законом сохранения, в отличие от спиральных характеристик турбулентного течения $K(\mathbf{x}, t)$ и $W(\mathbf{x}, t)$. В связи с этим в качестве модельного уравнения для $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ в научной литературе рекомендовано использовать феноменологическое уравнение (см., например, Yoshizawa, Yokoi, 1999)

$$\bar{\rho} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_M^{\text{turb}}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} (\mathbf{R}_K : \langle \mathbf{u} \rangle + \mathcal{G}_M \cdot \bar{\mathbf{j}}) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad (85)$$

поскольку его тестирование для различных гео- и астрофизических турбулентных МГД-потоков показало, что оно является вполне приемлемой моделью. Здесь $C_{\varepsilon 1} = 1.4$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $\sigma_\varepsilon = 1.6$. Следует, однако, заметить, что моделирование уравнения для диссипации $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ до сих пор остается важной проблемой при моделировании гидромагнитной турбулентности.

Важно также отметить, что модельные уравнения для несжимаемой плазмы, аналогичные уравнениям (79), (84) и (85) для $K(\mathbf{x}, t)$, $W(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, объединенные с соответствующими уравнениями для средних полей скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$ и магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$, успешно применялись для анализа различных тороидальных магнитных полей в аккреционных дисках при учете эффекта поперечной спиральности (между состояниями с полоидальным вращением плазмы и без него), который генерирует перпендикулярное диску тороидальное магнитное поле, позволяющее, в частности, газу выходить из диска в виде биполярных струй. При этом скорость струй в протопланетных системах была оценена с помощью численного моделирования (см. Hamba, 1990; Yokoi, 1996; Nishino, Yokoi, 1998).

Эволюционное уравнение для остаточной спиральности $H(\mathbf{x}, t)$. В работе (Rouquet и др., 1976) было отмечено, что не одна турбулентная кинетическая спиральность $H_K(\mathbf{x}, t) := \overline{\mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}''} / \bar{\rho}$, но разница между турбулентной магнитной спиральностью $H_M(\mathbf{x}, t) := \overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}'} / \bar{\rho} \mu_0$ и турбулентной кинетической спиральностью определяют действие α -динамо. В отличие от полной турбу-

лентной гидромагнитной энергии $K(\mathbf{x}, t)$ и поперечной спиральности $W(\mathbf{x}, t)$, остаточная спиральность не является консервативной величиной в системе МГД-уравнений. По этой причине уравнение, которому удовлетворяет остаточная спиральность $H := H_M - H_K$, гораздо труднее поддается выводу, чем аналогичные уравнения для $K(\mathbf{x}, t)$ и $W(\mathbf{x}, t)$.

Вывод эволюционного уравнения для $H(\mathbf{x}, t)$ можно получить, используя следующие дифференциальные уравнения для флуктуаций тока проводимости $\mathbf{j}'(\mathbf{x}, t)$ и завихренности $\boldsymbol{\omega}''(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{D\mathbf{j}'}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u}''\mathbf{j}' - \mu_0^{-1}\mathbf{B}'\boldsymbol{\omega}'') \cong \frac{1}{\sigma_e} \nabla^2 \mathbf{j}' - \mathbf{u}'' \cdot \nabla \bar{\mathbf{j}} + \mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}'' + \mu_0^{-1} \mathbf{B}' \cdot \nabla (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle) \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\omega}''}{Dt} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{u}''\boldsymbol{\omega}'' - \boldsymbol{\omega}''\mathbf{u}'' - \mu_0^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{j}' - \mathbf{j}'\mathbf{B}') - \nabla \times \mathbf{R}_K \right\} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}'' + \mathbf{u}'' \cdot \nabla (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle) \cong \\ \cong (\boldsymbol{\Omega}_0 + 2\langle \boldsymbol{\omega} \rangle) \cdot \nabla \mathbf{u}'' + \boldsymbol{\omega}'' \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \mu_0^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \mathbf{j}' + \mu_0^{-1} \mathbf{B}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{j}} \cdot \nabla \mathbf{B}' - \mathbf{j}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (87)$$

С учетом этих уравнений можно получить уравнения для турбулентных магнитной и кинетической спиральностей; тогда их разность приводит к следующему эволюционному уравнению для турбулентной остаточной спиральности:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{DH}{Dt} = & \left(\langle \mathbf{u}''\mathbf{u}'' \rangle + \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'} \right) : \nabla \boldsymbol{\Omega} + \langle \mathbf{u}'' \times \boldsymbol{\omega}'' \rangle \cdot \boldsymbol{\Omega} - \nabla \cdot (\langle b \rangle \boldsymbol{\Omega}) + \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}'\mathbf{j}'} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \\ & + \mu_0^{-1} \left\{ \overline{\nabla \mathbf{u}'' : \mathbf{j}'\mathbf{B}} - \overline{\nabla \mathbf{j}' : \mathbf{u}''\mathbf{B}} + \overline{\nabla \boldsymbol{\omega}'' : \mathbf{B}'\mathbf{B}} - \overline{\nabla \mathbf{B}' : \boldsymbol{\omega}''\mathbf{B}} \right\} - \mu_0^{-1} \overline{\boldsymbol{\omega}''\mathbf{B}'} : \nabla \bar{\mathbf{B}} + \\ & + \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{u}''\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{u}''} : \nabla \bar{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{j}'} \cdot \bar{\mathbf{j}} + 2\nu \langle \nabla \mathbf{u}'' : \nabla \boldsymbol{\omega}'' \rangle - 2\nu_M \overline{\nabla \mathbf{B}' : \nabla \mathbf{j}'} + \\ & + \nabla \cdot \left[\langle (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}'') \mathbf{u}'' \rangle - \langle (b - p') \boldsymbol{\omega}'' \rangle \right] + R_H. \end{aligned} \quad (88)$$

Здесь величина R_H обозначает оставшуюся часть, которая не зависит явно от средних полей и состоит из корреляционных функций третьего порядка. Оказалось, что для этого уравнения чрезвычайно сложно найти адекватную модельную форму, что является большим препятствием для построения (на надежной математической основе) самосогласованной модели турбулентного динамо, применимой к различным типам астро- и геофизических явлений. В современной литературе по теории средних полей с динамо-эффектом указанной труд-

ности уделяется, к сожалению, мало внимания.

В работе (Yodshizava, 1996) было предложено следующее модельное представление отдельных членов эволюционного уравнения (88) для $H(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\langle \mathbf{u}'' \mathbf{u}'' \rangle + \mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'}\right) : \nabla \mathbf{\Omega} \simeq 2C_\alpha K_R \overset{0}{\nabla^s} \langle \mathbf{u} \rangle : \nabla \mathbf{\Omega}, \quad (89)$$

$$\langle \mathbf{u}'' \times \boldsymbol{\omega}'' \rangle \cdot \mathbf{\Omega} \cong C_\alpha \left[-(K + K_R) \nabla \times \mathbf{\Omega} + W \nabla \times \bar{\mathbf{j}} \right] \cdot \mathbf{\Omega} \simeq \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{R}_k) \cdot \mathbf{\Omega} \quad (90)$$

$$-\nabla \cdot (\langle b \rangle \mathbf{\Omega}) \cong -\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} (K + K_R) \mathbf{\Omega} \right], \quad (91)$$

$$\mu_0^{-1} \left\{ \overline{\nabla \mathbf{u}'' : \mathbf{j}' \mathbf{B}} - \overline{\nabla \mathbf{j}' : \mathbf{u}'' \mathbf{B}} + \overline{\nabla \boldsymbol{\omega}'' : \mathbf{B}' \mathbf{B}} - \overline{\nabla \mathbf{B}' : \boldsymbol{\omega}'' \mathbf{B}} \right\} \cong -C_B \frac{\varepsilon^2}{K^3} \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathcal{G}_M, \quad (92)$$

$$\mu_0^{-1} \overline{\mathbf{B}' \mathbf{j}'} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \simeq C_\alpha \left[-W \nabla \bar{\mathbf{j}} + (K - K_R) \nabla \mathbf{\Omega} + H_M \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \right] : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle, \quad (93)$$

$$-\mu_0^{-1} \overline{\boldsymbol{\omega}'' \mathbf{B}'} : \nabla \bar{\mathbf{B}} \cong$$

$$\cong -C_\alpha \left[\frac{1}{2} H_M \nabla \times \bar{\mathbf{j}} - \frac{1}{2} (H_K + H_M) \mu_0^{-1} \nabla^s \bar{\mathbf{B}} - W \nabla \mathbf{\Omega} + (K - K_R) \nabla \bar{\mathbf{j}} \right] : \nabla \bar{\mathbf{B}}, \quad (94)$$

$$-\overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}} \cong C_\alpha \left[-(K + K_R) \nabla \times \bar{\mathbf{j}} + W \nabla \times \mathbf{\Omega} - H_M \bar{\mathbf{j}} \right] \cdot \bar{\mathbf{j}}, \quad (95)$$

$$\mu_0^{-1} \overline{\mathbf{u}'' \mathbf{B}' + \mathbf{B}' \mathbf{u}''} : \nabla \bar{\mathbf{j}} \cong -2C_\alpha K_R \nabla^s \bar{\mathbf{B}} : \nabla \bar{\mathbf{j}}, \quad (96)$$

$$2\nu \langle \nabla \mathbf{u}'' : \nabla \boldsymbol{\omega}'' \rangle - 2\nu_M \overline{\nabla \mathbf{B}' : \nabla \mathbf{j}'} \cong -C_H \frac{\varepsilon}{K} H, \quad (97)$$

$$\nabla \cdot \left[\langle (\mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}'') \mathbf{u}'' \rangle - \left\langle \left(|\mathbf{u}''|^2 / 2 - p' \right) \boldsymbol{\omega}'' \right\rangle \right] \cong \nabla \cdot \left(\frac{v_K^{\text{turb}}}{\sigma_H} \nabla H \right), \quad (98)$$

где C_B и C_H – константы модели, значения которых пока точно не оценены. Первый, второй и третий члены (89), (90) в уравнении (88) представляют собой производство $H(\mathbf{x}, t)$ под действием средней завихренности, а четвертый член (92) – производство под действием магнитного поля. Второй член (90), который пропорционален $\mathbf{\Omega}$, имеет первостепенное значение в процессе генерации геликоида во вращающихся системах. Все члены уравнения (88), кроме четвертого, девятого и десятого, напрямую зависят от остаточной энергии $K_R(\mathbf{x}, t)$.

В заключение этого подраздела отметим, что форма уравнения для остаточной спиральности $H(\mathbf{x}, t)$, основанная на модельных формах (89)-(98), на

текущем этапе развития теории турбулентного динамо не является математически жесткой. Именно по этой причине в современной литературе по данной проблеме основное внимание сосредоточено часто на механизмах, которые не зависят напрямую ни от деталей модельного уравнения для $H(\mathbf{x}, t)$, ни от конкретных граничных условий для уравнений среднего переноса.

Эволюционное уравнение для остаточной энергии турбулентности $K_R(\mathbf{x}, t)$. Остаточная энергия $K_R := \langle b \rangle - \langle b_M \rangle$ также является одной из фундаментальных величин в системе осредненных уравнений МГД. Она входит в определяющее соотношение (63) для кинетического тензора Рейнольдса \mathbf{R}_K для плазмы, а также является одной из основных корреляций, которую необходимо учитывать в модели гидромагнитной турбулентности, поскольку плазменные явления обнаруживают, как правило, значительное различие между кинетической и магнитной энергиями.

Мы не будем приводить здесь точное эволюционное уравнение для корреляции $K_R(\mathbf{x}, t)$, которое легко может быть получено при использовании балансового уравнения (23) для турбулентной энергии вещества плазмы $\langle b \rangle := \overline{|\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho}$ и уравнения (41) для турбулентной магнитной энергии $\overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\mu_0\bar{\rho}$, а сразу запишем модельное уравнение для остаточной энергии, выведенное в работе (Yokoi, 2005) (правда, в несжимаемом случае) на основе статистического анализа неоднородной МГД-турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{D K_R}{D t} - \nabla \cdot \left(\frac{v_K^{\text{turb}}}{\sigma_R} \nabla K_R \right) = \\ = 4v_K^{\text{turb}} \left[\left(\nabla^s \langle \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right)^2 - \left(\nabla^s \bar{\mathbf{B}} \right)^2 \right] \frac{K_R^2}{\varepsilon} - \left(\frac{\varepsilon}{K} + C_R \frac{\varepsilon}{K^2} |\bar{\mathbf{B}}|^2 \right) K_R, \quad (99) \end{aligned}$$

где $C_R \simeq 0.01$, $\sigma_R \simeq 1$. Эволюция величины $K_R(\mathbf{x}, t)$ должна определяться одновременно с динамикой турбулентной гидромагнитной энергии $K(\mathbf{x}, t)$, со скоростью ее диссипации $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ и с поперечной спиральностью $W(\mathbf{x}, t)$.

Из уравнения (99) могут быть сделаны следующие выводы. Во-первых, в присутствии среднего магнитного поля происходит разрушение корреляции $K_R(\mathbf{x}, t)$ благодаря эффекту Альфвена, обусловленному полем $\bar{\mathbf{B}}$ (Parker, 1955); этот эффект выражается частью второго члена справа уравнения (99), умно-

женной на C_R . Во-вторых, диссипация величины $K_R(\mathbf{x}, t)$ вызвана вихревыми искажениями, представленными частью второго члена, умноженной на ε/K . В-третьих, отклонения от экvipартиции (равного распределения энергии по степеням свободы) могут быть вызваны неоднородностью осредненной скорости и магнитного поля через первый член справа, умноженный на v_K^{turb} .

Изучение структуры этого уравнения показывает, что эволюция масштабированной остаточной энергии связана с перекрестной спиральностью (корреляцией скорости и магнитного поля) турбулентности в сочетании со сдвигами среднего поля. Приложение к солнечному ветру показало, что масштабированное значение $|K_R(\mathbf{x}, t)|$ может быть увеличено вблизи внешней стороны точки Альфвена во внутренней гелиосфере, тогда как во внешней гелиосфере предполагается почти стационарное поведение $|K_R(\mathbf{x}, t)|$. Эти результаты согласуются с наблюдениями турбулентности солнечного ветра (Yokoi, Hamba 2007).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Феноменологическая теория турбулентной плазмы применяется в работе для разработки системы модельных уравнений сжимаемой гидромагнитной турбулентности. Практический анализ турбулентных потоков почти всегда начинается с процедуры осреднения, при котором поля структурных параметров разлагаются на сумму средних и флуктуирующих частей. Центральная проблема турбулентности состоит в этом случае в том, чтобы найти правдоподобный, если не строгий, способ моделирования турбулентного тензора Рейнольдса и других важных корреляционных функций с тем, чтобы осредненные гидромагнитные уравнения стали (по крайней мере в принципе) разрешимыми. Под термином «моделирование гидромагнитной турбулентности» в работе понимается построение схемы замыкания, которая обеспечивает детерминированный набор уравнений эволюции для средних величин, при котором все случайные флуктуации усреднены и число «неизвестных» равно порядку системы эволюционных уравнений, построенных для их определения. Эти уравнения должны, конечно, быть дополнены граничными условиями, подходящими для конкретной геометрии рассматриваемого явления.

Цель данной работы состоит в применении комбинированного метода моделирования сжимаемой гиротропной гидромагнитной турбулентности, основанного на термодинамическом подходе вывода замкнутой системы осредненных МГД-уравнений с привлечением эволюционных уравнений для коэффициентов переноса, полученных японскими астрофизиками Акирой Йошизавой и Нобумицу Йокои на основе статистического подхода. В своих работах по

теории моделирования несжимаемой спиральной турбулентности (в частности, по моделированию эффекта динамо – спонтанной генерации крупномасштабного магнитного поля) эти авторы использовали ряд статистических дескрипторов МГД турбулентности (к которым относятся: турбулентная МГД энергия и скорость ее диссипации, турбулентная поперечная (кросс) спиральность, турбулентная МГД остаточная энергия и турбулентная остаточная спиральность) и получили статистическими методами модельные эволюционные уравнения для этих величин, связанных с динамикой средних гидромагнитных полей. Подобный подход с успехом был использован в литературе при моделировании двух важных плазменных явлений: эволюции гидромагнитной турбулентности в солнечном ветре и генерации среднего потока в присутствии среднего магнитного поля и поперечной спиральности в плазме токамака.

В представленной работе этот подход обобщается на случай сжимаемой проводящей жидкости, поскольку влияние сжимаемости на турбулентную вязкость и диффузионный перенос необходимо в общем случае учитывать при изучении высокоскоростной астрофизической турбулентности. Таким образом, конечной целью предпринятого исследования является разработка моделей сжимаемой гидромагнитной турбулентности, способных эффективно работать в гиперзвуковом режиме.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

de Groot С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 632 с.

Колесниченко А.В. К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске // Астрон. вестн. 2011. Т. 45. № 3. С. 253-272

Колесниченко А.В. Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014а. №61.48 с

Колесниченко А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014б. № 70. 36 с.

Колесниченко А.В. Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического конструирования. М.: ЛЕНАНД. 2017. 400 с.

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. Т. 2. СПб: Гидрометеоздат, 1996. 742 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа "Прогресс", 1994. 240 с.

Франк-Каменецкий Д.А. Физические процессы внутри звезд. М.: Физматлит. 1959.

Фридман А.М., Бусикало Д.В. Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН. 2010. Т. 178. С. 577-604.

Adumitroaie V., Ristorcelli J. R., Taulbee D.B. Progress in Favre-Reynolds stress closures for compressible flows// Phys. Fluids. 1999. V.10 . P.2696-2719.

Coroniti F.V. On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks // Astrophys. J. 1981. V. 244. P. 587-599.

Favre A. Statistical Equations of Turbulent Gases// In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia.1969. P. 231-267.

Hamba F. Turbulent dynamo effect and cross helicity in magnetohydrodynamic flows // Phys. Fluids. 1992. V.4. P. 441-450.

Hawley J.F., Balbus S.A. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. ii. nonlinear evolution // Astrophys. J. 1991. V.376. P.223-233.

Kolesnichenko A.V., Marov Ya. The effect of spirality on the evolution of turbulence in the solar protoplanetary cloud // Sol. Syst. Res. 2007. V. 41. P. 1-18.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Thermodynamic model of MHD turbulence and some of its applications to accretion disks // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42, № 3, P.226-255.

Kolesnichenko A.V. To the Theory of Helical Turbulence of a Nonmagnetic Astrophysical Disk. Formation of Large-Scale Vortex Structures// Solar System Research, 2024. © Pleiades Publishing, Inc., 2024. V. 58 , № 4. P.1-23.

Lazarian, A., Vishniac, E.T., Reconnection in a Weakly Stochastic Field// Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 700-718.

Liou W.W., Shih T-H., Duncun B.S. A multiple-scale model for compressible turbulent flows //Phys. Fluids. 1995. V.7. № 3. P.658-666.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and self-organization. Modeling astrophysical objects. Springer. 2013. 657 p.

Moffatt H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 35. P. 117–129.

Moffatt G., Excitation of Magnetic Field in Conducting Medium /Mir, Moscow, 1980 [in Russian].

Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. J.* 1955. V.122. P. 293-314.

Pouquet A., Frisch U., Leorat J. Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P. 321-334.

Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung // *Z. Naturforsch.* 1966. 21a. 369-376.

Yokoi N. Modeling of the turbulent magnetohydrodynamic residual-energy equation using a statistical theory // *Phys. Plasmas.* 2006. V. 13. P. id. 062306 (1-17).

Yokoi N., Hamba F. An application of the turbulent magnetohydrodynamic residual-energy equation model to the solar wind // *Physics of Plasmas.* 2007. V.14. № 11. P. 12904-1-16.

Yokoi N., Rubinstein R., Yoshizawa A., Hamba, F. A turbulence model for magnetohydrodynamic plasmas // *J. Turbulence.* 2008. V. 9. № 37. P. 1-25.

Yoshizawa A. Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields // *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1990. V. 2, № 7, P.1589-1600.

Yoshizawa A., Yokoi N. Turbulent magnetohydrodynamic dynamo for accretion disks using the cross-helicity effect // *Astrophys. J.* 1993. V. 407. P. 540-548.

Yoshizawa A., Liou W. W., Yokoi N., Shih T-H. Modeling of compressible effects on the Reynolds stress using a Markovianized two-scale method // *Phys. Fluids* . 1997. V.9. № 10. P. 3024-3036.

Yoshizawa A. Statistical analysis of mean-flow effects on the pressure-velocity correlation // *Physics of Fluids.* 2002. V.14, № 5. P.1736-1744.

Yoshizawa A., Itoh S.-I., Itoh K., Yokoi N. Dynamos and MHD theory of turbulence suppression // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2004. V. 46, R25-R94.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Осредненные МГД-уравнения для турбулентного движения сжимаемой плазмы.....	8
2. Энергетические уравнения масштаба среднего движения для вещества плазмы и магнитного поля.....	13
3. Вывод методами неравновесной термодинамики замыкающих соотношений для турбулентных потоков в электропроводящей среде.....	20
4. Эволюционные модельные уравнения для спиральностей K , W и H . Коэффициенты переноса.....	33
Заключение.....	40
Список литературы.....	41