



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2024 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Математическая модель
расчёта выходных
параметров стационарного
плазменного двигателя

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Математическая модель расчёта выходных параметров стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 45. 40 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-45>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-45>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

**Математическая модель расчёта выходных
параметров стационарного плазменного
двигателя**

Москва — 2024

Гавриков М.Б., Тайурский А.А.

Математическая модель расчёта выходных параметров стационарного плазменного двигателя

Рассмотрена математическая модель, позволяющая вычислить выходные параметры плазмы в стационарном плазменном двигателе (СПД), минуя расчёт основных плазменных процессов в СПД. Оказывается, при определённых условиях (установление выходных параметров по оси СПД и несжимаемость плазмы) это возможно. Определяющими факторами, лежащими в основе предложенного подхода, являются двухжидкостная природа плазмы, в том числе полный учёт инерции электронов, и диссипативные процессы: магнитная и гидродинамические вязкости электронов и ионов, теплопроводность плазмы и релаксация температур. Математически расчёт выходных эюр сводится к решению краевой задачи для некоторой линейной системы ОДУ 8-го порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В работе предложены два метода последовательных приближений для численного решения полученной краевой задачи. Доказаны сходимость последовательных приближений, теорема единственности, и построена матричная функция Грина. Приведены результаты расчётов, демонстрирующие работоспособность математической модели.

Ключевые слова: СПД, метод последовательных приближений, матричная функция Грина, несжимаемая плазма

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Mathematical model for calculating the output parameters of a stationary plasma thruster

The mathematical model allowing to calculate the output parameters of plasma in SPT is considered, bypassing the calculation of the main plasma processes in SPT. It turns out that under certain conditions – setting the output parameters along the SPT axis and plasma incompressibility, this is possible. The determining factors underlying the proposed approach are the two-fluid nature of plasma, including full consideration of the electron inertia and dissipative processes – magnetic and hydrodynamic viscosities of electrons and ions, thermal conductivity of plasma and temperature relaxation. Mathematically, the calculation of the output diagrams is reduced to solving a boundary value problem for a certain linear system of ODE of the 8th order with variable coefficients on the segment. The paper proposes two methods of successive approximations for the numerical solution of the obtained boundary value problem. The convergence of successive approximations, the uniqueness theorem are proven and the matrix Green function is constructed. The results of calculations are presented, demonstrating the operability of the mathematical model.

Key words: SPT, method of successive approximations, matrix Green's function, incompressible plasma

Введение

В работе предполагается простая математическая модель стационарного плазменного двигателя (СПД), позволяющая вычислить распределения по радиусу выходных параметров плазменной среды (осевых и азимутальных скоростей и токов, температур и давлений электронов и ионов) и силу тяги СПД в зависимости от характеристик установки. К последним относятся продольное электрическое поле, определяемое разностью потенциалов между анодом и катодом, и радиальное магнитное поле, а также температуры боковых керамических стенок канала СПД. Исследуются также зависимость силы тяги СПД, радиальных эпюр скоростей и токов, температур и давлений от пристеночной проводимости [1] и неспитцеровской проводимости плазмы в СПД, учитывающей вклад в проводимость радиального магнитное поле [2], а также влияние на выходные параметры СПД возможного равномерного вращения боковых керамических стенок СПД с произвольными угловыми скоростями.

При определённых допущениях ответы на перечисленные вопросы можно получить, абстрагируясь от исследования основных процессов в СПД (см. п. 1), рассматривая последний как «чёрный ящик». К указанным допущениям относятся стационарность выходного потока плазмы ($\partial/\partial t=0$), установление параметров потока вдоль оси z установки ($\partial/\partial z=0$), наличие осевой симметрии потока ($\partial/\partial \varphi=0$) и, наконец, несжимаемость плазмы в зоне выхода из СПД. При этом по умолчанию предполагается гидродинамичность электронов и ионов, по крайней мере, на выходе из установки. Условие несжимаемости непринципиально. Оно лишь позволяет максимально упростить математическую постановку задачи, сведя нахождение эпюр к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами. Заметим: несжимаемость по электронам обычно выполнена, поскольку для электронного звука c_{se} имеем выражение $c_{se}^2 = kT_e / m_e$, что с учётом типичной температуры в СПД $T_e = 20\text{эВ}$ и выражение констант $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}\text{г}$, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}\text{эрг/К}$ даёт значение $c_{se}^2 = 3.69 \cdot 10^{16}\text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$. Учитывая типичную скорость частиц плазмы на выходе установки $v = 15\text{км} \cdot \text{с}^{-1} = 1.5 \cdot 10^6\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$, получим $v^2 / c_{se}^2 = 1.64 \cdot 10^{-4} \ll 1$, что оправдывает допущение о несжимаемости электронов. В итоге речь идёт о расчёте выходных эпюр по радиусу азимутальных и продольных скоростей (\mathbf{U}), токов (\mathbf{j}), магнитного поля (\mathbf{H}), температур (T_{\pm}) и давлений (p_{\pm}) электронов и ионов и силы тяги двигателя (F_T). В п. 1 получена система уравнений для нахождения функций $\mathbf{U}(r)$, $\mathbf{j}(r)$, $\mathbf{H}(r)$, $T_{\pm}(r)$, $p_{\pm}(r)$ и указана формула для F_T . Полученная система для определения эпюр показывает, что последние полностью определяются диссипативными эффектами – магнитными и гидродинамическими вязкостями и теплопроводностями электронов и ионов, а

также коэффициентом релаксации температур. В работе получен в том числе ответ на дискуссионный вопрос, каким образом сила тяги в СПД трансформируется в силовое воздействие на твердотельные части установки, побуждающие её вместе с жёстко связанным с ней летательным аппаратом к движению. Согласно проведённому исследованию, это сила трения, воздействующая на боковые стенки камеры (см. ниже) и обусловленная вязкими напряжениями электронов и ионов, равная по абсолютной величине силе тяги. Приближённое вычисление силы трения позволяет вычислить и силу тяги.

При этом проводимость плазмы и коэффициенты гидродинамических вязкостей электронов и ионов вычисляются по формулам Брагинского [3], а коэффициенты теплопроводности электронов и ионов и коэффициент релаксации температур рассчитаны по методикам работ [4–7].

Основные выводы работы опираются на исследование решений фундаментальной системы уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы с полным учётом инерции электронов [8]. Последняя получается [9] как нерелятивистский предел уравнений Эйнштейна для непрерывно распределённой материи применительно к полностью ионизованной плазме в пренебрежении гравитационными эффектами, химическими и ядерными реакциями [8, 9] и тем самым является фундаментальной. В случае несжимаемой плазмы ЭМГД-система становится линейной, что серьёзно упрощает исследование её решений. Однако она становится нелинейной, если учесть зависимость коэффициентов переноса от температуры. Ниже мы ограничимся линейным случаем, считая коэффициенты переноса постоянными, пренебрегая влиянием на них температуры. Тогда ЭМГД-система сводится к линейной относительно вектора $x = (U_\varphi, j_\varphi, U_z, j_z)^T$, где U – массовая скорость плазмы, j – плотность плазменного тока, и имеет вид:

$$\mathcal{A}(D)x - \Phi Vx = b, \quad (1)$$

где $D = d/dr$, $\mathcal{A}(D)$ – операторная 4x4 матрица, элементы которой – многочлены от D степени ≤ 2 с коэффициентами, зависящими от r , V – постоянная 4x4 симметрическая матрица, $\Phi \in \mathbb{R}$ задано и определяется величиной радиального магнитного поля, b – вектор правых частей, определяемый продольным электрическим полем. Система (1) решается на отрезке $[r_0, r_1]$ (где $0 < r_0 < r_1$ – радиусы внутренней и внешней боковых стенок СПД, см. п. 1) и, дополненная граничными условиями типа Дирихле на концах отрезка, позволяет по Φ и b восстановить вектор x . По решению системы (1) вычисляются распределения по радиусу температур T_\pm и давлений p_\pm электронов и ионов (см. п. 1).

Относительно системы (1) в работе установлен ряд математических результатов:

- 1) показано, что однородная система $\mathcal{A}(D)x=0$ с однородными граничными условиями имеет только нулевое решение (теорема единственности);
- 2) для однородных граничных условий построен обратный оператор $\mathcal{A}(D)^{-1}$ и показано, что решение уравнения $\mathcal{A}(D)x=b$ с непрерывной правой частью задаётся в виде интеграла

$$x(r) = \mathcal{A}(D)b(r) = \int_{r_0}^{r_1} G(r,s)b(s)ds,$$

при этом указана явная конструкция 4x4 матричной функции Грина $G(r,s)$, заданной на квадрате $[r_0, r_1]^2$, и установлены её свойства;

- 3) предложены два метода последовательных приближений численного решения системы (1) для любых граничных условий типа Дирихле и любых правых частей, быстро сходящиеся при $|\Phi| < C$, где C – известная, найденная в работе константа, кроме того, дано математическое доказательство сходимости метода последовательных приближений к решению краевой задачи для системы (1).

Проблема однозначной разрешимости краевой задачи для системы (1) тесно связана с вычислением спектра компактного оператора $\mathcal{A}(D)^{-1} \circ B$. Кроме того, расходимость предложенных методов для больших Φ , $|\Phi| \geq C$, может быть дезавуирована дискретизацией не системы дифференциальных уравнений (1), а интегрального уравнения

$$\Phi^{-1}x = \mathcal{A}(D)^{-1} \circ Bx + \mathcal{A}(D)^{-1}b,$$

аналогично тому, как это делается, например, в методе Бабенко [10] построения численного алгоритма без насыщения решения задачи Штурма-Лиувилля на отрезке. Рассмотрение указанных вопросов (в том числе вычисление спектра оператора $\mathcal{A}(D)^{-1} \circ B$) выходит за рамки настоящей работы и на сегодняшний день имеет, вероятно, академический интерес, поскольку случай больших Φ соответствует огромным радиальным магнитным полям в СПД, которые в существующих установках не достигаются.

Отметим роль однородных граничных условий. Поскольку электроны и ионы вязкие, то на граничных стенках выполнены условия прилипания и непротекания $\mathbf{v}_{i,w} = 0$, $\mathbf{v}_{e,w} = 0$. В частности, для массовой скорости и плотности тока на стеке имеем $\mathbf{U}_w = 0$, $\mathbf{j}_w = 0$. Неоднородные граничные условия возникают либо когда стенка движется (например, боковые стенки СПД вращаются вокруг общей оси), и тогда \mathbf{U}_w совпадает со скоростью движения стенки, а $\mathbf{j}_w = 0$, либо учитывается пристеночная проводимость, и тогда $\mathbf{j}_w \neq 0$, параллельна стенке и совпадает с плотностью пристеночного тока проводимости.

В п. 1 приведены нестационарные уравнения динамики несжимаемой двухжидкостной плазмы и уравнения для эволюции температуры электронов и ионов. Из них выводится уравнение стационарного движения, в частности, с учётом осевой симметрии и установления параметров плазмы вдоль оси установки. Кроме того, получены формулы для расчёта силы тяги СПД, магнитного поля и радиального распределения электронного и ионного давлений. Наконец, полученные уравнения обезразмериваются, и вычисляются числа подобия для характерных параметров СПД. В п. 2 изложены два варианта метода последовательных приближений и алгоритмы нахождения скоростей, токов, температур и давлений электронов и ионов, а также магнитного поля и силы тяги. В п. 3 дано доказательство теоремы единственности, построена матричная функция Грина и дано доказательство сходимости построенных в п. 2 методов последовательных приближений. В п. 4 приведены некоторые результаты расчётов. В заключении дан анализ проведённого исследования.

1. Основные уравнения

Динамика полностью ионизованной электрон-ионной плазмы в гидродинамическом приближении с несжимаемыми электронами и ионами задаётся системой уравнений [8]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\pm} &= 0, \quad \rho_{\pm} = \text{const}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\pm} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\pm} + \frac{\nabla p_{\pm}}{\rho_{\pm}} &= \pm \frac{e_{\pm}}{m_{\pm}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\pm}, \mathbf{H}] \right) \mp \frac{e_{\pm}}{m_{\pm}} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{2\mu_{\pm}}{\rho_{\pm}} \operatorname{Div} \operatorname{def} \mathbf{v}_{\pm}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \end{aligned}$$

где $\rho_{\pm} = m_{\pm} n_{\pm}$, плазма квазинейтральная ($e_+ n_+ = e_- n_-$), $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$, $\operatorname{def} \mathbf{v}_{\pm}$ – тензор (скоростей) деформации поля \mathbf{v}_{\pm} (см. ниже). При этом возникает две проблемы: 1) для скоростей \mathbf{v}_{\pm} имеем $v_- / v_+ \sim m_+ / m_-$, что для Хе имеет порядок $\sim 10^5$, и таким образом приходим к необходимости расчёта эволюции сильно разномасштабных величин \mathbf{v}_+ , \mathbf{v}_- ; 2) отсутствует уравнение для электрического поля \mathbf{E} . Эти проблемы исчезают, если от переменных \mathbf{v}_{\pm} , ρ_{\pm} перейти к переменным $U = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$ путём сложения и вычитания (после умножения на подходящие множители) уравнений импульсов. Подробности см. в [8]. В результате приходим к следующей системе [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho = \text{const}, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \frac{\nabla p_{\Sigma}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} (\Pi^p + \Pi^c) &= \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} (\Pi^{(U)} + \Pi_*^{(c)}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho} \text{rotrot}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \text{Div}W - \frac{1}{\rho} \text{Div}(\Pi^{(c)} + \Pi_*^{(U)}), \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \text{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot}\mathbf{H}, \quad \text{div}\mathbf{E} = 0,$$

где $\mathbf{U} = (\lambda_+ \mathbf{v}_+ + \lambda_- \mathbf{v}_-) / \lambda_\Sigma$ – массовая скорость, $\rho = \rho_+ + \rho_-$ – суммарная плотность, \mathbf{v}_\pm , ρ_\pm – гидродинамические скорости и объёмные плотности электронов и ионов, $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, p_\pm – давления электронов и ионов, $\mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_-$, $n_\pm = \rho_\pm / m_\pm$, выполнено условие квазинейтральности $e_+ n_+ = e_- n_-$, Π^p , Π^c , W – тензоры.

$$\Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \text{ (пондеромоторный тензор)}, \quad \text{Div}\Pi^p = -\frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}],$$

$$\Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\rho} \text{ (токовый тензор)},$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{U} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{U})$$

(тензор холловских напряжений),

I_3 – единичный трёхмерный тензор.

$\Pi^{(U)}$, $\Pi^{(c)}$, $\Pi_*^{(U)}$, $\Pi_*^{(c)}$ – тензоры вязких напряжений, вычисляемые по формулам

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma \text{def}\mathbf{U}, \quad \Pi^{(c)} = \frac{2\mu^*}{\rho} \text{def}\mathbf{j}, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* \text{def}\mathbf{U}, \quad \Pi_*^{(c)} = \frac{2\mu_*}{\rho} \text{def}\mathbf{j},$$

где для любого векторного поля \mathbf{v} через $\text{def}\mathbf{v}$ обозначен тензор (скоростей) деформации поля \mathbf{v} (см. ниже выражение для $\text{def}\mathbf{v}$ в цилиндрических координатах). Система (2) является замкнутой и определённой относительно неизвестных p_\pm , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{j} , из которой эти неизвестные в принципе могут быть найдены. Выше σ – проводимость плазмы, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, μ_\pm – гидродинамические вязкости электронов и ионов. По решению системы (2) гидродинамические скорости и плотности плазменных компонент вычисляются по формулам $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \lambda_\mp \mathbf{j} / \rho$, $\rho_\pm = (\lambda_\pm / \lambda_\Sigma) \rho$, а температуры электронов и ионов ищутся из уравнений [11]:

$$\rho_\pm c_p^\pm \left(\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla T_\pm \right) = \text{div}(\chi_\pm \nabla T_\pm) + 2\mu_\pm \text{tr}(D_\pm \cdot D_\pm) + \frac{m_\mp j^2}{m_\Sigma \sigma} \pm b(T_- - T_+), \quad (3)$$

$$D_\pm = \text{def}\mathbf{v}_\pm,$$

где $c_p = T \partial S / \partial T$ – теплоёмкость при постоянном давлении (для случая идеальных газов $c_p^\pm = k(\gamma - 1)^{-1} m_\pm^{-1} = \text{const}$), χ_\pm – коэффициенты теплопроводности электронов и ионов, b – коэффициент релаксации температур. Проводимость плазмы σ и коэффициенты гидродинамических вязкостей электронов и ионов вычисляются по формуле Брагинского [3]:

$$\mu_+ = 0.96 \frac{3m_+^{1/2} (kT_+)^{5/2}}{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 L}, \mu_- = 0.733 \frac{3m_+^{1/2} (kT_-)^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2} e^4 ZL}, \sigma = \frac{3(kT_-)^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2} e^2 ZL \cdot 0.5129}, \quad (4)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг / К – постоянная Больцмана, $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ ед.СГСЭ – заряд электрона, $m_- = m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона, $m_+ = m_X = 0.9018 \cdot 10^{-22}$ г – масса иона ксенона, Z – кратность заряда иона (ниже $Z = 1$), L – кулоновский логарифм (ниже $L = 15$).

Коэффициенты теплопроводности χ_\pm и коэффициент релаксации температур вычисляются по формулам [4–7]:

$$b = \frac{5m_-^{1/2} e^4 Z^3 \rho^2 L}{m_+^3 k^{1/2} T_-^{3/2}}, \quad \chi_\pm = C_\pm (kT_\pm)^{5/2}, \quad (5)$$

$$C_- = 1.9 \frac{k}{m^{1/2} e^4 L}, \quad C_+ = C_- \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} \cdot 1.76 \quad (\text{для случая } Z = 1).$$

Подчеркнём: в формулах (3)–(5) температуры T_\pm измеряются в К.

Используем систему (2), (3) для анализа процессов в стационарных плазменных двигателях (СПД), которые были предложены А.И. Морозовым и с 1971 г. успешно и безальтернативно используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов. История вопроса изложена в [2, 12, 13]. Согласно упрощённой принципиальной схеме, приведённой на рис. 1, СПД представляет собой коаксиальную камеру с керамическими боковыми стенками, в торцах которой расположены анод и катод с подведённой к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере продольного электрического поля E . Кроме того, система обмоток с постоянными токами (которая на рис. 1 не изображена) создаёт в камере почти радиальное магнитное поле H . Нейтральный газ – ксенон (Xe) подаётся со стороны анода, ионизируется посредством ударной ионизации электронами, и возникающие ионы Xe^+ ускоряются продольным электрическим полем до скоростей ~ 15 км/с и покидают камеру в сторону катода, нейтрализуясь на нём. В результате возникает реактивная сила тяги, передаваемая жёстко связанному с камерой летательному аппарату, на получение которой и направлена работа СПД. Длина типичного СПД-100М составляет [14] $L = 2.5$ см, внутренний и внешний

радиусы камеры установки равны $R_1 = 3.5$ см, $R_2 = 5$ см, время непрерывной работы двигателя после выхода на квазистационарный режим $\sim 10^4$ ч.

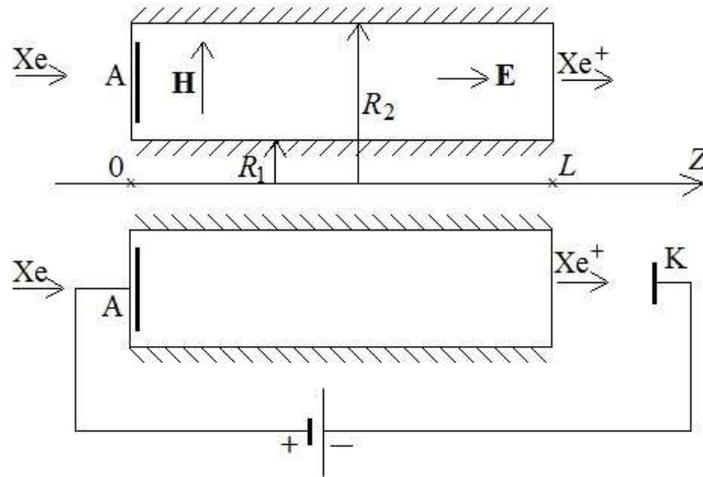


Рис. 1. Принципиальная схема СПД

Анализ основных процессов в СПД – ионизация рабочего вещества (ксенон, Xe) в прианодной области камеры, ускорение образующихся ионов ксенона электрическим полем, рассеяние электронов и ионов на боковых керамических стенках – достаточно сложен и до сих пор не доведён до обоснованных инженерных методик расчёта, позволяющих получить характеристики проектируемых СПД с приемлемой точностью.

В то же время с точки зрения приложений СПД для пользователя важен не анализ перечисленных процессов в СПД, а выходные характеристики установки: сила тяги, выходные скорости и токи, температуры и давления электронов и ионов. Оказывается, при определённых предположениях выходные параметры СПД приближённо можно вычислить из значительно более простых уравнений, чем (2), (3), минуя исследование основных процессов в СПД. Указанные предположения сводятся к стационарности ($\partial/\partial t = 0$), наличию осевой симметрии у выходного потока плазмы $\partial/\partial\varphi = 0$ и гипотезе об установлении по оси установки выходных потоков плазмы и их параметров ($\partial/\partial z = 0$). С учётом этих предположений течение плазмы на выходе из СПД задаётся решениями системы (2) вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(r), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r), \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(r), \quad p_{\pm} = p_{\pm}(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (r_0 = R_1, r_1 = R_2). \quad (6)$$

При этом для $\mathbf{U}(r)$, $\mathbf{j}(r)$ на стенках выполнены условия прилипания и непротекания. Если стенки покоятся, то для $\mathbf{U}(r_0) = \mathbf{U}(r_1) = 0$, $\mathbf{j}(r_0) = \mathbf{j}(r_1) = 0$. Ниже рассматривается более общий случай, когда боковые стенки СПД могут равномерно вращаться с угловыми частотами ω_0 (для внутренней стенки $r = r_0$) и ω_1 (для внешней стенки $r = r_1$) и, моделируя пристеночную проводимость,

$j_z(r_0) = j_0$, $j_z(r_1) = j_1$, где j_0 , j_1 – заданные плотности пристеночных токов. Тогда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} U_\varphi(r_0) = \omega_0 r_0, \quad U_\varphi(r_1) = \omega_1 r_1, \quad U_z(r_0) = U_z(r_1) = 0, \quad U_r(r_0) = U_r(r_1) = 0, \\ j_\varphi(r_0) = j_\varphi(r_1) = 0, \quad j_z(r_0) = j_0, \quad j_z(r_1) = j_1, \quad j_r(r_0) = j_r(r_1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя функции (6) в систему (2), получим из $\operatorname{div}\mathbf{U} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ и граничных условий (7) $U_r = 0$, $j_r = 0$. Из $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ вытекает $H_r = \Phi_0 / r$, $E_r = \varphi_0 / r$, где, вообще говоря, $\Phi_0 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$. Заметим, что вне канала СПД могут быть источники магнитного и электрического полей, реализуемые в виде системы токов (в частности, катушек) и зарядов. Из $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ следует $E_\varphi = \varphi_* / r$, но для стационарного осесимметричного случая из закона Фарадея, записанного в интегральном виде, легко следует $\varphi_* = 0$ и, значит, $E_\varphi \equiv 0$. Наконец, из $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ следует $E_z \equiv E_0 = \text{const}$. Тензор деформаций $\operatorname{def}\mathbf{v}$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\operatorname{def}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ * & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \\ * & * & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

где звёздочки означают симметрично расположенные относительно главной диагонали элементы, а вектор $\operatorname{Div}\operatorname{def}\mathbf{A}$ для векторного поля \mathbf{A} с нулевой дивергенцией, $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, имеет вид

$$\operatorname{Div}\operatorname{def}\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \Delta A_z \right),$$

где $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ – лапласиан f .

Итак, подстановка (6) в (2) приводит для нахождения функций U_φ , j_φ , U_z , j_z к следующей краевой задаче с граничными условиями (7):

$$\begin{aligned} \mu_\Sigma L_1(D) U_\varphi + \frac{\mu_*}{\rho} L_1(D) j_\varphi + \frac{\Phi_0}{cr} j_z = 0, \\ \frac{\mu_*}{\rho} L_1(D) U_\varphi + \frac{\mu^*}{\rho^2} L_1(D) j_\varphi - \frac{j_\varphi}{\sigma} + \frac{\Phi_0}{cr} U_z + \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho c} \frac{\Phi_0}{r} j_z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 L_2(D) U_z + \frac{\mu_*}{\rho} L_2(D) j_z - \frac{\Phi_0}{cr} j_\varphi &= 0, \\ \frac{\mu_*}{\rho} L_2(D) U_z + \frac{\mu^*}{\rho^2} L_2(D) j_z - \frac{j_z}{\sigma} - \frac{\Phi_0}{cr} U_\varphi - \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho c} \frac{\Phi_0}{r} j_z + E_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $r_0 \leq r \leq r_1$, $L_1(D) = D^2 + \frac{D}{r} - \frac{1}{r^2}$, $L_2(D) = D^2 + \frac{D}{r}$, $D = \frac{d}{dr}$ – дифференциальные операторы, Φ_0 , E_0 – заданные константы.

Рассмотрим нахождение по решению краевой задачи (8), (7) силы тяги, температур и давлений электронов и ионов.

Сила тяги F_T . Сначала вычислим суммарную силу трения, действующую на внешнюю и внутреннюю боковые стенки. По закону сохранения импульса сила тяги равна обратной величине суммарной силы трения. Пусть $\Pi_\pm = 2\mu_\pm \text{defv}_\pm$. Единичная нормаль к внешней стенке, обращённая в сторону плазмы, в цилиндрических координатах равна $(-1, 0, 0) = \mathbf{n}$. Значит, на единичную площадку внешней стенки действует сила трения

$$\begin{aligned} -\Pi_+ \mathbf{n} - \Pi_- \mathbf{n} &= -(2\mu_+ \text{defv}_+ \mathbf{n} + 2\mu_- \text{defv}_- \mathbf{n}) = \\ &= \mu_+ \left(0, r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^+}{r} \Big|_{r=r_1}, \frac{dv_z^+}{dr} \Big|_{r=r_1} \right) + \mu_- \left(0, r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^-}{r} \Big|_{r=r_1}, \frac{dv_z^-}{dr} \Big|_{r=r_1} \right). \end{aligned}$$

Нас интересует z -я компонента. Грубая аппроксимация силы трения, действующей на всю внешнюю стенку, сводится к умножению полученного выражения на площадь всей внешней стенки, т.е. на $2\pi r_1 \ell$. Итак,

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}}^{(1)} &= \left(0, 2\pi r_1^2 \ell \left(\mu_+ \left(\frac{v_\varphi^+}{r} \right)' (r_1) + \mu_- \left(\frac{v_\varphi^-}{r} \right)' (r_1) \right), 2\pi r_1 \ell \left(\mu_+ (v_z^+)' (r_1) + \mu_- (v_z^-)' (r_1) \right) \right), \\ F_{\text{тр},z}^{(1)} &= 2\pi r_1 \ell \left(\mu_+ (v_z^+)' (r_1) + \mu_- (v_z^-)' (r_1) \right) = 2\pi r_1 \ell \left[\mu_+ \left(U_z'(r_1) + \frac{\lambda_-}{\rho} j_z'(r_1) \right) + \right. \\ &\left. + \mu_- \left(U_z'(r_1) - \frac{\lambda_+}{\rho} j_z'(r_1) \right) \right] = 2\pi r_1 \ell \left[\mu_2 U_z'(r_1) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_1) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для внутренней стенки, в котором вместо \mathbf{n} надо взять $(-\mathbf{n})$, а вместо r_1 взять r_0 , даёт

$$F_{\text{тр}}^{(0)} = - \left(0, 2\pi r_0^2 \ell \left(\mu_+ \left(\frac{v_\varphi^+}{r} \right)' (r_0) + \mu_- \left(\frac{v_\varphi^-}{r} \right)' (r_0) \right), 2\pi r_0 \ell \left(\mu_+ (v_z^+)' (r_0) + \mu_- (v_z^-)' (r_0) \right) \right),$$

$$F_{\text{тр,z}}^{(0)} = -2\pi r_0 \ell \left[\mu_\Sigma U_z'(r_0) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_0) \right].$$

Окончательное выражение для силы тяги имеет вид

$$F_T = -F_{\text{тр,z}}^{(1)} - F_{\text{тр,z}}^{(0)} = 2\pi \ell \left\{ -r_1 \left[\mu_\Sigma U_z'(r_1) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_1) \right] + r_0 \left[\mu_\Sigma U_z'(r_0) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_0) \right] \right\}. \quad (9)$$

Вычисление температур электронов и ионов. Распределение температур электронов и ионов по радиусу ищется из системы (3):

$$k_\pm \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_\pm}{dr} \right) \pm b(T_- - T_+) + 2\mu_\pm \text{tr}(D_\pm^2) + \frac{m_\pm}{m_\Sigma} \frac{j^2}{\sigma} = 0,$$

где $D_\pm = \text{def} v_\pm$ – тензор (скоростей) деформаций. Имеем

$$D_\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} & \frac{dv_z^\pm}{dr} \\ r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} & 0 & 0 \\ \frac{dv_z^\pm}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(D_\pm^2) = \frac{1}{2} \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^\pm}{dr} \right)^2 \right].$$

Итак, для нахождения T_\pm имеем систему

$$k_+ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_+}{dr} \right) + b(T_- - T_+) = f_+(r) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu_+ \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^+}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^+}{dr} \right)^2 \right] - \frac{m_-}{m_\Sigma} \frac{(j_\varphi^2 + j_z^2)}{\sigma},$$

$$k_- \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_-}{dr} \right) - b(T_- - T_+) = f_0(r) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu_- \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^-}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^-}{dr} \right)^2 \right] - \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{(j_\varphi^2 + j_z^2)}{\sigma}, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (10)$$

С известными из решения системы (8) правыми частями (с учётом $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm (\lambda_{\pm} / \rho) \mathbf{j}$). Дополненная граничными условиями $T_{\pm}(r_0) = T_0$, $T_{\pm}(r_1) = T_1$, где T_0 , T_1 – температуры внутренней и внешней стенок, она позволяет найти $T_{\pm}(r)$.

Вычисление давлений электронов и ионов. Речь идёт о вычислении функций $p_{\pm}(r)$. Для этого надо записать r -е компоненты уравнения импульса и обобщённого закона Ома. Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{U_{\varphi}^2}{r} + \frac{p'_+ + p'_-}{\rho} - \frac{1}{\rho c} (j_{\varphi} H_z - j_z H_{\varphi}) - \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\rho} \frac{j_{\varphi}^2}{\rho r} &= 0, \\ \frac{\varphi_0}{r} = E_r = -\frac{1}{c} (U_{\varphi} H_z - U_z H_{\varphi}) + \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho} \left[-\frac{1}{c} (j_{\varphi} H_z - j_z H_{\varphi}) - \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\rho r} j_{\varphi}^2 \right] &+ \\ + \frac{\lambda_- p'_+ - \lambda_+ p'_-}{\rho} - 2\lambda_+ \lambda_- \frac{j_{\varphi} U_{\varphi}}{r \rho}. & \end{aligned}$$

Отсюда вычисляются в явном виде p'_{\pm} :

$$\begin{aligned} p'_+ &= \frac{\lambda_+ \rho U_{\varphi}^2}{\lambda_{\Sigma} r} + \frac{\lambda_-}{\lambda_{\Sigma}} \left[\frac{1}{c} (j_{\varphi} H_z - j_z H_{\varphi}) + \frac{\lambda_+ \lambda_- j_{\varphi}^2}{\rho r} \right] + \frac{2\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_{\Sigma}} \frac{j_{\varphi} U_{\varphi}}{r} + \\ &+ \frac{\rho}{c \lambda_{\Sigma}} (U_{\varphi} H_z - U_z H_{\varphi}) + \frac{E_r \rho}{\lambda_{\Sigma}}, \\ p'_- &= \frac{\lambda_- \rho U_{\varphi}^2}{\lambda_{\Sigma} r} + \frac{\lambda_+}{\lambda_{\Sigma}} \left[\frac{1}{c} (j_{\varphi} H_z - j_z H_{\varphi}) + \frac{\lambda_+ \lambda_- j_{\varphi}^2}{\rho r} \right] - \frac{2\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_{\Sigma}} \frac{j_{\varphi} U_{\varphi}}{r} - \\ &- \frac{\rho}{c \lambda_{\Sigma}} (U_{\varphi} H_z - U_z H_{\varphi}) - \frac{E_r \rho}{\lambda_{\Sigma}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Магнитные поля H_z , H_{φ} ищутся из уравнений $j_{\varphi} = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_z}{dr}$, $j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{drH_{\varphi}}{dr}$ решением задач Коши:

$$\frac{dH_z}{dr} = -\frac{4\pi}{c} j_{\varphi}, H_z(r_0) - \text{известное}, \frac{dH_{\varphi}}{dr} = -\frac{H_{\varphi}}{r} + \frac{4\pi}{c} j_z, H_{\varphi}(r_0) - \text{известное}. \tag{12}$$

Безразмерный вид основных уравнений. Пусть

$$[U_{\varphi}] = [U_z] = U_0, [j_{\varphi}] = [j_z] = j_0 = \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{L_0}, v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, [\Phi_0] = H_0 L_0, [E_z] = \frac{U_0 H_0}{c}.$$

Введём безразмерные комбинации (числа подобия):

$$\kappa = \frac{v_A}{U_0}, \quad \xi = \frac{c\sqrt{\lambda_+\lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho L_0}}, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma L_0 U_0}, \quad R_{\pm} = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu_{\pm}}, \quad M = \frac{U_0}{c_s}, \quad c_s^2 = \frac{kT_0}{m_+}.$$

Тогда система (8) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) L_1(D) U_{\varphi} + \xi \kappa \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) L_1(D) j_{\varphi} + \kappa^2 \frac{\Phi_0 j_z}{r} = 0, \\ \xi \kappa \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) L_1(D) U_{\varphi} + \kappa^2 \xi^2 \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \frac{1}{R_+} + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \frac{1}{R_-} \right) L_1(D) j_{\varphi} - \\ - \kappa^2 v_m j_{\varphi} + \kappa^2 \frac{\Phi_0 U_z}{r} + \kappa^3 \xi \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \right) \frac{\Phi_0 j_z}{r} = 0, \\ \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) L_2(D) U_z + \xi \kappa \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) L_2(D) j_z - \kappa^2 \frac{\Phi_0 j_{\varphi}}{r} = 0, \\ \xi \kappa \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) L_2(D) U_z + \kappa^2 \xi^2 \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \frac{1}{R_+} + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \frac{1}{R_-} \right) L_2(D) j_z - \\ - \kappa^2 v_m j_z - \frac{\kappa^2 \Phi_0 U_{\varphi}}{r} - \kappa^3 \xi \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \right) \frac{\Phi_0 j_{\varphi}}{r} = -\kappa^2 E_0, \end{array} \right. \quad (13)$$

Формула (9) в безразмерном виде даёт

$$F_T = (2\pi L_0^2 U_0^2 \rho) \ell \left\{ -r_1 \left[\left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) U'_z(r_1) + \kappa \xi \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) j'_z(r_1) \right] + \right. \\ \left. + r_0 \left[\left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right) U'_z(r_0) + \kappa \xi \left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \frac{1}{R_+} - \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \frac{1}{R_-} \right) j'_z(r_0) \right] \right\}. \quad (14)$$

Для $L_0 = 1\text{см}$, $U_0 = 1.5 \cdot 10^6 \text{см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\rho = [m_+][n] = 0.9018 \cdot 10^{-22} \text{г} \cdot 10^{12} \text{см}^{-3}$ получим $2\pi L_0^2 U_0^2 \rho = 1.27 \cdot 10^3 \text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Рассмотрим безразмерную запись системы (10). Учтём, что в безразмерном виде

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \kappa \xi \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \mathbf{j}.$$

Тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_+ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_+}{dr} \right) + \hat{b}(T_- - T_+) = f_+(r) = -\frac{1}{R_+} \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^+}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^+}{dr} \right)^2 \right] - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{m_-}{m_\Sigma} \kappa^2 v_m (j_\varphi^2 + j_z^2), \\ \kappa_- \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_-}{dr} \right) - \hat{b}(T_- - T_+) = f_-(r) = -\frac{1}{R_-} \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^-}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^-}{dr} \right)^2 \right] - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{m_+}{m_\Sigma} \kappa^2 v_m (j_\varphi^2 + j_z^2), \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\kappa_\pm = \frac{k_\pm T_0}{\rho U_0^3 L_0}, \quad \hat{b} = \frac{b T_0 L_0}{\rho U_0^3}, \quad \text{где } T_0 = 20 \text{эВ}, \quad L_0 = 1 \text{см}, \quad U_0 = 1.5 \cdot 10^6 \text{см} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\rho = m_x \cdot 10^{12} \text{см}^{-3}.$$

Наконец, формулы (11) в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_A^2} p'_+ &= \frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma} \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma} \kappa^2 \left[(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi) + \xi^2 \frac{j_\varphi^2}{r} \right] + \frac{2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} \xi \kappa \frac{j_\varphi U_\varphi}{r} + \\ &+ \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} (U_\varphi H_z - U_z H_\varphi) + \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} E_r, \\ \frac{1}{M_A^2} p'_- &= \frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma} \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma} \kappa^2 \left[(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi) + \xi^2 \frac{j_\varphi^2}{r} \right] - \frac{2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} \xi \kappa \frac{j_\varphi U_\varphi}{r} - \\ &- \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} (U_\varphi H_z - U_z H_\varphi) - \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} E_r, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } M_A = \frac{U_0}{c_s}, \quad c_s^2 = \frac{p_0}{\rho}, \quad p_0 = k n_0 T_0.$$

Наконец, H_z , H_φ ищутся из решения задач Коши (12), которые в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{dH_z}{dr} = -j_\varphi, \quad \frac{dH_\varphi}{dr} = -\frac{H_\varphi}{r} + j_z, \quad H_z(r_0), H_\varphi(r_0) - \text{заданы.} \quad (17)$$

Рассмотрим вычисление коэффициентов переноса и чисел подобия для типичных значений параметров плазмы в СПД:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 200 \text{ Гс}, n_0 = 10^{-12} \text{ см}^{-3}, T_0 = T_i = T_e = 20 \text{ эВ} = 20 \cdot 11600 \text{ К} = \\
&= 20 \cdot 11600 \cdot 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} = 0.336 \cdot 10^{-10} \text{ эрг}, m_{Xe} = 0.9018 \cdot 10^{-22} \text{ г}, \\
U_0 &= 1.5 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ г}, e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}.
\end{aligned}$$

Расчёт μ_+ , μ_- , σ по формулам Брагинского (4) даёт

$$\mu_+ = 0.0106, \quad \mu_- = 0.5444 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma = 1.12 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
R_+^{-1} &= \frac{10^8 \cdot 1.175}{U_0} = 78.3, \quad R_-^{-1} = \frac{10^6 \cdot 0.6}{U_0} = 0.4, \quad v_m = \frac{0.6398 \cdot 10^5}{U_0} = 0.4265 \cdot 10^{-1}, \\
\kappa &= \frac{v_A}{U_0} = \frac{H_0}{U_0 \sqrt{4\pi\rho}} = 4, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} = 6 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \xi = 0.53.
\end{aligned}$$

Наконец, имеем

$$\begin{aligned}
\kappa_+ &= 2.8 \cdot 10^2, \quad \kappa_- = 0.5 \cdot 10^5, \quad \hat{b} = 2.5 \cdot 10^2, \quad \frac{m_-}{m_+} = 1.01 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{m_+}{m_-} = 0.99 \cdot 10^5, \\
\sqrt{\frac{m_+}{m_-}} &= 3.146 \cdot 10^2, \quad \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} = 0.3178 \cdot 10^{-2}, \quad c_s = \sqrt{\frac{kT_0}{m_+}} = 0.61 \cdot 10^6 \text{ см/с}, \quad M = \frac{U}{c_s} = 2.45.
\end{aligned}$$

2. Численное решение уравнений

Рассмотрим численное решение краевых задач для уравнений (13), (15), задач Коши для уравнений (17) и вычисление силы тяги и распределений давлений электронов и ионов по формулам (14) и (15). Наибольшие проблемы представляет система (13), которую перепишем в матричном операторном виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & ArL_2(D) \\ ArL_1(D) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} = \Phi_* \mathbf{B} \begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rf_* \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ r \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\
u_\varphi &= (U_\varphi, j_\varphi)^\top, \quad u_z = (U_z, j_z)^\top, \quad f_* = (0, \kappa^2 E_0)^\top, \\
L_2(D) &= D^2 + D/r, \quad L_1(D) = L_2(D) - 1/r^2, \quad D = d/dr,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= R_+^{-1} + R_-^{-1}, & a_{22} &= \kappa^2 \xi^2 (R_+^{-1} \lambda_- / \lambda_+ + R_-^{-1} \lambda_+ / \lambda_-), \\
a_{12} &= a_{21} = \kappa \xi (R_+^{-1} (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} - R_-^{-1} (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2}), \\
b_{11} &= 0, & b_{12} &= b_{21} = \kappa^2, & b_{22} &= \kappa^3 \xi (\sqrt{\lambda_- / \lambda_+} - \sqrt{\lambda_+ / \lambda_-}), \\
a &= \kappa^2 \nu_m, & \Phi_* &= \kappa^2 \Phi_0.
\end{aligned}$$

Уравнение (18) равносильно паре уравнений

$$\begin{cases} (ArL_2(D) - rI_0)u_z = \Phi_* Bu_\varphi + rf_*, \\ (ArL_1(D) - rI_0)u_\varphi = -\Phi_* Bu_z. \end{cases} \quad (20)$$

В обозначениях (20) рассмотрим два метода приближённого решения краевых задач для (18) и (20).

1-й метод. Задаём $u_\varphi^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ произвольно и по $u_\varphi^{(n)}$, $u_z^{(n)}$ находим $u_\varphi^{(n+1)}$, $u_z^{(n+1)}$ из решения двух краевых задач

$$(ArL_2(D) - rI_0)u_z^{(n+1)} = \Phi_* Bu_\varphi^{(n)} + rf_*, (ArL_1(D) - rI_0)u_\varphi^{(n+1)} = -\Phi_* Bu_z^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Процесс итераций останавливается при выполнении условий

$$\|u_\varphi^{(n+1)} - u_\varphi^{(n)}\| \leq \varepsilon \|u_\varphi^{(n)}\| + \varepsilon_0, \quad \|u_z^{(n+1)} - u_z^{(n)}\| \leq \varepsilon \|u_z^{(n)}\| + \varepsilon_0, \quad (21)$$

где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малые константы, подбираемые экспериментально, а $\|\cdot\|$ – максимум модуля.

2-й метод. Задаём $u_\varphi^{(0)}$ произвольно, а $u_z^{(0)}$ находим из решения краевой задачи для уравнения $(ArL_2(D) - rI_0)u_z^{(0)} = \Phi_* Bu_\varphi^{(0)} + rf_*$. После чего переход $u_\varphi^{(n)}, u_z^{(n)} \rightarrow u_\varphi^{(n+1)}, u_z^{(n+1)}$ происходит в два этапа. Сначала находим $u_\varphi^{(n+1)}$, а затем $u_z^{(n+1)}$ из решения краевых задач для уравнений

$$(ArL_1(D) - rI_0)u_\varphi^{(n+1)} = -\Phi_* Bu_z^{(n)}, (ArL_2(D) - rI_0)u_z^{(n+1)} = \Phi_* Bu_\varphi^{(n+1)} + rf_*, n = 0, 1, 2, \dots$$

Условие выхода из итерационного процесса совпадает с (21).

Преимущество 2-го метода в том, что в начальный момент надо задать только $u_\varphi^{(0)}$, а $u_z^{(0)}$ вычисляется. В качестве $u_\varphi^{(0)}(r) = (U_\varphi^{(0)}(r), j_\varphi^{(0)}(r))$ удобно взять гидродинамическое решение:

$$j_\varphi^{(0)}(r) \equiv 0, \quad U_\varphi^{(0)}(r) = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} r + \frac{r_0^2 r_1^2 (\omega_0 - \omega_1)}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{r}, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Преимущество обоих методов в том, что краевые задачи для уравнений

$$\begin{aligned} (ArL_1(D) - rI_0)u &= f, \quad u = (U, j)^T, \\ (ArL_2(D) - rI_0)u &= f, \quad f = (f_1, f_2)^T \end{aligned} \quad (22)$$

решаются методом исключений, так что нет необходимости в использовании итерационных процедур. Рассмотрим, например, первую задачу (22), которая переписывается в виде

$$(rL_1(D)I_2 - rA^{-1}I_0)u = A^{-1}f$$

или

$$\begin{cases} rL_1(D)U - r\bar{a}_{12}aj = \bar{a}_{11}f_1 + \bar{a}_{12}f_2, & (a) \\ rL_1(D)j - r\bar{a}_{22}aj = \bar{a}_{21}f_1 + \bar{a}_{22}f_2, & (б) \end{cases} \quad (23)$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка и

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{\kappa^2 \xi^2}{R_+ R_-} \frac{\lambda_+^2}{\lambda_-} > 0.$$

Из второго уравнения (23) находим (и тем самым исключаем из числа неизвестных) j :

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + a\bar{a}_{22} \right) j = \frac{\bar{a}_{21}f_1 + \bar{a}_{22}f_2}{r}. \quad (б)$$

После этого, зная j , из первого уравнения (23) находим U , рассматривая найденное j как слагаемое в правой части уравнения:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = \bar{a}_{12}aj + \frac{\bar{a}_{11}f_1 + \bar{a}_{12}f_2}{r}. \quad (a)$$

При этом важно, что $a\bar{a}_{22} > 0$, ибо $a > 0$ и $\bar{a}_{22} = a_{11} / \Delta > 0$. Аналогично вторая задача в (22) сводится к паре краевых задач, которая получится, если в (23) заменить $L_1(D)$ на $L_2(D)$:

$$\begin{cases} rL_2(D)U - r\bar{a}_{12}aj = \bar{a}_{11}f_1 + \bar{a}_{12}f_2, & (a) \\ rL_2(D)j - r\bar{a}_{22}aj = \bar{a}_{21}f_1 + \bar{a}_{22}f_2. & (б) \end{cases} \quad (24)$$

Тогда из второго уравнения (24) находим j :

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} - \bar{a}_{22}aj = \frac{\bar{a}_{21}f_1 + \bar{a}_{22}f_2}{r}, \quad (б)$$

а затем из первого уравнения (24) находим U , рассматривая найденное j как слагаемое в правой части:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = \bar{a}_{12}aj + \frac{\bar{a}_{11}f_1 + \bar{a}_{12}f_2}{r}. \quad (a)$$

Если $f_1(r)$, $f_2(r)$, $r_0 \leq r \leq r_1$ заданы аналитически, то решение краевых задач для уравнений (23) и (24) можно записать аналитически в интегральном виде через правые части и функции Бесселя мнимого аргумента и Макдональда индекса 0 (для (24)) и 1 (для (23)). Однако для практического нахождения эпюр выходных скоростей и токов краевые задачи для уравнений (23), (24) проще решить разностным методом. Для этого фиксируем равномерную сетку $r^k = r_0 + kh$, $0 \leq k \leq N$, $h = (r_1 - r_0) / N$. Все функции аппроксимируются сеточными, заданными в узлах указанной сетки. Тогда вторая краевая задача (23) сводится к решению линейной системы:

$$\frac{j_{k+1} - 2j_k + j_{k-1}}{h^2} + \frac{1}{r^k} \frac{j_{k+1} - j_{k-1}}{2h} - \left(\frac{1}{(r^k)^2} + a\bar{a}_{22} \right) j_k = f_k, \quad 0 < k < N, \quad (25)$$

$$j_0 = j^{(0)}, \quad j_N = j^{(1)},$$

где $f_k = \frac{\bar{a}_{21}f_{1k} + \bar{a}_{22}f_{2k}}{r^k}$, $j^{(0)}$, $j^{(1)}$ – заданные значения j на концах отрезка $[r_0, r_1]$.

Первая задача (23) сводится к решению линейной системы

$$\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} + \frac{1}{r^k} \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} - \frac{U_k}{(r^k)^2} = g_k, \quad 0 < k < N, \quad (26)$$

$$U_0 = U^{(0)}, \quad U_N = U^{(1)},$$

где $g_k = \bar{a}_{12}aj_k + \frac{\bar{a}_{11}f_{1k} + \bar{a}_{12}f_{2k}}{r^k}$, $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ – заданные значения U на концах отрезка $[r_0, r_1]$.

Аналогично вторая краевая задача (24) сводится к решению линейной системы:

$$\frac{j_{k+1} - 2j_k + j_{k-1}}{h^2} + \frac{1}{r^k} \frac{j_{k+1} - j_{k-1}}{2h} - \bar{a}_{22}aj_k = f_k, \quad 0 < k < N, \quad j_0 = j^{(0)}, \quad j_N = j^{(1)}, \quad (27)$$

а решение первой краевой задачи (24) сводится к решению линейной системы

$$\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} + \frac{1}{r^k} \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} = g_k, \quad 0 < k < N, \quad U_0 = U^{(0)}, \quad U_N = U^{(1)}, \quad (28)$$

где $f_k, g_k, 0 < k < N$, определены выше. Матрицы линейных систем (25), (26), (27), (28) имеют вид соответственно:

$$j_{k-1} \left(1 - \frac{h}{2r^k} \right) - j_k \left(2 + \frac{h^2}{(r^k)^2} + h^2 \bar{a}_{22} a \right) + j_{k+1} \left(1 + \frac{h}{2r^k} \right) = h^2 f_k, 0 < k < N,$$

$$j_0 = j^{(0)}, \quad j_N = j^{(1)},$$

$$U_{k-1} \left(1 - \frac{h}{2r^k} \right) - U_k \left(2 + \frac{h^2}{(r^k)^2} \right) + U_{k+1} \left(1 + \frac{h}{2r^k} \right) = h^2 g_k, 0 < k < N,$$

$$U_0 = U^{(0)}, \quad U_N = U^{(1)},$$

$$j_{k-1} \left(1 - \frac{h}{2r^k} \right) - j_k \left(2 + h^2 \bar{a}_{22} a \right) + j_{k+1} \left(1 + \frac{h}{2r^k} \right) = h^2 f_k, 0 < k < N,$$

$$j_0 = j^{(0)}, \quad j_N = j^{(1)},$$

$$U_{k-1} \left(1 - \frac{h}{2r^k} \right) - 2U_k + U_{k+1} \left(1 + \frac{h}{2r^k} \right) = h^2 g_k, 0 < k < N,$$

$$U_0 = U^{(0)}, \quad U_N = U^{(1)}.$$

Перечисленные матрицы имеют диагональное преобладание по строкам. Поэтому, обращая их прогонкой, приходим к алгоритмам решения краевых задач (23) и (24), каждый из которых сводится к двум прогонкам, а значит, экономичен (количество потребных арифметических операций имеет порядок N при $N \rightarrow +\infty$) и вычислительно устойчив (более того, не накапливает ошибки округления).

Перейдём к численному нахождению температур из системы (15). При этом граничные условия полагаем вида $T_+(r_0) = T_-(r_0) = T^{(0)}$, $T_+(r_1) = T_-(r_1) = T^{(1)}$. Численное решение системы (15) распадается на два этапа.

I этап. Находим вспомогательную «температуру» $T = \kappa_+ T_+ + \kappa_- T_-$ из краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = f(r) \stackrel{\text{def}}{=} f_+(r) + f_-(r), \quad T(r_0) = (\kappa_+ + \kappa_-) T^{(0)}, T(r_1) = (\kappa_+ + \kappa_-) T^{(1)}.$$

Это делается решением линейной системы прогонкой

$$\frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h^2} + \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2hr^k} = f(r_k), 0 < k < N, T_0 = (\kappa_0 + \kappa_1) T^{(0)}, T_N = (\kappa_0 + \kappa_1) T^{(1)}.$$

II этап. Ищем T_{\pm} , используя равенства $T_- = \frac{1}{\kappa_-} T - \frac{\kappa_+}{\kappa_-} T_+$, $T_+ = \frac{1}{\kappa_+} T - \frac{\kappa_-}{\kappa_+} T_-$, причём первое подставляется в верхнее равенство (15), а второе – в нижнее. Тогда для нахождения T_k^+ , $0 \leq k \leq N$ и T_k^- , $0 \leq k \leq N$ получим две системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_+ \frac{T_{k+1}^+ - 2T_k^+ + T_{k-1}^+}{h^2} + \kappa_+ \frac{T_{k+1}^+ - T_{k-1}^+}{2hr^k} - T_k^+ \left(1 + \frac{\kappa_+}{\kappa_-} \right) \hat{b} &= f_+(r^k) - \frac{T_k}{\kappa_-}, \quad 0 < k < N, \\ T_0^+ &= T^{(0)}, \quad T_N^+ = T^{(1)}, \\ \kappa_- \frac{T_{k+1}^- - 2T_k^- + T_{k-1}^-}{h^2} + \kappa_- \frac{T_{k+1}^- - T_{k-1}^-}{2hr^k} - T_k^- \left(1 + \frac{\kappa_-}{\kappa_+} \right) \hat{b} &= f_-(r^k) - \frac{T_k}{\kappa_+}, \quad 0 < k < N, \\ T_0^- &= T^{(0)}, \quad T_N^- = T^{(1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, матрицы возникающих линейных систем имеют диагональное преобладание по строкам и поэтому обращаются прогонкой. Можно предложить разные сценарии вычисления $f_{\pm}(r^k)$ и $f(r^k)$. Например, такой. Сначала вычисляем

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \left(r \frac{d}{dr} \frac{U_{\varphi}}{r} \right)_k \sim \frac{U_{\varphi,k+1} - U_{\varphi,k-1}}{2h} - \frac{U_{\varphi,k}}{r^k}, \quad p_{2k} = \left(r \frac{d}{dr} \frac{j_{\varphi}}{r} \right)_k \sim \frac{j_{\varphi,k+1} - j_{\varphi,k-1}}{2h} - \frac{j_{\varphi,k}}{r^k}, \\ q_{1k} &= \left(\frac{dU_z}{dr} \right)_k \sim \frac{U_{z,k+1} - U_{z,k-1}}{2h}, \quad q_{2k} = \left(\frac{dj_z}{dr} \right)_k \sim \frac{j_{z,k+1} - j_{z,k-1}}{2h}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(r^k) &= -(p_{1k}, p_{2k}) A \begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \end{pmatrix} - (q_{1k}, q_{2k}) A \begin{pmatrix} q_{1k} \\ q_{2k} \end{pmatrix} - \kappa^2 v_m (j_{zk}^2 + j_{\varphi k}^2), \\ f_{\pm}(r^k) &= -\frac{1}{R_{\pm}} \left[\left(p_{1k} \pm \kappa \xi \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} p_{2k} \right)^2 + \left(q_{1k} \pm \kappa \xi \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} q_{2k} \right)^2 \right] - \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \kappa^2 v_m (j_{zk}^2 + j_{\varphi k}^2), \end{aligned}$$

где использована формула $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \kappa \xi \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \mathbf{j}$. При этом из трёх величин $f_{\pm}(r^k)$, $f(r^k)$ достаточно подсчитать только любые две.

Рассмотрим решение задачи Коши (17). Вычислим их по схеме Эйлера с пересчётом. Для первого уравнения это даёт

$$\frac{H_{z,k+1} - H_{z,k}}{h} = -\frac{j_{\varphi,k} + j_{\varphi,k+1}}{2}, \quad k \geq 0, \quad H_{z,0} = H_z^0 - \text{начальное условие,}$$

или

$$H_{z,k+1} = H_{z,k} - \frac{h}{2}(j_{\varphi,k} + j_{\varphi,k+1}), \quad k \geq 0, H_{z,0} = H_z^0.$$

Второе уравнение решим заменой переменных $H_{\varphi}(r) = C(r)/r$, тогда $C(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $C'(r) = rj_z(r)$. Тогда, применяя схему Эйлера с пересчётом, получим

$$\frac{C_{k+1} - C_k}{h} = \frac{1}{2}(r^k j_{z,k} + r^{k+1} j_{z,k+1}), \quad k \geq 0, C_0 = r_0 H_{\varphi}^0, H_{\varphi,k} = \frac{C_k}{r^k}, \quad k \geq 0.$$

Наконец, производные в формуле (14) вычисляются по конечным разностям

$$U'_z(r_0) = \frac{U_{z,1} - U_{z,0}}{h}, \quad j'_z(r_0) = \frac{j_{z,1} - j_{z,0}}{h},$$

$$U'_z(r_1) = -\frac{U_{z,N-1} - U_{z,N}}{h}, \quad j'_z(r_1) = -\frac{j_{z,N-1} - j_{z,N}}{h}.$$

Как показали расчёты, для типичных параметров СПД, определяющих числа подобия из п. 1, оба метода приближённого решения системы (13) быстро сходятся (для $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ за несколько итераций) при всех $|\Phi_*| < 400$, что соответствуют размерным радиальным магнитным полям $H_r \sim 5 \cdot 10^3$ Гс. Этого вполне достаточно для практических расчётов, поскольку в реальных СПД магнитные поля ~ 200 Гс намного меньше. При больших Φ_* , $|\Phi_*| > 400$, расчёты фиксируют расходимость обоих методов последовательных приближений. Причины этой расходимости анализируются ниже.

3. Некоторые математические вопросы решения системы (18)

Перепишем систему (18) в более компактном виде:

$$\mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} u_{\varphi} \\ u_z \end{pmatrix} = \Phi_* \mathbf{B} \begin{pmatrix} u_{\varphi} \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rf_* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(D) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}_2(D) \\ \mathcal{A}_1(D) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathcal{A}_1(D) = ArL_1(D) - rI_0, \quad \mathcal{A}_2(D) = ArL_2(D) - rI_0, \quad D = d/dr,$$

где матрицы A, B, I_0 выписаны в (19).

Прежде всего рассмотрим однородную систему

$$\mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} u_{\varphi} \\ u_z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}_1(D)u_{\varphi} = 0, \quad \mathcal{A}_2(D)u_z = 0. \quad (30)$$

Теорема 1 (теорема единственности). Однородные системы (30) с однородными граничными условиями на концах могут иметь только нулевое решение.

Из теоремы 1 следует, что краевая задача с произвольными граничными условиями типа Дирихле для неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad f, g \in C_2[r_0, r_1] \quad (31)$$

имеет (если имеет) единственное решение. Здесь и ниже для $m \geq 1$, $k \geq 0$ $C_m^k[r_0, r_1]$ обозначает пространство всех m -значных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[r_0, r_1]$. При $k=0$ индекс k опускается. В частности, решение систем (30), (31) ищется в $C_4^2[r_0, r_1]$, а решение уравнений $\mathcal{A}_1(D)u_\varphi = 0$, $\mathcal{A}_2(D)u_z = 0$ – в $C_2^2[r_0, r_1]$.

Теперь покажем, что уравнение (31) всегда разрешимо. Поскольку переменные разделяются, то достаточно установить разрешимость уравнений

$$\mathcal{A}_2(D)u_z = f, \quad \mathcal{A}_1(D)u_\varphi = g. \quad (32)$$

Мы покажем, что найдутся непрерывные в квадрате $[r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$ 2×2 матричные функции $G_z(r, s)$ и $G_\varphi(r, s)$, для которых

$$u_z(r) = \int_{r_0}^{r_1} G_z(r, s) f(s) ds, \quad u_\varphi(r) = \int_{r_0}^{r_1} G_\varphi(r, s) g(s) ds \quad (33)$$

лежат в $C_2^2[r_0, r_1]$ и являются решением уравнений (32). Эти функции называются функциями Грина уравнений (32). Отсюда следует, что непрерывная в квадрате $[r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$ 4×4 матричная функция

$$G(r, s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & G_\varphi(r, s) \\ G_z(r, s) & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

является функцией Грина для системы (31), поскольку для любых $f, g \in C_2[r_0, r_1]$ функции

$$\begin{pmatrix} u_\varphi(r) \\ u_z(r) \end{pmatrix} = \int_{r_0}^{r_1} G(r, s) \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} ds \quad (35)$$

доставляют решение системе (31). Выше, по умолчанию, граничные условия полагаются однородными. Для граничных условий типа Дирихле можно ограничиться однородными граничными условиями. Действительно,

применительно к уравнению (31) любые граничные условия $u_\varphi(r_0) = u_{0\varphi}$, $u_\varphi(r_1) = u_{1\varphi}$, $u(r_0) = u_{0z}$, $u_z(r_1) = u_{1z}$ сводятся к однородным заменой неизвестных функций $w_\varphi = u_\varphi - \tilde{u}_\varphi(r)$, $w_z = u_z - \tilde{u}_z(r)$, где $\tilde{u}_\varphi(r) = u_{0\varphi} + \frac{u_{1\varphi} - u_{0\varphi}}{r_1 - r_0}(r - r_0)$, $\tilde{u}_z(r) = u_{0z} + \frac{u_{1z} - u_{0z}}{r_1 - r_0}(r - r_0)$. Тогда функции w_φ , w_z удовлетворяют нулевым граничным условиям и являются решением уравнения

$$\mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} w_\varphi \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - \mathcal{A}(D) \begin{pmatrix} \tilde{u}_\varphi \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix}$$

с известной правой частью. Для однородных граничных условий оператор $\mathcal{A}(D)$ задан на множестве $C_*^2[r_0, r_1] = \{(u_\varphi, u_z) \in C_4^2 : u_\varphi(r_0) = u_\varphi(r_1) = 0, u_z(r_0) = u_z(r_1) = 0\}$, которое является линейным подпространством $C_4^2[r_0, r_1]$, а $\mathcal{A}(D)$ отображает $C_*^2[r_0, r_1]$ в $C_4[r_0, r_1]$ линейным образом. Обратным к этому оператору является линейное отображение, указанное в построении функций Грина, которое тем самым устанавливает биекцию линейных пространств $C_*^2[r_0, r_1]$ и $C_4[r_0, r_1]$. Более того, если ввести в $C_4^2[r_0, r_1]$, $C_4[r_0, r_1]$ нормы $\|(u_\varphi, u_z)\|_\omega = \max\{\max(\|u_\varphi\|_\infty, \|u'_\varphi\|_\infty, \|u''_\varphi\|_\infty), \max(\|u_z\|_\infty, \|u'_z\|_\infty, \|u''_z\|_\infty)\}$, $\|(f, g)\|_\infty = \max\{\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty, \|g_1\|_\infty, \|g_2\|_\infty\}$, $g = (g_1, g_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$, где $\|\cdot\|_\infty$ – максимум модуля на $[r_0, r_1]$, то C_4^2 , C_4 превращаются в банаховы пространства. $C_*^2 \subseteq C_4^2$ замкнутое пространство, и $\mathcal{A}(D)$ является изоморфизмом банаховых пространств, $\mathcal{A}(D) : C_*^2 \cong C_4$, обратное к которому задаётся формулой (35).

Построение функций Грина. Первый шаг – приведение систем (32) к каноническому виду, когда все дифференциальные уравнения системы имеют первый порядок. Для этого введём новые переменные $p_\varphi = U'_\varphi$, $q_\varphi = j'_\varphi$, $p_z = U'_z$, $q_z = j'_z$ и длинные векторы v_φ , v_z : $v_\varphi = (p_\varphi, q_\varphi, U_\varphi, j_\varphi)$, $v_z = (p_z, q_z, U_z, j_z)$. Тогда системы (32) равносильны таким системам:

$$\begin{aligned} \frac{dv_\varphi}{dr} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}I_2 & \frac{1}{r^2}I_2 + A^{-1}I_0 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} v_\varphi + \begin{pmatrix} \frac{1}{r}A^{-1}g \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{A}_1(D)u_\varphi = g, \quad (a) \\ \frac{dv_z}{dr} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}I_2 & A^{-1}I_0 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} v_z + \begin{pmatrix} \frac{1}{r}A^{-1}f \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{A}_2(D)u_z = f, \quad (б) \end{aligned} \tag{36}$$

где в правой части стоят блочные 4×4 матрицы, состоящие из 2×2 блоков, I_2 – единичная матрица второго порядка. Второй шаг – построение фундаментальных матриц решений для систем (36). Построим фундаментальную матрицу для системы (a) из (36). Пусть $v_\varphi^{(1)}$ – решение задачи Коши для однородной системы (a) из (36) с начальным условием $p_\varphi^{(1)}(r_1) = 1$, $q_\varphi^{(1)}(r_1) = U_\varphi^{(1)}(r_1) = j_\varphi^{(1)}(r_1) = 0$, а $v_\varphi^{(2)}$ – решение задачи Коши для однородной системы (a) из (36) с начальным условием $q_\varphi^{(2)}(r_1) = 1$, $p_\varphi^{(2)}(r_1) = U_\varphi^{(2)}(r_1) = j_\varphi^{(2)}(r_1) = 0$. Аналогично определяются решения задачи Коши для однородной системы (a) из (36) $v_\varphi^{(3)}$ и $v_\varphi^{(4)}$, выделяемые начальными условиями $p_\varphi^{(3)}(r_0) = 1$, $q_\varphi^{(3)}(r_0) = U_\varphi^{(3)}(r_0) = j_\varphi^{(3)}(r_0) = 0$ и $q_\varphi^{(4)}(r_0) = 1$, $p_\varphi^{(4)}(r_0) = U_\varphi^{(4)}(r_0) = j_\varphi^{(4)}(r_0) = 0$. Проверим, что система функций $v_\varphi^{(1)}$, $v_\varphi^{(2)}$, $v_\varphi^{(3)}$, $v_\varphi^{(4)}$ линейно независима. Если это так, то матрица $W_\varphi(r)$, столбцы которой состоят из указанных вектор-функций, является фундаментальной:

$$W(r) = W_\varphi(r) = [v_\varphi^{(1)} \ v_\varphi^{(2)} \ v_\varphi^{(3)} \ v_\varphi^{(4)}].$$

Доказательство линейной независимости. Пусть $\sum_{k=1}^4 \lambda_k v_\varphi^{(k)} \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$.

Покажем, что тогда $\lambda_1 v_\varphi^{(1)} + \lambda_2 v_\varphi^{(2)} \equiv 0$, $\lambda_3 v_\varphi^{(3)} + \lambda_4 v_\varphi^{(4)} \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$. Если это установлено, то, вычисляя первую сумму в точке r_1 , а вторую – в точке r_0 , имеем

$$0 = \lambda_1 v_\varphi^{(1)}(r_1) + \lambda_2 v_\varphi^{(2)}(r_1) = (\lambda_1, \lambda_2, 0, 0)^T, \quad 0 = \lambda_3 v_\varphi^{(3)}(r_0) + \lambda_4 v_\varphi^{(4)}(r_0) = (\lambda_3, \lambda_4, 0, 0)^T,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, что и доказывает линейную независимость. Установим, что $\lambda_1 v_\varphi^{(1)}(r_1) + \lambda_2 v_\varphi^{(2)}(r_1) \equiv 0$. Рассмотрим сумму $\lambda_1 u_\varphi^{(1)} + \lambda_2 u_\varphi^{(2)}$. Это решение однородной системы (a) из (36). По построению, $(\lambda_1 u_\varphi^{(1)} + \lambda_2 u_\varphi^{(2)})(r_1) = 0$. А для значения в точке r_0 имеем, по построению,

$$(\lambda_1 u_\varphi^{(1)} + \lambda_2 u_\varphi^{(2)})(r_0) = \left(\sum_{k=1}^4 \lambda_k u_\varphi^{(k)} \right)(r_0) - (\lambda_3 u_\varphi^{(3)} + \lambda_4 u_\varphi^{(4)})(r_0) = 0 - 0 = 0.$$

Значит, $\lambda_1 u_\varphi^{(1)} + \lambda_2 u_\varphi^{(2)}$ – решение однородной системы (a) из (36), удовлетворяющее однородным краевым условиям. По теореме 1, это нулевое решение, $\lambda_1 u_\varphi^{(1)} + \lambda_2 u_\varphi^{(2)} \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\lambda_1 \frac{d}{dr} u_\varphi^{(1)}(r) + \lambda_2 \frac{d}{dr} u_\varphi^{(2)}(r) \equiv 0, \quad \text{но} \quad \frac{d}{dr} u_\varphi^{(1)} \equiv (p_\varphi^{(1)}, q_\varphi^{(1)}), \quad \frac{d}{dr} u_\varphi^{(2)} \equiv (p_\varphi^{(2)}, q_\varphi^{(2)}). \quad \text{Поэтому}$$

отсюда следует $\lambda_1 v_\varphi^{(1)} + \lambda_2 v_\varphi^{(2)} \equiv 0$, что и утверждалось. Равенство $\lambda_3 v_\varphi^{(3)}(r) + \lambda_4 v_\varphi^{(4)}(r) \equiv 0$ проверяется аналогично.

Третий шаг – решение неоднородной системы (а) из (36) методом вариации произвольной постоянной, причём ищется решение с однородными граничными условиями. Это решение имеет вид $v_\varphi(r) = W(r)C(r)$, где $C(r) = (C_1(r), C_2(r), C_3(r), C_4(r))^T$. Вектор $C(r)$ с точностью до произвольной константы ищется из уравнения

$$C'(r) = W(r)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} A^{-1} g \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Произвольные константы подбираются так, чтобы решение $v_\varphi(r) = W(r)C(r)$ имело нулевые граничные условия. Для этого положим

$$C_1(r_0) = C_2(r_0) = 0, \quad C_3(r_1) = C_4(r_1) = 0. \quad (38)$$

Тогда для $u_\varphi(r) = \sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)} C_k(r)$ каждое слагаемое обращается в нуль на концах отрезка $[r_0, r_1]$ и, значит, $u_\varphi(r_0) = u_\varphi(r_1) = 0$. Заметим, что из (37) следует

$\sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)} C'_k \equiv 0$ и, значит,

$$\begin{pmatrix} p_\varphi(r) \\ q_\varphi(r) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})' C_k = \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)} C_k)' = u'_\varphi(r).$$

Напомним, что матрица $W(r)^{-1}$ образована элементами $W_{ji}/|W|$, где W_{ks} – алгебраическое дополнение элемента матрицы W , стоящего в k -й строке и s -м столбце. Итак, $(W(r)^{-1})_{ij} = W_{ji}/|W|$. Поэтому из (37) следует с учётом (38):

$$k = 1, 2: C_k(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{s} \left[W(s)^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} g \\ 0 \end{pmatrix} \right]_k ds = \int_{r_0}^r \frac{(W_{1k}(s), W_{2k}(s))}{s |W(s)|} A^{-1} g(s) ds,$$

$$u_\varphi^{(1)}(r) C_1(r) + u_\varphi^{(2)}(r) C_2(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=1}^2 u_\varphi^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1} g(s) ds.$$

Аналогично

$$k = 3, 4: C_k(r) = -\int_r^{r_1} \frac{1}{s} \left[W(s)^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1}g \\ 0 \end{pmatrix} \right]_k ds = -\int_r^{r_1} \frac{(W_{1k}(s), W_{2k}(s))}{s |W(s)|} A^{-1}g(s) ds,$$

$$u_\varphi^{(3)}(r)C_3(r) + u_\varphi^{(4)}(r)C_4(r) = -\int_r^{r_1} \frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=3}^4 u_\varphi^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}g(s) ds.$$

Введём в рассмотрение функцию $G_\varphi(r, s)$, $r, s \in [r_0, r_1]$:

$$G_\varphi(r, s) = \frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=1}^2 u_\varphi^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}, \quad r_0 \leq s \leq r,$$

$$= -\frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=3}^4 u_\varphi^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}, \quad r \leq s \leq r_1. \quad (39)$$

Тогда из приведённых вычислений следует основная формула

$$u_\varphi(r) = \int_{r_0}^{r_1} G_\varphi(r, s) g(s) ds. \quad (40)$$

G_φ называется 2×2 матричной функцией Грина для уравнения (а) из (36). Её основные свойства собраны в теореме 2, где $\Delta_\pm = \{(r, s) \in [r_0, r_1]^2 : \pm r < \pm s\}$ – полуоткрытые треугольники, возникающие при удалении из квадрата $[r_0, r_1]^2$ главной диагонали $d = \{(r, s) \in [r_0, r_1]^2 : r = s\}$: $[r_0, r_1]^2 \setminus d = \Delta_+ \cup \Delta_-$.

Теорема 2. 1) $G_\varphi(r, s)$ непрерывна в квадрате $[r_0, r_1]^2$.

2) При фиксированном $s \in [r_0, r_1]$ функция Грина $G_\varphi(r, s)$ как функция от r удовлетворяет однородным граничным условиям $G_\varphi(r_0, s) = G_\varphi(r_1, s) = 0$ и её столбцы являются на $[r_0, s]$ и $(s, r_1]$ решениями однородного уравнения (а) из (36).

3) Всюду в $[r_0, r_1]^2 \setminus d$ существуют непрерывные частные производные $\partial G_\varphi / \partial r$, $\partial^2 G_\varphi / \partial r^2$, которые с треугольников Δ_\pm непрерывно продолжаются на главную диагональ, причём для продолжений имеет место формула

$$\frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r+0, r) - \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r-0, r) = \frac{1}{r} A^{-1}, \quad r_0 < r < r_1.$$

4) Для функции (40) имеют место формулы

$$u'_\varphi(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial G_\varphi}{\partial r} g(s) ds, \quad u''_\varphi(r) = \frac{1}{r} A^{-1} g(r) + \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r^2} g(s) ds, \quad (41)$$

причём подынтегральные функции суммируемы.

5) *Отображение* $C_2[r_0, r_1] \rightarrow C_*^2[r_0, r_1]$, $g(s) \rightarrow u_\varphi(r)$, задаваемое формулой (40), является биекцией, обратная к которой определяется формулой $u_\varphi \rightarrow \mathcal{A}_1(D)u_\varphi = g$.

Из формул (41) следует, что отображение (40) определяет изоморфизм банаховых пространств $C_2[r_0, r_2] \cong C_*^2[r_0, r_1]$ и, более того, из (41) стандартными рассуждениями (см. [15]) выводится компактность отображения (40).

Дословно так же строится 2×2 матричная функция Грина $G_z(r, s)$ для уравнения (б) из (36). Сначала строим решения $v_z^{(k)}$, $1 \leq k \leq 4$ однородной системы (б) из (36), определяемые начальными условиями $p_z^{(1)}(r_1) = 1$, $q_z^{(1)}(r_1) = U_z^{(1)}(r_1) = j_z^{(1)}(r_1) = 0$; $q_z^{(2)}(r_1) = 1$, $p_z^{(2)}(r_1) = U_z^{(2)}(r_1) = j_z^{(2)}(r_1) = 0$; $p_z^{(3)}(r_0) = 1$, $q_z^{(3)}(r_0) = U_z^{(3)}(r_0) = j_z^{(3)}(r_0) = 0$; $q_z^{(4)}(r_0) = 1$, $p_z^{(4)}(r_0) = U_z^{(4)}(r_0) = j_z^{(4)}(r_0) = 0$. Аналогично предыдущему доказывают, что векторные функции $v_z^{(k)}$, $1 \leq k \leq 4$ линейно независимы, значит, матрица

$$W = W_z = [v_z^{(1)} \ v_z^{(2)} \ v_z^{(3)} \ v_z^{(4)}],$$

столбцы которой составляют векторы $v_z^{(k)}$, $1 \leq k \leq 4$, является фундаментальной для системы (б) из (36). Далее ищем решение неоднородной системы (б) из (36), удовлетворяющей однородным граничным условиям, методом вариации произвольной постоянной. Это решение имеет вид $v_z(r) = W(r)C(r)$, где 4-вектор-столбец ищется из уравнения

$$C'(r) = W(r)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} A^{-1} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $C_1(r_0) = C_2(r_0) = 0$, $C_3(r_1) = C_4(r_1) = 0$. В итоге приходим к формулам, аналогичным (40), (39):

$$u_z(r) = \int_{r_0}^{r_1} G_z(r, s) f(s) ds, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} G_z(r, s) &= \frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=1}^2 u_z^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}, \quad r_0 \leq s \leq r, \\ &= -\frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=3}^4 u_z^{(k)}(r) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}, \quad r \leq s \leq r_1. \end{aligned} \quad (43)$$

Наконец, справедлива теорема 2, если в ней везде заменить $G_\varphi \rightarrow G_z$, $g \rightarrow f$, $u_\varphi \rightarrow u_z$, $\mathcal{A}_1(D) \rightarrow \mathcal{A}_2(D)$, (б) из (36) \rightarrow (а) из (36), (40) \rightarrow (42), (39) \rightarrow (43). Из теоремы 2 следует, что отображение (42) определяет изоморфизм банаховых пространств $C_2[r_0, r_1] \cong C_*^2[r_0, r_1]$, обратным к которому является отображение $u_z \rightarrow f = \mathcal{A}_2(D)u_z$.

Из теоремы 2 нетрудно вывести следующие свойства 4x4 матричной функции Грина $G(r, s)$ для краевой задачи (31), определяемой формулой (34), собранные в следующей теореме.

Теорема 3. 1) $G(r, s)$ непрерывна в квадрате $[r_0, r_1]^2$.

2) При фиксированном $s \in [r_0, r_1]$ функция Грина $G(r, s)$ как функция от r удовлетворяет однородным граничным условиям $G(r_0, s) = G(r_1, s) = 0$, а её столбцы являются на $[r_0, s]$ и $(s, r_1]$ решениями однородного уравнения (31).

3) Всюду в $[r_0, r_1]^2 \setminus d$ существуют непрерывные частные производные $\partial G / \partial r$, $\partial^2 G / \partial r^2$, которые с треугольников Δ_\pm непрерывно продолжаются на главную диагональ, причём для продолжений имеет место формула

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r+0, r) - \frac{\partial G}{\partial r}(r-0, r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad r_0 < r < r_1.$$

4) Для функции (35) имеют место формулы

$$\begin{pmatrix} u'_\varphi(r) \\ u'_z(r) \end{pmatrix} = \int_{r_0}^r \frac{\partial G}{\partial r} \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} ds, \quad \begin{pmatrix} u''_\varphi(r) \\ u''_z(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} + \int_{r_0}^r \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} ds, \quad (44)$$

причём подынтегральные функции суммируемы.

5) Отображение $C_4[r_0, r_1] \rightarrow C_*^2[r_0, r_1]$, $(f, g) \rightarrow (u_\varphi, u_z)$, задаваемое формулой (35), является биекцией, обратная к которой определяется формулой $(u_\varphi, u_z) \rightarrow (f, g)^T = \mathcal{A}(D)(u_\varphi, u_z)^T$.

Из формулы (44) следует, что отображение (35) определяет изоморфизм банаховых пространств $C_2[r_0, r_1] \cong C_*^2[r_0, r_1]$. Более того, из (44) стандартными рассуждениями выводится компактность отображения (35).

Доказательство теоремы 1. Однородное уравнение (30) равносильно соотношениям

$$\begin{aligned} (ArL_2(D)) - rI_0 u_z = 0, \quad (ArL_1(D)) - rI_0 u_\varphi = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (I_2 r L_2(D) - rA^{-1}I_0) u_z = 0, \quad (I_2 r L_1(D) - rA^{-1}I_0) u_\varphi = 0, & \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$A^{-1}\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & a\bar{a}_{12} \\ 0 & a\bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad a = \kappa^2 v_m.$$

Рассмотрим первое уравнение (45). Оно эквивалентно двум равенствам:

$$rL_2(D)U_z - ra\bar{a}_{12}j_z = 0, \quad rL_2(D)j_z - ra\bar{a}_{22}j_z = 0. \quad (46)$$

Из последнего равенства (46) следует

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_0}^{r_1} (rL_2(D)j_z - ra\bar{a}_{22}j_z) j_z dr = \int_{r_0}^{r_1} \left(rj_z \frac{d^2 j_z}{dr^2} + \frac{dj_z}{dr} j_z - ra\bar{a}_{22}j_z^2 \right) dr = \\ &= rj_z \frac{dj_z}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1} + \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dj_z}{dr} \frac{d}{dr} (rj_z) + \frac{dj_z}{dr} j_z - ra\bar{a}_{22}j_z^2 \right] dr = - \int_{r_0}^{r_1} \left[r \left(\frac{dj_z}{dr} \right)^2 + ra\bar{a}_{22}j_z^2 \right] dr, \end{aligned}$$

где использовано интегрирование по частям и краевое условие $j_z(r_0) = j_z(r_1) = 0$. Поскольку $\bar{a}_{22} = a_{11} / \Delta > 0$ (где $\Delta = \det A$), $a > 0$, то из полученного равенства следует $j_z \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$. Тогда первое равенство (46) даёт $rL_2(D)U_z = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_0}^{r_1} (rL_2(D)U_z)U_z dr = \int_{r_0}^{r_1} \left(rU_z \frac{d^2 U_z}{dr^2} + \frac{dU_z}{dr} U_z \right) dr = rU_z \frac{dU_z}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1} + \\ &+ \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dU_z}{dr} \frac{d(rU_z)}{dr} + \frac{dU_z}{dr} U_z \right] dr = \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dU_z}{dr} \frac{d(rU_z)}{dr} + \frac{dU_z}{dr} U_z \right] dr = - \int_{r_0}^{r_1} r \left(\frac{dU_z}{dr} \right)^2 dr, \end{aligned}$$

где снова использовано интегрирование по частям и краевое условие $U_z(r_0) = U_z(r_1) = 0$. Из полученного равенства следует $dU_z/dr \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$, значит, $U_z \equiv \text{const}$ на $[r_0, r_1]$, а из граничных условий следует, что $\text{const} = 0$. Поэтому $U_z \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$.

Второе уравнение (45) рассматривается аналогично. Оно равносильно двум равенствам

$$rL_1(D)U_\varphi - ra\bar{a}_{12}j_\varphi = 0, \quad rL_1(D)j_\varphi - ra\bar{a}_{22}j_\varphi = 0. \quad (47)$$

Из последнего равенства (47), рассуждая аналогично, выводим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_0}^{r_1} (rL_1(D)j_\varphi - ra\bar{a}_{22}j_\varphi) j_\varphi dr = \int_{r_0}^{r_1} \left(rj_\varphi \frac{d^2 j_\varphi}{dr^2} + \frac{dj_\varphi}{dr} j_\varphi - \frac{j_\varphi^2}{r} - ra\bar{a}_{22}j_\varphi^2 \right) dr = rj_\varphi \frac{dj_\varphi}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1} + \\ &+ \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dj_\varphi}{dr} \frac{drj_\varphi}{dr} + \frac{dj_\varphi}{dr} j_\varphi - \frac{j_\varphi^2}{r} - ra\bar{a}_{22}j_\varphi^2 \right] dr = - \int_{r_0}^{r_1} \left[r \left(\frac{dj_\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{j_\varphi^2}{r} + ra\bar{a}_{22}j_\varphi^2 \right] dr. \end{aligned}$$

Из полученного равенства, учитывая $a > 0$, $\bar{a}_{22} > 0$, следует $j_\varphi \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$. Но тогда первое равенство (47) даёт $rL_1(D)U_\varphi = 0$, откуда, рассуждая аналогично, выводим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_0}^{r_1} (rL_1(D)U_\varphi)U_\varphi dr = \int_{r_0}^{r_1} \left[rU_\varphi \frac{d^2U_\varphi}{dr^2} + \frac{dU_\varphi}{dr}U_\varphi - \frac{U_\varphi^2}{r} \right] dr = rU_\varphi \frac{dU_\varphi}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1} + \\ &+ \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dU_\varphi}{dr} \frac{d(rU_\varphi)}{dr} + \frac{dU_\varphi}{dr}U_\varphi - \frac{U_\varphi^2}{r} \right] dr = \int_{r_0}^{r_1} \left[-\frac{dU_\varphi}{dr} \frac{drU_\varphi}{dr} + \frac{dU_\varphi}{dr}U_\varphi - \frac{U_\varphi^2}{r} \right] dr = \\ &= -\int_{r_0}^{r_1} \left[r \left(\frac{dU_\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{U_\varphi^2}{r} \right] dr. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует $U_\varphi \equiv 0$ на $[r_0, r_1]$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. 1) Из (39) следует, что при $s \leq r$ и $s \geq r$ функция $G_\varphi(r, s)$ непрерывна. Поэтому достаточно показать, что обе формулы из правой части (39) совпадают при $r = s$. Условие совпадения переписывается в виде

$$\frac{1}{r|W(r)|} \sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)}(r)(W_{1k}(r), W_{2k}(r))A^{-1} = 0.$$

Установим равенства $\sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)}W_{1k} = 0$, $\sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)}W_{2k} = 0$, из которых автоматически вытекает условие совпадения. Для этого заменим в матрице W первую строку на $(U_\varphi^{(1)}, U_\varphi^{(2)}, U_\varphi^{(3)}, U_\varphi^{(4)})$. Определитель изменённой матрицы равен нулю, поскольку в ней две строки (1-я и 3-я) совпадают. Вычисляя этот нулевой определитель разложением по первой строке, получим $0 = \sum_{k=1}^4 U_\varphi^{(k)}W_{1k}$.

Аналогично, если 1-ю строку матрицы W заменить на $(j_\varphi^{(1)}, j_\varphi^{(2)}, j_\varphi^{(3)}, j_\varphi^{(4)})$, то получится матрица с двумя одинаковыми строками (1-й и 4-й) и с нулевым определителем. Вычисляя этот нулевой определитель разложением по первой строке, получим $0 = \sum_{k=1}^4 j_\varphi^{(k)}W_{1k}$. Итак, мы доказали $\sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)}W_{1k} = 0$. Для

доказательства второго тождества надо в матрице W заменить вторую строку сначала на $(U_\varphi^{(1)}, U_\varphi^{(2)}, U_\varphi^{(3)}, U_\varphi^{(4)})$, а затем на $(j_\varphi^{(1)}, j_\varphi^{(2)}, j_\varphi^{(3)}, j_\varphi^{(4)})$ и вычислить, очевидно, нулевой определитель изменённой матрицы разложением его по 2-й строке.

2) Согласно формуле (39)

$$G_\varphi(r_0, s) = -\frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=3}^4 u_\varphi^{(k)}(r_0) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1} = 0,$$

ибо $r_0 \leq s$ и, по построению, $u_\varphi^{(k)}(r_0) = 0$, $k = 3, 4$;

$$G_\varphi(r_1, s) = \frac{1}{s |W(s)|} \sum_{k=1}^2 u_\varphi^{(k)}(r_1) (W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1} = 0,$$

ибо $s \leq r_1$ и, по построению, $u_\varphi^{(k)}(r_1) = 0$, $k = 1, 2$.

При $r \in [r_0, s)$ имеем $r < s$, и $G_\varphi(r, s)$ вычисляется по нижней формуле (39), которая даёт для столбцов G_φ выражение

$$G_\varphi(r, s) = \left[\sum_{k=3}^4 u_\varphi^{(k)}(r) a_{1k}(s) \quad \sum_{k=3}^4 u_\varphi^{(k)}(r) a_{2k}(s) \right], (a_{1k}(s), a_{2k}(s)) = -\frac{(W_{1k}(s), W_{2k}(s)) A^{-1}}{s |W(s)|}.$$

Значит, каждый из столбцов G_φ при фиксированном s является линейной комбинацией векторов-столбцов $u_\varphi^{(3)}$ и $u_\varphi^{(4)}$, которые, по построению, являются решениями однородного уравнения (а) из (36).

Аналогично при $r \in (s, r_1]$ имеем $s < r$, и $G_\varphi(r, s)$ вычисляется по верхней формуле (39), которая даёт для столбцов G_φ выражение

$$G_\varphi(r, s) = \left[-\sum_{k=1}^2 u_\varphi^{(k)}(r) a_{1k}(s) \quad -\sum_{k=1}^2 u_\varphi^{(k)}(r) a_{2k}(s) \right]$$

и, значит, каждый столбец G_φ при фиксированном s является линейной комбинацией векторов-столбцов $u_\varphi^{(1)}$ и $u_\varphi^{(2)}$, которые, по построению, являются решениями однородного уравнения (а) из (36).

3) Утверждение о непрерывности и непрерывной продолжаемости на диагональ следует из явного выражения (39) для G_φ . Установим формулу. Согласно (39),

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r+0, r) &= \frac{1}{r |W(r)|} \sum_{k=1}^2 (u_\varphi^{(k)})'(r) (W_{1k}(r), W_{2k}(r)) A^{-1}, \\ \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r-0, r) &= -\frac{1}{r |W(r)|} \sum_{k=3}^4 (u_\varphi^{(k)})'(r) (W_{1k}(r), W_{2k}(r)) A^{-1}. \end{aligned}$$

Учитывая $(u_\varphi^{(k)})' = (p_\varphi^{(k)}, q_\varphi^{(k)})^T$, получим

$$\frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r+0, r) - \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r-0, r) = \frac{1}{r |W(r)|} \sum_{k=1}^4 \begin{pmatrix} p_\varphi^{(k)} \\ q_\varphi^{(k)} \end{pmatrix} (W_{1k}, W_{2k}) A^{-1}.$$

Но нетрудно установить (см. рассуждение из пункта 1 настоящего доказательства, связанное с заменой строк в матрице W), что

$$|W(r)| = \sum_{k=1}^4 p_\varphi^{(k)} W_{1k} = \sum_{k=1}^4 q_\varphi^{(k)} W_{2k}, \quad \sum_{k=1}^4 p_\varphi^{(k)} W_{2k} = 0 = \sum_{k=1}^4 q_\varphi^{(k)} W_{1k}.$$

Поэтому окончательно получим

$$\frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r+0, r) - \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r-0, r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1},$$

ч.т.д.

4) Повторяя выкладки при выводе формулы (39), нетрудно установить

$$\sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})'(r) C_k(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial G_\varphi}{\partial r} g(s) ds, \quad \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})''(r) C_k(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r^2} g(s) ds.$$

Для функции $u_\varphi(r) = \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})(r) C_k(r)$ с учётом тождества $\sum_{k=1}^4 u_\varphi^{(k)}(r) C_k'(r) \equiv 0$

получим

$$u_\varphi'(r) = \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})'(r) C_k(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial G_\varphi}{\partial r} g(s) ds,$$

$$u_\varphi''(r) = \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})''(r) C_k(r) + \sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})'(r) C_k'(r).$$

Но

$$\sum_{k=1}^4 (u_\varphi^{(k)})'(r) C_k'(r) = \sum_{k=1}^4 \begin{pmatrix} p_\varphi^{(k)} \\ q_\varphi^{(k)} \end{pmatrix} C_k'(r) \stackrel{(37)}{=} \frac{1}{r} A^{-1} g(r).$$

Поэтому имеем

$$u_\varphi''(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial r^2} g(s) ds + \frac{1}{r} A^{-1} g(r),$$

ч.т.д.

5) Пусть дано $g \in C_2[r_0, r_1]$, и u_φ вычисляется по (40). По построению, $u_\varphi \in C_*^2[r_0, r_1]$ и $\mathcal{A}_1(D)u_\varphi = g$. Обратно, пусть $\bar{u}_\varphi \in C_*^2[r_0, r_1]$ – произвольное и $g \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_1(D)\bar{u}_\varphi$. Тогда $g \in C_2[r_0, r_1]$, а функция u_φ , определяемая по g формулой (40), лежит в $C_*^2[r_0, r_1]$ и удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_1(D)u_\varphi = g$. Таким образом,

u_φ и \bar{u}_φ – решения уравнения (а) из (36), удовлетворяющие одним и тем же (однородным) граничным условиям с одной и той же правой частью. По теореме единственности (теорема 1), $u_\varphi = \bar{u}_\varphi$. Тем самым утверждение о биективности доказано. #

Конструкция функции Грина приводит к ряду принципиальных выводов.

Во-первых, гарантируется существование и единственность решения краевой задачи с граничными условиями типа Дирихле для уравнения (31). Действительно, единственность решения следует из теоремы 1, а существование (см. выше) достаточно проверить только для однородных граничных условий, а для них решение задаётся явной формулой (35), использующей построенную функцию Грина $G(r, s)$.

Во-вторых, существование и единственность решения краевой задачи с граничными условиями типа Дирихле для общего уравнения (29) сводится к доказательству теоремы единственности для однородного уравнения (29). В самом деле, если эта теорема верна, то, следуя вышеуказанной методике, нетрудно построить функцию Грина для уравнения (29) и обратить оператор $\mathcal{A}(D) - \Phi_* B$, заданный на $C_*^2[r_0, r_1]$, что приводит к доказательству существования решения краевой задачи для уравнения (29) с однородными (а значит, и с любыми) граничными условиями типа Дирихле. С другой стороны, несправедливость теоремы единственности для однородного уравнения (29) равносильна либо условию, что Φ_* – собственное число оператора

$$B^{-1}\mathcal{A}(D) = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1}\mathcal{A}_2(D) \\ -B^{-1}\mathcal{A}_1(D) & 0 \end{pmatrix},$$

либо утверждению, что Φ_*^{-1} – собственное число оператора $\mathcal{A}(D)^{-1} \circ B$. Поскольку последний оператор компактный, то он имеет [15] не более чем счётное число собственных значений, каждое из которых обладает конечной кратностью (\equiv собственное пространство конечномерное), и единственной предельной точкой множества собственных чисел может быть только 0. В частности, множество собственных чисел имеет (если не пусто) наибольший по модулю элемент, и, значит, для всех достаточно малых $|\Phi_*|$ значения Φ_*^{-1} заведомо не являются собственными числами оператора $\mathcal{A}(D)^{-1} \circ B$, и для таких Φ_* теорема единственности для однородного уравнения (29) верна. Окончательный вывод о справедливости теоремы единственности для однородного уравнения (29) (а значит, и об однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения (29)) требует вычисления спектра оператора $B^{-1}\mathcal{A}(D)$ или, что то же самое оператора $\mathcal{A}(D)^{-1} \circ B$, что выходит за рамки настоящей работы. Отметим, указанная задача вычисления спектра имеет в основном академический интерес, поскольку для реальных параметров СПД, как

показали практические расчёты, краевые задачи для уравнения (29) имеют, и притом единственное, решение.

В-третьих, полученные результаты позволяют доказать сходимость итераций в предложенных выше методах последовательных приближений.

Теорема 4. *Существует константа $C > 0$, для которой при любом $|\Phi_*| < C$ оба итерационных процесса из п. 2 сходятся по норме $\|\cdot\|_\omega$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, к решению краевой задачи с произвольными граничными условиями типа Дирихле для уравнения (29) для любых начальных данных $u_\varphi^{(0)}, u_z^{(0)} \in C_2^2[r_0, r_1]$.*

Доказательство. Считая $\Phi_* \neq 0$, проведём выкладки для первого метода приближений, задаваемого формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(D)u_z^{(n+1)} &= \Phi_* B u_\varphi^{(n)} + r f_*, \quad \mathcal{A}_1(D)u_\varphi^{(n+1)} = -\Phi_* B u_z^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ u_\varphi^{(0)}, u_z^{(0)} &\in C_2^2[r_0, r_1] - \text{произвольные.} \end{aligned} \quad (48)$$

Для второго метода рассуждения аналогичные. Заметим, что из теорем 1, 2 следует, что существуют, и притом единственные, $u_z^{(n+1)}, u_\varphi^{(n+1)}$, удовлетворяющие краевым задачам для уравнений (48). Обозначим норму в $C_2^2[r_0, r_1]$ через $\|\cdot\|_\omega$, а в $C_2[r_0, r_1]$ – через $\|\cdot\|_\infty$. Очевидно, $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_\omega$. Из (48) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(D)(u_z^{(n+1)} - u_z^{(n)}) &= \Phi_* B (u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(n-1)}), \quad n \geq 1, \\ \mathcal{A}_1(D)(u_\varphi^{(n+1)} - u_\varphi^{(n)}) &= -\Phi_* B (u_z^{(n)} - u_z^{(n-1)}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку $u_z^{(n+1)} - u_z^{(n)}, u_\varphi^{(n+1)} - u_\varphi^{(n)} \in C_*^2[r_0, r_1]$, то из теоремы 2 следуют неравенства

$$\|u_z^{(n+1)} - u_z^{(n)}\|_\omega \leq |\Phi_*| \cdot \|\mathcal{A}_2(D)^{-1} B\| \cdot \|u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(n-1)}\|_\infty \leq q_2 \|u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(n-1)}\|_\omega, \quad n \geq 1,$$

Аналогично выводится неравенство

$$\|u_\varphi^{(n+1)} - u_\varphi^{(n)}\|_\omega \leq q_1 \|u_z^{(n)} - u_z^{(n-1)}\|_\omega, \quad n \geq 1,$$

где $q_i = |\Phi_*| \cdot \|\mathcal{A}_i(D)^{-1} B\|$, $i = 1, 2$.

Обозначим $x_n = \|u_z^{(n)} - u_z^{(n-1)}\|_\omega$, $y_n = \|u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(n-1)}\|_\omega$, $n \geq 1$.

Тогда полученные неравенства переписываются в виде

$$x_{n+1} \leq q_2 y_n, \quad y_{n+1} \leq q_1 x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Наконец, выберем $\Phi_* \neq 0$:

$$|\Phi_*| < (\|\mathcal{A}_1(D)^{-1} B\| \cdot \|\mathcal{A}_2(D)^{-1} B\|)^{-1/2} = C. \quad (50)$$

При соблюдении условия (50) очевидно $0 < q_1 \cdot q_2 < 1$. Теперь утверждение теоремы вытекает из следующей технической леммы.

Лемма. При соблюдении условия (50) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное $N = N(\varepsilon)$: для любых $n, m > N$ ($n > m$) справедливы неравенства $x_n + \dots + x_{m+1} < \varepsilon$, $y_n + \dots + y_{m+1} < \varepsilon$.

Допустим, лемма доказана. Завершим доказательство теоремы. Проверим фундаментальность по норме $\|\cdot\|_\omega$ последовательностей $\{u_z^{(n)}\}_{n \geq 0}$ и $\{u_\varphi^{(n)}\}_{n \geq 0}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $N = N(\varepsilon)$ – натуральное, предусмотренное леммой. Тогда для любых $n, m > N$ ($n > m$) имеем

$$\begin{aligned} \|u_z^{(n)} - u_z^{(m)}\|_\omega &\leq \|u_z^{(n)} - u_z^{(n-1)}\|_\omega + \dots + \|u_z^{(m+1)} - u_z^{(m)}\|_\omega = x_n + \dots + x_{m+1} < \varepsilon, \\ \|u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(m)}\|_\omega &\leq \|u_\varphi^{(n)} - u_\varphi^{(n-1)}\|_\omega + \dots + \|u_\varphi^{(m+1)} - u_\varphi^{(m)}\|_\omega = y_n + \dots + y_{m+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает фундаментальность указанных последовательностей. Из банаховости пространства $C_2^2[r_0, r_1]$ по норме $\|\cdot\|_\omega$ следует их сходимости по норме $\|\cdot\|_\omega$ к некоторым функциям $u_z, u_\varphi \in C_2^2[r_0, r_1]$, которые доставляют решение краевой задачи (29). Действительно, $\mathcal{A}_i(D) : (C_2^2[r_0, r_1], \|\cdot\|_\omega) \rightarrow (C_2[r_0, r_1], \|\cdot\|_\infty)$, $i = 1, 2$ – непрерывные отображения, поэтому при $n \rightarrow +\infty$ в норме $\|\cdot\|_\infty$ имеем $\mathcal{A}_2(D)u_z^{(n)} \rightarrow \mathcal{A}_2(D)u_z$, $\mathcal{A}_1(D)u_\varphi^{(n)} \rightarrow \mathcal{A}_1(D)u_\varphi$, $\Phi_*Bu_z^{(n)} \rightarrow \Phi_*Bu_z$, $\Phi_*Bu_\varphi^{(n)} \rightarrow \Phi_*Bu_\varphi$. Переходя к пределу $n \rightarrow +\infty$ в соотношениях (48), получим $\mathcal{A}_2(D)u_z = \Phi_*Bu_\varphi + rf_*$, $\mathcal{A}_1(D)u_\varphi = -\Phi_*Bu_z$, значит, u_φ, u_z – решение (29).

Доказательство леммы. Из (49) индукцией по n легко устанавливаются неравенства $x_{2n+1} \leq (q_1q_2)^n x_1$, $n \geq 0$, $x_{2n} \leq (q_1q_2)^{n-1} x_2$, $n \geq 1$ и такие же неравенства для последовательности y_n , $n \geq 1$. Пусть выполнено условие (50), тогда $0 < q_1 \cdot q_2 < 1$. Оценим сумму $x_n + \dots + x_{m+1}$, $n > m$. Если m – чётное, $m = 2\ell$, то, учитывая неотрицательность x_k , получим

$$x_n + \dots + x_{m+1} \leq x_{2\ell+1} + x_{2\ell+2} + \dots = \{x_{2\ell+1} + x_{2\ell+3} + \dots\} + \{x_{2(\ell+1)} + x_{2(\ell+2)} + \dots\},$$

где в фигурных скобках собраны все x_k либо только с чётными индексами $k \geq m+1$, либо только с нечётными. Учитывая $q_1q_2 < 1$ и суммируя члены геометрической прогрессии со знаменателем q_1q_2 , получим

$$\begin{aligned} x_n + \dots + x_{m+1} &\leq x_1 \{(q_1q_2)^\ell + (q_1q_2)^{\ell+1} + \dots\} + x_2 \{(q_1q_2)^\ell + (q_1q_2)^{\ell+1} + \dots\} = \\ &= \frac{x_1 + x_2}{1 - q_1q_2} (q_1q_2)^\ell. \end{aligned}$$

Такую же оценку получим и для нечётного $m = 2\ell + 1$, и для суммы $y_n + \dots + y_{m+1}$, $m < n$, только в последнем случае надо вместо $x_1 + x_2$ взять $y_1 + y_2$:

$$y_n + \dots + y_{m+1} \leq \frac{y_1 + y_2}{1 - q_1 q_2} (q_1 q_2)^\ell, \quad m = 2\ell \text{ либо } m = 2\ell + 1.$$

Теперь легко проверить, что для всех достаточно малых ε в качестве $N(\varepsilon)$ надо взять целое

$$N(\varepsilon) = 1 + \left\lfloor 2 \ln \left\{ \frac{(1 - q_1 q_2) \varepsilon}{\max(x_1 + x_2, y_1 + y_2) + 1} \right\} \cdot \ln^{-1}(q_1 q_2) + 1 \right\rfloor,$$

где справа $\lfloor \dots \rfloor$ – целая часть числа. Лемма доказана. #

Из доказательства теоремы 4 следует, что последовательные приближения $u_\varphi^{(n)}$, $u_z^{(n)}$ сходятся к точному решению u_φ , u_z со скоростью геометрической прогрессии, т.е. для некоторого $0 < q < 1$ верны неравенства $\|u_\varphi - u_\varphi^{(n)}\|_\omega < Dq^n$, $\|u_z - u_z^{(n)}\|_\omega < Dq^n$ для всех достаточно больших n , где константа $D > 0$.

4. Результаты численных расчётов

Ниже приведены результаты численного решения с использованием п. 2 краевых задач для уравнений (13) (рис. 2, 3), (15) (рис. 4), задач Коши для уравнений (17) (рис. 5) и вычисление силы тяги и распределений градиентов давлений электронов и ионов по формулам (14) и (15) (рис. 6). Для уравнения (13) использовался 1-й метод из п. 3. В условии остановки процесса итераций (21) предполагалось $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon_0 = 10^{-6}$. Отметим, что 2-й метод из п. 2 даёт такие же результаты. В разделе приведены численные расчёты для характерных безразмерных параметров $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $L = 2.5$, $\xi = 0.53$, $\kappa = 4$, $\nu_m = 0.04265$, $\kappa_+ = 280$, $\kappa_- = 5 \cdot 10^4$, $b = 250$, $T_0 = 1$, $T_1 = 1$, $j_0 = 0$, $j_1 = 0$, $\Phi_* = 5$, $E_0 = 4 \cdot 10^4$.

Безразмерная величина силы тяги в данном случае равна $F_T = 1.1764$.

Приведённые на рис. 2–6 результаты расчётов демонстрируют физически ожидаемые параболические профили продольных скоростей U_z тока j_z с ничтожно малой азимутальной закруткой: $|U_\varphi / U_z| \sim 10^{-4}$, $|j_\varphi / j_z| \sim 10^{-3}$. Таким образом, плазменная струя выбрасывается почти параллельно установке, а азимутальные токи и скорости разнонаправленные. При этом в размерных единицах $U_z \sim 15 \text{ км/с}$, а сила тяги $F_T \sim 10 \text{ мН}$, что соответствует экспериментально наблюдаемым значениям. Температурные эпюры обнаруживают ярко выраженное «плато» по центру плазменной струи, в

котором температуры электронов и ионов одного порядка и примерно на 25% превышают температуры боковых стенок камеры. Эпюры градиентов давлений показывают, что давление электронов в струе на два порядка выше давления ионов, причём оба давления максимальны на внутренней боковой стенке и монотонно спадают к внешней боковой стенке установки. Наконец, продольное магнитное поле ничтожно мало по сравнению с азимутальным, $|H_z / H_\phi| \sim 10^{-4}$.

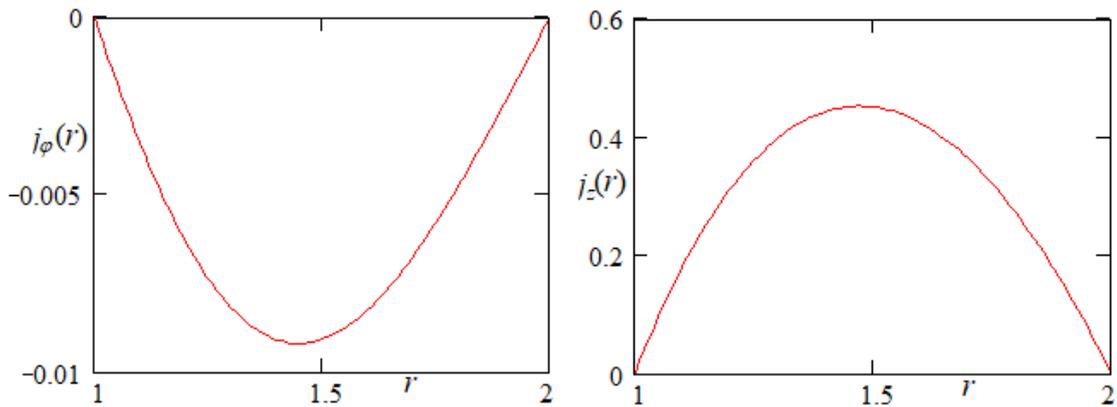


Рис. 2. Зависимость плотности тока от радиуса r

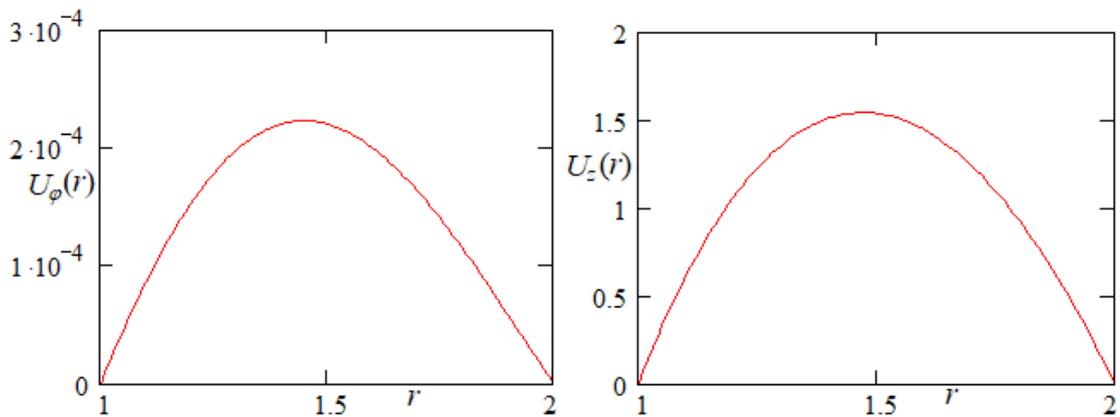


Рис. 3. Зависимость массовой скорости от радиуса r

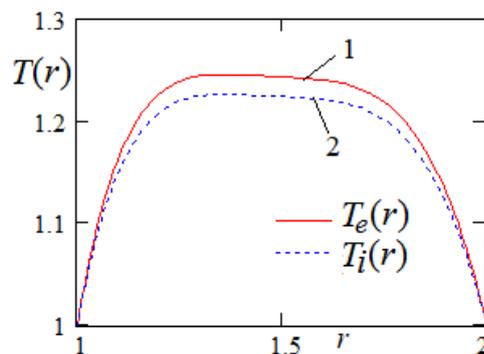


Рис. 4. Зависимость температуры электронов T_e и ионов T_i от радиуса r

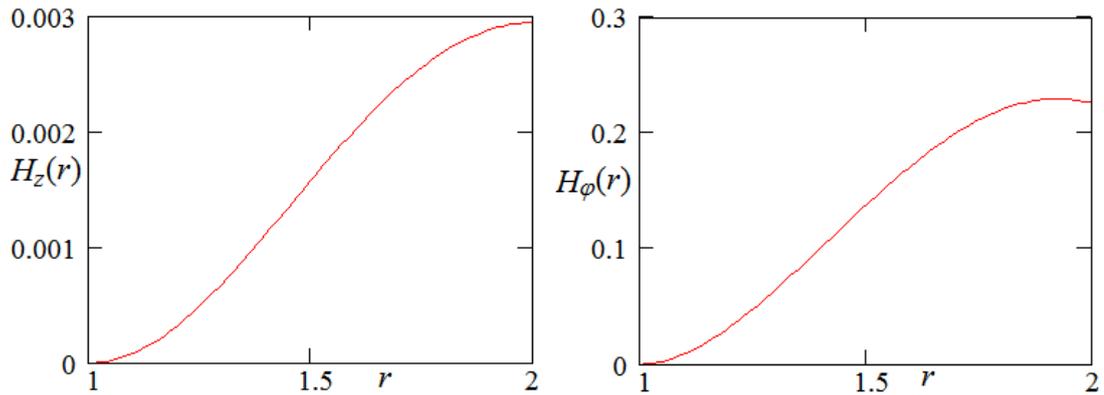


Рис. 5. Зависимость напряжённости магнитного поля от радиуса r

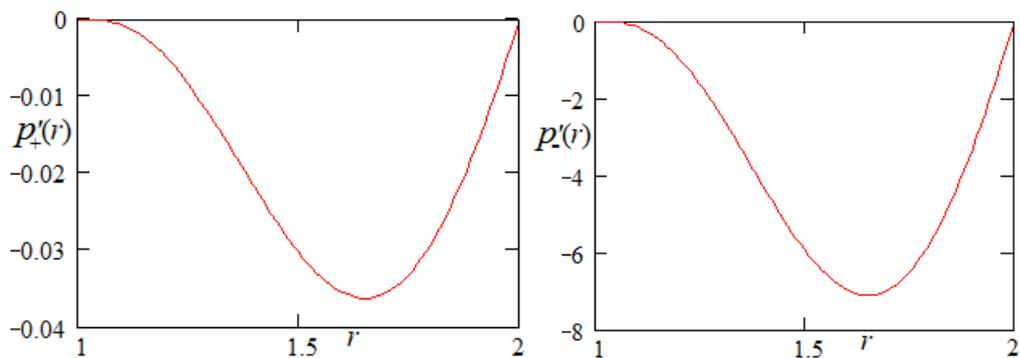


Рис. 6. Зависимость градиентов давления ионов p'_+ и электронов p'_- от радиуса r

Заключение

В работе построена математическая модель, позволяющая вычислять параметры плазменной струи на выходе СПД, минуя расчёт основных плазменных процессов в двигателе. Оказывается, при условии установления выходных параметров на оси установки и несжимаемости плазмы это возможно.

Важно подчеркнуть определяющую роль выбора фундаментальной системы уравнений, которой подчиняется динамика плазмы в СПД. Например, если в качестве таковой выбрать уравнения классической МГД (что соответствует случаю $\zeta = 0$ в базовых уравнениях п. 1), то эпюры скорости и тока ищутся аналитически, и для продольной скорости имеем $U_z \equiv 0$, и, значит, сила тяги тоже равна нулю, что физически абсурдно.

Кроме того, результаты расчётов с учётом пристеночной проводимости и выражения боковых стенок вокруг общей оси демонстрируют влияние указанных факторов на выходные эпюры параметров плазменной струи. Однако анализ этого влияния выходит за рамки настоящей работы.

Список литературы

1. Морозов А.И. Эффект пристеночной проводимости в хорошо замагниченной плазме // ПМТФ. 1968. № 3. С. 19–23.
2. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006. – 576 с.
3. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.
4. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937. Т. 7. № 2. С. 203-209.
5. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965. – 212 с.
6. Имшенник В.С. О теплопроводности плазмы // Астрономический журнал, 1961. Т. 38. № 4. С. 652-655.
7. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
8. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. – Москва: КРАСАНД, 2018. – 584 с.
9. Соловьёв Л.С. К релятивистской гидродинамике / Собрание трудов в двух томах. Т. II. – Москва: Наука, 2001. – 414 с.
10. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
12. Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V. History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
13. Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А. Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
14. Mitrofanova O.A., Gnizdor R.Yu., Murashko V.M., Koryakin A.I., Nesterenko A.N. New Generation of SPT-100. 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany. September 11–15, 2011, 7 p. IEPC-2011-041.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

Оглавление

Введение	3
1. Основные уравнения	6
2. Численное решение уравнений	16
3. Некоторые математические вопросы решения системы (18)	22
4. Результаты численных расчётов	37
Заключение	39
Список литературы	40