



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**М.А. Кирюшина**

Численный эксперимент в  
задаче о распространении  
малых возмущений в круглой  
трубе

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Кирюшина М.А. Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 48. 21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-48>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-48>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.А. Кирюшина**

**Численный эксперимент в задаче  
о распространении малых возмущений  
в круглой трубе**

**Москва – 2024**

**Кирюшина М.А.**

**Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе**

Рассматривается течение вязкой несжимаемой изотермической жидкости в круглой трубе при умеренных числах Рейнольдса, соответствующих ламинарному и турбулентному режимам. Задача решается в нестационарной постановке, используется пространственная система координат Эйлера. В качестве математического алгоритма применяются квазигидродинамические (КГидД) уравнения. В рамках данного алгоритма впервые показано, что случайные возмущения входной скорости в канале затухают для малых чисел Рейнольдса и приводят к формированию турбулентного режима для больших чисел Рейнольдса.

**Ключевые слова:** КГидД уравнения вязкой несжимаемой жидкости, OpenFOAM, круглая труба, ламинарный и турбулентный режимы

**Maria Alexandrovna Kiriushina**

**Numerical experiment in the problem of propagation of small perturbations in a round pipe**

Flow of viscous incompressible isothermal liquid in round pipe at moderate Reynolds numbers corresponding to laminar and turbulent modes is considered. The problem is solved in a non-stationary formulation, the spatial coordinate system of Euler is used. As a mathematical algorithm, quasi-hydrodynamic (QHD) equations are used. Within the framework of this algorithm, it was first shown that random perturbations of the input speed in the channel attenuate for small Reynolds numbers and lead to the formation of a turbulent mode for large Reynolds numbers.

**Key words:** viscous incompressible fluid QHD equation, OpenFOAM, round pipe, laminar and turbulent modes

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| 1. Введение .....   | 3  |
| 2. Квазигидродинамические (КГидД) уравнения и постановка задачи ..... | 5  |
| 3. Моделирование ламинарного режима, $Re=300$ .....                   | 7  |
| 4. Моделирование турбулентного режима, $Re=4000$ .....                | 11 |
| 5. Заключительные замечания .....                                     | 17 |
| 6. Реализация в OpenFOAM .....  | 18 |
| Библиографический список.....   | 20 |

## 1. Введение

Задача о течении изотермической вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе хорошо известна и широко используется для демонстрации точности численных алгоритмов на примере ламинарных течений, а также возможностей алгоритмов для моделирования турбулентных течений и режимов ламинарно-турбулентного перехода. Из обширной литературы по этому вопросу укажем здесь лишь монографии [1-3], недавние обзоры [4, 5], а также статьи [6-9] и включенные в них библиографии.

Течение в трубе имеет следующие характерные особенности [1-5]: при небольших числах Рейнольдса  $Re < 2300$  в трубе формируется ламинарное течение Пуазейля. Внесенные в него малые возмущения затухают вдоль трубы, и течение вновь становится ламинарным. Характерная длина  $L_e$  установления парабола Пуазейля из некоторого начального профиля скорости на входе в трубу определяется числом Рейнольдса, которую можно оценить следующим образом [1-3]:

$$L_e = 0.06 Re D, \quad (1)$$

где  $D$  – диаметр трубы,  $U$  – средняя скорость течения,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $Re = \frac{UD}{\nu}$  – число Рейнольдса.

При больших значениях числа Рейнольдса  $Re > 3000$  течение в трубе переходит в турбулентный режим, который характеризуется статистически стационарными колебаниями скорости. Осредненный профиль такого течения отличается от парабола Пуазейля и носит логарифмический характер. При больших числах Рейнольдса длина установления такого течения оказывается меньше, чем для ламинарного течения вследствие большей эффективной турбулентной вязкости. Эту длину можно оценить эмпирической формулой

$$L_e = 1.6Re^{1/4}D \quad (2)$$

или, используя более старую формулу [3],  $L_e = 4.4Re^{1/6}D$ .

Турбулентный режим течения может быть сформирован из ламинарного течения путем внесения в поток малых возмущений. В отличие от ламинарного режима, внесенные возмущения не затухают в потоке, что приводит к формированию установившихся во времени колебаний скорости и давления [4, 5].

При промежуточных числах Рейнольдса имеет место переходный процесс, когда в течении могут формироваться так называемые сгустки, клубки или пятна турбулентности. Эти турбулентные пятна разделены областями ламинарного течения, вся картина не затухает и сносится вниз по потоку приблизительно со скоростью течения [4-9].

Все эти три режима допускают численное моделирование. Особенно сложным является моделирование ламинарно-турбулентного перехода с

образованием пятен турбулентности, которое оказывается возможным только с применением высокоточных численных алгоритмов [6-9].

Сложности численного моделирования переходного и турбулентного режимов течения в трубе определяются прежде всего необходимостью использования больших расчетных областей и подробных пространственно-временных сеток. В частности, вычислительные проблемы определяются тем, что процесс установления режимов протекает на больших длинах, см. формулы (1, 2). Расчет нестационарного течения в трехмерной области должен проводиться без использования условий симметрии, поскольку уменьшение объема вычислительной работы за счет введения любой симметрии, в том числе симметрии начальных условий, может исказить результаты моделирования и статистическую однородность течения [7]. Введение в рассмотрение естественной для такой задачи осесимметричной сетки вызывает проблемы с аппроксимацией уравнений вблизи оси трубы, в то время как сама физика течения не рассматривает ось как особую точку в потоке. И, наконец, принципиальным моментом является необходимость применения разностных алгоритмов, которые не искажают физику процесса.

В данной работе впервые приведены результаты численных экспериментов по развитию малых возмущений входной скорости течения в круглой трубе, выполненных на основе КГидД уравнений [10-14]. Указанные уравнения тесно связаны с системой уравнений Навье-Стокса. В частности, заложенная в этих уравнениях дополнительная диссипация обеспечивает невозрастание кинетической энергии системы. Рассмотрены ламинарный и турбулентный режимы. Разностный алгоритм аппроксимирован на трехмерной пространственной Эйлеровой сетке для нестационарного течения. Эйлерова сетка позволяет избежать трудностей с аппроксимацией уравнений вблизи оси трубы. Условия симметрии в постановке задачи не используются. Реализация алгоритма в рамках открытой платформы OpenFOAM [15] позволяет ускорить расчет за счет распараллеливания задачи. Расчет выполнен на вычислительном комплексе K100.

КГидД уравнения применялись для моделирования спонтанно возникающих нестационарных режимов при конвекции Марангони [10, 12, 14], течениях за обратным уступом [12] и термогравитационной конвекции в прямоугольной области [17]. Родственная система квазигазодинамических (КГД) уравнений ранее использовалась для численного моделирования турбулентных течений вязкого сжимаемого газа [12, 16].

Данная работа построена следующим образом: во втором разделе приведен вид КГидД уравнений, описана постановка задачи, показана расчетная сетка; в третьем разделе приведены результаты расчетов ламинарного течения, в численном эксперименте показана его устойчивость к малым возмущениям течения на входе в трубу; в четвертом разделе приведен численный эксперимент, показывающий формирование турбулентного течения при развитии случайных возмущений входного профиля скорости для больших

чисел Рейнольдса. В пятом разделе сделаны соответствующие выводы. В шестом разделе описаны особенности реализации задачи в рамках открытого пакета OpenFOAM.

## 2. Квазигидродинамические (КГидД) уравнения и постановка задачи

Для численного моделирования используется КГидД метод, основой которого является регуляризованная система уравнений Навье-Стокса. Регуляризация уравнений основана на предположении, что массовая плотность потока жидкости отличается от среднего импульса единицы объема на малую величину. Это отличие приводит к появлению малых диссипативных добавок в исходной системе уравнений, которые обеспечивают невозрастание кинетической энергии системы. Применительно к вычислительному алгоритму эти слагаемые позволяют использовать условно устойчивую явную по времени разностную схему при аппроксимации всех пространственных производных центральными разностями. Тем самым схема имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Приведем вид КГидД системы уравнений для течения вязкой изотермической жидкости в отсутствие внешних сил согласно [10-14]:

$$\operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi. \quad (4)$$

Здесь  $p$  – давление,  $\rho$  – постоянная плотность жидкости. Вектор поправки к скорости  $\vec{w}$  и тензор вязких напряжений  $\Pi$  вычисляются как

$$\vec{w} = \tau \left[ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \rho \vec{u} \otimes \vec{w}. \quad (5)$$

Здесь  $\Pi_{NS} = \mu [(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T]$ , где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\tau$  – параметр регуляризации, который имеет размерность времени.

Базовое значение коэффициента  $\tau_0$  определим из условия, чтобы в безразмерном виде параметр регуляризации не превосходил коэффициент вязкости. Оценка величины параметра регуляризации приводит к величине

$$\tau = \tau_0 = \frac{\nu}{u_0^2}, \quad (6)$$

где  $\nu = \mu/\rho$  – коэффициент кинематической вязкости. Для проведения вычислений параметр  $\tau$  следует выбирать в виде  $\tau \leq \tau_0$ .

КГидД система тесно связана с системой уравнений Навье-Стокса и имеет ряд точных решений, совпадающих с точными решениями этой системы [10, 11]. При  $\tau = 0$  регуляризованная система переходит в систему уравнений Навье-Стокса. В отличие от системы уравнений Навье-Стокса в КГидД системе уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности (3).

Граничное условие для давления на твердых стенках и на выходе из трубы имеет вид

$$\vec{\nabla} p = 0. \quad (7)$$

Рассматривается цилиндрическая область длины  $L$  и диаметром  $D$ . Жидкость втекает через левую границу. На входе в канал задается профиль скорости и нулевой градиент давления, на поверхности трубы заданы условия прилипания для скорости и нулевой градиент давления. На выходе заданы условия сноса для скорости и постоянное давление.

Полагаем  $L=25D=1$  м, где  $D=0.04$  м. Задание граничных и начальных условий для запуска программы приведено в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

### Граничные условия расчета

|              | Стенки цилиндра                           | Inlet                                     | Outlet  |
|--------------|---|---|---|
| Давление $p$ | $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ | $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ | 101325 Па                                       |
| Скорость $U$ | 0   | (7.0, 0, 0) м/сек                         | $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = 0$ |
| Плотность    | 0.25 кг/м <sup>3</sup>                    | 0.25 кг/м <sup>3</sup>                    | 0.25 кг/м <sup>3</sup>                          |

Таблица 2

### Начальные условия расчета

| Давление $p$ | Скорость $U$      | Плотность              |
|--------------|-------------------|------------------------|
| 101325 Па    | (7.0, 0, 0) м/сек | 0.25 кг/м <sup>3</sup> |

Расчет ведется в размерных переменных в системе СИ в рамках платформы OpenFOAM, все величины далее будут указываться без размерности.

Пространственная сетка приведена на рис. 1. Число точек в базовом варианте составляет 649600, что соответствует примерно 30 ячейкам по диаметру.

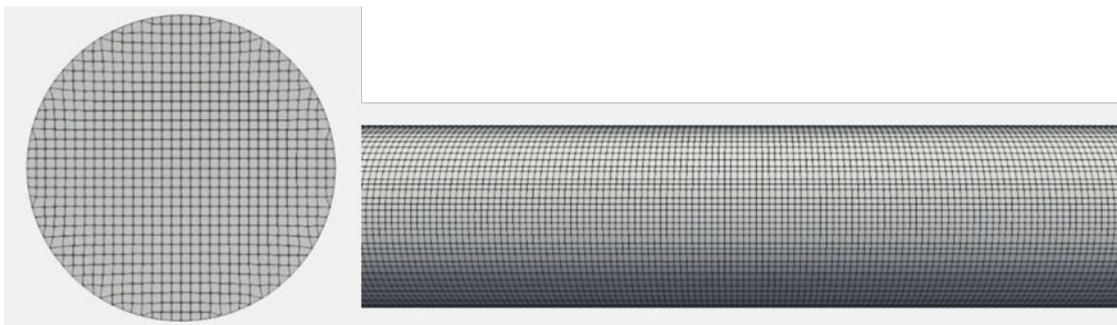


Рис. 1. Пространственная область, вид с торца (YZ) и вид поверхности сбоку (XZ) (фрагмент)

Скорость на входе в трубу постоянна, число Рейнольдса задается путем выбора коэффициента кинематической вязкости  $\nu$ . Соответственно выбирается параметр  $\tau$ .

Пространственная аппроксимация строится с помощью метода конечных объемов с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей. Используется явная по времени разностная схема, а слагаемые с молекулярной вязкостью аппроксимируются в неявном виде. Устойчивость алгоритма обеспечивает искусственная диссипация, нелинейная структура которой подстраивает ее величину в зависимости от градиентов давления и скорости. Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$ , обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, близок к величине  $\tau$ . Уравнение Пуассона решается с помощью стандартного метода сопряженных градиентов с предобуславливателем PCG с точностью вычислений  $10^{-9}$ . Условие (7) на границе реализуется подпрограммой qhdFlux.

### 3. Моделирование ламинарного режима, $Re=300$

Точное решение, описывающее ламинарное течение Пуазейля в круглой трубе радиуса  $R$  в переменных  $(x, r, \varphi)$ , строится в виде  $u_x = u(r)$ ,  $u_r = u_\varphi = 0$ ,  $p = p(x)$  [1,2]. При этом уравнения Навье-Стокса и КГидД системы сводятся к одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению

$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r\mu \frac{du}{dr} \right)$ ,  $p(0) = p_1$ ,  $p(L) = p_2$ ,  $u(R) = 0$ , где  $u(r)$  ограничено при  $r \rightarrow 0$ . Тогда  $u_x = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$ ,  $\Delta p = p_1 - p_2$

и давление  $p = \left(1 - \frac{x}{L}\right) p_1 + \frac{x}{L} p_2$ .

Массовый расход жидкости  $Q$  через круговое сечение трубы определяется как  $Q = 2\pi \int_0^R r u_x dr = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} R^4$ . Отсюда  $\frac{\Delta p}{L} = Q \frac{8\mu}{\pi R^4}$ .

Тогда  $u_x = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$ . Максимальное значение скорости составляет  $u_{x \max} = \frac{2Q}{\pi R^2}$ . Для начального плоского профиля скорости

$$Q = 2\pi \int_0^R r U_0 dr = \pi U_0 R^2 \text{ и } u_{x \max} = 2U_0.$$

Для плоского профиля скорости на входе (таблица 1) максимум скорости для течения Пуазейля составляет  $u_{x \max} = 14$ .

Из оценки (1) для  $Re=300$  профиль Пуазейля устанавливается на длине порядка  $L_e = 18 D$ , что составляет 0.82.

Был проведен расчет установления течения Пуазейля из начального плоского профиля, таблица 1. Этот режим соответствует значениям  $\nu = 9.32 * 10^{-4}$  и  $\tau_0 = 2 * 10^{-5}$  (6). В расчете использовались  $\tau = 10^{-5}$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$ .

Установившееся распределение скорости по длине трубы представлено на рис. 2. Вверху – изолинии модуля скорости в аксиальной плоскости, внизу – профиль аксиальной скорости в сечении  $x=0.95$ . Использовались сетки с количеством ячеек 44096 и 649600. Полученный в расчете максимум скорости составляет  $u_{x \max} = 13.91$ . Для наглядности изображения здесь и далее пропорции двумерных рисунков не соответствуют реальным.

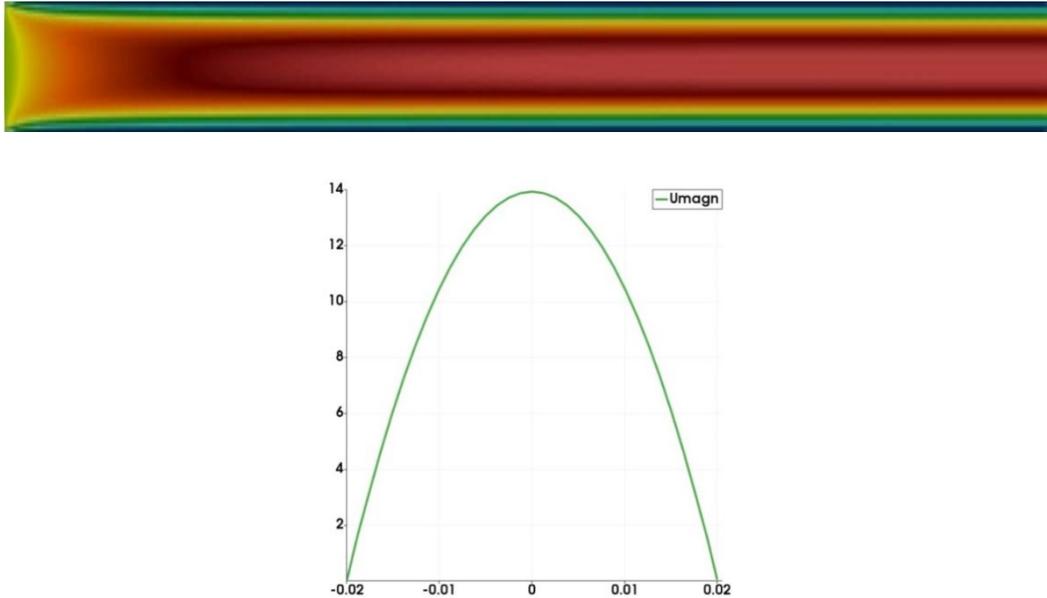


Рис. 2. Скорость установившегося течения Пуазейля в трубе,  $Re=300$

Далее приведены результаты численного эксперимента по распространению случайного малого возмущения скорости на входе. Задание разных вариантов возмущенного профиля входной скорости в трубе и изучение в численном эксперименте его эволюции проводилось в целом ряде расчетов, см., например, [8].

Случайное возмущение генерируется заданием граничного условия `turbulentInlet` с исходной скоростью  $(7.0, 0, 0)$ . Мгновенное возмущение генерируется путем добавления случайных компонент для опорного среднего поля, отличающееся от него на величину  $(0.07, 0.07, 0.07)$ , умноженную на среднеквадратичный коэффициент.

Картина исходных возмущений на два типичных момента времени показана на рис. 3.

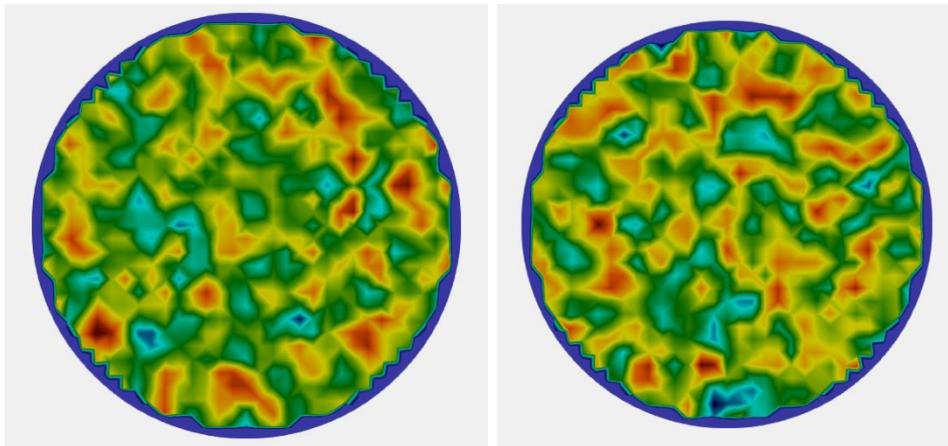


Рис. 3. Пример распределения модуля возмущенной скорости во входном сечении на моменты времени  $t=0.01, 0.02$ . Минимальные и максимальные значения на графике составляют 6 и 8

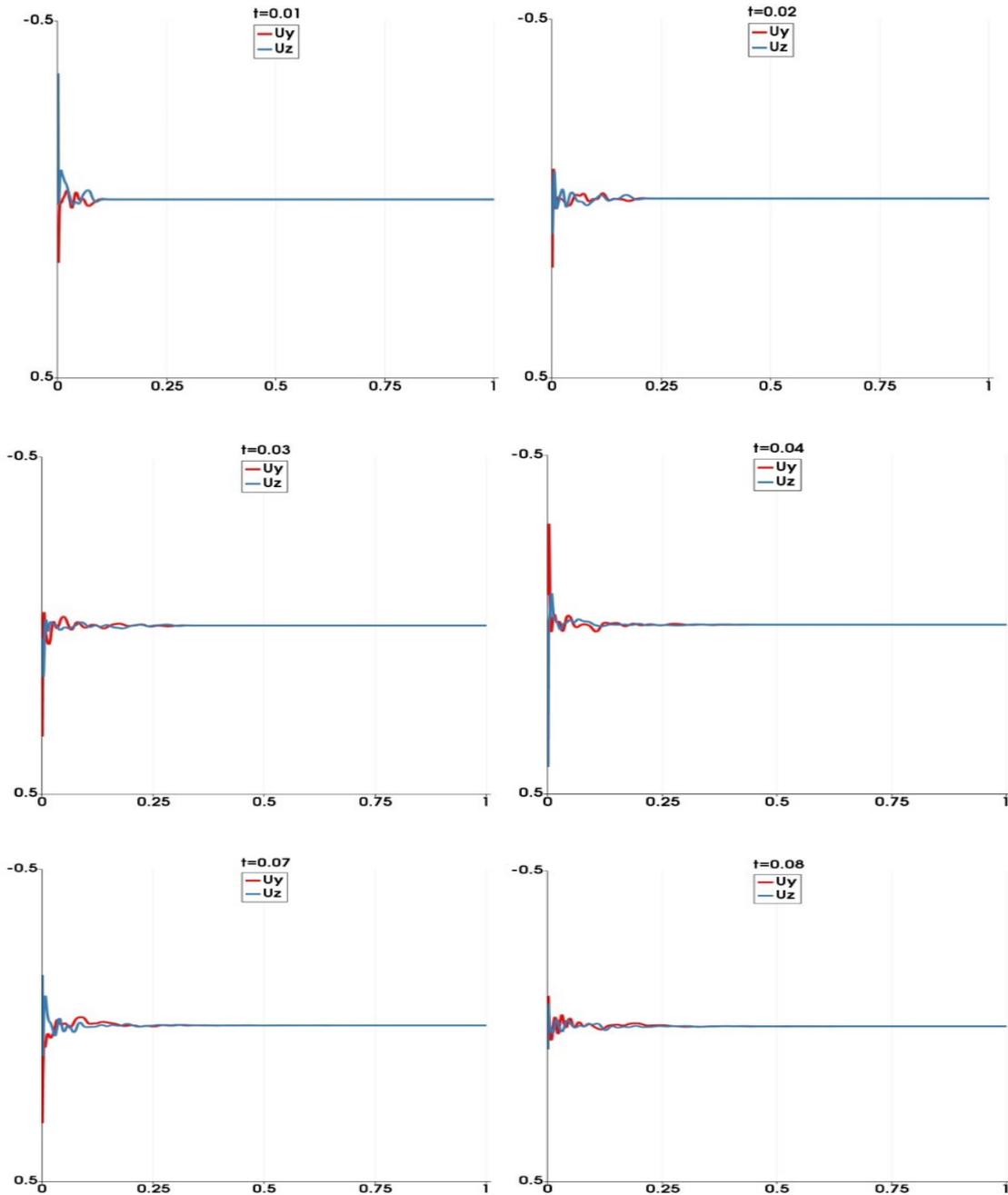


Рис. 4. Распространение малых случайных возмущений скорости в трубе. Вверху – распределения скоростей  $u_y$  и  $u_z$  на временах 0.01-0.08, внизу – изолинии модуля скорости в продольном сечении на время 0.08

На рис. 4 приведены графики распределения поперечных скоростей  $u_y$  и  $u_z$  вдоль оси трубы на временах от 0.01 до 0.08. Одномерные графики показывают распространение возмущения вдоль трубы примерно до времени

0.04 и его последующее затухание на расстоянии 0.3 с формированием профиля Пуазейля. Такое затухание малых возмущений характерно для малых скоростей потока и соответствует качественной схеме поведения возмущений для ламинарного течения из обзора [4].

Коэффициент сопротивления в трубе определяется величиной [1, 2, 6, 7]

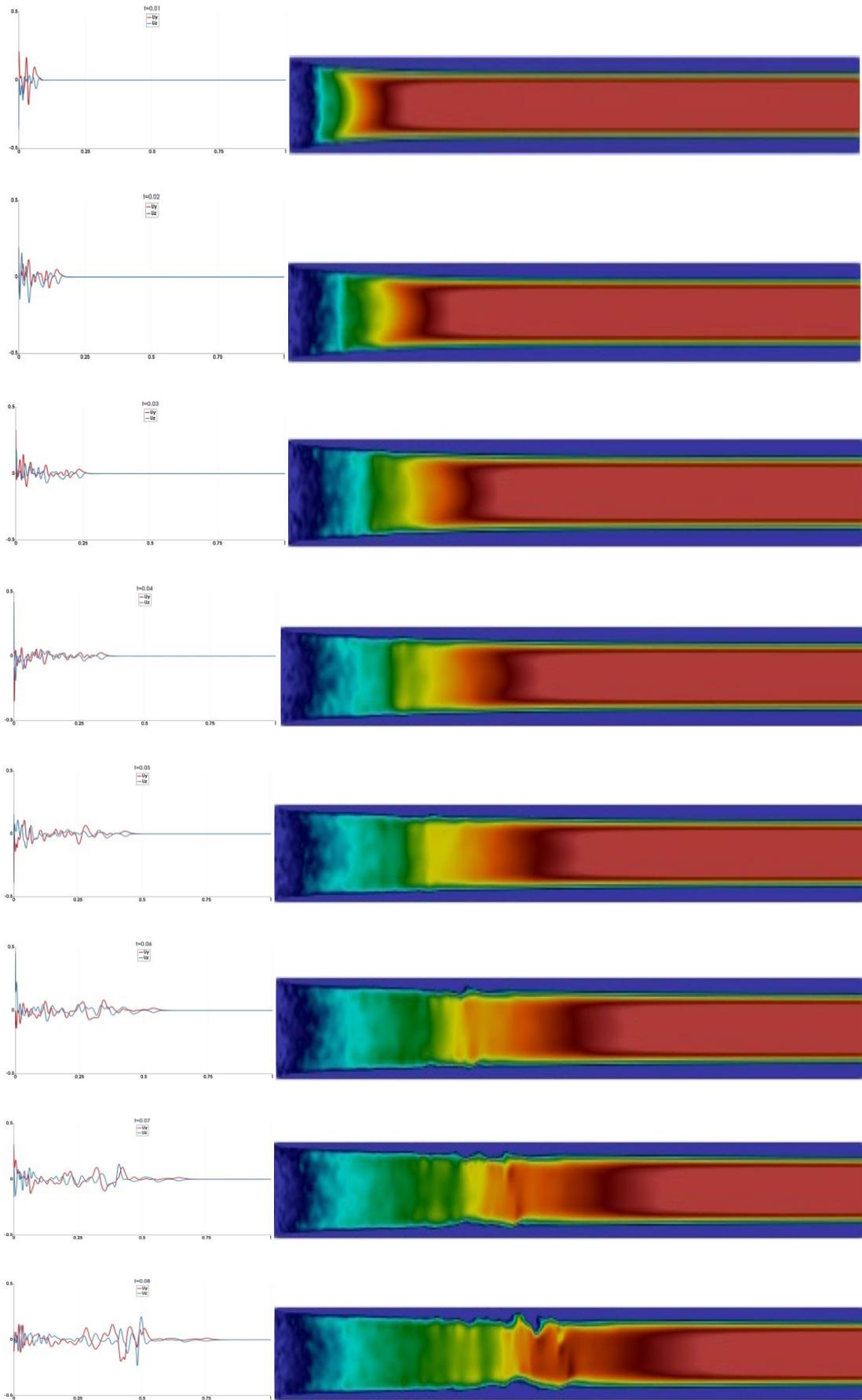
$$C_f = \frac{\frac{\Delta p}{\Delta L} R}{\rho \vec{U}^2}, \quad (8)$$

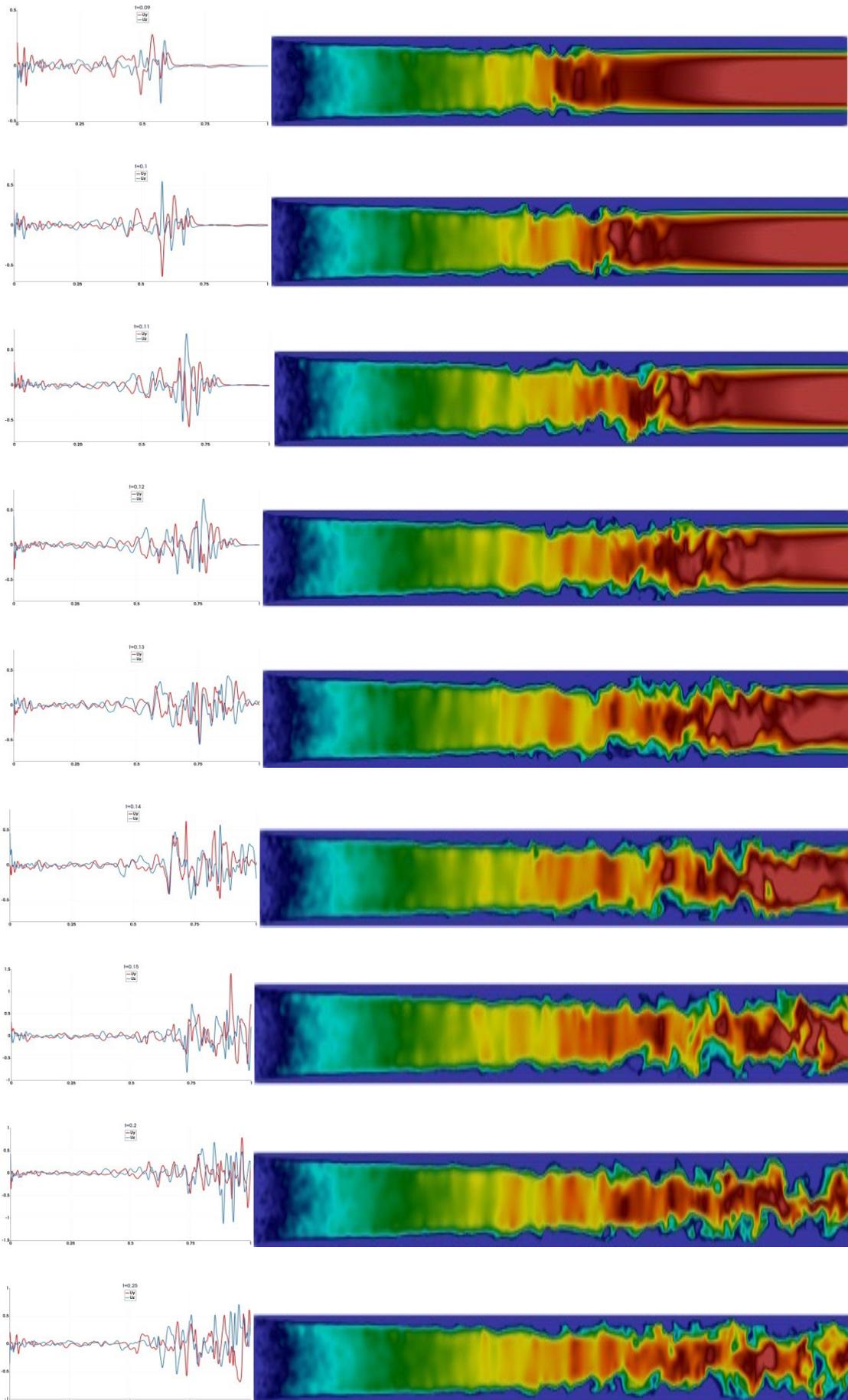
где градиент давления  $\Delta p$  определяется на длине  $\Delta L$ . Для ламинарного течения Пуазейля для  $Re=300$ ,  $C_f = 16Re^{-1} = 0.053$ . В расчете коэффициент сопротивления трубы длины  $\Delta L = 0.9 - 0.8 = 0.1$  при перепаде давления  $\Delta p = 4$  составляет  $C_f = 0.064$ . Осредненное давление на длине трубы меняется почти линейно.

Таким образом, в численном эксперименте получено, что для  $Re=300$  из начального плоского профиля скорости в трубе формируется стационарное течение Пуазейля. Введенные в поток случайные возмущения входного профиля скорости затухают по длине трубы.

#### 4. Моделирование турбулентного режима, $Re=4000$

В расчете используются те же граничные условия и возмущения входной скорости, как и для предыдущего варианта. Режим  $Re=4000$  соответствует значениям  $\nu = 7 * 10^{-5}$  и  $\tau_0 = 1.4 * 10^{-6}$  (6), в расчете использовались значения  $\tau = 10^{-5}$  и  $\Delta t = 10^{-5}$ . В качестве начального условия было взято установившееся течение для  $Re=300$  с плоским профилем скорости на входе.





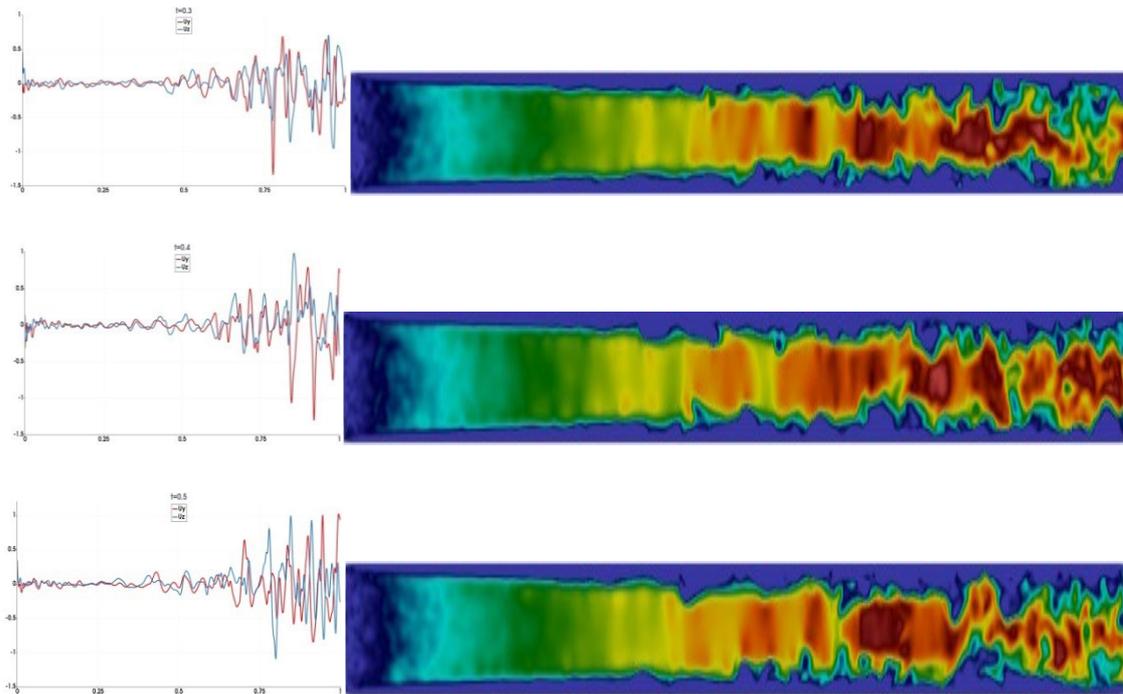


Рис. 5. Развитие начального возмущения во времени от 0.01 до 0.5. Слева – скорости  $u_y$  и  $u_z$  вдоль оси трубы, справа – изолинии модуля скорости в продольном сечении

Эволюция начальных возмущений для этого варианта представлена на рис. 5. Слева приведены графики скоростей  $u_y$  и  $u_z$  вдоль оси трубы  $x$  на интервале времени от  $t=0.01$  до 0.50, справа – соответствующие поля модуля скорости в продольной плоскости. В отличие от варианта  $Re=300$  возмущения распространяются вдоль трубы с небольшим затуханием до расстояния примерно 0.5 и времени 0.05, затем возмущения начинают нарастать и к моменту времени 0.14 достигают конца трубы. Далее на расстоянии примерно от 0.75 до конца трубы формируется статистически-стационарный колебательный режим, амплитуда колебаний в котором выше, чем на отрезке 0-0.75. Таким образом, начиная со времени порядка 0.2 и длины 0.75 возникает аналог турбулентного режима.

Полученные картины развития возмущений соответствуют качественным схемам развития турбулентного течения в трубе, приведенным в обзоре [4]. Формула (2) дает оценку для длины установления турбулентного режима, в этом случае  $L_e = 13 D = 0.52$ .

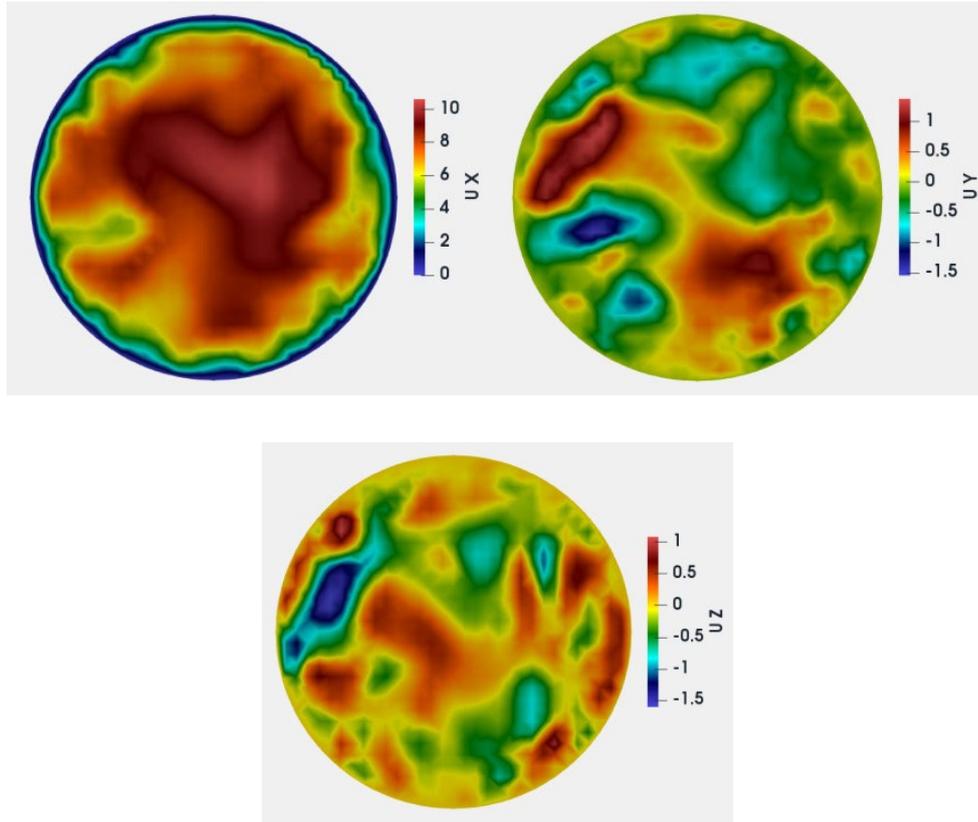


Рис. 6. Мгновенные распределения компонент скорости в турбулентной части потока,  $t=0.5$  в сечении  $x=0.9$

В качестве примера поведения скорости в турбулентной части потока на рис. 6 приведены мгновенные изолинии компонент скорости  $u_x, u_y, u_z$  в сечении трубы. Аналогичные по структуре картины получены для поля скоростей в турбулентной части потока в [9].

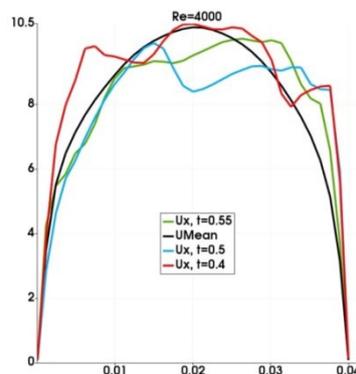


Рис. 7. Профили осредненной и мгновенных скоростей  $u_x$  в сечении  $x=0.9$  для нескольких моментов времени

Для определения характеристик турбулентного участка потока было проведено осреднение скорости и давления по времени. Сопоставление осредненной и мгновенной скоростей приведено на рис. 7. Виден симметричный профиль осредненной скорости, максимум которого меньше ( $\sim 10.5$ ), чем для параболы Пуазейля (14).



Рис. 8. Картина мгновенного и осредненного давлений в осевом сечении трубы

Осредненное по времени значение давления в трубе представлено на рис. 8. Осредненное давление изменяется от 101333 до 101325. Видно, что осредненное давление монотонно убывает вдоль трубы. При этом при приближении к турбулентной части потока осредненное по времени давление становится немонотонным по радиусу, но симметричным. Если добавить осреднение по пространству, то результат вдоль оси, который мы использовали при расчете коэффициента сопротивления в трубе  $C_f$ , может измениться.

Профили осредненного и мгновенных значений давления вдоль оси трубы представлены на рис. 9. Из графика видно, что мгновенные значения давления колеблются в пределах одного процента.

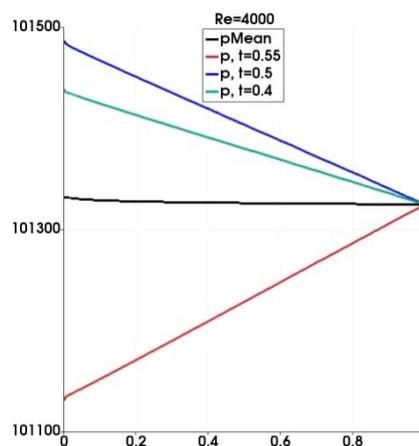


Рис. 9. Профили осредненного и мгновенных значений давления вдоль оси трубы

Коэффициент сопротивления в трубе определяется величиной (8), где градиент давления  $\Delta p$  для нестационарного течения определяется на основе временного осреднения давления на интервале  $\Delta L$ . Для развитого турбулентного течения коэффициент сопротивления выражается законом Блазиуса [1, 2, 6, 7]

$$C_f = \frac{0.079}{Re^{0.25}}. \quad (9)$$

Коэффициент сопротивления, согласно (9), для  $Re=4000$  равен  $C_f = 0.01$ . Коэффициент сопротивления для всей трубы  $\Delta L = 1$  (с перепадом осредненного давления  $\Delta p = 8$ , рис. 8) равен  $C_f = 0.0128$ , для отрезка  $\Delta L = 0.9 - 0.8 = 0.1$  (с перепадом осредненного давления  $\Delta p = 1$ )  $C_f = 0.016$ . Таким образом, использование осредненного по времени давления дает два варианта коэффициента сопротивления. При этом в расчетах не было использовано осреднение по пространству. В [6] отмечено, что на ранних стадиях установления турбулентного течения в расчетах  $C_f$  превосходит теоретические значения (9) и приближается к величине 0.011.

Таким образом, в численном эксперименте получена качественно верная картина формирования нестационарного стохастического течения из начальных возмущений профиля скорости на входе в канал. Качественный анализ свойств полученного течения указывает на его турбулентный характер.

## 5. Заключительные замечания

Представлены первые результаты численного эксперимента в задаче о формировании течения в трубе под влиянием возмущений профиля скорости, полученные на основе КГидД уравнений. Показано, что для малых скоростей, соответствующих ламинарному течению, возмущения затухают по длине трубы, и формируется течение Пуазейля. При больших скоростях, соответствующих турбулентному течению в трубе, вносимые во входном сечении случайные возмущения не затухают вдоль трубы, а приобретают статистически-стационарный характер и отвечают турбулентному течению. Такое поведение возмущений качественно соответствует представлениям теории и эксперимента.

Данные расчеты носят предварительный характер в силу относительно небольшой размерности пространственной сетки и времени расчета. Для валидации расчетов были выполнены вычисления в области  $L=2$  и проведено варьирование параметра  $\tau$ . Качественные и количественные результаты при этом изменились незначительно.

Отметим, что для моделирования ламинарного и турбулентного течения использовался один и тот же численный алгоритм, без изменения его настроек.

## 6. Реализация в OpenFOAM

Кейс с рассматриваемой задачей, посчитанный солвером `mulesQHDFoam`, настроенный для расчета течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости, находится в свободном доступе на [https://github.com/m-ist/Pipe\\_turbulence\\_generation](https://github.com/m-ist/Pipe_turbulence_generation) [18].

Солвер `mulesQHDFoam`, производный от исходного `QHDFoam` для КГидД алгоритма, применялся для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с тепловой конвекцией. Для моделирования течения вязкой изотермической жидкости в данном солвере достаточно задать величину ускорения свободного падения  $\vec{g} = 0$  или положить величину теплового расширения  $\beta = 0$  в папках `/constant/gravitationalProperties` и `/constant/thermophysicalProperties`. В данном расчете в качестве исходной жидкости был взят метан, таблица 3.

Таблица 3

Параметры метана

|   |  |
|---|--|
| Молярная масса $M$                            | 16 г/моль                              |
| Динамическая вязкость                         | $2.33 \cdot 10^{-5}$ Па*с              |
| Кинематическая вязкость                       | $9.32 \cdot 10^{-5}$ м <sup>2</sup> /с |
| Теплопроводность                              | 0.0013 Вт/(см*К)                       |
| Коэффициент теплового расширения газа $\beta$ | $3.678 \cdot 10^{-3}$ К <sup>-1</sup>  |
| Число Прандтля $Pr$                           | 0.7                                    |
| Плотность $\rho_0$                            | 0.25 кг/м <sup>3</sup>                 |
| Теплоемкость при постоянном давлении $C_p$    | 3900 Дж/(кг*К)                         |

Газовая постоянная метана была взята равной  $\gamma = 1.15$ . Характерное для задачи безразмерное число Рейнольдса  $Re = \frac{UD\rho}{\mu} = 3000$ , число Маха при заданных параметрах много меньше 1 ( $Ma = \frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}} = 0.01$ ), это позволяет проводить расчеты в рамках приближения вязкой несжимаемой жидкости.

Граничные условия для гидродинамических величин задаются в соответствующих словарях папки 0/. Граница разбита на три области: `inlet`, `walls`, `outlet`, в которой в строке для температуры можно задать условия, например, так, как в таблице 4. Случайные возмущения на входе задаются с помощью генератора `turbulentInlet`.

Задание граничных условий в кейсе [18]

|   | Inlet   | Walls  | Outlet  |
|---|---|--|---|
| p | {<br>type qhdFlux;<br>value uniform 101325;<br>}  | {<br>type qhdFlux;<br>value uniform 101325;<br>}     | {<br>type fixedValue;<br>value uniform 101325;<br>} |
| U | {<br>type turbulentInlet;<br>referenceField uniform<br>(7.0 0 0);<br>fluctuationScale (0.07<br>0.07 0.07);<br>value uniform (7.0 0 0);<br>} | {<br>type fixedValue;<br>value uniform (0 0 0);<br>} | zeroGradient;                                       |
| T | $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$   | 1500 ° K   | $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$           |

Расчетная сетка построена с помощью утилит blockMesh и snappyHexMesh. Цилиндр задается в разделе geometry с соответствующим радиусом и длиной. С применением утилиты topoSet определяются соответствующие грани входной, выходной и боковой поверхностей. CreatePatch выделяет inlet и outlet в отдельные грани.

Расчётный случай с рассматриваемой задачей, посчитанный солвером mulesQHDFoam, можно скачать [18] и произвести расчет с другими параметрами задачи. Например, в данном расчете число Рейнольдса варьировалось с помощью кинематической вязкости  $\nu$ . Для этого в словаре /constant/thermophysicalProperties изменялась динамическая вязкость  $\mu$  в разделе transport. Для  $Re=300$   $\mu = 2.33 * 10^{-4}$ , для  $Re=4000$   $\mu = 1.75 * 10^{-5}$ .

Также в папке constant/thermophysicalProperties в разделе QGD можно варьировать параметр регуляризации  $\tau$ . В случае постоянного значения данного параметра в QGDCoeffs выбирается вариант constTau. В этой же папке для версии v2012 задаются референсные ячейка и значение давления (в данном расчете pRefCell задается 0, а pRefValue – 101325). В папке system/controlDict в указанном кейсе есть функции с записью полей скорости и давления в контрольных точках и осредненных по времени.

## Библиографический список

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.
3. Edward J. Shaughnessy, Jr. Ira M. Katz, James P. Schaffer, Introduction to Fluid Mechanics, Oxford university press, New York Oxford, 2005.
4. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // J. Fluid Mech. (2016), vol. 803, P1, doi:10.1017/jfm.2016.465.
5. Никитин Н.В. Проблема перехода и локализованные структуры в трубах // Известия РАН. МЖГ, 2021, №1, с. 32-46.
6. Priymak V. G., Direct numerical simulation of quasi-equilibrium turbulent puffs in pipe flow // *Phys. Fluids*, **30**:6 (2018), 064102.
7. Приймак В.Г. Решения уравнений Навье-Стокса с ограничениями симметрии и их связь с переходными и турбулентными течениями в круглой трубе // ДАН РАН, Технические науки, 2021, т. 500, с. 53-56.
8. Никитин Н.В., Пиманов В.О. О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах // Известия РАН. МЖГ, 2018, №1, с. 68-76.
9. Yakhot A., Feldman Y., Moxey D., Sherwin S., Karniadakis G.E. Turbulence in a localized puff in a pipe // *Flow, Turbulence and Combustion*, 2019, 103: 1-24.
10. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.- Ижевск, 2009.
11. Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь, Тверской государственный университет, 2022.
12. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007. Перевод Т.Г. Elizarova, Quasi-Gas Dynamic equations (Nauchnyi Mir, Moscow, 2007, Springer, Berlin, 2009).
13. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2001, т. 41, №2, с. 239-255.
14. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, т. 38, №10, с. 1732-1742.
15. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // *Computer Physics Communications*, 2022, 271, 108216.
16. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.

17. Кирюшина М.А., Елизарова Т.Г., Епихин А.С. Верификация численного алгоритма на основе квазигидродинамических уравнений на примере моделирования задач гравитационной конвекции // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2024, т. 64, №10.
18. Генерация турбулентности в трубе, выложенный кейс: [https://github.com/m-ist/Pipe\\_turbulence\\_generation](https://github.com/m-ist/Pipe_turbulence_generation).