



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**И.Д. Забара, М.Г. Ширококов**

**Геометрический метод  
определения безопасной  
орбиты для предотвращения  
столкновения с космическим  
мусором**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Забара И.Д., Ширококов М.Г. Геометрический метод определения безопасной орбиты для предотвращения столкновения с космическим мусором // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 50. 33 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-50>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-50>

О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

И.Д. Забара, М.Г. Ширококов

Геометрический метод определения безопасной  
орбиты для предотвращения столкновения  
с космическим мусором

Москва — 2024

*И.Д. Забара, М.Г. Широбоков*

### **Геометрический метод определения безопасной орбиты для предотвращения столкновения с космическим мусором**

Рассматривается метод поиска орбиты космического аппарата для предотвращения столкновения с космическим мусором. Работа состоит из двух частей. В первой части решается задача поиска безопасной орбиты, геометрически наиболее близкой к исходной орбите, для избегания столкновения с объектами космического мусора. При этом считаются заданными исходная орбита, орбиты объектов космического мусора и минимальное допустимое расстояние до них. Описывается применяемый метод внешних штрафных функций для решения возникающей оптимизационной задачи. Вторая часть работы состоит в определении связи между навигационной неопределенностью орбиты объекта космического мусора и его максимальным отклонением от прогнозируемого положения. Соответствующая полуаналитическая зависимость найдена для объектов, движущихся на солнечно-синхронных орбитах и орбитах типа «Молния».

**Ключевые слова:** космический аппарат, космический мусор, навигационная неопределённость, оптимизация

*I.D. Zabara, M.G. Shirobokov*

### **Geometric method for determining a safe orbit to prevent collisions with space debris**

The method of searching for the orbit of a spacecraft to prevent a collision with space debris is considered. The work consists of two parts. The first part of the work addresses the problem of finding a safe orbit, geometrically closest to the original orbit, in order to avoid collisions with space debris objects. The initial orbit, orbits of space debris objects, and the minimum allowable distance from them are considered as given. The applied method of external penalty functions for solving the resulting optimization problem is described. The second part of the work consists in determining the relationship between the navigational uncertainty of the space debris object's orbit and its maximum deviation from the predicted position. The corresponding semi-analytical dependence is found for objects moving in sun-synchronous orbits and "Molniya" type orbits.

**Key words:** spacecraft, space debris, navigational uncertainty, optimization

## 1. Введение

В современной астродинамике актуальной является задача обеспечения безопасности космических аппаратов. Эта проблема становится всё более важной на фоне растущего количества космического мусора — отработанных ступеней ракет, уже не работающих спутников, обломков [1]. Космический мусор представляет серьёзную угрозу для спутников и прочих космических аппаратов с полезной нагрузкой, так как даже небольшие объекты, двигаясь с высокой относительной скоростью, способны нанести значительный ущерб или полностью вывести из строя космическую технику.

В подавляющем большинстве работ по тематике обеспечения безопасности полётов рассматривается именно специфика маневрирования для избегания столкновения. Оптимизируемые функционалы, как правило, связаны с импульсными затратами топлива для перехода на ту или иную орбиту. Кратко изложим результаты нескольких таких работ.

Работа [2] посвящена оптимизации импульсных маневров для избегания столкновений на низких околоземных орбитах. Авторы представили аналитическую формулировку для вычисления расстояния промаха и вероятности столкновения двух объектов при выполнении импульсного манёвра уклонения. Они использовали линейную зависимость между приложенным импульсом и относительным движением объектов, что позволило сформулировать задачу оптимизации манёвра как задачу на собственные значения, связанную с простым нелинейным алгебраическим уравнением. Цель оптимизации заключалась в минимизации затрат манёвра в терминах величины характеристической скорости  $\Delta V$  для максимизации расстояния промаха или минимизации вероятности столкновения. На завершающих этапах работы предложен численный метод решения задачи оптимизации в самой общей форме, с использованием полученных в ходе работы аналитических выражений. Похожий подход продемонстрирован в более новой работе [3] от других авторов.

В работе [4] проблема избегания столкновения с объектами в околоземном пространстве формулируется как задача многокритериальной оптимизации, где основными целями минимизации являются характеристическая скорость, вероятность столкновения и расстояние между спутником и опасным объектом после маневра. В работе предложена методика, которая позволяет учитывать множество сближений в краткосрочной перспективе, что является критически важным, например, для геостационарной орбиты. Авторы используют алгоритм многокритериальной оптимизации, который позволяет вычислить набор оптимальных по Парето решений. Инструментом для оценки целевой функции и вычисления вероятности столкновения для отобранных оптимальных по Парето сценариев является глобальный оптимизатор COSY-GO [6]. Приводятся результаты для некоторых типичных орбит. Результаты работы показывают, что учёт всех возможных сближений после

исполнения маневра уклонения от опасного объекта может предотвратить возникновение новых опасных сближений в краткосрочной перспективе.

В статье [5] также рассматривается оптимизация манёвров по избеганию столкновений. Манёвры моделируются как многократные импульсы. Оптимизация формулируется в виде последовательности задач выпуклой оптимизации, решаемых методом внутренней точки. Основной целью в работе является также минимизация количества топлива, используемого для результирующего манёвра. В результате разработан метод, рассчитывающий оптимальные манёвры без предположений о структуре и направлении импульса.

В работе [7] описывается специализированное программное обеспечение, предназначенное для вычисления манёвров предотвращения столкновений с минимальным расходом топлива в краткосрочных сценариях встречи. В статье также рассматриваются несколько методов расчёта вероятности столкновения.

Немного иной подход продемонстрирован в статье [8]. Основное внимание в работе уделяется использованию машинного обучения для предсказания рисков столкновения на основе большого набора данных, собранного Европейским космическим агентством в период с 2015 по 2019 год. Обученные модели наивного прогнозирования обладали достаточно хорошими характеристиками, что может служить поводом для дальнейшего развития данного направления. Данный подход в будущем способен позволить улучшить процесс принятия решений в системах предотвращения столкновений.

В работе [9] рассматривается создание траектории для вывода спутников с орбиты с учётом избегания столкновений, то есть рассматриваемая в этой статье задача в некотором смысле является обратной (ищется траектория именно для выводимого с орбиты аппарата). Делается это с целью сохранить остальные аппараты при пролёте по этой траектории. При этом снова, как и в остальных работах, оптимизировались топливные затраты, но уже с применением принципа максимума Понтрягина и синусоидального метода. Результаты указывают на необходимость совершенствования методов избегания столкновений при построении траектории вывода спутников с орбиты, что важно для обеспечения безопасного околоземного окружения.

В нашем исследовании такая задача будет рассмотрена с другой стороны. Предлагается геометрический подход к определению безопасных орбит. А именно, предлагается абстрагироваться от того, в какие моменты и с какой величиной производятся импульсы скорости, ставится оптимизационная задача поиска орбиты, которая, во-первых, минимально отличалась бы от исходной орбиты, и, во-вторых, обеспечивала бы заданное минимальное расстояние до опасных орбит. В этом есть определённая мотивация: минимальное изменение орбитальных элементов обусловлено необходимостью сохранения возможности удовлетворения целей миссии, функциональности полезной нагрузки космического аппарата, включая работу научного оборудования, си-

стем связи и навигации. Большое отклонение от исходной орбиты в целях избегания столкновений может привести к некорректной работе определённого оборудования, которое зачастую рассчитано на конкретную орбиту. Таким образом, наш подход концентрируется не на маневрировании, а на подборе орбиты.

Еще одним аспектом исследования является определение расстояния для изменения орбиты космического аппарата с целью обеспечения безопасности новой траектории. Предлагается рассматривать данный вопрос с учетом навигационной погрешности в определении положений и скоростей объектов космического мусора. Основным методом решения этой задачи будет применение автоматического дифференцирования, что позволит эффективно аппроксимировать решение задачи Коши относительно начальных условий с использованием ряда Тейлора произвольного порядка.

*Таким образом, в данной работе будет предложена и описана собственная методика определения наиболее близких к исходной безопасных орбит в околоземном пространстве для предотвращения столкновений объектами космического мусора с учётом их навигационной неопределённости.* В разделе 2 данной работы будет рассмотрена оптимизационная задача подбора безопасной орбиты при имеющемся наборе информации об орбитах космического мусора и о величине параметра допустимого сближения с такими орбитами. В разделе 3 будет предложена методика определения этого параметра на основе навигационной неопределённости данных объектов космического мусора.

## **2. Оптимизационная задача поиска безопасной и наиболее близкой к исходной орбиты космического аппарата**

Пусть даны начальная орбита космического аппарата, а также известный набор орбит космического мусора. Ставится задача поиска орбиты, которая была бы максимально приближена к исходной и в то же время безопасной, то есть находящейся вне зоны возможного столкновения с космическим мусором. Для этого введём ключевые понятия и математические операции, которые будут рассмотрены в первых трёх параграфах этой главы. Они будут посвящены задаче поиска минимального расстояния между кеплеровскими эллипсами, а также выбору целевой функции задачи оптимизации.

### **2.1. Расстояние между кеплеровскими кофокальными эллипсами**

Для начала будем рассматривать простейшую модель движения аппарата на околоземной орбите — задачу двух тел. В этой модели такие орбиты, как известно, являются замкнутыми линиями — эллипсами, в фокусе кото-

рых располагается земной центр масс. В дальнейшем, на основе результатов, полученных на этой модели, рассмотрим более сложную модель движения, учитывающую зональную гармонику  $J_2$ .

Перед постановкой основной оптимизационной задачи, как уже было отмечено, следует ввести понятия, которые будут задействованы в ходе её постановки. Одним из таких понятий является *расстояние между двумя кофокальными эллипсами в пространстве*. В данном параграфе будет проведено сравнение методов поиска данного расстояния. Также будет сравнена эффективность методов.

Введём классическую правую прямоугольную систему координат с началом в притягивающем центре Земли. В таком случае орбиты будем задавать векторами  $\mathbf{x} = (a, e, i, \omega, \Omega)^T$ , представляющими собой набор из пяти орбитальных элементов, определяющих форму и положение кеплеровского эллипса в пространстве. Здесь  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  — большая полуось, эксцентриситет, наклонение, аргумент перицентра и долгота восходящего узла соответственно. Расстояние между двумя орбитами  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  будем понимать в следующем смысле: минимальное значение расстояний между двумя точками, лежащими на двух заданных эллипсах. Всё, что относится ко второй орбите, далее будет отмечено штрихом. Так как нас интересует вся орбита целиком, то значение эксцентрической аномалии  $E$  для каждой орбиты пробегает все возможные значения в диапазоне  $[0, 2\pi)$ , а сама орбита может быть однозначно задана набором пяти орбитальных элементов:  $\mathbf{x} = (a, e, i, \omega, \Omega)^T$ . Радиус-вектор на произвольной орбите, определённой набором орбитальных элементов  $(a, e, i, \omega, \Omega)$ , может быть задан так [10]:

$$\frac{\mathbf{r}}{a} = \mathbf{P}(\cos E - e) + \mathbf{S} \sin E. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{S} = \sqrt{1 - e^2}\mathbf{Q}$ , а компоненты векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega - \cos i \sin \omega \cos \Omega, \\ P_z &= \sin i \sin \omega, \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos i \cos \omega \sin \Omega, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos i \cos \omega \cos \Omega, \\ Q_z &= \sin i \cos \omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, для двух фиксированных орбит с заданными элементами расстояние между ними будет функцией соответствующих аргументов  $E$ . Для нормированного квадрата расстояния  $\hat{\rho}(E, E') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 / 2aa'$  справед-

лива следующая формула:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(E, E')|_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} = & \hat{\rho}_0 + (\mathbf{P}^T \mathbf{P}' - \alpha e) \cos E + \mathbf{S}^T \mathbf{P}' e' \sin E + \\
& + (\mathbf{P}^T \mathbf{P}' e' - \alpha' e') \cos E' + \mathbf{P}^T \mathbf{S}' e \sin E' - \\
& - \mathbf{P}^T \mathbf{P}' \cos E \cos E' - \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \cos E \sin E' - \\
& - \mathbf{S}^T \mathbf{P}' \sin E \cos E' - \mathbf{S}^T \mathbf{S}' \sin E \sin E' + \\
& + \frac{\alpha}{4} e^2 \cos 2E + \frac{\alpha'}{4} e'^2 \cos 2E',
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $\hat{\rho}_0 = (\alpha + \alpha')/2 + (\alpha e^2 + \alpha' e'^2)/4 - \mathbf{P}^T \mathbf{P}' e e'$ ,  $\alpha = a/a'$ ,  $\alpha' = a'/a$ .

Расстояние  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  между двумя орбитами, понимаемое как минимальное значение расстояний между двумя точками, лежащими на двух заданных эллипсах, является глобальным минимумом функции (3) для значений аргументов, принадлежащих тору  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Таким образом, чтобы найти значение нужной функции  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , нужно найти минимум функции  $\hat{\rho}(E, E')|_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}$  на заданном множестве. То есть, для двух фиксированных орбит, математически расстояние между ними выражается по формуле

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \min_{E, E' \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} \hat{\rho}(E, E')|_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}. \tag{4}$$

В той же работе [10] показывается, что нахождение экстремальных точек функции (3) можно свести к определению всех действительных корней полинома от  $\sin E$  и  $\cos E$ . Коэффициенты полинома являются рациональными функциями параметров орбиты. Полином как функция одной переменной  $E$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
g(E) = & K^2 C^4 - N^2 A^2 - M^2 B^4 + 2NKCA(A^2 - C^2) + \\
& + 2NMBA(A^2 + B^2) + 2KMCB(B^2 - C^2) + \\
& + (M^2 + N^2 - K^2)(C^2 A^2 - A^2 B^2 + C^2 B^2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A = & \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \sin E - \mathbf{S}^T \mathbf{S}' \cos E, \quad B = \mathbf{P}^T \mathbf{P}' \sin E - \mathbf{S}^T \mathbf{P}' \cos E, \\
C = & (\mathbf{P}^T \mathbf{P}' e' - \alpha e) \sin E + \alpha e^2 \sin E \cos E - \mathbf{S}^T \mathbf{P}' e' \cos E, \\
M = & \mathbf{P}^T \mathbf{P}' \cos E + \mathbf{S}^T \mathbf{P}' \sin E + \alpha' e' - \mathbf{P}^T \mathbf{P}' e, \\
N = & \mathbf{P}^T \mathbf{S}' e - \mathbf{S}^T \mathbf{S}' \sin E - \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \cos E, \quad K = \alpha' e'^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

При этом каждому найденному корню  $E$  полинома (5) ставится в соответствие величина  $E'$ , которая находится из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
\cos E' = & \frac{BC + kA\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}, \\
\sin E' = & \frac{AC - kB\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2},
\end{aligned} \tag{7}$$



где величина  $k$  равна плюс или минус единице. Выбор знака  $k$  происходит так, чтобы было выполнено соотношение  $M \sin E' + N \cos E' = K \cos E' \sin E'$ . Учитывая это, рассмотрим несколько практических подходов к поиску расстояния между двумя кеплеровыми кофокальными эллипсами. Первый способ будет основан на применении описанной выше теории, связанной с поиском нулей полинома (5). Для примера возьмём такие две орбиты:

	$a$ , тыс.км	$e$	$i$	$\omega$	$\Omega$
$\mathbf{x}_1$	7.13	0.01	64.4°	169°	50°
$\mathbf{x}_2$	9.83	0.34	88.4°	26°	28°

Таблица 1. Пример двух орбит для поиска расстояния между ними.

Можно построить график рассматриваемого полинома  $g(E)$  для таких двух орбит (см. рисунок 1).

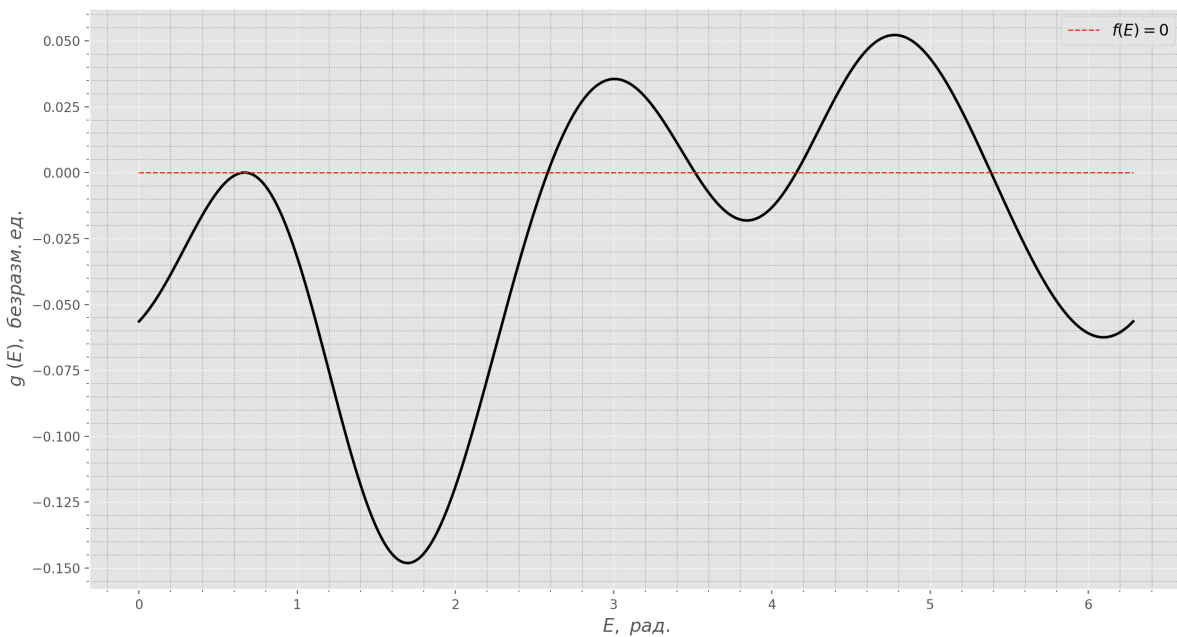


Рис. 1. График полинома  $g(E)$  для орбит в таблице 1.

Рассмотрим следующую процедуру. Строятся достаточно мелкое разбиение отрезка  $[0, 2\pi]$ , и на каждом из подотрезков определяются корни методом дихотомии. При этом сохраняем найденные корни и для каждого из них (и соответствующей ему пары  $E'$ ) считаем значение функции (3), затем выбираем минимум получившегося массива. Этот метод назовём *методом последовательной дихотомии*.

С немного другим подходом к той же проблеме можно ознакомиться в работе [11]. В ней также описывается метод вычисления всех критических

точек функции (3) с помощью сведения данной задачи к поиску корней алгебраического полинома 16-й степени. Получение коэффициентов итогового полинома, подобного выражению (5), производится с помощью быстрого преобразования Фурье.

Как альтернативу рассмотрим ещё несколько подходов, один из которых основан на поиске минимума (3) с помощью численных методов оптимизации. Рассмотрим метод локальной оптимизации для оценки его вычислительной эффективности. Такой метод может сойтись только к локальному минимуму, и нет гарантии, что значение функции (3) в этой точке будет минимально возможным на рассматриваемом множестве. Однако, если в будущем удастся разработать методику выбора подходящего начального приближения для данной задачи, такие методы могут оказаться эффективными и применимыми в данной задаче. В качестве примера будем использовать метод Нелдера–Мида [12]. Для большего понимания построим график функции (3) (см. рисунок 2). Из данного графика видно, что на рассматриваемом множестве функция (3) выпуклой не является.

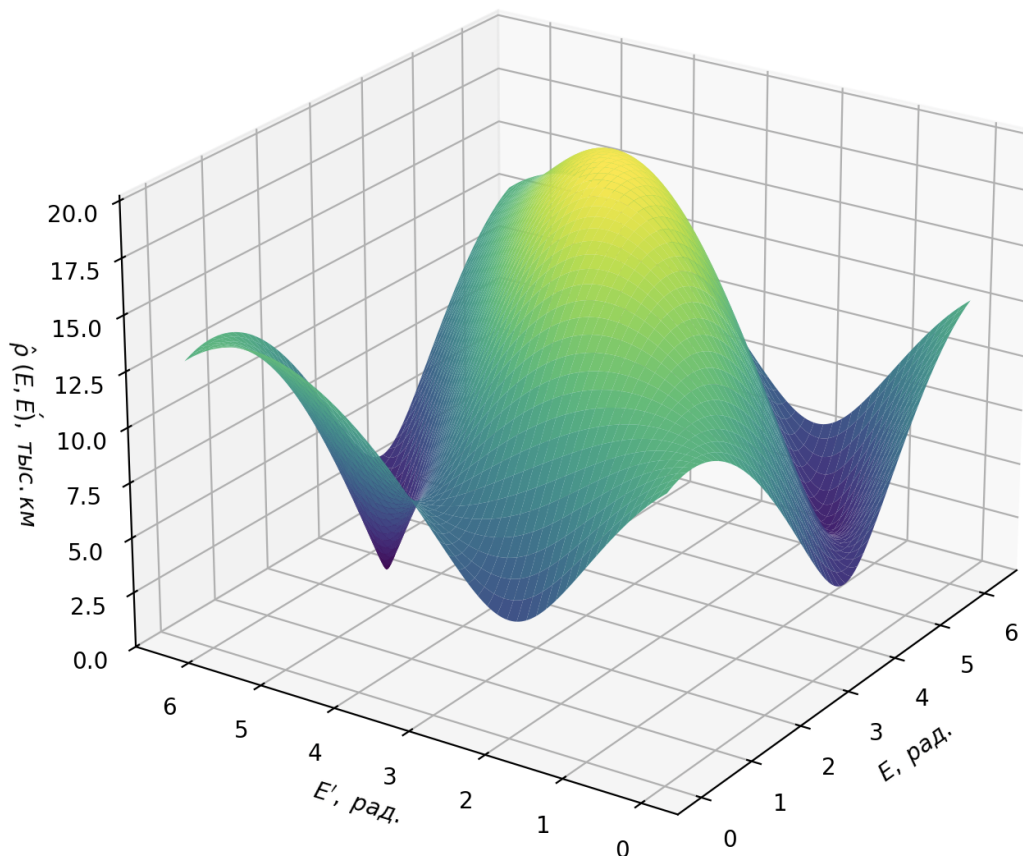


Рис. 2. График функции  $\hat{\rho}(E, E')$  для орбит в таблице 1.

Ещё одна предлагаемая методика основана на дискретизации орбит и представлении их в виде набора точек в количестве  $N$  штук. Процедура сле-

дует определению функции  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ : вычисляем расстояние между каждой точкой одной орбиты и каждой точкой другой орбиты, а затем ищем минимальное значение из полученного множества. Такой способ будем называть *нативной процедурой*. Математически это можно записать так:

$$\rho_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \min_{k,l \in 1, \dots, N} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, E_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}', E'_l)\|_2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, E)$  — функция, ставящая в соответствие орбитальным элементам и эксцентрической аномалии радиус-вектор соответствующей точки, а величины  $E_k$  и  $E'_l$  — элементы дискретного набора значений эксцентрической аномалии.

Проведённые в ходе работы эксперименты показали, что данный метод демонстрирует высокую эффективность и в дальнейшем будет являться основным при решении задачи оптимизации. Применим все описанные выше методы к описанной задаче и получим результаты, представленные в таблице 2. Стоит отметить, что среднее время расчёта для нативной процедуры дискретизации зависит только от  $N$ . Поэтому для других орбит (отличных от орбит в таблице 1) при тех же значениях данного параметра среднее время расчёта будет тем же самым.

Метод	Расстояние между орбитами, км	Среднее время расчёта, мс
Нативная процедура дискретизации, $N = 200$	386.8	16
Нативная процедура дискретизации, $N = 500$	384.4	46
Исследование нулей $g(u)$ методом последовательной дихотомии	383.5	29
Метод Нелдера–Мида	2342.2	8
Метод имитации отжига	383.5	373
Метод дифференциальной эволюции	383.5	82

Таблица 2. Сравнение различных методов дискретизации и оптимизации для орбит из таблицы 1 (процессор AMD Ryzen 3750H).

Истинное значение расстояния между рассматриваемыми орбитами есть 383.5 км. Данный факт проверялся методами глобальной оптимизации, применительно к функции (3). Из таблицы 2 видно, что метод последовательной дихотомии точно сошёлся к значению 383.5 км, а предложенный метод дискретизации орбит сошёлся к значению, близкому к 383.5 км. Метод

Нелдера—Мида работает быстрее всех методов, но сходится только к локальному минимуму. Дальнейшее усовершенствование алгоритма поиска расстояния между двумя орбитами может быть связано с правилом выбора правильного начального приближения для метода локальной оптимизации.

Принимая во внимание значения среднего времени расчёта для каждого метода в таблице 2, делаем вывод: если требуется абсолютная точность, то применяем метод последовательной дихотомии, но при этом в  $\sim 2$  раза увеличивается среднее время расчёта в сравнении с методом дискретизации орбит при количестве точек  $N = 200$ . Повышать количество точек дискретизации не имеет смысла.

Теперь перейдём к выбору целевой функции оптимизационной задачи.

## 2.2. Целевая функция задачи оптимизации

Как уже упоминалось ранее, целью является поиск наиболее близкой орбиты с геометрической точки зрения. Функция (4), рассмотренная в предыдущем параграфе, не является подходящей для этого, поскольку, к примеру, её нулевое значение при пересечении двух орбит не гарантирует их идентичность. Это обусловлено тем очевидным фактом, что пересекающиеся орбиты в общем случае могут существенно различаться по размерам и пространственной ориентации. В таком случае часто вводят взвешенную норму разности орбитальных элементов двух орбит ( $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$ ) как функцию переменной  $\mathbf{x}$  при известной начальной орбите  $\mathbf{x}_0$ :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^2 w_k (x_k - x_{0k})^2 + \sum_{k=3}^5 w_k [(\sin x_k - \sin x_{0k})^2 + (\cos x_k - \cos x_{0k})^2]. \quad (9)$$

Здесь  $w_k$  — вес  $k$ -го орбитального элемента, а  $x_k$  — сам орбитальный элемент. Соответствие между индексами орбитальных элементов будем использовать следующее:

$$\mathbf{x} = (a, e, i, \omega, \Omega)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T.$$

В астродинамике такую функцию, сравнивающую близость двух кеплеровских орбит (в терминах разности их орбитальных элементов), называют *D-критерием* [13]. Это естественный способ сравнивать геометрически две орбиты между собой.

В литературе также упоминаются другие естественные метрики в пространстве эллиптических орбит. В работе [14] приведена следующая 2-норма для геометрического сравнения двух орбит  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ :

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2aa' \left( W_0 - \sqrt{(W_5 + W_8)^2 + (W_6 - W_7)^2} \right), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} 4W_0 &= 2(\alpha + \alpha') + \alpha e^2 + \alpha' e'^2 - 4\mathbf{P}^T \mathbf{P}', & 2W_5 &= -\mathbf{P}^T \mathbf{P}, \\ 2W_6 &= -\mathbf{P}^T \mathbf{S}', & 2W_7 &= -\mathbf{S}^T \mathbf{P}', & 2W_8 &= -\mathbf{S}^T \mathbf{S}', \end{aligned}$$

а векторы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}'$  определены в (2). Авторами делается упор на то, что D-критерий является менее строгой с математической точки зрения метрикой, чем (10), которая, по авторскому определению в [14], имеет смысл интегрального среднего расстояния между двумя орбитами. Авторами показывается, что (10) удовлетворяет аксиомам метрического пространства, в то время как для D-критерия подобных выводов в литературе обнаружить не удалось. Однако, у D-критерия есть возможность контролировать «важность» орбитальных элементов, определяя веса  $w_k$ , в отличие от (10). В дальнейшем для определенности функционалом для сравнения орбит было выбрано выражение (9).

### 2.3. Постановка и решение оптимизационной задачи

Итак, в предыдущих параграфах были введены все понятия, необходимые для постановки задачи поиска наиболее близкой и безопасной орбиты космического аппарата. Теперь можем привести саму постановку:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \min_{\mathbf{x} \in \Pi}, \\ r_{\min} - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (11)$$

где целевой функцией  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  является (9),  $\mathbf{x}_0$  — начальная орбита космического аппарата,  $r_{\min}$  — заданный параметр безопасного расстояния (максимально допустимое сближение),  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^m$  — каталог орбит (наборов орбитальных элементов) опасных объектов, введённая в разделе 2.1 функция  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  является расстоянием в координатном пространстве между ближайшими точками двух орбит, а принадлежность оптимизационной переменной множеству

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 > 0, x_2 \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^5$$

означает непротиворечивость геометрического смысла орбитальных элементов.

Поставлена задача нелинейного программирования. Ограничения вида неравенств означают то, что найденная орбита должна быть удалена от каждой орбиты из каталога опасных объектов как минимум на величину  $r_{\min}$ . Орбиты, удовлетворяющие таким ограничениям, будем называть *безопасными*.

Известные численные методы оптимизации для решения задач, в постановке которых присутствуют ограничения, являются, как правило, методами

первого или второго порядка, которые так или иначе используют функцию Лагранжа (а также её градиент и гессиан в случае методов первого и второго порядка), в состав которой будут входить ограничения. Проблемы возникают из-за того, что ограничения-неравенства, входящие в состав лагранжиана рассматриваемой задачи, имеют достаточно сложную структуру в силу устройства функций  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ . Эти функции, во-первых, вычислительно затратны (процедуры описаны в п.2.1), и, во-вторых, аналитическое вычисление градиента таких функций затруднено. Причиной этому служит то, что расстояние  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  между двумя эллипсами, определённое по формуле (4), не может быть выражено в элементарных функциях. В данной работе значение (4) будет вычисляться по нативной процедуре дискретизации, которая является вычислительно затратной, поэтому оценка градиента такой функции является ещё более затратной процедурой. Поэтому было решено свести постановку к задаче безусловной оптимизации, чтобы расширить набор возможных применяемых алгоритмов, добавив безградиентные методы оптимизации. Для этого применим аппарат внешних штрафных функций. Ниже кратко будет приведена теория используемого далее метода.

Введём более общее множество (называемое *допустимым*), которому должна принадлежать оптимизационная переменная с учётом ограничений-неравенств:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \leq 0, j = 1, \dots, m\} \cap \Pi,$$

где в нашем случае  $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  –  $j$ -е ограничение на требуемое расстояние до опасной орбиты. Тогда задача (11) будет выглядеть следующим образом:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}. \quad (12)$$

**Определение.** Внешним штрафом для произвольного множества  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  называется любая функция  $\psi(\mathbf{x})$ , удовлетворяющая условиям:  $\psi(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in X$  и  $\psi(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus X$ .

С помощью  $\psi(\mathbf{x})$  строится однопараметрическое семейство штрафных функций общего вида:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + t\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (13)$$

где  $t > 0$  – коэффициент штрафа. При увеличении  $t$  увеличивается вклад добавки к целевой функции в недопустимых точках.

Наиболее распространённым выбором штрафа является квадратичный штраф. Можем поставить следующую задачу оптимизации:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{t}{2} \sum_{j=1}^m (g_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j))^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{x} \in \Pi}, \quad (14)$$

где  $(g_+^j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)) = \max[0, r_{\min} - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)]$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Таким образом, имеем однопараметрическую задачу условной оптимизации с ограничением простого вида  $\mathbf{x} \in \Pi$ . Как правило, наличие таких ограничений легко учитывается оптимизаторами отдельно и сохраняет все основные свойства алгоритма метода внешних штрафных функций. Сам алгоритм можно представить следующим образом:

---

**Algorithm 1:** Метод внешних штрафных функций

---

**Инициализация:** Задаём монотонно возрастающую последовательность коэффициентов штрафа  $t_k \rightarrow +\infty$ ;

**for**  $k \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**

*Шаг 1.* Решая задачу оптимизации  $\min_{\mathbf{x} \in \Pi} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_k)$ , находим точку

$\mathbf{x}_k \in \tilde{X}(t_k)$ , где  $\tilde{X}(t_k)$  – множество точек, доставляющих минимум функции  $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_k)$  при фиксированном значении коэффициента штрафа  $t_k$ .

*Шаг 2.* Полагаем  $k := k + 1$  и идём на шаг 1.

**return**  $x_n$ ;

---

Это идейное описание алгоритма внешних штрафных функций. Множество всех точек из допустимого множества  $X$ , являющихся решением (12), обозначим  $X_*$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\mathbf{x}_*$  – предельная точка последовательности  $\{\mathbf{x}_k\}$ , полученной в ходе описанного алгоритма внешних штрафных функций. Тогда  $\mathbf{x}_* \in X_*$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_k) = f(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_0) = f^*,$$

где  $f^* = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  – решение исходной условной задачи оптимизации.

Выше было приведено краткое и необходимое для понимания предлагаемой методики описание теории метода внешних штрафных функций. Более подробно с данной теорией можно ознакомиться, например, в [15].

На практике обычно задаётся достаточно большое значение параметра  $t$ , при дальнейшем увеличении которого алгоритм всё равно сходится к той же точке, что и до увеличения значения этого параметра. Эта точка и будет являться предельной для последовательности  $\{\mathbf{x}_k\}$  и, как следствие, решением задачи (14). Таким образом, в силу приведённой выше теоремы, при достаточно больших значениях параметра  $t$  задача (14) «аппроксимирует» задачу (11) в исходной постановке. Однако, исходя из специфики данного метода, полученные решения модифицированной задачи могут нарушать ограничения на некоторую величину  $\varepsilon$ , вообще говоря зависящую от  $t$ : чем больше

$t$ , тем меньше нарушение ограничений. Под решением поставленной задачи подразумевается именно локальный минимум функции (14).

Наиболее эффективным алгоритмом для решения (14) оказался симплекс-метод Нелдера–Мида [12]. Данный алгоритм будет основным для решения поставленной задачи оптимизации.

## 2.4. Демонстрация работы алгоритма

В таблице 3 приведены результаты моделирования для набора опасных орбит в количестве 14 штук и параметра безопасного расстояния  $r_{\min} = 0.5$  тыс. км. Здесь и далее используется свободно распространяемая реализация алгоритмов оптимизации из библиотеки SciPy [16]. Для решения поставленной задачи (14), как было упомянуто ранее, используется метод Нелдера–Мида. Веса всех орбитальных элементов в функции (9) равны единице. Расстояние между орбитами в ограничениях будем считать по нативной процедуре дискретизации (8) с  $N = 150$ . В первых двух строчках таблицы содержится информация о начальной и найденной орбитах соответственно.

	$a$ , тыс. км	$e$	$i$ , рад.	$\omega$ , рад.	$\Omega$ , рад.	$\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j)$ , т. км	$\rho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_j)$ , т. км
$\mathbf{x}_0$	7.01	0.015	1.69	3.0	3.77	—	—
$\mathbf{x}^*$	7.89	0.001	1.67	2.85	3.76	—	—
$\mathbf{x}_1$	7.13	0.030	1.11	2.95	0.87	0.228	0.567
$\mathbf{x}_2$	6.83	0.040	1.57	2.99	0.18	0.224	0.972
$\mathbf{x}_3$	6.93	0.010	1.57	2.99	0.27	0.199	0.994
$\mathbf{x}_4$	6.95	0.004	1.14	2.99	0.88	0.094	0.925
$\mathbf{x}_5$	6.93	0.016	1.76	2.99	0.18	0.231	0.922
$\mathbf{x}_6$	6.81	0.011	1.12	2.99	1.06	0.226	1.004
$\mathbf{x}_7$	6.75	0.014	1.58	1.59	0.36	0.289	1.113
$\mathbf{x}_8$	6.93	0.009	1.4	2.99	0.51	0.156	0.963
$\mathbf{x}_9$	6.95	0.014	1.09	2.61	0.18	0.184	1.012
$\mathbf{x}_{10}$	7.43	0.005	1.41	1.49	0.56	0.325	0.5
$\mathbf{x}_{11}$	7.43	0.008	1.45	1.85	1.4	0.362	0.55
$\mathbf{x}_{12}$	7.13	0.003	1.26	1.87	0.86	0.066	0.762
$\mathbf{x}_{13}$	6.83	0.002	1.05	1.56	0.83	0.178	1.054
$\mathbf{x}_{14}$	8.43	0.011	1.79	1.99	0.69	1.287	0.527

Таблица 3. Результат численного эксперимента.

Самыми информативными и интересными для нас являются последние два столбца таблицы. Первый из них содержит информацию о расстоянии от начальной орбиты космического аппарата до каждой из опасных орбит. Отчётливо видно, что практически все значения меньше, чем заданный параметр  $r_{\min} = 0.5$  тыс. км. В введённой терминологии означает, что орбита считается опасной. В последнем столбце содержится информация о расстоя-



нии уже от найденной оптимизатором орбиты  $\mathbf{x}^*$  до каждой из опасных орбит  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{14}$ . Все значения не меньше, чем заданный  $r_{\min}$ . Это означает, что найденная орбита  $\mathbf{x}^*$  является безопасной. В качестве начального приближения была взята орбита

$$\mathbf{x}^{(0)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Pi} \sum_{j=1}^m \left( g_+^j(\mathbf{x}) \right)^2, \quad (15)$$

то есть в качестве начального приближения бралась точка с минимально возможным значением штрафного слагаемого. Это промежуточная задача оптимизации, решаемая тем же алгоритмом с начальным приближением в точке  $\mathbf{x}_0$ . Как альтернативу такому начальному приближению для основной задачи можно также использовать  $\mathbf{x}_0$ . В тех или иных ситуациях одно начальное приближение может быть лучше другого. Для большей надёжности можно решать задачу дважды с двумя разными начальными приближениями и брать то решение, которое доставляет меньшее значение функции (9). Визуализация решения для данного демонстрационного примера представлена на рисунке 3.

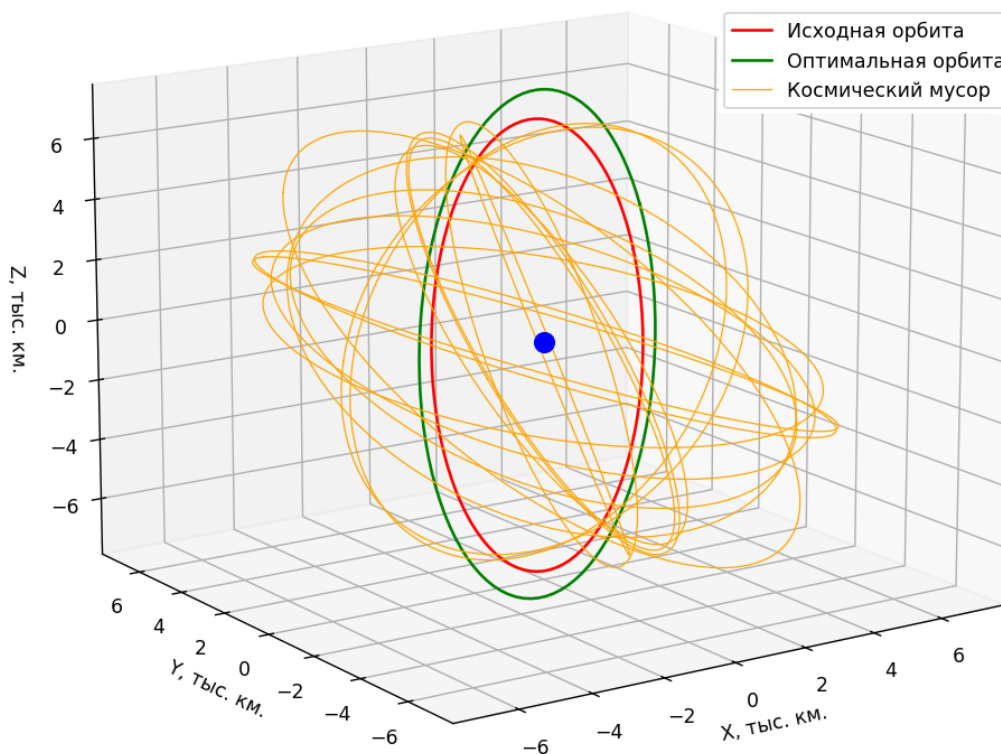


Рис. 3. Визуализация решения.

Алгоритм Нелдера–Мида отработал за 171 итерацию, 309 раз обратился к целевой функции. На персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 7 3750H расчёт занял 108 секунд времени. Основные вычислительные затраты на каждой итерации идут именно на вычисление расстояния между орбитами

по процедуре (8). В терминах числа операций с плавающей точкой (FLOP) данная процедура имеет асимптотику  $\mathcal{O}(mN^2d)$ , где  $m$ ,  $N$  и  $d$  — количество орбит космического мусора, количество точек дискретизации и размерность пространства соответственно. В нашем случае  $d = 5$ , поэтому для оценки асимптотики имеем  $\mathcal{O}(mN^2)$ . В случае  $m \sim N$  имеем оценку  $\mathcal{O}(N^3)$ , что в действительности подтверждает относительную вычислительную сложность данной процедуры.

## 2.5. Границы применимости и особенности работы алгоритма

Типичный ход работы алгоритма следующий. Как правило, на первых 50-ти итерациях происходит обнуление штрафного слагаемого и составная целевая функция сильно уменьшается, таким образом, происходит условный выход на ограничения, если говорить об исходной постановке задачи. Затем уже происходит оптимизация D-критерия, и оптимизатор, не нарушая ограничений, ищет геометрически наиболее близкую к  $\mathbf{x}_0$  орбиту.

В случае повышающегося числа орбит время работы алгоритма кратно увеличивается. Для тестирования алгоритма на большом количестве орбит космического мусора была создана специальная функция, которая на вход принимает одну типичную для космического мусора орбиту и возвращает любое заданное число орбит, близких к ней. К примеру, для 200 опасных орбит, сгенерированных таким образом, время работы метода составляет  $\approx 2000$  секунд. Количество итераций при этом меняется не сильно и остаётся того же порядка (может меняться как в одну, так и в другую сторону). При этом были обнаружены условно «неудобные» для алгоритма условия, которые заключаются в следующем. Если создавать плотные пучки опасных орбит на высотах, отличающихся на 1-2 тыс.км, а также задавать параметр безопасного расстояния  $r_{\min} \geq 0.1$  тыс.км, то алгоритм «застревает» посередине наименьшей и наибольшей высот пучков орбит опасных объектов, в таком случае алгоритм не сходится. Однако, такую проблему удалось разрешить. При достижении  $\sim 1000$  итераций алгоритм останавливается и запускается заново с новым начальным приближением с увеличенным значением большей полуоси. При этом оптимизатор, как правило, уже оказывается в ситуации, когда значение штрафного слагаемого нулевое, и происходит оптимизация D-критерия. Такая схема позволяет оптимизатору во всех подобных случаях получать ответ и достигать сходимости к локальному минимуму. Впрочем, описанная выше ситуация является искусственной.

Кроме того, значение параметра безопасного расстояния как в демонстрационном примере, так и при тестировании алгоритма на большом числе орбит космического мусора, задавалось заведомо избыточным. Чем меньше значение этого параметра, тем быстрее метод оказывается в допустимой области и сходится к решению. Для подобных орбит характерное значение этого

параметра составляет порядка 50 км, а задаваемые для наглядности значения в демонстрационном примере и тестах в разы превышают это значение. Тема грамотного определения параметра  $r_{\min}$ , достаточного для обеспечения безопасности, будет рассмотрена в следующей главе.

Таким образом, границы применимости предложенной методики определяются в основном объёмом доступной оперативной памяти. Это напрямую зависит от параметра дискретизации  $N$  орбит космического мусора и количества таких орбит. Программный инструмент для численного решения задачи был реализован на языке Python, поэтому время выполнения алгоритма можно сократить на 1-2 порядка, перейдя на более низкоуровневый язык программирования. При наличии параллелизма скорость может увеличиться пропорционально количеству доступных процессорных ядер.

## 2.6. Учёт зональной гармоник $J_2$

Из теории малых возмущений известно, что

$$\Delta\Omega \propto (-\cos i), \quad \Delta\omega \propto (4 - 5 \sin^2 i), \quad (16)$$

то есть в общем случае имеет место поворот плоскости орбиты, а также поворот самого кеплерового эллипса в поворачивающихся плоскостях. Для орбит типа «Молния» ( $i \approx 63.4^\circ$ ) имеет место только поворот плоскости орбиты, для полярной и экваториальной орбит имеет место только изменение  $\Delta\omega$ . На достаточно длительных промежутках времени всевозможные геометрические места точек, в которых может находиться пассивный объект на околоземной орбите, приблизительно имеют вид, представленный на рисунках 4 и 5.

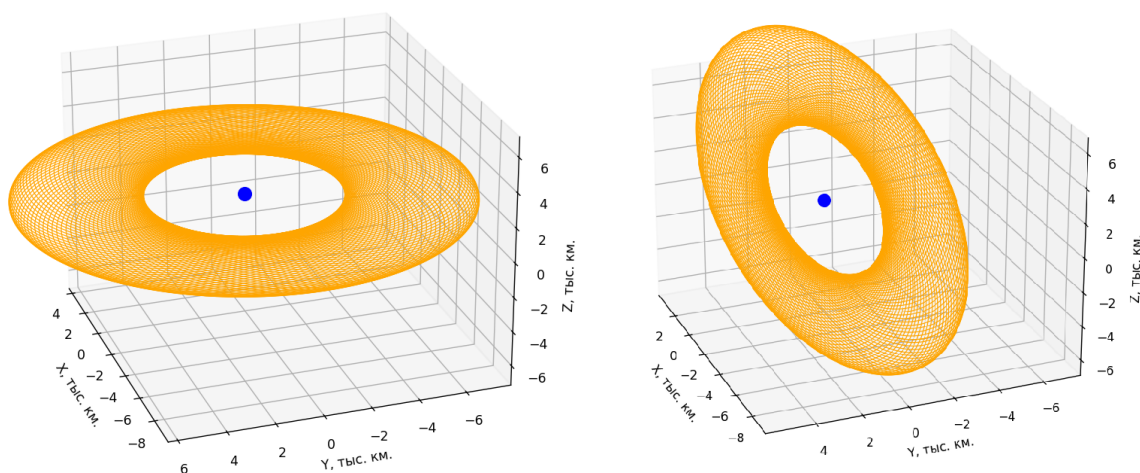


Рис. 4. Псевдоповерхности для наклонений  $i = 0^\circ$ ,  $i = 90^\circ$ .

Такие множества будем называть *псевдоповерхностями*. Для экваториальной и полярной орбит данные поверхности имеют вид дисков, а для ор-

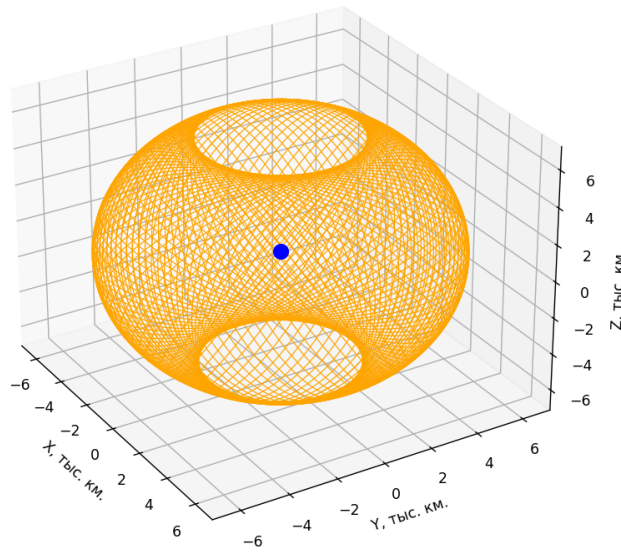


Рис. 5. Псевдоповерхность для наклонения  $i = 63.4^\circ$ .

биты типа «Молния» вид некоторого шара (в околосферическом случае) с «вырезанными» полюсами. Отдаление от таких поверхностей на  $r_{\min}$  обеспечит безопасность космического аппарата в достаточно долгосрочной перспективе (при заданном наборе информации об опасных объектах).

Программно это можно реализовать так: строим if-else окружение, которое будет генерировать побочные орбиты (множество всех таких орбит и есть псевдоповерхности) в зависимости от наклонения  $i$ . Для полярных и экваториальных орбит ( $i = \pi/2$  и  $i = 0$ ) генерируются побочные орбиты только со всевозможными значениями  $\omega$ . Для орбит типа «Молния» ( $4 - 5 \sin 2i = 0$ ) генерируются побочные орбиты только со всевозможными значениями  $\Omega$ . Иначе имеем общий случай, когда изменяются оба орбитальных элемента. В проводимых экспериментах количество побочных генерируемых орбит, составляющих псевдоповерхности (для каждого из значений  $\omega \in [0, 2\pi]$ ,  $\Omega \in [0, 2\pi]$ ) обычно варьируется от 30 до 80. Расстояние до таких псевдоповерхностей теперь может считаться только по нативной процедуре дискретизации (8).

Приведём конкретный демонстрационный пример работы алгоритма в случае учёта  $J_2$  по предлагаемой методике. Зададим параметр безопасного расстояния  $r_{\min} = 0.3$  тыс.км, плотность генерации побочных орбит по  $\omega$  и  $\Omega$  зададим равной 60. Имеем следующие результаты (см. таблицу 4).

Видно, что найдена безопасная орбита  $\mathbf{x}^*$ , удалённая от всех псевдоповерхностей не менее чем на 0.3 тыс.км. Алгоритм успешно отработал за 140 итераций и 260 раз обратился к целевой функции. Время расчёта при этом, в сравнении с обыкновенной моделью задачи двух тел, значительно возросло. Расчёт данного примера на том же персональном компьютере занял приблизительно 40 минут. Поведение алгоритма наблюдается точно такое же, как и

	а, тыс. км	е	i, рад.	$\omega$ , рад.	$\Omega$ , рад.	$\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j)$ , т. км	$\rho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_j)$ , т. км
$\mathbf{x}_0$	7.05	0.003	1.11	3.0	0.79	—	—
$\mathbf{x}^*$	7.61	0.003	1.01	2.92	0.80	—	—
$\mathbf{x}_1$	7.1	0.003	1.11	2.95	0.87	0.057	0.476
$\mathbf{x}_2$	7.0	0.001	1.11	1.95	0.61	0.048	0.59
$\mathbf{x}_3$	6.95	0.014	1.57	1.59	0.36	0.055	0.549
$\mathbf{x}_4$	7.22	0.001	0.0	2.59	0.43	0.158	0.365
$\mathbf{x}_5$	6.99	0.004	1.57	1.59	0.38	0.023	0.586
$\mathbf{x}_6$	7.09	0.004	0.79	1.59	0.86	0.011	0.48
$\mathbf{x}_7$	7.0	0.001	1.11	1.59	0.08	0.47	0.587
$\mathbf{x}_8$	7.3	0.003	1.57	1.59	1.11	0.224	0.3

Таблица 4. Результат численного эксперимента с учётом  $J_2$ .

в случае без учёта  $J_2$ , единственное отличие — сравнительно большая вычислительная сложность каждой итерации.

Отметим, что предлагаемая методика учёта зональной гармоники  $J_2$  является обобщением уже разработанной в рамках задачи двух тел методики. Получаемые таким образом орбиты могут обеспечивать безопасность до тех пор, пока не станет известна информация о новых опасных объектах. Можно поступать иначе. А именно, можно условно искать безопасную на какое-то определённое время  $\tau$  орбиту. Для этого стоит проинтегрировать уравнения движения для каждого объекта космического мусора на время  $\tau$  с некоторым шагом интегрирования, получив набор точек, в которых в рассматриваемом промежутке времени может находиться каждый из объектов космического мусора. Затем для получившегося множества точек можно применить всё тот же алгоритм, что и для рассмотренных и реализованных случаев. Таким образом можно искать безопасные на время  $\tau$  орбиты.

### 3. Методика определения параметра допустимого сближения

В предыдущей главе в постановке задачи оптимизации фигурировал параметр  $r_{\min}$ , означающий по факту то расстояние, на которое в процессе оптимизации подбираемая орбита должна быть удалена от всех орбит космического мусора из каталога. Данную величину будем называть *параметром безопасного расстояния* либо *параметром допустимого сближения*. Её значение во всех демонстрационных примерах задавалось «вручную» и считалось известным. В этой главе будет предложена методика, связывающая значение этого параметра с навигационной неопределенностью положений и скоростей объектов на опасных орбитах. Предложенное далее определение данной величины может быть полезно для реального применения методики

поиска безопасных орбит из предыдущей главы к настоящим космическим аппаратам.

### 3.1. Идея оценки параметра безопасного расстояния на основе навигационной неточности в определении скоростей и положений опасных объектов

Будем предполагать, что возможно определить положение и скорость потенциально опасного объекта на его орбите с точностью не хуже 1 км и 1 м/с соответственно. Точность определения по положениям и скоростям обозначим за  $\sigma_{\text{pos}}$  и  $\sigma_{\text{vel}}$  соответственно. Вследствие наличия неточности определения состояний опасных объектов такие объекты через несколько витков могут отклониться от прогнозируемого положения, что может создать угрозу для космических аппаратов. Визуально предлагаемую далее идею отражает рисунок 6. Описание данной иллюстрации следующее. Допустим объект космического мусора был определён в центральной чёрной точке. Но, как уже было сказано ранее, у такого определения есть некая точность  $\sigma_{\text{pos}}$  и  $\sigma_{\text{vel}}$ , поэтому данный объект может находиться в любой точке из синей области (причём эти точки могут иметь разную скорость). После нескольких оборотов по орбите точки синей области «перейдут» в точки красной области. И, таким образом, объект космического мусора может отклониться от прогнозируемого положения в худшем случае на величину, обозначенную как  $\Delta_{\text{max}}$ . С этой величиной и предлагается связать параметр безопасного расстояния  $r_{\text{min}}$ , взяв его, например,

$$r_{\text{min}} \geq \Delta_{\text{max}}.$$

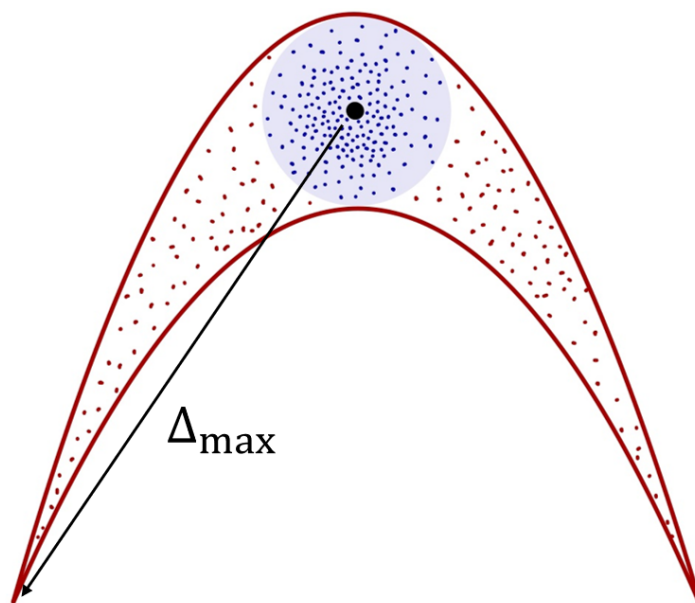


Рис. 6. Отклонение объекта от прогнозируемого положения.

Таким образом, с обеспечением удаления от орбит опасных объектов на такое расстояние, будет исключена возможность столкновения, связанная с тем, что невозможно абсолютно точно определить положения и скорости таких объектов. Терминологию «синих» и «красных» областей для простоты повествования будем использовать и далее.

### 3.2. Особенности и результаты моделирования предлагаемой методики

Для того чтобы наблюдать эволюцию точек из синей области в красную (рисунок 6), необходимо многократно решать задачу Коши с различными начальными условиями. В проводимых экспериментах будем генерировать порядка  $10^5 \div 10^6$  точек фазового пространства синей области с разными положениями и скоростями согласно нормальному распределению с параметрами  $\sigma_{\text{pos}}$ ,  $\sigma_{\text{vel}}$ . Соответственно, для того чтобы из синей области получить красную, нужно  $10^5 \div 10^6$  раз проинтегрировать уравнения движения на нескольких орбитальных периодах. Такая процедура, даже с учётом параллелизма, может занять значительное время.

Для решения данной проблемы будем использовать известный подход автоматического дифференцирования. При использовании данного алгоритма предлагается однократно рассчитывать траекторию на нескольких орбитальных витках и как результат получать формулу Тейлора для аппроксимации конечного состояния аппарата в зависимости от отклонений в начальный момент времени. И, таким образом генерируя эти различные отклонения (точки синей области), мы быстро получаем конечные состояния через несколько витков (точки красной области). Данная техника продемонстрирована, к примеру, в работе [17].

Продемонстрируем пример работы алгоритма. Сгенерируем  $10^5$  точек вокруг перигея околоземной орбиты с  $e = 0.5$  и минимальной высотой над поверхностью  $h = 300$  км. На одном орбитальном витке имеем следующую эволюцию (см. рисунок 7).

Теперь перейдём к определению параметра безопасного расстояния на практике. Для этого возьмём низкую круговую околоземную орбиту

$$\mathbf{x}_{low} = (6800 \text{ км}, 0, 51.6^\circ, 231.5^\circ, 227.1^\circ)^T$$

и найдём для неё множество  $\mathcal{D}$  всех расстояний от чёрной точки (такими точками для круговой орбиты может быть любая её точка, а для вытянутых — перицентр) определения, вокруг которой будут генерироваться точки синей области в количестве  $10^5$  штук. Точности определения по положениям и скоростям зададим равными  $\sigma_{\text{pos}} = 1$  км и  $\sigma_{\text{vel}} = 1$  м/с соответственно. Элементы множества  $\mathcal{D}_{low}$  обозначим  $d$ . Построим гистограмму для плотности распределения  $f(d)$  элементов множества  $\mathcal{D}_{low}$  (см. рисунок 8).

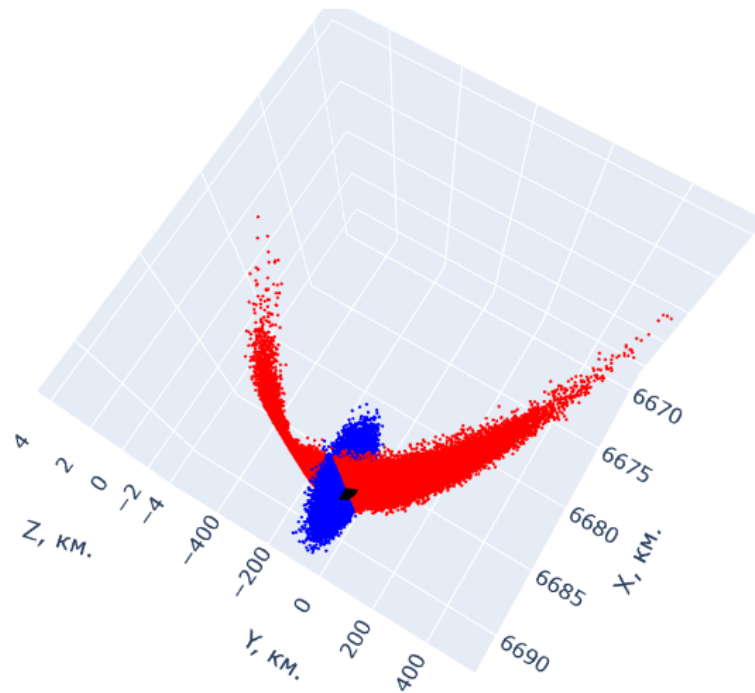


Рис. 7. Пример аппроксимации конечных положений космического аппарата.

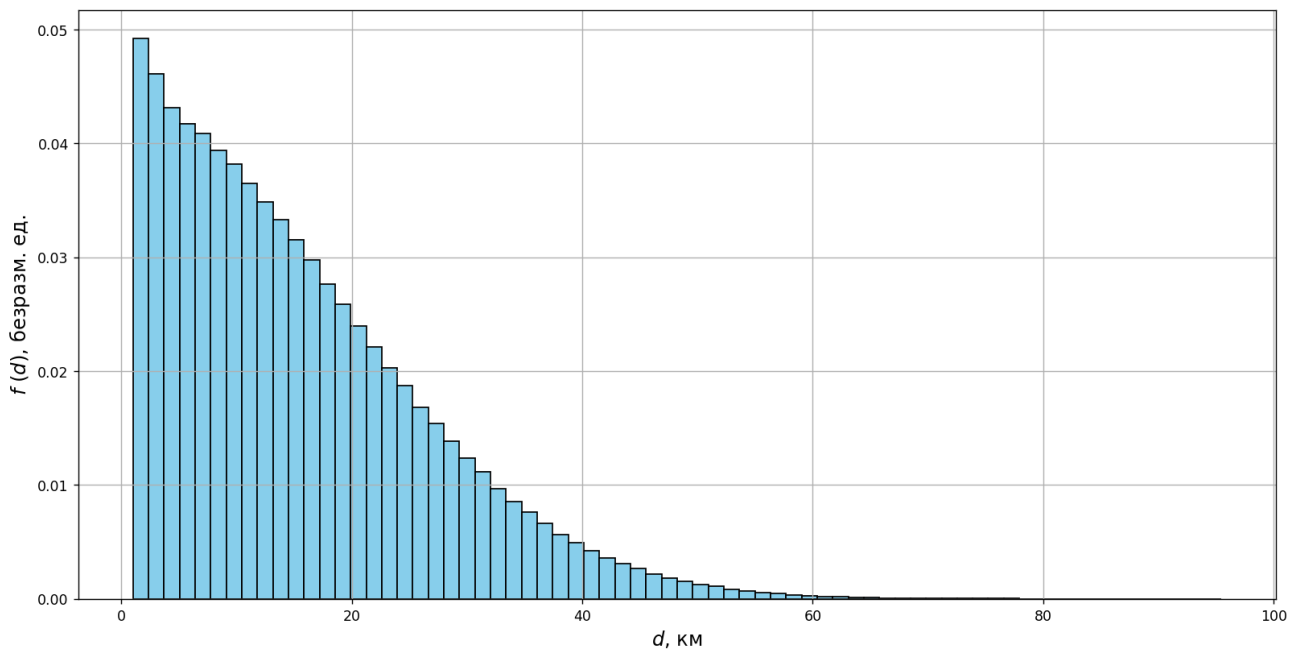


Рис. 8. Плотность распределения элементов множества  $\mathcal{D}_{low}$  для орбиты  $\mathcal{x}_{low}$ .



Видно, что точек, удалённых на максимальное расстояние в районе 95 километров (обозначаемое ранее как  $\Delta_{\max}$ ), значительно меньше, чем остальных точек выборки. Поэтому вероятность такого отклонения от прогнозируемого положения крайне мала. Вследствие этого параметр  $r_{\min}$  безопасного расстояния предлагается определить как  $\alpha$ -квантиль распределения отклонений от прогнозируемых положений. Если  $\mathcal{D}$  – такое множество, то

$$r_{\min} = Q_{\mathcal{D}}(\alpha). \quad (17)$$

В демонстрируемых экспериментах по умолчанию будем полагать  $\alpha = 0.9$ . Иными словами, 10% наиболее удалённых точек будем считать выбросами. Выбор такого определения параметра безопасного расстояния может быть подкреплён ещё и тем, что, строго говоря, нормальное распределение определено во всех точках рассматриваемого фазового пространства, из-за чего, теоретически, возможны крайне далёкие выбросы. Определение  $r_{\min}$  как квантиля исключает такие ситуации.

Теперь рассмотрим, как определённый выше параметр безопасного расстояния  $r_{\min}$  зависит от орбитальных элементов. Для начала посмотрим, как  $r_{\min}$  зависит от большей полуоси орбиты. Выберем для примера орбиту

$$\mathbf{x}_1 = (6671 \text{ км}, 0, 51.6^\circ, 251.8^\circ, 215.9^\circ)^T$$

и будем постепенно увеличивать значение величины большей полуоси вплоть до 7171 км, зафиксировав неизменными остальные орбитальные элементы. Навигационные неопределённости в данном примере положим  $\sigma_{\text{pos},1} = 1$  км,  $\sigma_{\text{vel},1} = 10$  см/с. Прделав это, можем построить график (см. рисунок 9). Видим, что имеет место тенденция увеличения значения параметра безопасного расстояния при увеличивающихся значениях большей полуоси орбиты.

В данном примере производные для тейлоровской аппроксимации брались после интегрирования методом РК78 [19] семейства Рунге–Кутты на одном орбитальном витке. Данный метод, обладающий высокой точностью, применяется для численного решения дифференциальных уравнений и обеспечивает контроль погрешности. Данный метод по умолчанию будет использоваться и далее.

С целью демонстрации рассмотрим орбиту

$$\mathbf{x}_2 = (21000 \text{ км}, 0, 51.6^\circ, 221.8^\circ, 115.9^\circ)^T$$

и будем постепенно увеличивать значение эксцентриситета от 0 до 0.7, зафиксировав неизменными остальные орбитальные элементы. Прделав это, можем построить график (см. рисунок 10).

В данном случае уже видно более чёткое монотонное и нелинейное возрастание параметра  $r_{\min}$  при увеличении эксцентриситета. Параметры генерации отклонений (точек синей области) в данном эксперименте точно такие же, как и для предыдущего графика.

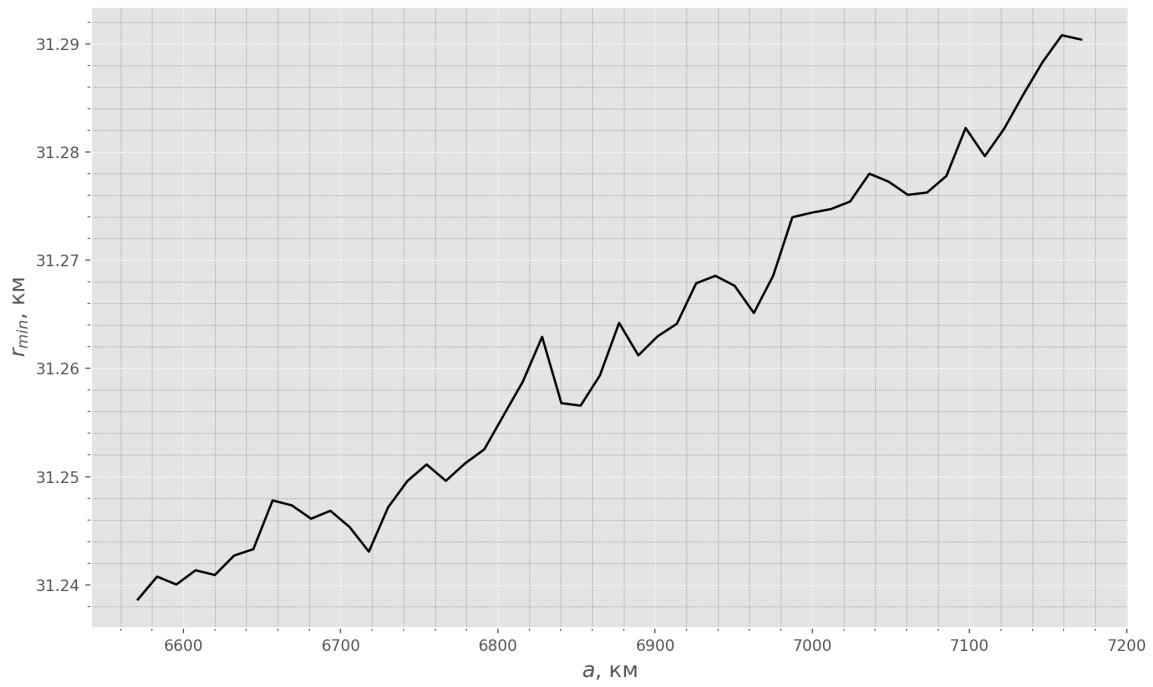


Рис. 9. Зависимость параметра безопасного расстояния от величины большей полуоси орбиты.

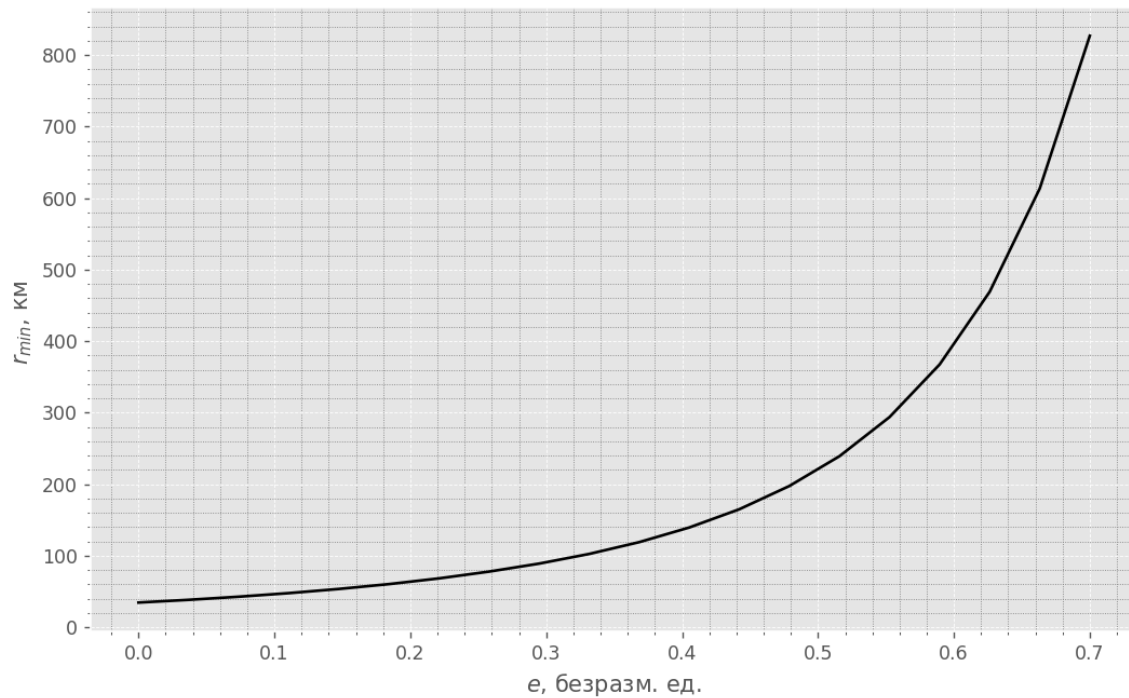


Рис. 10. Зависимость параметра безопасного расстояния от величины эксцентриситета орбиты.

Величина параметра безопасного расстояния  $r_{\min}$  не имеет явной зависимости от угловых орбитальных элементов  $(i, \omega, \Omega)$ , отвечающих за ориентацию эллипса в пространстве. При аналогичных исследованиях для этих орбитальных элементов значение параметра  $r_{\min}$  не имеет тенденции к явному уменьшению или увеличению, а отклонение подобных графиков от горизонтальных линий объясняется случайностью при генерации точек синей области.

### 3.3. Определение зависимости параметра допустимого сближения от навигационной неопределённости и полуаналитический вывод расчётных формул для типичных орбит

В данном параграфе будет проведено исследование зависимости параметра безопасного расстояния от величины навигационных неопределённостей  $\sigma_{\text{pos}}$  и  $\sigma_{\text{vel}}$ , входящих в параметры генерации точек из синих областей по закону нормального распределения. Проведём данное исследование для солнечно-синхронной орбиты и орбиты типа «Молния».

Рассмотрим солнечно-синхронную орбиту

$$\mathbf{x}_{\text{sync}} = (6950 \text{ км}, 0, 98.3^\circ, 251.8^\circ, 215.9^\circ)^T$$

и построим для неё график зависимости  $r_{\min}(\sigma_{\text{pos}}, \sigma_{\text{vel}})$ . Значения величины  $r_{\min}$  для конкретной пары  $(\sigma_{\text{pos}}, \sigma_{\text{vel}})$  считаются по процедуре, описанной в предыдущем параграфе. Параметры генерации:  $5 \cdot 10^4$  точек синей области из нормального распределения, тейлоровская аппроксимация после одного орбитального оборота. Значения будут считаться в точках двумерной дискретной сетки в промежутках  $(0; \sigma_{\text{pos, max}})$  и  $(0; \sigma_{\text{vel, max}})$ , количество значений для каждой переменной в сетке равно 50. Границы диапазонов

$$\sigma_{\text{pos, max}} = 1 \text{ км}, \quad \sigma_{\text{vel, max}} = 1 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для круговой солнечно-синхронной орбиты имеем следующий график функции двух переменных  $r_{\min}(\sigma_{\text{pos}}, \sigma_{\text{vel}})$  в виде изолиний (рисунок 11).

Видим, что для данных орбит типичное значение параметра  $r_{\min}$  составляет несколько десятков километров. Прделаем то же самое для орбиты типа «Молния»:

$$\mathbf{x}_{\text{light}} = (26600 \text{ км}, 0.7, 63.4^\circ, 90^\circ, 16^\circ)^T.$$

С теми же параметрами генерации точек отклонений имеем график, изображённый на рисунке 12.

Обратим внимание, что изолинии на этих графиках имеют вид концентрических четвертей эллипсов. Данный факт позволяет выдвинуть предположение, что параметр безопасного расстояния может быть хорошо описан

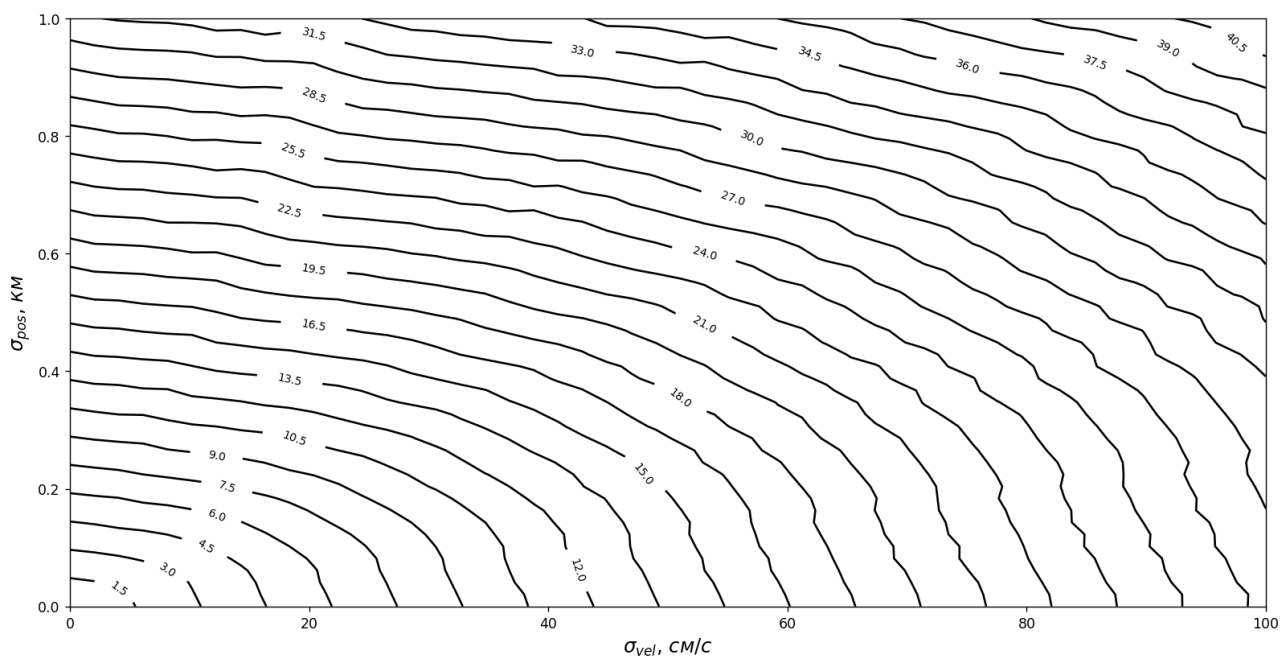


Рис. 11. График зависимости параметра безопасного расстояния от величины навигационной неопределённости для солнечно-синхронной орбиты.

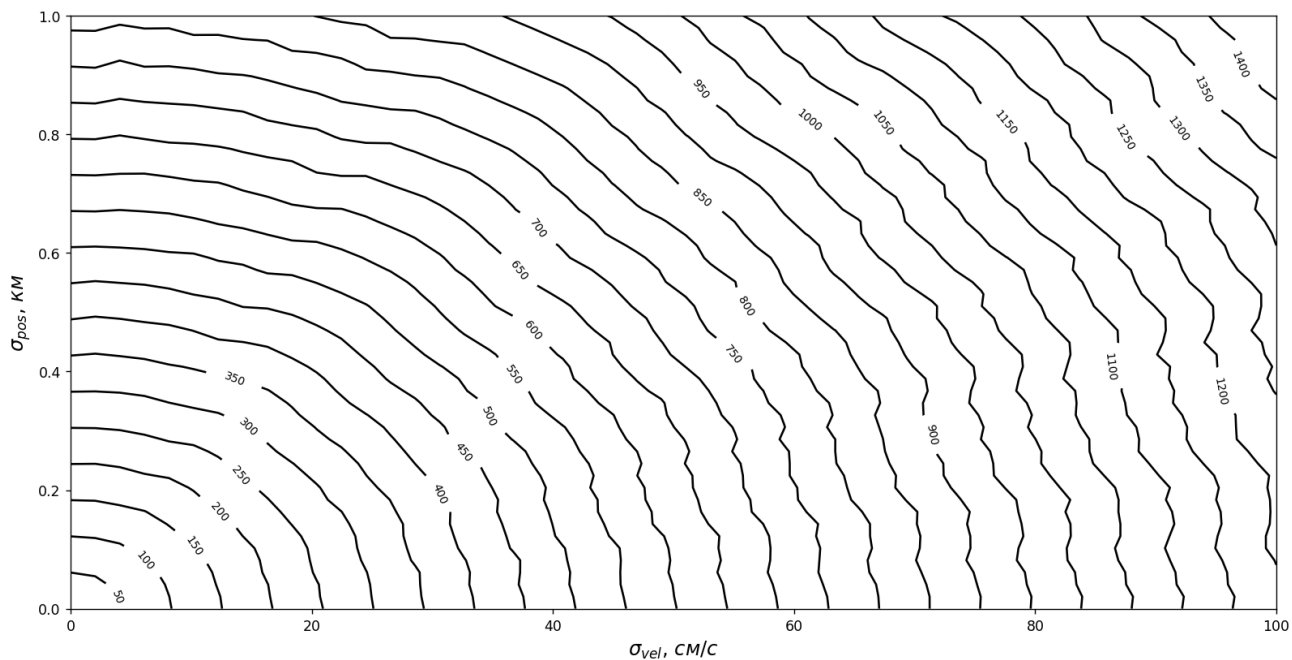


Рис. 12. График зависимости параметра безопасного расстояния от величины навигационной неопределённости для орбиты типа «Молния».

формулой:

$$r_{\min} = \sqrt[n]{\alpha_1 \sigma_{\text{pos}}^n + \alpha_2 \sigma_{\text{vel}}^n}, \quad (18)$$

где  $n, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ . Находить значения параметров  $n, \alpha_1, \alpha_2$  для конкретной орбиты в формуле (18) будем в два этапа. На первом этапе зафиксируем  $n$  и поставим задачу линейной регрессии относительно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (r_{\min,i}^n - \alpha_1 \sigma_{\text{pos},i}^n - \alpha_2 \sigma_{\text{vel},i}^n)^2 \longrightarrow \min_{\alpha_1, \alpha_2}, \quad (19)$$

где  $M$  — количество точек в сетке, по которой были получены значения  $r_{\min,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$ . В данных экспериментах  $M = 2500$ . Задача (19) может быть переписана в векторном виде:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (r_{\min,i}^n - \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\alpha})^2 \longrightarrow \min_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{a}_i = (\sigma_{\text{pos},i}^n, \sigma_{\text{vel},i}^n)^T$  и  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ . Для решения данной задачи имеется аналитическое выражение. Пусть  $A \in \mathbb{R}^{M \times 2}$  — матрица, строки которой  $\mathbf{a}_i^T$ , а вектор  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$  состоит из компонент  $r_{\min,i}^n$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Тогда ответ для задачи линейной регрессии выражается формулой Маркова–Гаусса:

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}. \quad (21)$$

На втором этапе будем варьировать  $n$  и в (21) положим  $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}^*(n)$ . Затем, подставляя  $\boldsymbol{\alpha}^*(n)$  в (20), численно решаем задачу оптимизации относительно переменной  $n$  и находим

$$n^* = \arg \min_{n \in \mathbb{R}_+} \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*(n)). \quad (22)$$

Затем найденное решение задачи (22) подставляем в формулу Маркова–Гаусса и находим значения  $\boldsymbol{\alpha}^{**} = \boldsymbol{\alpha}^*(n^*)$ . Найденные значения параметров  $n^*$  и  $\boldsymbol{\alpha}^*$  подставляются в формулу (18), и для каждой конкретной орбиты получается явная формула для оценки  $r_{\min}$ . Оптимизируемый функционал в задаче (22) является функцией одной переменной  $n$  и в случае рассматриваемой выше солнечно-синхронной орбиты  $\mathbf{x}_{\text{sync}}$  при тех же параметрах генерации отклонений имеет вид, представленный на рисунке 13.

Решать задачу (22) в обоих случаях будем численно безградиентным методом Пауэлла [20]. Этот метод является одной из модификаций метода сопряжённых направлений. Алгоритм минимизирует функцию путем двунаправленного линейного поиска методом золотого сечения по каждому из специальным образом выбранных неколлинеарных направлений в пространстве  $\mathbb{R}^p$ , где  $p$  — размерность пространства оптимизационной переменной.

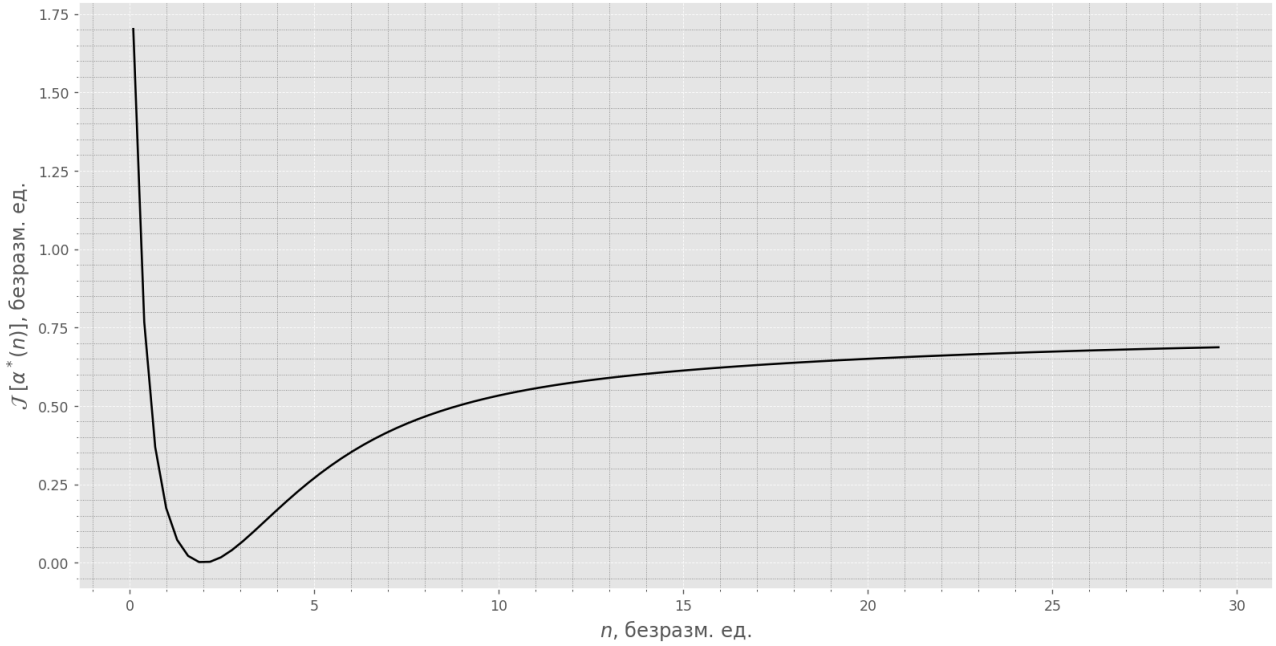


Рис. 13. График целевой функции задачи (22).

Для рассматриваемой солнечно-синхронной орбиты  $\mathbf{x}_{sync}$  при решении (22) метод Пауэлла с начальным приближением  $n^{(0)} = 2.1$  сошёлся за 2 итерации к значению  $n_{sync}^* = 1.98$ . В итоге, с учётом формулы Маркова-Гаусса, имеем итоговую расчётную формулу оценки  $r_{min}$  для солнечно-синхронной орбиты:

$$r_{min}^{sync} = \left[ \sqrt[1.98]{0.59(\hat{\sigma}_{pos})^{1.98} + 0.41(\hat{\sigma}_{vel})^{1.98}} \right] \cdot 41.72 \text{ км}, \quad (23)$$

где  $\hat{\sigma}_{pos} = \frac{\sigma_{pos}}{\sigma_{pos,max}}$  и  $\hat{\sigma}_{vel} = \frac{\sigma_{vel}}{\sigma_{vel,max}}$  — нормированные на максимум дискретной сетки значения навигационной неопределённости по положениям и скоростям соответственно. Проделав то же самое для рассматриваемой орбиты типа «Молния», получим итоговую расчётную формулу оценки  $r_{min}$ :

$$r_{min}^{light} = \left[ \sqrt[1.96]{0.32(\hat{\sigma}_{pos})^{1.96} + 0.68(\hat{\sigma}_{vel})^{1.96}} \right] \cdot 1450.03 \text{ км}. \quad (24)$$

В данном случае характер сходимости метода Пауэлла был такой же, как и в предыдущем случае солнечно-синхронной орбиты: сходимость за 2 итерации к значению  $n_{light}^* = 1.96$  с начальным приближением  $n^{(0)} = 2.1$ .

Проверим формулу (23) на пробной точке

$$(\sigma_{pos}, \sigma_{vel}) = (0.8 \text{ км}, 20 \text{ см/с}).$$

Значение параметра безопасного расстояния  $r_{\min}$ , вычисленное по процедуре из п.2.2: 25.68 км. Значение параметра безопасного расстояния  $r_{\min}$ , вычисленное по формуле (23): 25.46 км.

Ту же самую проверку сделаем для формулы (24) на той же пробной точке. Значение параметра безопасного расстояния  $r_{\min}$ , вычисленное по процедуре из п.2.2:  $\approx 674.83$  км. Значение параметра безопасного расстояния  $r_{\min}$ , вычисленное по формуле (23):  $\approx 648.74$  км.

Получены достаточно точные и удобные формулы для оценки параметра  $r_{\min}$  для типичных орбит. Таким образом, зная, к какому типу принадлежит орбита опасного объекта космического мусора, можно получить значение параметра  $r_{\min}$  для оптимизационной задачи, постановке и решению которой была посвящена глава 1. Такое часто встречается на практике, ведь, как правило, объекты космического мусора сосредоточены в основном вблизи некоторых типичных орбит.

Примечательна «близость» степени  $n$  к числу 2 в обоих случаях. Вероятно, в этом есть глубинный физический смысл, определяемый некой симметрией уравнений движения. Так как формулы (23) и (24) являются оценочными, то вполне уместно использовать следующие выражения:

$$\begin{aligned} r_{\min}^{sync} &\approx \left[ \sqrt{0.6(\hat{\sigma}_{\text{pos}})^2 + 0.4(\hat{\sigma}_{\text{vel}})^2} \right] \cdot 42 \text{ км}, \\ r_{\min}^{light} &\approx \left[ \sqrt{0.3(\hat{\sigma}_{\text{pos}})^2 + 0.7(\hat{\sigma}_{\text{vel}})^2} \right] \cdot 1450 \text{ км}. \end{aligned} \tag{25}$$

## 4. Заключение

В ходе работы была предложена и реализована собственная методика поиска наиболее близкой к исходной и безопасной орбиты космического аппарата с целью избежать столкновения с космическими объектами с учётом их навигационной неопределённости. Удалось успешно решить поставленную задачу оптимизации методом штрафных функций с применением безградиентных методов оптимизации.

Перед постановкой самой задачи была также затронута тема поиска расстояния между двумя эллипсами. Были предложены и рассмотрены несколько подходов к поиску такого расстояния. Дальнейшей темой исследований может быть определение начального приближения для методов локальной оптимизации, решающих данную задачу. Описанный подход потенциально может в разы увеличить скорость расчёта расстояния между эллипсами без потери точности.

Немаловажным результатом работы является реализация предложенной методики определения параметра допустимого сближения  $r_{\min}$ . Это может

быть полезно при применении предложенной методики поиска безопасных орбит в реальных задачах. Также удалось получить явные аналитические выражения для  $r_{\min}$  для солнечно-синхронной орбиты и орбиты типа «Молния». Дальнейшей темой исследований также может быть более детальное аналитическое рассмотрение данной проблемы. Потенциалом этому служит довольно примечательный вид полученных формул.

## Список литературы

- [1] The cost of space debris: In-space collisions increasingly likely. URL: <https://phys.org/news/2020-05-space-debris-in-space-collisions-increasingly.html> (дата обращения: 10.05.2024).
- [2] Bombardelli C., Hernando-Ayuso J. Optimal impulsive collision avoidance in low earth orbit //Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2015. – V. 38. – №. 2. – P. 217-225.
- [3] Gonzalo J. L., Colombo C., Di Lizia P. Analytical framework for space debris collision avoidance maneuver design //Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2021. – V. 44. – №. 3. – P. 469-487.
- [4] Morselli A. et al. Collision avoidance maneuver design based on multi-objective optimization //Advances in the Astronautical Sciences. – 2014. – V. 152. – №. 4. – P. 1819-1838.
- [5] Armellin R. Collision avoidance maneuver optimization with a multiple-impulse convex formulation //Acta Astronautica. – 2021. – V. 186. – P. 347-362.
- [6] Berz M., Makino K., Kim Y. K. Long-term stability of the tevatron by verified global optimization //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2006. – V. 558(1) P. 1-10.
- [7] Hernando-Ayuso J., Bombardelli C., Gonzalo J. L. Occam: Optimal computation of collision avoidance maneuvers //6th International Conference on Astrodynamics tools and techniques (ICATT). – 2016.
- [8] Uriot T. et al. Spacecraft collision avoidance challenge: Design and results of a machine learning competition //Astrodynamics. – 2021. – P. 1-20.
- [9] Raigoza K., Sands T. Autonomous trajectory generation comparison for de-orbiting with multiple collision avoidance //Sensors. – 2022. – V. 22. – №. 18. – P. 7066.



- [10] Kholoshevnikov K. V., Vassiliev N. N. On the distance function between two Keplerian elliptic orbits //Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1999. – V. 75. P. 75-83.
- [11] Gronchi G. F. An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two Keplerian orbits //Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2005. – V. 93. – P. 295-329.
- [12] Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization //The computer journal. – 1965. – V. 7(4). – P. 308-313.
- [13] Southworth R. B., Hawkins G. S. Statistics of meteor streams //Smith. Contrib. Astrophys. 1963. V.7. P.261-285.
- [14] Kholoshevnikov K. V., Vassiliev N. N. Natural metrics in the spaces of elliptic orbits //Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2004. – V. 89. – P. 119-125.
- [15] Жадан В. Г. Методы оптимизации. Ч. 2. Численные алгоритмы. § 6.1 //М.: МФТИ. – 2015.
- [16] SciPy. Официальный сайт программной библиотеки SciPy [Электронный ресурс]. URL: <https://scipy.org/> (дата обращения: 27.02.2024).
- [17] Di Lizia P., Armellin R., Zazzera F. B. and Berz M. High order expansion of the solution of two-point boundary value problems using differential algebra: applications to spacecraft dynamics // IRIS: Catalogo Pubblicazioni POLIMI [Электронный портал]. [2008]. URL: <https://re.public.polimi.it/handle/11311/545747> (дата обращения: 02.05.2024).
- [18] Python wrapper of DACE, the Differential Algebra Computational Toolbox // GitHub : [Электронная платформа]. URL: <https://github.com/giovannipurpura/dacepy> (дата обращения: 27.02.2024).
- [19] Fehlberg E. Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control //NASA Tech Rep R-287, NASA. – 1968. – P. 15.
- [20] Powell M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives //The computer journal. – 1964. – V. 7(2). – P. 155-162.

# Оглавление

<b>1. Введение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2. Оптимизационная задача поиска безопасной и наиболее близкой к исходной орбиты космического аппарата</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1. Расстояние между кеплеровскими кофокальными эллипсами . . . . .	5
2.2. Целевая функция задачи оптимизации . . . . .	11
2.3. Постановка и решение оптимизационной задачи . . . . .	12
2.4. Демонстрация работы алгоритма . . . . .	15
2.5. Границы применимости и особенности работы алгоритма . . . . .	17
2.6. Учёт зональной гармоник $J_2$ . . . . .	18
<b>3. Методика определения параметра допустимого сближения</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1. Идея оценки параметра безопасного расстояния на основе навигационной неточности в определении скоростей и положений опасных объектов . . . . .	21
3.2. Особенности и результаты моделирования предлагаемой методики . . . . .	22
3.3. Определение зависимости параметра допустимого сближения от навигационной неопределённости и полуаналитический вывод расчётных формул для типичных орбит . . . . .	26
<b>4. Заключение</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>31</b>