



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 52 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ф.Н. Воронин, М.Б. Марков,
И.А. Тараканов

Алгоритм численного
решения уравнений
Максвелла для
моделирования возмущения
магнитного поля
ионизированной средой

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Тараканов И.А. Алгоритм численного решения уравнений Максвелла для моделирования возмущения магнитного поля ионизированной средой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 52. 16 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-52>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-52>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Ф.Н. Воронин, М.Б. Марков, И.А. Тараканов

**Алгоритм численного решения
уравнений Максвелла для моделирования
возмущения магнитного поля
ионизированной средой**

Москва — 2024

Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Тараканов И.А.

Алгоритм численного решения уравнений Максвелла для моделирования возмущения магнитного поля ионизованной средой

Рассмотрено движение ионизованной среды во внешнем магнитном поле. Построен численный алгоритм решения электродинамических уравнений в приближении магнитной газовой динамики. Уравнения Максвелла в квазистатическом приближении аппроксимированы на декартовой разностной сетке. Решение разностных уравнений организовано по схеме «предиктор-корректор». Представлены алгоритмы для случаев идеальной и неидеальной магнитной газовой динамики.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, магнитная газовая динамика, магнитное поле, разностная схема, аппроксимация

Voronin F.N., Markov M.B., Tarakanov I.A.

Algorithm for numerical solution of Maxwell's equations for modeling disturbances of the magnetic field by an ionized medium

The motion of an ionized medium in an external magnetic field is considered. A numerical algorithm for solving electrodynamic equations in the magnetic gas dynamics approximation has been constructed. Maxwell's equations in the quasi-static approximation are approximated on a Cartesian difference grid. The solution of difference equations is organized according to the “predictor-corrector” scheme. Algorithms are presented for the cases of ideal and non-ideal magnetic gas dynamics.

Key words: Maxwell's equations, magnetic gas dynamics, magnetic field, difference scheme, approximation

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи.....	4
2. Модель идеальной магнитной газовой динамики.....	9
3. Модель неидеальной магнитной газовой динамики.....	12
4. Тестовая задача.....	14
Заключение.....	15
Библиографический список.....	16

Введение

Моделирование взаимодействия ионизованного вещества с магнитным полем актуально для ряда научно-технических проблем. Примером является теоретическое исследование удержания плазмы магнитным полем, например в стеллараторах и токамаках [1, 2].

Уравнения магнитной газовой динамики применяются для моделирования ионизованных сред [3]. Результатом численного решения данных уравнений являются распределения плотности, состава, скорости движения, проводимости ионизованных образований. В некоторых экспериментальных установках ионизованное вещество движется во внешнем магнитном поле и возмущает его. Движение ионизованного вещества создает ток проводимости, структура магнитного поля меняется – оно вытесняется из ионизованной среды. Моделирование таких процессов актуально в областях науки и техники, связанных с системами.

Моделирование вытеснения магнитного поля связано с решением электродинамических уравнений. Авторами данной работы разработана разностная схема решения уравнений Максвелла в полной постановке [4]. Схема является явной, консервативной, имеет второй порядок аппроксимации на однородной сетке с целыми и полуцелыми узлами. Схема показала свою эффективность при решении ряда практически важных задач.

Прямое применение явной схемы решения уравнений Максвелла для моделирования возмущения магнитного поля ограничено условием устойчивости Куранта. Объем вычислений, необходимый для решения полных уравнений Максвелла с током смещения, недопустим на доступных суперкомпьютерах. Поэтому моделирование электромагнитного поля в таких задачах основывают на магнитогидродинамическом приближении. Приближение обосновано в средах с удельным сопротивлением, малым по сравнению с временем движения среды.

Цель работы определяется необходимостью сочетания решения уравнений Максвелла в полной постановке с квазистатическим приближением в рамках решения единой практической задачи. Примером является исследование процесса формирования ионизованной среды пучком ускорителя электронов [5, 6]. Здесь необходимо учитывать, что ионизованная среда ограничена в пространстве, а значит, квазистатическое приближение применимо не во всей области расчета. Кроме того, электроны пучка создают в ионизованной и окружающей ее средах сторонний электрический ток и объемный заряд. Ионизованная среда здесь может взаимодействовать с магнитным полем соленоида ускорительного тракта, «провисающим» в исследовательскую камеру. Данная работа представляет модификацию вышеуказанной разностной схемы для квазистационарных задач. Разностная сетка и принципы аппроксимации уравнений Максвелла, представленные в [4], сохранены.

1. Постановка задачи

В наиболее общем случае взаимодействие электромагнитного поля и неполяризованной и немагнитной среды в области электронов описывается следующими уравнениями [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i + g_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - T_{ik}) + Q_i^p - \left(q E_i + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_i \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) + \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = \\ & = -\operatorname{div} \left(\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) + \mathbf{q} + \mathbf{S} \right) + Q^\varepsilon - \mathbf{j} \mathbf{E} - G. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность вещества преграды, p – давление, T – температура, u – удельная внутренняя энергия единицы массы, \mathbf{v} – вектор удельной скорости вещества преграды с компонентами v_i , $i=1, \dots, 3$, \mathbf{q} – вектор плотности потока тепла, G – интенсивность выделения лучистой энергии, векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} с компонентами E_i , H_i – напряженность электрического поля и магнитного поля соответственно, \mathbf{S} – вектор Пойнтинга, g_i – компонента вектора плотности импульса электромагнитного поля, c – скорость света, $q(t, \mathbf{r})$ – плотность заряда электронов, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ – плотность тока электронов.

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (5)$$

Тензор напряжений электромагнитного поля (или тензор максвелловских натяжений) имеет вид

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_k + H_i H_k - \delta_{ik} \left(\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} H^2 \right) \right). \quad (6)$$

Для расчета изменения энергии единичного объема газоплазменного образования за счет радиационного переноса излучения решаются следующие уравнения:

$$G = -\operatorname{div} \mathbf{W}, \mathbf{W} = \iint I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t) \boldsymbol{\Omega} d\nu d\Omega, \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} I_\nu = k_\nu (J - I_\nu),$$

здесь $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$ – вектор потока энергии излучения, $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \nu, t)$ – спектральная интенсивность излучения частоты ν , $k_\nu(\nu, T, \rho)$ – спектральный коэффициент поглощения излучения, $\boldsymbol{\Omega}$ – единичный вектор, $d\Omega$ – элемент телесного угла, J – интенсивность равновесного излучения, равная

$$J = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left(\exp\{h\nu/(kT)\} - 1 \right)},$$

где h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана.

Уравнения движения среды (1-3) дополняются уравнениями Максвелла [8] для компонент электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^* + q\mathbf{v}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (8)$$

где q – плотность заряда среды, $q\mathbf{v}$ – конвективный ток, \mathbf{j}^* – ток проводимости, определяемый законом Ома:

$$\mathbf{j}^* = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right), \quad (9)$$

σ – электропроводность ионизированной среды.

Уравнения (1-3) описывают баланс массы, импульса и энергии ионизированной среды в совокупности с электромагнитным полем. Правые части уравнений содержат источники, связанные с быстрыми электронами. Процесс переноса и рассеяния электронов в газовой среде описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}f_e) + e \operatorname{div}_p \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) f_e \right] + \operatorname{St}[f_e] = Q_e, \quad (10)$$

где $f_e = f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – функция распределения электронов в фазовом пространстве координат \mathbf{r} и импульсов \mathbf{p} , \mathbf{v} – вектор скорости электрона, e – заряд электрона, \mathbf{p} – импульс электрона, div_p – оператор дивергенции в импульсном пространстве, $Q_e = Q_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – источник электронов, $\text{St}[f_e]$ – интеграл столкновений.

Интегрируя уравнение (10) с соответствующими весами, можно убедиться в том, что совокупные потери импульса и энергии электронов при взаимодействии с электромагнитным полем в точности равны членам в правых частях (2-3). Потери импульса равны $qE_i + [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_i / c$, потери энергии – \mathbf{jE} .

Отдельно отметим, что уравнениям (2-3) можно придать форму баланса импульса и энергии ионизованной среды без электромагнитного поля. Для этого воспользуемся следствиями уравнений Максвелла (7-8):

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} - (q_{ext} + q)E_i - \frac{1}{c} [(\mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}^* + q\mathbf{v}) \times \mathbf{H}]_i, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div} \mathbf{S} - (\mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}^* + q\mathbf{v}) \mathbf{E}. \quad (12)$$

Уравнение (11) выражает закон сохранения импульса электромагнитного поля, (12) – теорему Пойнтинга, т.е. закон сохранения энергии электромагнитного поля. Вычитая (11) и (12) из (2) и (3), соответственно, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) + Q_i^p + qE_i + \frac{1}{c} [(\mathbf{j}^* + q\mathbf{v}) \times \mathbf{H}]_i, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \right) = -\text{div} \left(\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) + \mathbf{q} \right) - G_{rad} + Q^e + (\mathbf{j}^* + q\mathbf{v}) \mathbf{E}. \quad (14)$$

Рассмотрим, как изменятся уравнения (1-3, 7, 8, 10) в приближении высокой электропроводности ионизованной среды.

Разделим первое уравнение Максвелла (7) на электропроводность среды σ и формально устремим ее к бесконечности. В результате получим примерное соотношение между электрическим и магнитным полями в случае высокой электропроводности среды

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (15)$$

Используя (15), сравним между собой отдельные члены в (7). Учитывая, что плотность заряда среды равна дивергенции напряженности электрического поля за вычетом плотности заряда свободных частиц, верна оценка для конвективного тока

$$q\mathbf{v} \approx \mathbf{v} \operatorname{div} \left(\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right).$$

Отсюда видно, что члены $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ и $4\pi q\mathbf{v}/c$ соотносятся друг с другом примерно как единица с квадратом отношения v/c . Поскольку скорость среды много меньше скорости света,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \gg \frac{4\pi}{c} q\mathbf{v}.$$

Кроме того, подставляя (15) в ток смещения из (7), можно показать, что в широком диапазоне частот справедливо соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \gg \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Таким образом, для среды с высокой проводимостью вместо (7) можно написать

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_{ext} + \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) \right). \quad (16)$$

Здесь для наглядности ток проводимости выписан в соответствии с (9). Уравнение (8) остается без изменений.

Выражая напряженность электрического поля из (16) и подставляя ее в (8), получим (при условии конечности электропроводности) уравнение диффузии магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}c}{\sigma} - \operatorname{rot} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right). \quad (17)$$

В приближении бесконечной проводимости оценка (15) становится точным соотношением, а уравнение (17) существенно упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (18)$$

Оценка (15) показывает, что энергия электрического поля относится к энергии магнитного как квадрат скорости среды к квадрату скорости света. Такое же соотношение имеет место между электрическими и магнитными компонентами в максвелловском тензоре натяжений. Учитывая это, запишем (2-3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i + g_i) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_i v_k + \delta_{ik} \left(p + \frac{1}{8\pi} H^2 \right) - \frac{1}{4\pi} H_i H_k \right) + Q_i^p - \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_i, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \left(\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) + \mathbf{q} + \mathbf{S} \right) + Q^\varepsilon - \mathbf{j} \mathbf{E} - G. \quad (20)$$

Также в (19) учтено, что на основании (15) и того факта, что скорость электронов существенно превосходит скорость среды, верно

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_i \gg q E_i.$$

Уравнения (17) (или (18)), (19) и (20) представляют собой уравнения идеальной магнитной гидродинамики с учетом электронов. Вместо (19-20) можно также использовать (13-14) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) + Q_i^p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}^* \times \mathbf{H}]_i, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \right) = -\operatorname{div} \left(\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) + \mathbf{q} \right) - G_{rad} + Q^\varepsilon + \mathbf{j}^* \mathbf{E}. \quad (22)$$

Решение уравнения газодинамики далее не рассматривается, но распределения газодинамических параметров являются определяющими для распределения электромагнитного поля в уравнениях Максвелла. Уравнения модели в приближении большой электропроводности ионизованной среды можно использовать для моделирования движения среды на характерных газодинамических временах и определения газодинамических параметров.

2. Модель идеальной магнитной газовой динамики

Приближение идеальной магнитной газодинамики (МГД) исключает из рассмотрения ток смещения. Применяется для случая высокой электропроводности ионизованной среды:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (23)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (24)$$

Пренебрежем в (23) величиной $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ по сравнению с током проводимости. Выразим напряженность электрического поля с помощью (23) и подставим (24). Получим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (26)$$

Уравнение (26) определяет динамику магнитного поля, а выражение (25) однозначно связывает напряженности электрического и магнитного полей. Слагаемое $c \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{j}/\sigma)$ в (25) не рассматривается, поскольку проводимость предполагается высокой.

Численное решение уравнения (26) реализует явная разностная схема «предиктор-корректор».

Рассмотрим прямоугольную разностную сетку в декартовых координатах $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в соответствии с [4].

Сетка по переменной x вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta_i, \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_0 = x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max}, \\ x_{i+1/2} &= (x_i + x_{i+1}) / 2, \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_{-1/2} = x_0, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x}, \\ \delta_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad \delta_0 = \Delta_0 / 2, \quad \delta_0 = \Delta_0 / 2, \quad \delta_{N_x} = \Delta_{N_x-1} / 2. \end{aligned}$$

Разностная сетка по переменным y, z вводится аналогично. Элементарная ячейка представляет собой прямоугольный параллелепипед, образованный пересечением шести плоскостей $x = x_i, x_{i+1}, y = y_j, y_{j+1}$ и $z = z_k, z_{k+1}$. Компоненты напряженности электрического поля (E^x, E^y, E^z) , параллельные ребрам параллелепипедов, определены в центрах этих ребер. Компоненты

напряженности магнитного поля (H^x, H^y, H^z) , перпендикулярные граням параллелепипедов, определены в центрах этих граней. Компоненты скорости вещества (v^x, v^y, v^z) заданы в центрах ребер параллелепипедов. Компоненты плотности тока заданы в центрах ребер. Параметры сетки выбираются так, чтобы разрывы электропроводности среды разместились на поверхностях плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$ и $z = z_k$. Считается, что значения электропроводности заданы в точках сетки с дробными пространственными индексами.

Сетка по времени состоит из точек t_n , $n = 1, \dots, N_t$ с равномерным шагом Δt . Сеточные функции напряженности электрического и магнитного полей относятся к одним временным точкам.

Рассмотрим разностную аппроксимацию члена $\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ в уравнении (26). Компоненты векторного произведения скорости вещества и напряженности магнитного поля относятся к центрам ребер и аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned}
2[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2, j, k}^x &= v_{i+1/2, j, k}^y (H_{i+1/2, j-1/2, k}^z + H_{i+1/2, j+1/2, k}^z) + \\
&+ \text{sign}(v_{i+1/2, j, k}^y) v_{i+1/2, j, k}^y (H_{i+1/2, j-1/2, k}^z - H_{i+1/2, j+1/2, k}^z) - \\
&- v_{i+1/2, j, k}^z (H_{i+1/2, j, k-1/2}^y + H_{i+1/2, j, k+1/2}^y) - \\
&- \text{sign}(v_{i+1/2, j, k}^z) v_{i+1/2, j, k}^z (H_{i+1/2, j, k-1/2}^y - H_{i+1/2, j, k+1/2}^y),
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
2[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i, j+1/2, k}^y &= v_{i, j+1/2, k}^z (H_{i, j+1/2, k-1/2}^x + H_{i, j+1/2, k+1/2}^x) + \\
&+ \text{sign}(v_{i, j+1/2, k}^z) v_{i, j+1/2, k}^z (H_{i, j+1/2, k-1/2}^x - H_{i, j+1/2, k+1/2}^x) - \\
&- v_{i, j+1/2, k}^x (H_{i-1/2, j+1/2, k}^z + H_{i+1/2, j+1/2, k}^z) - \\
&- \text{sign}(v_{i, j+1/2, k}^x) v_{i, j+1/2, k}^x (H_{i-1/2, j+1/2, k}^z - H_{i+1/2, j+1/2, k}^z),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
2[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i, j, k+1/2}^z &= v_{i, j, k+1/2}^x (H_{i-1/2, j, k+1/2}^y + H_{i+1/2, j, k+1/2}^y) + \\
&+ \text{sign}(v_{i, j, k+1/2}^x) v_{i, j, k+1/2}^x (H_{i-1/2, j, k+1/2}^y - H_{i+1/2, j, k+1/2}^y) - \\
&- v_{i, j, k+1/2}^y (H_{i, j-1/2, k+1/2}^x + H_{i, j+1/2, k+1/2}^x) - \\
&- \text{sign}(v_{i, j, k+1/2}^y) v_{i, j, k+1/2}^y (H_{i, j-1/2, k+1/2}^x - H_{i, j+1/2, k+1/2}^x).
\end{aligned} \tag{29}$$

На основании (27-29) разностное выражение $\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ отнесем к центрам граней:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k+1/2}^x &= \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1,k+1/2}^z - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j,k+1/2}^z}{\Delta y_j} \\ &- \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k+1}^y - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k}^y}{\Delta z_k}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k+1/2}^y &= \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k+1}^x - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k}^x}{\Delta z_k} \\ &- \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1,j,k+1/2}^z - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j,k+1/2}^z}{\Delta x_i}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j+1/2,k}^z &= \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1,j+1/2,k}^y - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k}^y}{\Delta x_i} \\ &- \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j+1,k}^x - [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k}^x}{\Delta y_j}. \end{aligned} \quad (32)$$

Построив аппроксимацию правой части, рассмотрим разностную схему для уравнения (36) в целом. Этап «предиктор» реализует следующие вычисления:

$$\tilde{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x = H_{i,j+1/2,k+1/2}^x + \Delta t \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k+1/2}^x, \quad (33)$$

$$\tilde{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y = H_{i+1/2,j,k+1/2}^y + \Delta t \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k+1/2}^y, \quad (34)$$

$$\tilde{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z = H_{i+1/2,j+1/2,k}^z + \Delta t \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j+1/2,k}^z. \quad (35)$$

Здесь компоненты напряженности магнитного поля $H_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $H_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $H_{i+1/2,j+1/2,k}^z$ относятся к n -му слою по времени. Величины $\tilde{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $\tilde{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $\tilde{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z$ являются промежуточными значениями «предиктора» напряженности магнитного поля.

Этап «корректор» состоит в следующих вычислениях:

$$\hat{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x = H_{i,j+1/2,k+1/2}^x + \frac{\Delta t}{2} \left(\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k+1/2}^x + \text{rot}[\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{H}}]_{i,j+1/2,k+1/2}^x \right), \quad (36)$$

$$\hat{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y = H_{i+1/2,j,k+1/2}^y + \frac{\Delta t}{2} \left(\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k+1/2}^y + \text{rot}[\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{H}}]_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right), \quad (37)$$

$$\hat{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z = H_{i+1/2,j+1/2,k}^z + \frac{\Delta t}{2} \left(\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j+1/2,k}^z + \text{rot}[\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{H}}]_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right). \quad (38)$$

Компоненты напряженности магнитного поля $\hat{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $\hat{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $\hat{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z$ относятся к $(n+1)$ -му слою по времени. Под величиной $\text{rot}[\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{H}}]$ подразумевается, что в формулы (36-38) вместо компонент $H_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $H_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $H_{i+1/2,j+1/2,k}^z$ нужно подставить соответствующие промежуточные значения $\tilde{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $\tilde{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $\tilde{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z$.

Граничными условиями являются заданные значения тангенциальных компонент напряженности магнитного поля.

Напряженность электрического поля на любом шаге по времени вычисляется в соответствии с формулами (25, 27-29).

$$E_{i+1/2,j,k}^x = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i+1/2,j,k}^x - J_{i+1/2,j,k}^x / \sigma_{i+1/2,j,k}, \quad (39)$$

$$E_{i,j+1/2,k}^y = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j+1/2,k}^y - J_{i,j+1/2,k}^y / \sigma_{i,j+1/2,k}, \quad (40)$$

$$E_{i,j,k+1/2}^z = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{i,j,k+1/2}^z - J_{i,j,k+1/2}^z / \sigma_{i,j,k+1/2}. \quad (41)$$

Электропроводность в центре ребра выражается через значения электропроводности в центрах соседних ячеек:

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1/2,j,k} &= \sigma_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} \frac{\Delta_{j-1}}{2\delta_j} \frac{\Delta_{k-1}}{2\delta_k} + \sigma_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} \frac{\Delta_{j-1}}{2\delta_j} \frac{\Delta_k}{2\delta_k} + \\ &+ \sigma_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \frac{\Delta_j}{2\delta_j} \frac{\Delta_k}{2\delta_k} + \sigma_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} \frac{\Delta_j}{2\delta_j} \frac{\Delta_{k-1}}{2\delta_k} \end{aligned} \quad (42)$$

3. Модель неидеальной магнитной газовой динамики

Рассмотрим модель магнитной газовой динамики вещества, учитывающую диффузию магнитного поля. Слагаемое $\text{rot}\mathbf{H}$ в уравнении (23) сохраняется. В этом случае вместо уравнений (3, 4) имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \text{rot} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right). \quad (44)$$

Разностная аппроксимация уравнений (43-44) полностью совпадает с разностной аппроксимацией уравнений (25-26), за исключением членов, связанных с $\text{rot} \mathbf{H}$. Поэтому приведем разностные выражения только для новых членов.

Компоненты ротора магнитного поля отнесем к центрам ребер

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j, k}^x &= \left(H_{i+1/2, j+1/2, k}^z - H_{i+1/2, j-1/2, k}^z \right) / \delta y_j - \\ &- \left(H_{i+1/2, j, k+1/2}^y - H_{i+1/2, j, k-1/2}^y \right) / \delta z_k, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{i, j+1/2, k}^y &= \left(H_{i, j+1/2, k+1/2}^x - H_{i, j+1/2, k-1/2}^x \right) / \delta z_k - \\ &- \left(H_{i+1/2, j+1/2, k}^z - H_{i-1/2, j+1/2, k}^z \right) / \delta x_i, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_{i, j, k+1/2}^z &= \left(H_{i+1/2, j, k+1/2}^y - H_{i-1/2, j, k+1/2}^y \right) / \delta x_i - \\ &- \left(H_{i, j+1/2, k+1/2}^x - H_{i, j-1/2, k+1/2}^x \right) / \delta y_j. \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда, на основании (45-47), разностное выражение $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H})$ относится к центрам граней и имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H}_{i, j+1/2, k+1/2}^x &= \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i, j+1, k+1/2}^z - \text{rot } \mathbf{H}_{i, j, k+1/2}^z \right) / \Delta y_j - \\ &- \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i, j+1/2, k+1}^y - \text{rot } \mathbf{H}_{i, j+1/2, k}^y \right) / \Delta z_k, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j, k+1/2}^y &= \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j, k+1}^x - \text{rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j, k}^x \right) / \Delta z_k - \\ &- \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i+1, j, k+1/2}^z - \text{rot } \mathbf{H}_{i, j, k+1/2}^z \right) / \Delta x_i, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j+1/2, k}^z &= \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i+1, j+1/2, k}^y - \text{rot } \mathbf{H}_{i, j+1/2, k}^y \right) / \Delta x_i - \\ &- \left(\text{rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j+1, k}^x - \text{rot } \mathbf{H}_{i+1/2, j, k}^x \right) / \Delta y_j. \end{aligned} \quad (50)$$

Рассмотрим разностную аппроксимацию уравнения (44) с диффузионным членом $\text{rot}(c^2 \text{rot } \mathbf{H}/4\pi\sigma)$ в правой части. Остальные слагаемые в правой части аппроксимируются в соответствии с (33-38). Этап «предиктор»:

$$\tilde{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x = H_{i,j+1/2,k+1/2}^x - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x / 4\pi\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}, \quad (51)$$

$$\tilde{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y = H_{i+1/2,j,k+1/2}^y - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y / 4\pi\sigma_{i+1/2,j,k+1/2}, \quad (52)$$

$$\tilde{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z = H_{i+1/2,j+1/2,k}^z - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z / 4\pi\sigma_{i+1/2,j+1/2,k}. \quad (53)$$

Этап «корректор»:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x &= H_{i,j+1/2,k+1/2}^x - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x / 2\pi\sigma_{i,j+1/2,k+1/2} - \\ &- \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \tilde{\mathbf{H}}_{i,j+1/2,k+1/2}^x / 2\pi\sigma_{i,j+1/2,k+1/2} \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y &= H_{i+1/2,j,k+1/2}^y - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y / 2\pi\sigma_{i+1/2,j,k+1/2} - \\ &- \Delta t c^2 \text{rot rot } \tilde{\mathbf{H}}_{i+1/2,j,k+1/2}^y / 2\pi\sigma_{i+1/2,j,k+1/2}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z &= H_{i+1/2,j+1/2,k}^z - \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z / 2\pi\sigma_{i+1/2,j+1/2,k} + \\ &- \Delta t \cdot c^2 \text{rot rot } \tilde{\mathbf{H}}_{i+1/2,j+1/2,k}^z / 2\pi\sigma_{i+1/2,j+1/2,k}. \end{aligned} \quad (56)$$

Конструкция $\text{rot rot } \tilde{\mathbf{H}}$ означает, что в формулы (45-50) вместо компонент $H_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $H_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $H_{i+1/2,j+1/2,k}^z$ нужно подставить соответствующие промежуточные значения $\tilde{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x$, $\tilde{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y$, $\tilde{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z$.

4. Тестовая задача

Рассмотрим область пространства с заданным распределением скорости вещества и высоким значением электропроводности в каждой точке. Скорость среды имеет следующее распределение:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{i} \cdot x + \mathbf{j} \cdot y}{r} \cdot v_0 \cdot \frac{R^2}{\rho^2 + R^2}, \quad (57)$$

где x, y – координаты точки среды, \mathbf{i}, \mathbf{j} – единичные векторы в направлении осей x и y , $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, v_0, R – произвольные параметры распределения, имеющие размерности скорости и расстояния соответственно.

Пусть на границе расчетной области

$$\mathbf{H}|_{\text{граница}} = \mathbf{k} \cdot H_0, \quad (58)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор в направлении оси z , H_0 – величина невозмущенного магнитного поля.

Выполнен расчет по модели идеальной магнитной газовой динамики со следующими значениями параметров: $v_0 = 10^9$ см/с, $R = 2500$ см, $H_0 = 0,5$ ед.СГСЭ. На рисунке 1 представлены его результаты.

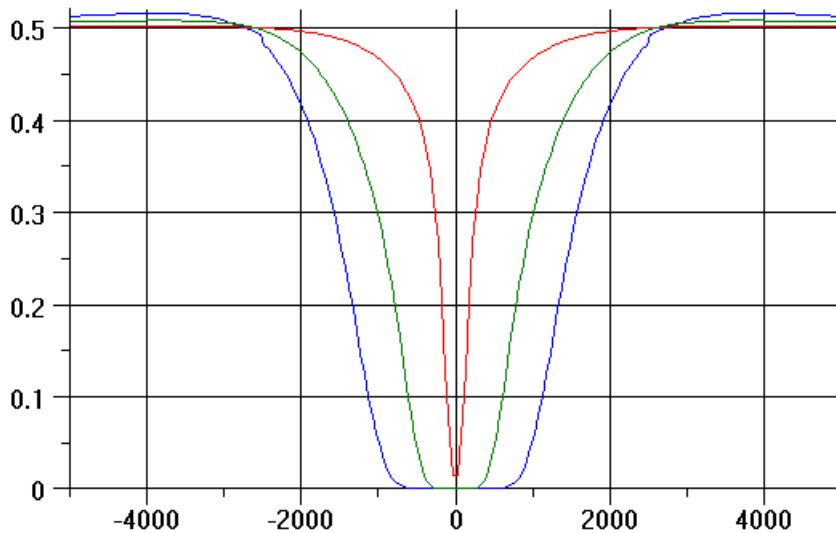


Рис. 1. Зависимость модуля напряженности магнитного поля от расстояния до оси. Красная линия соответствует моменту времени 1 мкс, зеленая – 5 мкс, синяя – 10 мкс

Рисунок свидетельствует о вытеснении магнитного поля из проводящей среды.

Заключение

Представленные алгоритмы могут применяться совместно с численным решением уравнений Максвелла в полной постановке, с током смещения на единой расчетной сетке с применением единых аппроксимаций. Это предоставляет следующие возможности.

Высокопроводящая плазма может развиваться из нейтральной среды путем ее ионизации электрическим разрядом [1]. Разработанный алгоритм

позволяет моделировать не только сформировавшуюся плазму, но и стадию ее развития.

Одной из проблем удержания плазмы является минимизация ее взаимодействия со стенками испытательной камеры. Моделирование плазмы в камере требует ее рассмотрения в ограниченном объеме [2]. Алгоритм дает возможность одновременно рассматривать электромагнитное поле не только в плазме, но и за ее пределами.

Одним из способов генерации плазмы является воздействие пучка электронов на твердотельную преграду [10]. Это означает, что в ходе формирования ионизированной среды в ее объеме существует сторонний ток электронов. Представленный алгоритм допускает наличие стороннего тока как в плазме на всех этапах ее формирования, так и в ее окрестностях.

Библиографический список

1. Л.А. Арцимович, Г.А. Бобровский и др. Экспериментальные исследования на установках Токамак. – В сб.: Доклады на Интернациональной конференции по УТС. Новосибирск, 1968, т. 1, с. 172.
2. Л.А. Арцимович. Обзор по замкнутым плазменным системам. – В сб.: Доклады на Интернациональной конференции по УТС. Новосибирск, 1968, т. 1, с. 3.
3. Б.Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
4. А.В. Березин, А.А. Крюков, Б.Д. Плющенко. Метод вычисления электромагнитного поля с заданным волновым фронтом // Математическое моделирование, 2011, т. 23, №3, с. 109-126.
5. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, И.Т. Якубов. Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2004.
6. Г.А. Месяц. Импульсная энергетика и электроника. – М.: Наука, 2004.
7. С. Де Гроот, П. Мазур. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
9. Ю.Д. Королев, Г.А. Месяц. Физика импульсного пробоя газов. М., Наука, 1991.
10. Б.А. Демидов, В.П. Ефремов, М.В. Ивкин, А.Н. Мещеряков, В.А. Петров. Воздействие мощных потоков энергии на вакуумную резину. Журнал технической физики, 2003, том 73, вып. 6, с. 130-135.