



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2024 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.С. Болдарев, В.А. Гасилов

Линейное тестирование некоторых разностных схем МГД

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Болдарев А.С., Гасилов В.А. Линейное тестирование некоторых разностных схем МГД // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 55. 15 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-55>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-55>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

А. С. Болдарев, В. А. Гасилов

Линейное тестирование некоторых
разностных схем МГД

Москва — 2024

Болдарев А. С., Гасилов В. А.

Линейное тестирование некоторых разностных схем МГД

Проведено одномерное линейное тестирование численных методик решения системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики. Для тестирования взяты сеточно-характеристический метод и аппроксимация, используемая в программном пакете MARPLE. Результаты сравниваются с аналогичным тестом, проведенным для методики из программы Athena. Рассматриваемые нами методики дают сравнимые с методиками, реализованными в Athena (Roe, HLLD, HLLE), нормы погрешности численного решения для распространения МГД-волн малой интенсивности.

Ключевые слова: идеальная МГД, линейные тесты, МГД-волны

A. Boldarev, V. Gasilov

Linear waves test for some difference schemes for ideal MHD

One-dimensional linear wave testing has been performed for some numerical techniques for solution of the ideal magnetohydrodynamic system of equations. The mesh-characteristic method is under consideration as well as the numerical technique implemented in the software package MARPLE. The results are compared with the results of the similar tests performed for the schemes implemented in Athena code (Roe, HLLD, HLLE). Our schemes demonstrate values of the norm of the numerical solution error for propagation of the low-amplitude (linear) MHD-waves which are comparable with the numerical techniques implemented in Athena code.

Key words: ideal MHD, linear tests, MHD-waves

Идея этой работы возникла из [1], где проводилось сравнительное тестирование разностных схем МГД, реализованных в коде Athena, и солверов HLLD и HLLC. В настоящей работе мы проводим для сравнения те же самые тесты для некоторых схем, используемых и ранее исследованных нами.

Линейное тестирование заключается в том, что в качестве начального состояния задается постоянное решение с малым синусоидальным возмущением типа быстрой, альфвеновской или же медленной МГД-волны. Аналитическое решение в этом случае известно — оно представляет собой движущееся с постоянной скоростью (соответствующей типу волны) синусоидальное возмущение постоянного фона. Сравнение численного решения с аналитическим проводится в момент времени, соответствующий одному периоду волны рассматриваемого типа; так как на концах расчетной области ставятся периодические граничные условия, после полного периода точное решение соответствует начальному состоянию. В качестве меры ошибки численного решения в [1] выводится некоторая довольно нетривиальная норма разности численного решения и точного.

Вообще говоря, предложенный в [1] тест имеет довольно ограниченную информативность. Во-первых, в формуле [1] $\delta U = AR \sin(2\pi x)$ правый собственный вектор R системы уравнений не нормирован, и никакой нормировки рассчитанной нормы разности точного и численного решений на амплитуду начального возмущения $A \|R\|$ не производится. Это позволяет проводить сравнения лишь для в точности тех же задач, которые рассматриваются в [1], используя приведенные там собственные векторы R ; самостоятельное вычисление собственных векторов, конечно, возможно, но бессмысленно из-за неопределенности их нормировки. Во-вторых, поведение разностной схемы на рассматриваемых здесь решениях (постоянных с малым гладким возмущением) мало что может сказать о качестве той или иной схемы, применяемой к решению задач с ударными волнами и другими нелинейными эффектами. Тем не менее такое сравнительное тестирование разностных схем представляет определенный интерес с точки зрения понимания свойств и особенностей той или иной разностной схемы.

1 Тестируемые схемы

Рассматривается одномерная система уравнений идеальной МГД

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где вектор-столбец консервативных величин

$$U = \left[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \quad B_y \quad B_z \right]^T,$$

ρ — плотность, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости и его декартовы компоненты, ε — удельная внутренняя энергия, B_y и B_z — поперечные компоненты магнитного поля (продольная компонента B_x магнитного поля в одномерных задачах является постоянной величиной, так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, и поэтому она выведена из числа неизвестных функций и трактуется как параметр задачи). Функция потока $F(U)$ выражается следующим образом:

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \\ \rho uv - B_x B_y / (4\pi) \\ \rho iw - B_x B_z / (4\pi) \\ u \left(P + \rho \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right) + \frac{B_y(uB_y - vB_x)}{4\pi} + \frac{B_z(uB_z - wB_x)}{4\pi} \\ uB_y - vB_x \\ uB_z - wB_x \end{bmatrix},$$

давление P вычисляется как $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Для аппроксимации этой системы уравнений применяется балансное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U}_i - U_i}{\tau/2} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}(U) - \mathcal{F}_{i-1/2}(U)}{h} &= 0, \\ \frac{\hat{U}_i - U_i}{\tau} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}(\tilde{U}) - \mathcal{F}_{i-1/2}(\tilde{U})}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

имеющее аппроксимацию второго порядка по времени. Конкретный вид разностной схемы определяется выражением для потока $\mathcal{F}_{i+1/2}(U)$.

1.1 Сеточно-характеристический метод

Сеточно-характеристический метод, ранее исследовавшийся нами в [2], основан на диагонализации матрицы Якоби $A = \partial F(U) / \partial U$ системы (1):

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega,$$

где Ω — матрица левых собственных векторов матрицы A (записанных в виде строк), Λ — диагональная матрица собственных значений. Собственные

значения соответствуют скоростям энтропийной, медленной, альфвеновской и быстрой МГД-волн:

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = u \pm \lambda_s, \quad \lambda_{4,5} = u \pm \lambda_a, \quad \lambda_{6,7} = u \pm \lambda_f.$$

Скорости МГД-волн относительно среды

$$\lambda_a = b_x = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi\rho}, \quad \lambda_{f,s}^2 = \frac{a^2 + \mathbf{b}^2 \pm \sqrt{(a^2 + \mathbf{b}^2)^2 - 4a^2b_x^2}}{2},$$

$a = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}$ — скорость звука.

Соответствующие левые собственные векторы матрицы A рассчитываются по формулам

$$l^1 = \begin{bmatrix} -\gamma\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} & -u & -v & -w & 1 & -\frac{B_y}{4\pi} & -\frac{B_z}{4\pi} \end{bmatrix},$$

$$l^{4,5} = \left[B_x(vB_z - wB_y) \quad 0 \quad -B_xB_z \quad B_xB_y \quad 0 \quad \pm\lambda_a\rho B_z \quad \mp\lambda_a\rho B_y \right],$$

$$l_5^2 = \lambda_s^2 - \frac{B_x^2}{4\pi\rho}, \quad l_2^2 = \left(\frac{\lambda_s}{\gamma - 1} - u \right) l_5^2,$$

$$l_6^2 = \frac{B_y}{4\pi} \left(\frac{\lambda_s^2(2 - \gamma)}{\gamma - 1} + \frac{B_x^2}{4\pi\rho} \right), \quad l_7^2 = \frac{B_z}{4\pi} \left(\frac{\lambda_s^2(2 - \gamma)}{\gamma - 1} + \frac{B_x^2}{4\pi\rho} \right),$$

$$l_3^2 = -\frac{l_6^2 B_x}{\rho\lambda_s} - l_5^2 \left(v + \frac{B_x B_y}{4\pi\rho\lambda_s} \right), \quad l_4^2 = -\frac{l_7^2 B_x}{\rho\lambda_s} - l_5^2 \left(w + \frac{B_x B_z}{4\pi\rho\lambda_s} \right),$$

$$l_1^2 = (\lambda_s - (2 - \gamma)u)l_2^2 - vl_3^2 - wl_4^2 - \left(\gamma\varepsilon + \frac{u^2(3 - 2\gamma)}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{B_y^2}{4\pi\rho} + \frac{B_z^2}{4\pi\rho} \right) l_5^2 - \frac{B_y}{\rho} l_6^2 - \frac{B_z}{\rho} l_7^2.$$

Формулы для расчета l^3 получаем заменой λ_s на $-\lambda_s$ в выражении для l^2 , а для расчета векторов $l^{6,7}$ — заменой λ_s на λ_f в выражении для $l^{2,3}$.

Выражение для потока $\mathcal{F}_{i+1/2}(U)$ в сеточно-характеристической схеме берется в виде

$$\mathcal{F}_{i+1/2}(U) = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \Omega_{i+1/2}^{-1} \Lambda_{i+1/2}^* \Omega_{i+1/2} \frac{U_{i+1} - U_i}{2}, \quad (3)$$

где

$$\Lambda_{i+1/2}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_7^* \end{bmatrix},$$

$$\lambda_k^* = |\lambda_k| \cdot \left(1 - \varphi(r_{i+1/2}^{(k)})\right),$$

$$r_{i+1/2}^{(k)} = \begin{cases} \frac{[\Omega_{i+1/2}(U_i - U_{i-1})]^{(k)}}{[\Omega_{i+1/2}(U_{i+1} - U_i)]^{(k)}}, & \lambda_k \geq 0, \\ \frac{[\Omega_{i+1/2}(U_{i+2} - U_{i+1})]^{(k)}}{[\Omega_{i+1/2}(U_{i+1} - U_i)]^{(k)}}, & \lambda_k \leq 0. \end{cases}$$

Величины $\Omega_{i+1/2}$ и $\Lambda_{i+1/2}$ вычисляются как полусуммы матриц Ω и Λ в узлах сетки,

$$\Omega_{i+1/2} = \frac{\Omega(U_i) + \Omega(U_{i+1})}{2}, \quad \Lambda_{i+1/2} = \frac{\Lambda(U_i) + \Lambda(U_{i+1})}{2}.$$

Функция $\varphi(r)$ называется ограничителем антидиффузии, и в настоящей работе рассматриваются следующие ее варианты:

$$\varphi(r) = 0 \quad (\text{схема с направленными разностями}), \quad (4)$$

$$\varphi(r) = 1 \quad (\text{схема с центральными разностями}), \quad (5)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ \frac{2r}{1+r}, & r \geq 0, \end{cases} \quad (\text{Sweby [3]}), \quad (6)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ (3-\delta)r/(3(1-\delta)), & 0 \leq r \leq 1-\delta, \\ (2+r)/3, & 1-\delta \leq r \leq 1+\delta, \\ (-4\delta + (3-\delta)r)/(3(1-\delta)), & 1+\delta \leq r \leq 2, \\ 2, & 2 \leq r, \end{cases} \quad (7)$$

при $\delta = 0.6$ (Тишкин, [4]),

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r, & 0 \leq r \leq 1, \\ 1, & 1 \leq r, \end{cases} \quad (\text{Колган}). \quad (8)$$

1.2 Метод из MARPLE

Также исследовалась более простая схема, реализованная в программном комплексе MARPLE [5,6]. Схема основана на использовании направленно-разностных выражений для конвективных членов (явно содержащих скорость)

и центральноразностных для всех остальных. Приведем выражения для потоков $\mathcal{F}_{i+1/2}(U)$ в этой схеме¹.

Конвективная часть потока k -й компоненты U выражается следующим образом:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(k)}(U) = u_{i+1/2} \cdot \begin{cases} U_i^{(k)} + \omega \left(\frac{U_i^{(k)} - U_{i-1}^{(k)}}{2}, \frac{U_{i+1}^{(k)} - U_i^{(k)}}{2} \right), & u_{i+1/2} \geq 0, \\ U_{i+1}^{(k)} - \omega \left(\frac{U_{i+2}^{(k)} - U_{i+1}^{(k)}}{2}, \frac{U_{i+1}^{(k)} - U_i^{(k)}}{2} \right), & u_{i+1/2} \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $u_{i+1/2} = (u_i + u_{i+1})/2$, а функция поправки к «наветренному» значению $\omega(\Delta_1, \Delta_2)$ связана с функцией ограничителя антидиффузии $\varphi(r)$:

$$\omega(\Delta_1, \Delta_2) = \Delta_2 \cdot \varphi(\Delta_1/\Delta_2).$$

Поток массы:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(1)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(1)}(U). \quad (10)$$

Поток импульса:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(2)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(2)}(U) + P_{i+1/2} + \frac{\mathbf{B}_{i+1/2}^2}{8\pi}. \quad (11)$$

Здесь $P_{i+1/2} = (P_i + P_{i+1})/2$, $\mathbf{B}_{i+1/2} = (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_{i+1})/2$.

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(3)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(3)}(U) - \frac{B_x(B_y)_{i+1/2}}{4\pi}, \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(4)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(4)}(U) - \frac{B_x(B_z)_{i+1/2}}{4\pi}. \quad (13)$$

Поток полной энергии:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(5)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(5)}(U) + u_{i+1/2} \left(P_{i+1/2} + \frac{\mathbf{B}_{i+1/2}^2}{8\pi} + \frac{B_x^2}{8\pi} \right) - \frac{B_x (\mathbf{v}_{i+1/2} \cdot \mathbf{B}_{i+1/2})}{4\pi}, \quad (14)$$

где $\mathbf{v}_{i+1/2} = (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})/2$. Поток магнитного поля:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(6)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(6)}(U) - B_x v_{i+1/2}, \quad (15)$$

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{(7)}(U) = \mathcal{F}_{i+1/2}^{\text{conv},(7)}(U) - B_x w_{i+1/2}. \quad (16)$$

¹Разностная схема в MARPLE трехмерная и допускающая произвольные конформные неструктурированные сетки; здесь приведены лишь частные случаи выражений для потоков этой схемы для одномерной задачи и сетки с постоянным шагом. Также введены другие упрощения, непринципиальные для рассматриваемой здесь задачи: не рассматривается искусственная вязкость, вводимая как добавка к давлению, и не вводится явным образом поток для продольной компоненты магнитного поля B_x .

2 Методика линейного тестирования

Для линейного тестирования схем (3) и (9)–(16), согласно [1], в области $0 \leq x \leq 1$ с периодическими граничными условиями на концах задается постоянное начальное распределение величин U , соответствующее параметрам $\rho = 1$, $\mathbf{v} = 0$, $P = 1/\gamma$, $\mathbf{B} = \sqrt{4\pi} (1, \sqrt{2}, 0.5)$, $\gamma = 5/3$, с добавкой малого возмущения вида

$$\delta U = AR \sin(2\pi x),$$

где $A = 10^{-6}$ — амплитуда возмущения, R — правый собственный вектор матрицы Якоби системы (1), соответствующий выбранному типу волны. Рассматриваются распространяющиеся влево медленная, альфвеновская и быстрая волны; при заданных начальных параметрах их скорости равны

$$\lambda_3 = -0.5, \quad \lambda_5 = -1, \quad \lambda_7 = -2$$

соответственно². В [1] отсутствуют данные о шаге по времени; для тестов наших схем выбрано $\tau = h/4$ (что в случае быстрой волны дает число Куранта 0.5), расчет проводится до момента времени, соответствующего одному периоду волны, т. е. $t = 1/|\lambda|$. В этот момент времени точное решение не отличается от начального распределения величин U , и норма разности найденного численного решения и начального распределения служит мерой точности выбранной численной методики. В [1] используется норма $\|\Delta U\|$ следующего вида:

$$\varepsilon_k = h \sum_i |\Delta U_i^{(k)}|, \quad \|\Delta U\| = \sqrt{\sum_{k=1}^5 \varepsilon_k^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=6}^7 \varepsilon_k^2}, \quad (17)$$

где i — индекс узла сетки (умножение на h соответствует делению на количество узлов сетки, так как длина области 1), а k — номер компоненты

²Правые собственные векторы R , соответствующие этим собственным значениям, приведены в [1]:

$$R_s = \begin{bmatrix} 0.8944271909999159 \\ -0.4472135954999579 \\ -0.8432740427115680 \\ -0.2981423969999720 \\ 0.6708136850795449 \\ -\sqrt{4\pi} 0.4216370213557841 \\ -\sqrt{4\pi} 0.1490711984999860 \end{bmatrix}, \quad R_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3333333333333333 \\ 0.9428090415820634 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi} 0.3333333333333333 \\ \sqrt{4\pi} 0.9428090415820634 \end{bmatrix},$$

$$R_f = \begin{bmatrix} 0.4472135954999580 \\ -0.8944271909999160 \\ 0.4216370213557840 \\ 0.1490711984999860 \\ 2.012457825664615 \\ \sqrt{4\pi} 0.8432740427115680 \\ \sqrt{4\pi} 0.2981423969999720 \end{bmatrix}.$$

вектора-столбца величин U . Множитель $\sqrt{4\pi}$ у некоторых компонент возник из-за того, что в [1] использовались нормированные компоненты магнитного поля, $\mathbf{B}/\sqrt{4\pi}$ вместо \mathbf{B} .

2.1 Расчет распространения волны

Кроме интегрального результата в виде нормы (17) разности точного и численного решения, во время расчетов проводились наблюдения за поведением самого численного решения. Это позволило убедиться в корректности расчета и отсутствии ошибок при запуске программы. Ожидаемое поведение решения — смещение синусоидального профиля возмущения какой-либо из величин (обычно плотности) влево со скоростью, соответствующей рассматриваемому типу волны.

Ожидается, что сеточно-характеристическая схема (3) будет воспроизводить такое решение весьма точно, так как, по существу, эта схема и построена на основе решения уравнений переноса для инвариантов Римана, соответствующих различным типам волн. На рис. 1 показаны точный и рассчи-

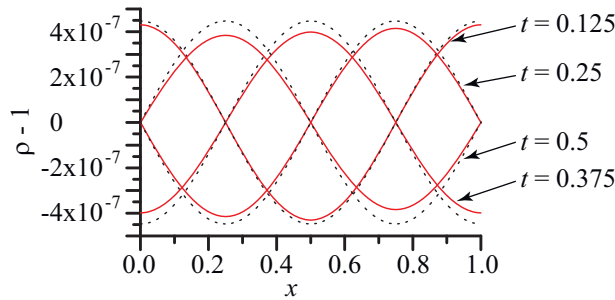


Рис. 1: Сравнение точного (черная штриховая линия) и численного (красная линия) решений на разные моменты времени.

танный профили быстрой МГД-волны на некоторые моменты времени; счет шел с лимитером (4) на сетке из 128 ячеек. Видно, что рассчитанная синусоида движется с правильной скоростью и слегка теряет амплитуду из-за схемной вязкости. Как и ожидалось, схемы с лимитерами (6)–(7) дают заметно меньшее «размазывание» (уменьшение амплитуды), рисунки для них не приводятся.

Схема с центральными разностями демонстрирует несколько парадоксальное поведение — на умеренных сетках и достаточно долгое время на мелких сетках графики численного и аналитического решений практически не различаются, и только при достаточно больших временах счета на подробных сетках начинает проявляться немонотонность численного решения (дефект типа «пилы»). Следует отметить, что исследование устойчивости

схемы с центральноразностной аппроксимацией пространственной производной и аппроксимацией производной по времени типа (2) показывает, что схема неустойчива; коэффициент λ усиления гармоника $e^{ik\alpha}$ при переходе на следующий шаг по времени имеет модуль

$$|\lambda|^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a\tau}{h} \right)^4 \sin^4 \alpha.$$

При малых τ это значение мало отличается от единицы; тем не менее столь медленное развитие неустойчивости вызывает удивление. В наших расчетах развитие неустойчивости было обнаружено при моделировании альфвеновской волны на сетке из 1024 ячеек; графики численного и точного решений визуально не различались вплоть до момента времени $t = 0.5$ (период волны равен 1), и лишь на момент времени $t = 0.625$ на графике численного решения появилась заметная «пила» амплитудой в несколько процентов.

Схема (9)–(16) на умеренных (порядка 128 ячеек) сетках демонстрирует аналогичное поведение, похожее на результаты центральноразностного варианта схемы (3). В принципе, такого поведения можно было ожидать, так как численная диффузия схемы (9)–(16) пропорциональна скорости u . В задачах с низким числом Маха (а мы рассматриваем распространение малых возмущений в неподвижной среде, $u = 0$), как отмечалось, численной диффузии становится недостаточно, и аппроксимация малых возмущений неподвижной среды сводится, по существу, к центральноразностной³.

2.2 Результаты линейного тестирования

Рис. 2 воспроизводит соответствующий рисунок из [1], но с добавлением результатов для схемы (3) с лимитерами (4)–(7). Рисунок из [1], соответствующий энтропийной («контактной») волне, не воспроизведен, так как в [1] не приведен соответствующий этой волне собственный вектор, а найдя его самостоятельно, мы наверняка не угадаем нормировку. На рисунках представлена зависимость нормы (17) разности точного и численного решения от числа ячеек сетки; расчеты проводились на последовательности равномерных сеток от 8 до 1024 ячеек со знаменателем 2 (как, по всей видимости, и в [1]). Схема (3) с лимитерами (6)–(7) демонстрирует сопоставимую с рассматриваемыми в [1] методиками точность (причем лимитер (7) немного лучше (6)); схема

³Сходство центральноразностного варианта схемы (3) со схемой (9)–(16) подтверждается также сравнением решений для случая, когда вместо синусоидального возмущения бралось прямоугольное

$$\delta U = AR \cdot \begin{cases} 1, & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обе схемы демонстрируют одинаковое (немонотонное, как и должно быть для центральноразностной схемы) решение.

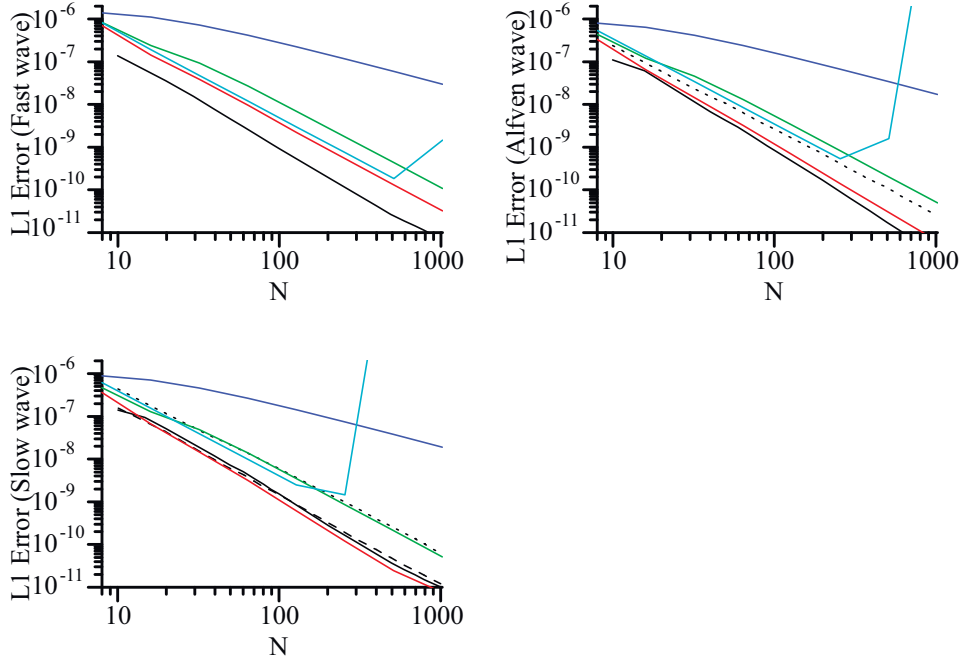


Рис. 2: Норма (17) разности точного и численного решения в зависимости от числа узлов N сетки. Черные линии (сплошная, штриховая и пунктирная) — графики из [1], синяя — схема (3) первого порядка (с лимитером (4)), зеленая — с лимитером (6), красная — с лимитером (7), голубая — с центральными разностями (лимитер (5)).

первого порядка (с лимитером (4)) дает заметно большие значения погрешности. Схема с центральными разностями (с лимитером (5)), что интересно, демонстрирует на рассматриваемом гладком тесте тоже очень неплохую точность, но ситуация резко ухудшается на больших (512 и 1024 ячейки) сетках из-за неустойчивости этой схемы.

Результаты тестирования схемы (9)–(16) приведены на рис. 3. На этом рисунке оставлены только графики из [1] и, для сравнения, результат для центрально-разностного варианта схемы (3). Графики для схемы (9)–(16) нанесены цветными пунктирными линиями (сохраняя те же цвета для различных лимитеров, что и на рис. 2). Видно, что результаты расчетов по схеме (9)–(16) с различными лимитерами практически не отличаются друг от друга (небольшое различие заметно только в области потери устойчивости на больших сетках) и от центрально-разностного варианта схемы (3). Это еще раз подтверждает сформулированный результат, что схема (9)–(16) в задачах с неподвижной средой работает как центрально-разностная. Различия между разными лимитерами отсутствуют, так как коррекция «наветренных» значений в схеме (9)–(16) существенна только при вычислении конвективных потоков, практически отсутствующих в нашей задаче.

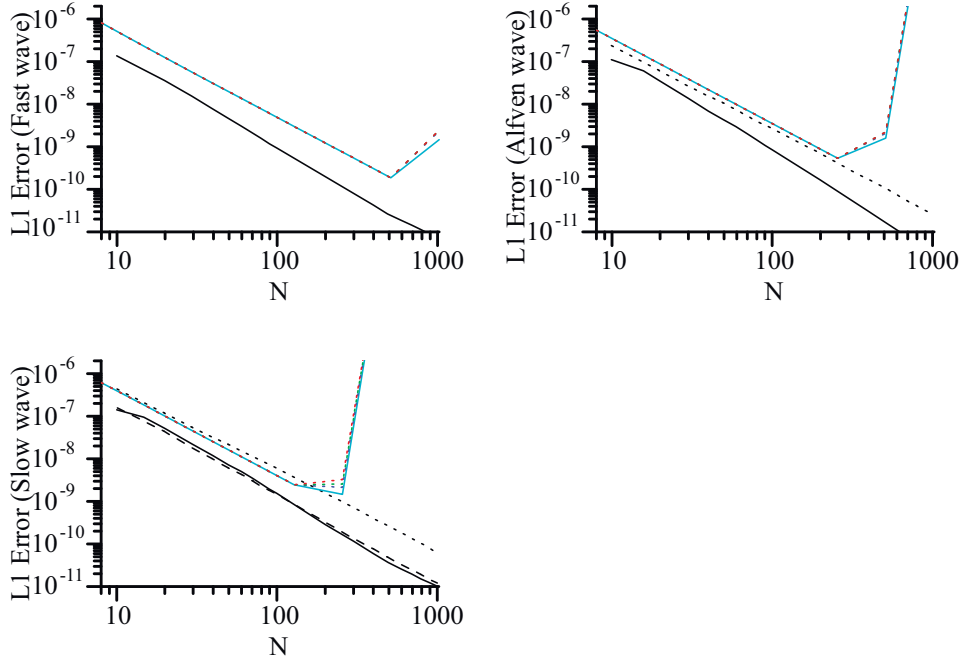


Рис. 3: Сравнение схемы (3) (центральноразностной) и (9)–(16). Черные линии (сплошная, штриховая и пунктирная) — графики из [1], цветные пунктирные линии — схема (9)–(16) с различными лимитерами, **сплошная голубая** — (3) с центральными разностями (лимитер (5)).

Все приведенные здесь результаты относятся к схемам с узловым хранением величин, когда первый и последний узлы сетки соответствуют границам расчетной области $x = 0$ и $x = 1$. В программном комплексе MARPLE принято ячеечное хранение величин, и это приводит к некоторому отличию значений ошибки L_1 . Хотя, казалось бы, при наличии периодического граничного условия на концах отрезка $[0; 1]$ абсолютно нет различия между узлами и ячейками — лишь бы общее их количество соответствовало друг другу, тем не менее отличие имеется в фазе начального положения синусоидальной волны относительно точек дискретизации. При узловом хранении величин нули и экстремумы синусоиды попадают точно в узлы сетки, а при ячеечном они оказываются посередине между центрами ячеек. Тем не менее отличия практически незаметны (и тоже наибольших значений достигают для вариантов с потерей устойчивости), поэтому графики погрешности L_1 для ячеечной аппроксимации не приводятся.

3 Выводы

Проведенное исследование лишний раз показывает, что схема (9)–(16) малоприспособна для задач, связанных с распространением малых возмущений в

неподвижной среде. Строго говоря, схема неустойчива, хотя эта неустойчивость развивается крайне медленно и не успевает заметно развиться во многих тестовых расчетах. Это не означает принципиальной непригодности схемы для использования — на вариантах с заметным числом Маха она обычно демонстрирует приемлемые результаты, хотя и в таких вариантах возможно развитие неустойчивостей в застойных зонах течения, если взять достаточно подробную сетку и достаточно долго проводить расчет. Возможно, было бы интересно провести линейный тест для движущейся среды — в такой ситуации можно ожидать заметно лучших показателей схемы (9)–(16). Однако в этом случае отсутствуют данные для сравнения.

Значения нормы погрешности численного решения в случае отсутствия развития неустойчивости для методики (9)–(16) и при выборе подходящего ограничителя антидиффузии (т. е. (6) или (7), но не (4)) в методике (3) сопоставимы с представленными в [1].

Список литературы

- [1] Linear Waves Test <https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/linear-waves/linear-waves.html>
- [2] Болдарев А. С., Гасилов В. А., Ольховская О. Г., Панин В. М. Применение разностной схемы с ограничителями антидиффузии к уравнениям одномерной газовой динамики и магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1993. № 8. 28 с.
- [3] Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal., **21**, No. 5, 1984, p. 995–1011.
- [4] Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1987. № 36.
- [5] Гасилов В. А., Болдарев А. С., Ольховская О. Г., Бойков Д. С., Шарова Ю. С., Савенко Н. О., Котельников А. М. MARPLE: программное обеспечение для мультифизического моделирования в задачах сплошных сред // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2023. № 37. 40 с. ■
- [6] Gasilov V. A., Boldarev A. S., Olkhovskaya O. G., Boykov D. S., Sharova Yu. S., Savenko N. O., Kotelnikov A. M. MARPLE: software for multiphysics modelling in continuous media // Numerical Methods and Programming. 2023. **24** (4), p. 316–338. ■

Содержание

1	Тестируемые схемы	3
1.1	Сеточно-характеристический метод	4
1.2	Метод из MARPLE	6
2	Методика линейного тестирования	8
2.1	Расчет распространения волны	9
2.2	Результаты линейного тестирования	10
3	Выводы	12