



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 56 за 2024 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.В. Моргунов, М.Г. Ширококов

Двухуровневый
параметрический метод
оптимизации траектории
перелета с малой тягой

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моргунов Н.В., Ширококов М.Г. Двухуровневый параметрический метод оптимизации траектории перелета с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 56. 24 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-56>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-56>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Н.В. Моргунов, М.Г. Ширококов

Двухуровневый параметрический метод
оптимизации траектории перелета
с малой тягой

Москва — 2024

Н.В. Моргунов, М.Г. Широбоков

Двухуровневый параметрический метод оптимизации траектории перелета с малой тягой

Предлагается прямой метод решения задачи оптимального управления космическим аппаратом, снабженным двигателем малой тяги. Функция управления параметризуется с помощью полиномов и моментов переключения активного и пассивного режимов управления. Суть метода состоит в разделении параметров оптимизации: на внешнем уровне оптимизируются моменты времени переключения режимов управления, а на внутреннем – коэффициенты вспомогательных полиномов. Работа метода демонстрируется на задачах перелета к Марсу и преобразования импульсного управления к непрерывному.

Ключевые слова: межпланетный перелет, оптимальное управление, малая тяга, замена импульса непрерывной тягой, космический аппарат

N. V. Morgunov, M. G. Shirobokov

Two-level parametric method for low-thrust trajectory optimization

A direct method is proposed for solving the optimal control problem of a spacecraft equipped with a low-thrust engine. The control function is parameterized using polynomials and switching moments between active and passive control modes. The essence of the method lies in separating optimization parameters: at the outer level, the switching time moments of control modes are optimized, while at the inner level, the coefficients of auxiliary polynomials are optimized. The method's performance is demonstrated on problems of interplanetary flight to Mars and the conversion of impulse control to continuous control.

Key words: interplanetary transfer, optimal control, low thrust, continuous thrust impulse substitution, spacecraft

1. Введение

В настоящее время в сфере межпланетных полетов наблюдается тенденция к использованию малых космических аппаратов массой до 300 кг. Их преимущество заключается в более доступной разработке, позволяющей даже небольшим научным коллективам создавать такие аппараты.

Важной задачей в проектировании космических миссий является увеличение полезной нагрузки. Увеличить полезную нагрузку можно за счет снижения топливных затрат. Для сокращения массы затрачиваемого топлива можно использовать электрореактивные двигательные установки (ЭРДУ). Они обладают более высоким удельным импульсом, а значит, более эффективно расходуют топливо. Однако, в отличие от традиционных химических двигателей, ЭРДУ обладают низким уровнем тяги, что приводит к продолжительным участкам управления и усложняет оптимизацию функции управления.

В общем случае проблемы оптимизации управления малой тягой связаны с нелинейностью возникающих динамических систем, сложностью анализа некеплеровских траекторий и неизвестностью вида функции управления перед началом оптимизации (например, неизвестно наличие и количество пассивных участков на траектории, их расположение). На сегодняшний день существуют методы, которые находят оптимальную функцию управления, с разным успехом обходя перечисленные проблемы. Методы решения можно условно разделить на две крупные группы: *непрямые* и *прямые* [1].

Непрямые методы основаны на необходимых условиях оптимальности, включая принцип максимума Понтрягина, и обычно сводятся к нелинейной краевой задаче. Их преимущество заключается в возможности нахождения оптимальных управлений в широком и практически важном классе кусочно-непрерывных ограниченных функций. Однако численное решение краевых задач в этих методах вычислительно сложно, что затрудняет их применение для сложных моделей движения с возмущениями и требует последующей адаптации к высокоточным моделям.

Краевая задача принципа максимума может быть решена различными способами. В работах [2, 3] она сводится к задаче Коши методом продолжения, при этом в краевую задачу вводится параметр, дифференцирование по которому и порождает задачу Коши. В другом исследовании используется метод стрельбы: параметром является условие выполнения левого краевого условия [4]. В обоих подходах полученную задачу Коши решают методом Ньютона или его модификациями и получают локально оптимальные решения.

Прямые методы преобразуют задачу оптимального управления в задачу математического программирования путем параметризации функции управления. Различные способы параметризации порождают разнообразные мето-

ды поиска оптимального управления. Преимущество прямых методов состоит в возможности использовать сложные модели движения, учитывать различные возмущения и ограничения на траектории, включая промежуточные и конечные.

Примером прямого метода служит метод *дискретизации* управления. Функция управления разбивается на конечное количество участков, на каждом из которых она считается постоянной или линейной. Оптимизируемыми параметрами выступают компоненты векторов тяги на участках разбиения. Метод требует мелкого разбиения, что приводит к большому количеству оптимизируемых переменных и значительным вычислительным затратам. В работе [5] рассматриваются коллокационные методы решения задач оптимального управления космическими аппаратами. На промежутках разбиения траектория аппроксимируется полиномом. Замена динамических ограничений алгебраическими позволяет избежать численного интегрирования и уменьшить объем вычислений.

Прямые методы обладают локальной сходимостью, что делает критически важным выбор начального приближения. Оно основывается на представлениях исследователя о рассматриваемом перелете и должно быть близко к оптимальному решению. В статье [6] предлагается метод регуляризации управления, который преобразует исходную задачу нелинейного программирования в последовательность выпуклых оптимизационных задач с глобальным решением.

Увеличение количества участков разбиения позволяет упростить задачу на каждом отдельном участке. В работе [7] таким образом задача нелинейного программирования сводится к задаче линейного программирования. Для уменьшения количества переменных оптимизации управление на каждом из участков выбирается из дискретного набора возможных управлений.

Кроме дискретизации в прямых методах для параметризации функции управления могут использоваться нелинейные базисные функции, взятые в композиции с небольшим числом параметров. Такие методы можно условно назвать *параметрическими*. Приведем пару примеров применения такого подхода.

Для поиска глобального оптимума среди траекторий в статьях [8, 9] описывается применение эволюционных нейроконтроллеров. Функция управления здесь представляется в виде нейронной сети, а веса нейронов настраиваются эволюционным алгоритмом. Отметим, что применение эволюционных алгоритмов оптимизации повышает шансы определения глобального оптимума или его окрестности по сравнению с традиционными, неглобальными методами.

В статьях [10, 11] приводится алгоритм поиска оптимального управления с использованием обучения с подкреплением. Управление взаимодействует с моделью среды и получает от нее вознаграждение, которое стимулирует его

изменение в сторону оптимума.

Параметрические методы требуют априорных знаний о виде функции управления и о форме траектории. С другой стороны, в отличие от методов дискретизации в ряде случаев они требуют меньшего количества переменных оптимизации.

Цель настоящей работы — разработать и верифицировать новый параметрический метод оптимизации перелета между заданными фазовыми состояниями для аппаратов с малой тягой. Его отличительной особенностью является независимое варьирование моментов переключения режимов управления и направления тяги.

В разделе 2 ставится задача перелета и формулируется задача оптимального управления. В разделе 3 описывается предлагаемый метод оптимизации, а задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования. В разделе 4 предлагаемый метод применяется для решения задачи перелета к Марсу. В разделе 5 описывается метод преобразования импульсного управления в продолжительный непрерывный участок.

2. Постановка задачи оптимального управления

Рассматривается движение КА в поле притягивающего центра. Вводятся две орбиты вокруг притягивающего центра. На орбитах определяются начальная и конечная точки. Даны положения начальной \mathbf{R}_0 и конечной \mathbf{R}_f точек. Известны скорости аппарата в начальной и конечной точках $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_f$. Фиксируется время перелета T между точками. Начальную массу КА обозначим M_0 . Известны также характеристики ЭРДУ: удельный импульс I и максимальный модуль силы тяги F_{max} . Величины I и F_{max} считаются постоянными на всем времени перелета.

В общем случае в нулевой момент времени КА получает мгновенное приращение скорости величиной $V_{отл} \geq 0$, которое назовем *отлетной скоростью*. На практике это является обычно результатом работы разгонного блока для преодоления притяжения планеты.

Динамика аппарата описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{F}, t), \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния КА, $\mathbf{F}(t)$ — функция управления. Вектор состояния $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), m(t))$, где $\mathbf{r}(t)$ — положение аппарата, $\mathbf{v}(t)$ — его скорость, $m(t)$ — масса.

Функция правых частей уравнений движения имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{F}, t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{w} \\ -\frac{|\mathbf{F}|}{I g} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, T], \quad (1)$$

где \mathbf{w} – возмущающее ускорение, $g = 9.80665$ м/с² – величина ускорения свободного падения на уровне моря.

В начальный момент времени вектор состояния КА в фазовом пространстве соответствует точке старта, ее скорости и начальной массе:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0) \\ \mathbf{v}(0) \\ m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{V}_0 + V_{отл} \mathbf{s} \\ M_0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где \mathbf{s} – единичный вектор, определяющий направление отлетной скорости.

Сформулируем задачу оптимального управления. Функционалом является разница между начальной и конечной массами КА:

$$J(\mathbf{x}(T)) = m(0) - m(T). \quad (3)$$

Требуется найти такую функцию управления $\mathbf{F}(t)$ и такой вектор \mathbf{s} , при которых функционал минимален:

$$J(\mathbf{x}(T)) \rightarrow \min_{\mathbf{F}, \mathbf{s}},$$

ограничения-равенства обеспечивают достижение точки прилета в конечный момент времени:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(T)) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(T) \\ \mathbf{v}(T) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{V}_f \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

ограничения-неравенства не позволяют модулю силы тяги выйти за ее максимальное значение для двигателя:

$$\psi(\mathbf{F}(t)) = F_{max} - |\mathbf{F}(t)| \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

3. Сведение к задаче нелинейного программирования

Рассмотрим важное наблюдение, которое подводит нас к разработке метода решения задачи, поставленной в разделе 2. Перепишем функционал задачи в форме интеграла расхода массы КА:

$$J = \int_0^T \frac{|\mathbf{F}(t)|}{I g} dt \rightarrow \min.$$

Тогда функция Понтрягина системы имеет вид

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \frac{|\mathbf{F}|}{Ig} = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left(-\mu \frac{r}{r^3} + \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{w} \right) - \lambda_m \frac{F}{Ig} - \frac{F}{Ig}, \quad (6)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $F = |\mathbf{F}|$. Здесь вектор $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор сопряженных переменных для (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , $\boldsymbol{\lambda}_r$ – вектор сопряженных переменных для \mathbf{r} , $\boldsymbol{\lambda}_v$ – вектор сопряженных переменных для \mathbf{v} .

Согласно принципу максимума Понтрягина, если управление оптимально, функция Понтрягина (6) принимает максимальное значение. Очевидно, при $|\boldsymbol{\lambda}_v| > 0$ это означает сонаправленность векторов \mathbf{F} и $\boldsymbol{\lambda}_v$:

$$\mathbf{F} = F \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\lambda_v}. \quad (7)$$

Подставим (7) в функцию Понтрягина (6):

$$H(F) = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left(-\mu \frac{r}{r^3} + \mathbf{w} \right) + \frac{F \lambda_v}{m} - \lambda_m \frac{F}{Ig} - \frac{F}{Ig}.$$

Функция Понтрягина $H(F) \rightarrow \max_F$, если

$$F \left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{Ig} \right) \rightarrow \max_F. \quad (8)$$

Из ограничения (5) $F = |\mathbf{F}| \in [0, F_{max}]$, поэтому в (8)

$$\begin{aligned} &\text{если } \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{Ig} \leq 0, \text{ то } F = 0; \\ &\text{если } \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m + 1}{Ig} > 0, \text{ то } F = F_{max}. \end{aligned}$$

Случай $\lambda_v = 0$ может приводить к вырожденным дугам траектории лишь при нескольких дискретных значениях угла между направлением тяги и радиус-вектором КА [12]. В данной работе такие случаи не рассматриваются.

Итак, оптимальное управление в поставленной задаче должно быть *релейным*, то есть сила тяги в любой момент времени должна быть либо максимальной, либо нулевой:

$$|\mathbf{F}(t)| \in \{F_{max}, 0\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Пример графика релейной функции представлен на рисунке 1.

В зависимости от того, выключено управление или включено, на времени перелета можно выделить *пассивные* и *активные* участки. Пусть на траектории перелета есть M пассивных участков. Каждый пассивный участок $(t_0, t_f)_i$, $i = \overline{1, M}$, определяется началом $t_{0i} \in [0, T]$ и концом $t_{fi} \in [t_{0i}, T]$:

$$|\mathbf{F}(t)| = \begin{cases} F_{max}, & \text{если } \exists i = \overline{1, M} : t \in (t_0, t_f)_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

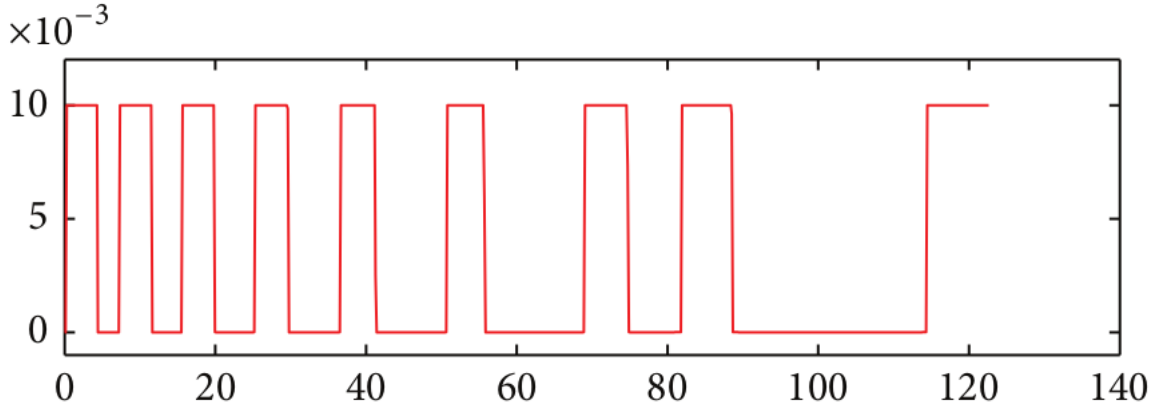


Рис. 1. Пример графика релейной функции. По оси абсцисс — число дней от начала перелета, по оси ординат — модуль силы тяги в ньютонах (адаптировано из [5])

Согласно (1), расход топлива прямо пропорционален модулю силы тяги. Удельный импульс I считается постоянным, поэтому топливо либо расходуется с постоянной скоростью на активных участках, либо не расходуется на пассивных. Таким образом, задача минимизации топливных затрат (3) сводится к задаче максимизации суммарной продолжительности пассивных участков:

$$J(t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}) = \sum_{i=1}^M t_{fi} - t_{0i} \rightarrow \max_{(t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM})}. \quad (9)$$

Компоненты направления вектора тяги аппроксимируем с помощью полиномиальных функций порядка K следующим образом:

$$\mathbf{e}(\tau) = \frac{\mathbf{p}(\tau)}{|\mathbf{p}(\tau)|}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]; \quad (10)$$

$$\mathbf{p}(\tau) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^K a_{xi}\tau^i \\ \sum_{i=0}^K a_{yi}\tau^i \\ \sum_{i=0}^K a_{zi}\tau^i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^K \begin{pmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{pmatrix} \tau^i = \sum_{i=0}^K \mathbf{a}_i \tau^i. \quad (11)$$

Тогда функция управления

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} F_{max} \mathbf{e}(\tau), & \text{если } \exists i = \overline{1, M} : t \in (t_0, t_f)_i; \\ \mathbf{0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (12)$$

Вектор состояния на левом конце (2) принадлежит гладкому многообразию S , которое порождается множеством единичных векторов, определяющих направление отлетной скорости. Согласно [13], если левые краевые условия оптимальны, то сопряженный вектор $\boldsymbol{\lambda}$ должен удовлетворять условию

$$\boldsymbol{\lambda} \perp U, \quad (13)$$

где U — касательная к S плоскость. В проекции на пространство скоростей:

$$\boldsymbol{\lambda}_v \perp U_v.$$

Многообразие S в проекции на пространство скоростей — единичная сфера. Вектор, ортогональный касательной к сфере, — вектор вдоль радиуса сферы. Отсюда необходимое условие оптимальности вектора \boldsymbol{s} — сонаправленность \boldsymbol{s} и $\boldsymbol{\lambda}_v$.

Функция Понтрягина (6) будет максимальна, если сонаправлены векторы \boldsymbol{F} и $\boldsymbol{\lambda}_v$. Поэтому сонаправлены векторы \boldsymbol{s} и $\boldsymbol{F}(0)$, то есть отлетная скорость должна быть направлена по оптимальному управлению в начальный момент времени. Начальные условия системы (2) в таком случае приобретают вид

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}(0) \\ \boldsymbol{v}(0) \\ m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_0 \\ \boldsymbol{V}_0 + V_{omn} \boldsymbol{e}(0) \\ M_0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Итак, функция управления однозначно описывается конечным числом параметров: коэффициентами полинома, определяющего направление тяги, и моментами времени, определяющими моменты переключения режимов управления:

$$\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_K, t_{01}, t_{f1}, \dots, t_{0M}, t_{fM}.$$

Функционал сформулирован в (9), ограничения-равенства берутся из (4). Ограничения-неравенства (5) вводить не нужно, из определения релейной функции управления оно будет выполняться для любого набора параметров оптимизации.

Заметим, что умножение на один и тот же множитель всех коэффициентов \boldsymbol{a}_i не меняет направление \boldsymbol{e} в формуле (10), а потому и вектор силы тяги \boldsymbol{F} в (12). Другими словами, сила тяги определяется коэффициентами с точностью до множителя. Поэтому для сужения пространства поиска коэффициентов полинома вводится дополнительное ограничение на сумму квадратов всех компонент:

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 - 1 = 0.$$

Эксперименты показали, что стандартные методы оптимизации, как градиентные, так и безградиентные, в предлагаемой формулировке задачи нелинейного программирования оказываются неэффективны. Основная проблема оптимизации заключается в чувствительности процесса оптимизации именно к моментам времени переключения управления.

Фиксация пассивных участков позволяет значительно упростить процесс определения коэффициентов полинома $\boldsymbol{p}(\tau)$ и удовлетворить краевым условиям. Поскольку функционал зависит только от переменных времени, задачу определения оптимальных моментов времени и коэффициентов полинома

можно разделить. А именно: на *внешнем* уровне оптимизации подбирать временные переменные, а на *внутреннем* уровне для фиксированных временных переменных находить коэффициенты полинома и управление, приводящее КА в целевую точку. Эксперименты показали, что проблем при численном решении внутренней задачи оптимизации не возникает, при этом для надежности начальные приближения коэффициентов полиномов можно задавать случайными числами в интервале от -1 до 1 . Переменные же времени можно подбирать сеточным методом оптимизации.

Возможны ситуации, когда решение внутренней задачи найти не удастся. Как правило, это означает нахождение целевой точки вне множества достижимости на данной уровне тяги с учетом заданного фиксированного пассивного участка. В случае, когда внутренняя задача оптимизации не сходится, на внешнюю задачу подается штрафной сигнал, чтобы побудить метод оптимизации для внешней задачи искать допустимое решение. В итоге полная задача оптимизации сводится к поиску распределения пассивных участков максимальной суммарной продолжительности, для которого внутренняя задача оптимизации сходится.

4. Задача оптимального перелета к Марсу

В данном разделе предлагаемый метод тестируется и исследуется на задаче перелета КА, снабженного двигателем малой тяги, на Марс. Задачу перелета будем решать в модели точечных сфер действия, рассматривая только гелиоцентрический участок перелета, на котором на аппарат действуют только притяжение Солнца и реактивная сила тяги.

Даны даты старта и прилета, в том числе в формате юлианских дат JD_0 и JD_f . Время перелета вычисляется как $T = JD_f - JD_0$.

По юлианским датам из эфемерид с помощью инструментов пакета *KIAM Astrodynamics Toolbox* [14] можно вычислить положение \mathbf{R}_3 и скорость Земли \mathbf{V}_3 в момент JD_0 , а также положение \mathbf{R}_M и скорость Марса \mathbf{V}_M в момент JD_f . Начальную массу КА обозначим за M_0 . Пусть также известна модель ЭРДУ, ее удельный импульс I и максимальный модуль силы тяги F_{max} .

Начальная точка траектории совпадает с положением Земли в момент времени JD_0 :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_3.$$

Начальная скорость КА складывается из скорости Земли и отлетной скорости, направленной по направлению оптимальной тяги в нулевой момент времени $\mathbf{e}(0)$, определяемому в (10):

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_3 + V_{отл}\mathbf{e}(0),$$

где \mathbf{V}_3 — скорость Земли в дату старта.

Динамика описывается системой уравнений (1). Из ускоряющих возмущений учитываются только гравитационное притяжение Солнца и управление, то есть $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Требуется найти такую функцию управления $\mathbf{F}(t)$, чтобы в конечный момент времени положение и скорость КА совпадали с положением и скоростью Марса в момент времени JD_f :

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_M, \quad \mathbf{V}_f = \mathbf{V}_M,$$

а топливные затраты минимальны, то есть минимизируется функционал (3).

4.1. Пример применения метода

Пусть начальная масса КА равна $M_0 = 156$ кг. Модель двигателя выберем СПД-50М с удельным импульсом $I = 1250$ с и максимальной тягой $F_{max} = 18$ мН. Пусть на старте КА доступно $V_{отл} = 3$ км/с отлетной скорости. Дата старта — 23 сентября 2024 года, дата прилета — 7 декабря 2025 года считаются фиксированными. Время перелета составляет 440 суток.

Полином $\mathbf{p}(\tau)$ из (11) принимается квадратичным. При фиксированных пассивных участках коэффициенты этого полинома находятся исходя из решения краевой задачи с помощью метода доверительных областей [15]. Рассматриваются функции управления с одним пассивным участком. Считаем, что решение задачи найдено, если норма невязки не превышает 10^{-9} .

Начальное приближение пассивного участка $[t_0, t_f]$ — участок с совпадающими концами $t_0 = t_f$ в случайной точке интервала времени перелета. Начальные приближения компонент векторов $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_K$ — случайные числа от -1 до 1 .

Границы пассивного участка в данном примере оптимизируются с помощью метода Нелдера — Мида [16]. В результате запуска оптимизационных процедур со случайных начальных приближений оптимизируемых переменных получается отобрать оптимальный пассивный участок с началом $t_0 = 0$ и концом $t_f = 152$ сут. Полученное управление затрачивает 36 кг топлива, то есть 23% от начальной массы КА. График полинома $\mathbf{p}(\tau)$, определяющего компоненты вектора тяги, изображен на рисунке 2. Зависимость компонентов вектора тяги от времени с учетом пассивного участка изображена на рисунке 3. Оптимальная траектория изображена на рисунке 4.

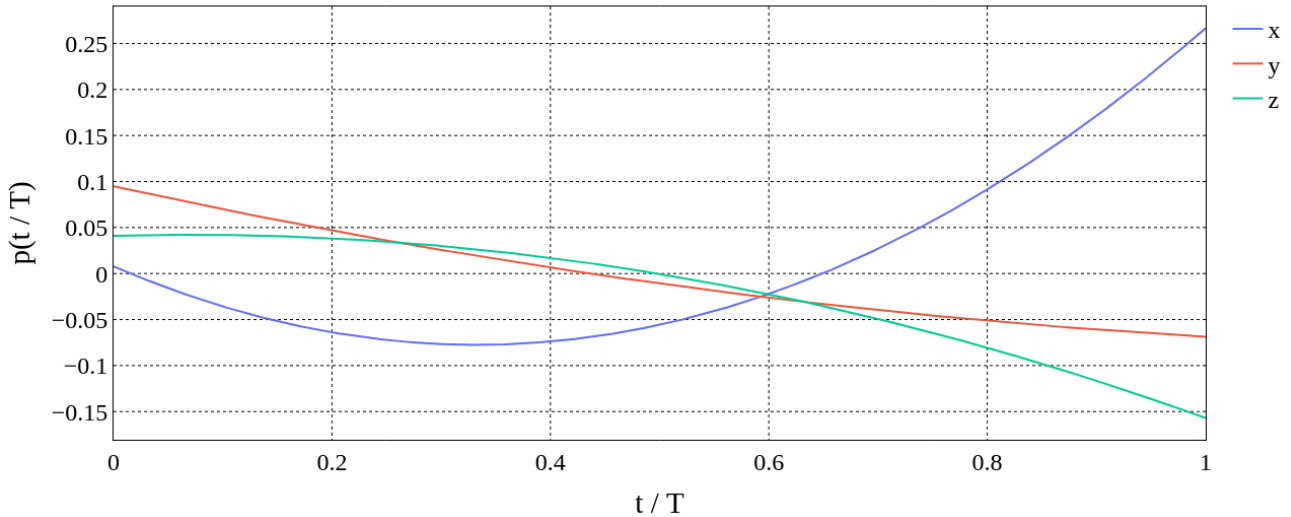


Рис. 2. Графики компонент полинома $p(\tau)$ для оптимальной траектории перелета к Марсу из раздела 4.1. Полиномы здесь определены квадратичными функциями времени

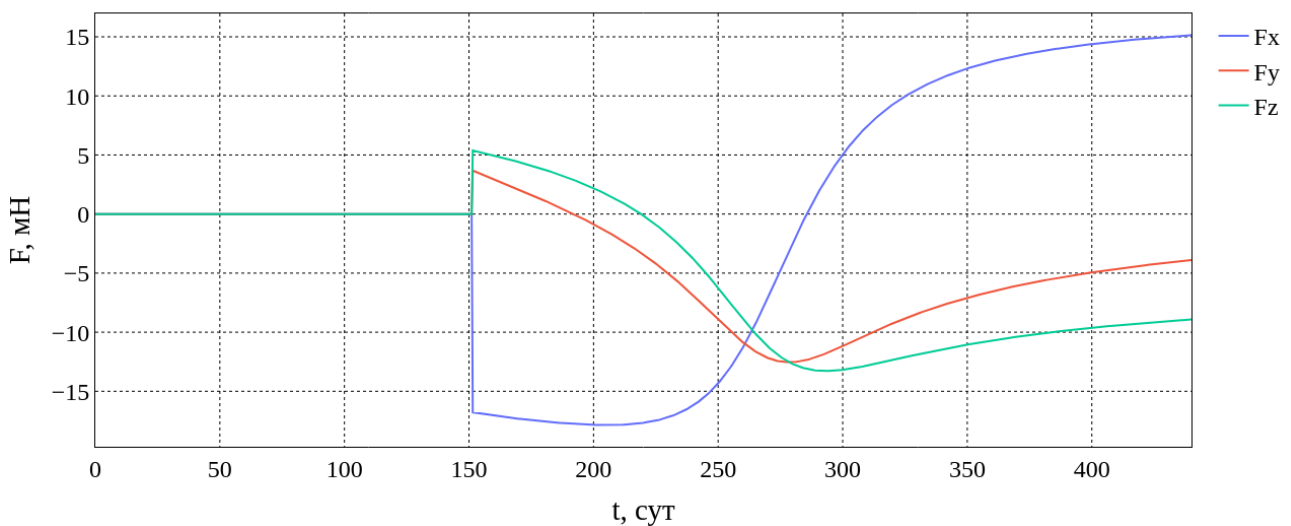


Рис. 3. Графики компонент силы тяги $F(t)$ в проекциях на оси международной небесной системы координат для оптимальной траектории перелета к Марсу из раздела 4.1. На интервале времени от 0 до 152 дней располагается пассивный участок, далее до конца следует активный участок

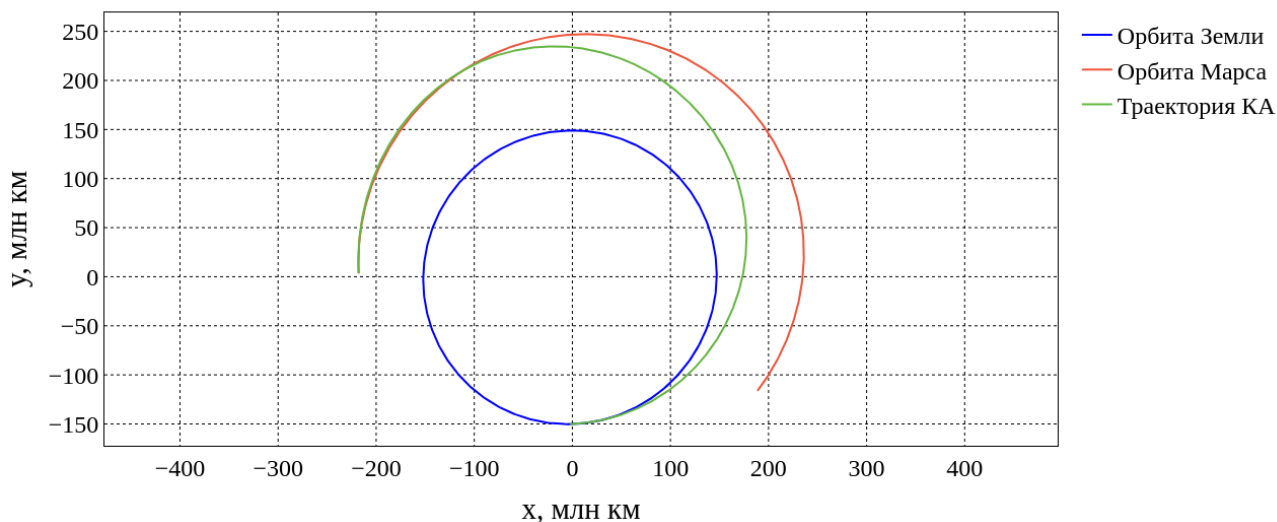


Рис. 4. Оптимальная траектория перелета к Марсу из раздела 4.1 в проекции на плоскость орбиты Земли

4.2. Верификация метода на известном решении

В этом разделе мы сверим результаты оптимизации траектории перелета к Марсу с использованием предлагаемого алгоритма с результатами оптимизации с помощью непрямого метода [17]. Дата старта – 9 октября 2026 года, дата прилета – 12 декабря 2027 года, величина отлетной скорости $V_{отл} = 2.8$ км/с. Удельный импульс двигателя $I = 1250$ с, максимальная тяга $F_{max} = 18$ мН. Начальная масса аппарата $M_0 = 156$ кг. Время перелета составляет 430 дней.

Рассмотрим управления с одним пассивным участком и квадратичным полиномом $\mathbf{p}(\tau)$. Чтобы продемонстрировать оптимальность искомого решения, мы построим зависимости продолжительности пассивного участка от его начала и найдем участок максимальной продолжительности. Для этого моменты t_0 и t_f переключения режимов управления будем искать следующим образом: для каждого t_0 на сетке значений методом дихотомии ищется максимальное значение t_f , для которого внутренняя задача оптимизации сходится.

На рисунке 5 изображена зависимость продолжительности пассивного участка $t_f - t_0$ от его начала t_0 . Наибольшая длительность пассивного участка составляет около 160 суток и соответствует $t_0 = 0$. Полученный результат совпадает с тем, что был получен с помощью принципа максимума Понтрягина в [17]. На рисунке 6 показаны относительные затраты топлива в зависимости от начала пассивного участка. Минимальные топливные затраты в этом случае составляют около 22% от начальной массы КА (34 кг).

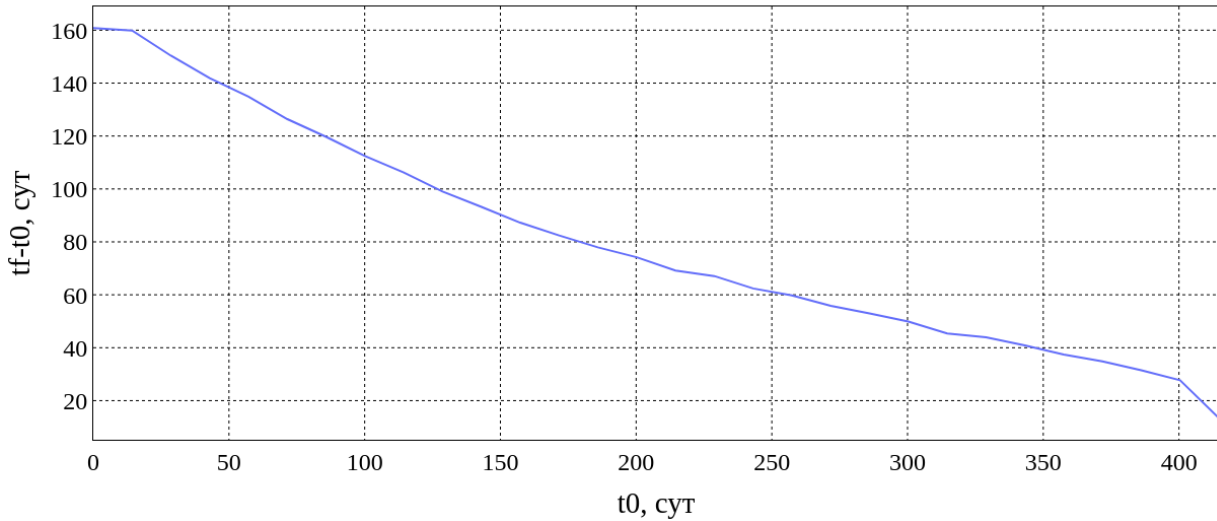


Рис. 5. График зависимости продолжительности пассивного участка от его начала в задаче перелета к Марсу в разделе 4.2. Зависимость является монотонной, а наибольшее значение продолжительности пассивного участка достигает в момент $t_0 = 0$

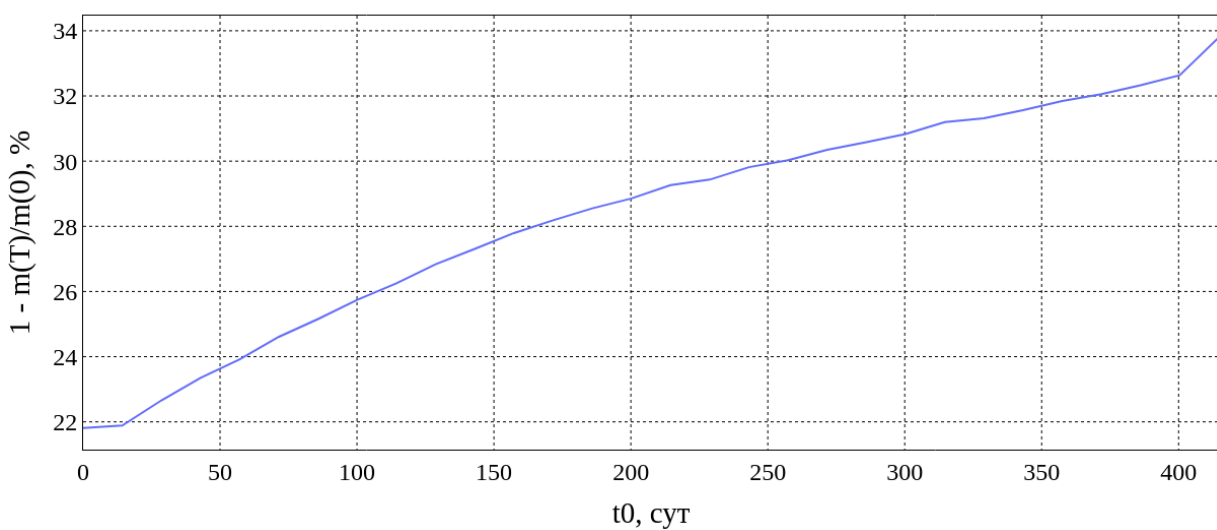


Рис. 6. График относительных топливных затрат в зависимости от начала пассивного участка в задаче перелета к Марсу в разделе 4.2. Наименьшие затраты топлива соответствуют $t_0 = 0$

Проводился также поиск оптимальных функций управлений и с двумя пассивными участками. Для этого моменты переключения t_{01} , t_{f1} , t_{02} , t_{f2} режимов управления оптимизировались с помощью метода Нелдера — Мида. Эксперименты показали, что в результате оптимизации один из участков стягивается в точку, что косвенно подтверждает сходимость к оптимальному решению, найденному с помощью принципа максимума Понтрягина.

4.3. Случай перелета без отлетной скорости

В рассмотренных выше примерах с одним пассивным участком оказывается, что его оптимальное расположение — в начале перелета. Объяснить это можно большим значением отлетной скорости. В начале перелета на динамику КА в большей степени влияет не двигатель малой тяги, а импульс, например разгонного блока, величиной порядка нескольких километров в секунду. Однако в общем случае оптимальный пассивный участок не обязан находиться в начале перелета. Для подтверждения этого рассмотрим пример перелета на Марс при $V_{отл} = 0$, то есть $V_0 = V_3$.

В качестве даты старта выберем 9 октября 2026 года, даты прилета — 20 февраля 2028 года. Удельный импульс двигателя $I = 1250$ с, максимальная тяга $F_{max} = 18$ мН. Начальная масса аппарата $M_0 = 85$ кг.

Изобразим на графике (см. рисунок 7) зависимость продолжительности пассивного участка от его начала, то есть разницу $t_f - t_0$. Из графика видно, что оптимальный пассивный участок начинается на 300 сутки перелета и продолжается 40 суток. Топливные затраты определяются из графика на рисунке 8. Минимальные топливные затраты составляют 68% от начальной массы КА (58 кг).

4.4. Неединственность решений

Рассмотрим начальные условия из раздела 4.1 и зафиксируем пассивный участок с началом $t_0 = 58$ сут и концом $t_f = 115$ сут. При запуске алгоритма решения краевой задачи для поиска коэффициентов полинома, определяющих направление тяги, из разных начальных приближений удалось найти две различные функции управления, обеспечивающих выполнение ограничений. Их профили изображены на рисунках 9 и 10. Таким образом, одному и тому же пассивному участку может соответствовать множество допустимых управлений.

Вблизи же максимально возможного пассивного участка $t_0 = 0$ и $t_f = 150$ сут метод сходится к единственной функции управления, профиль которого был представлен выше на рисунке 3. В данном случае при приближении пассивного участка к максимальному множеству допустимых траекторий вырождается в одну оптимальную.

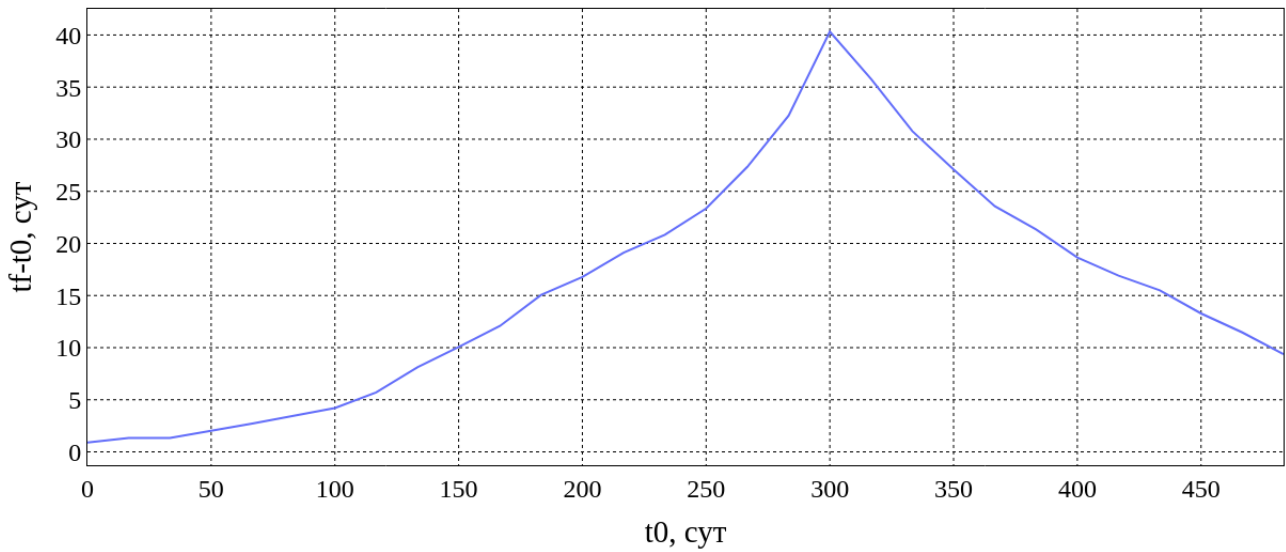


Рис. 7. График зависимости продолжительности пассивного участка от его начала в задаче перелета на Марс в разделе 4.3, т.е. без отлетной скорости.

Зависимость не является монотонной, наибольшая продолжительность пассивного участка наблюдается при $t_0 = 300$ сут

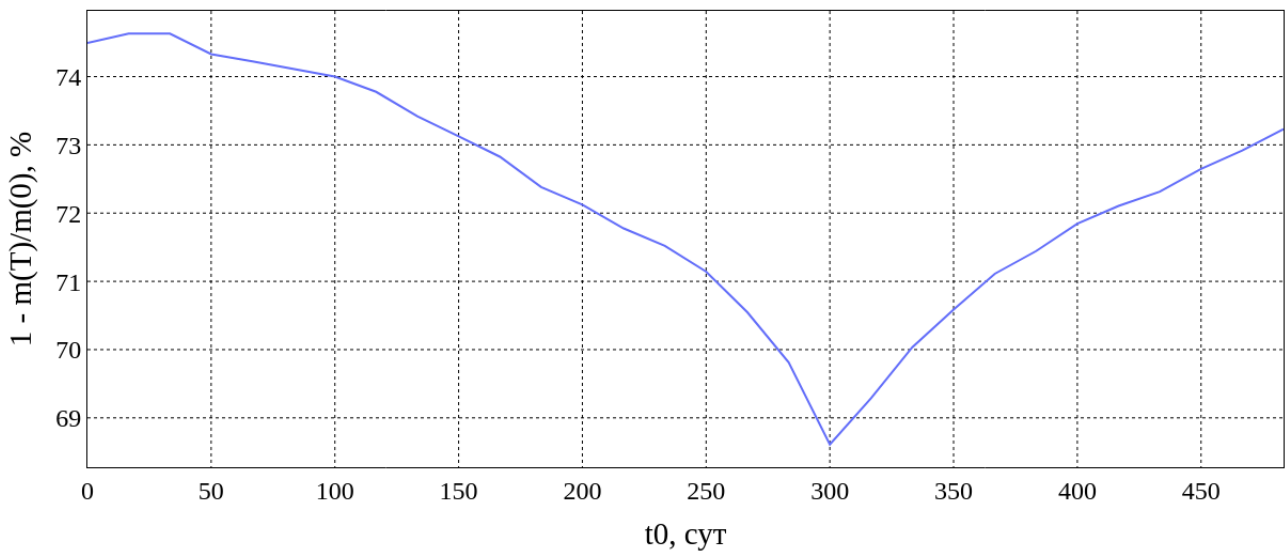


Рис. 8. График топливных затрат в зависимости от начала пассивного участка в задаче перелета на Марс в разделе 4.3, т.е. без отлетной скорости.

Зависимость не является монотонной, наименьшие затраты наблюдаются при $t_0 = 300$ сут

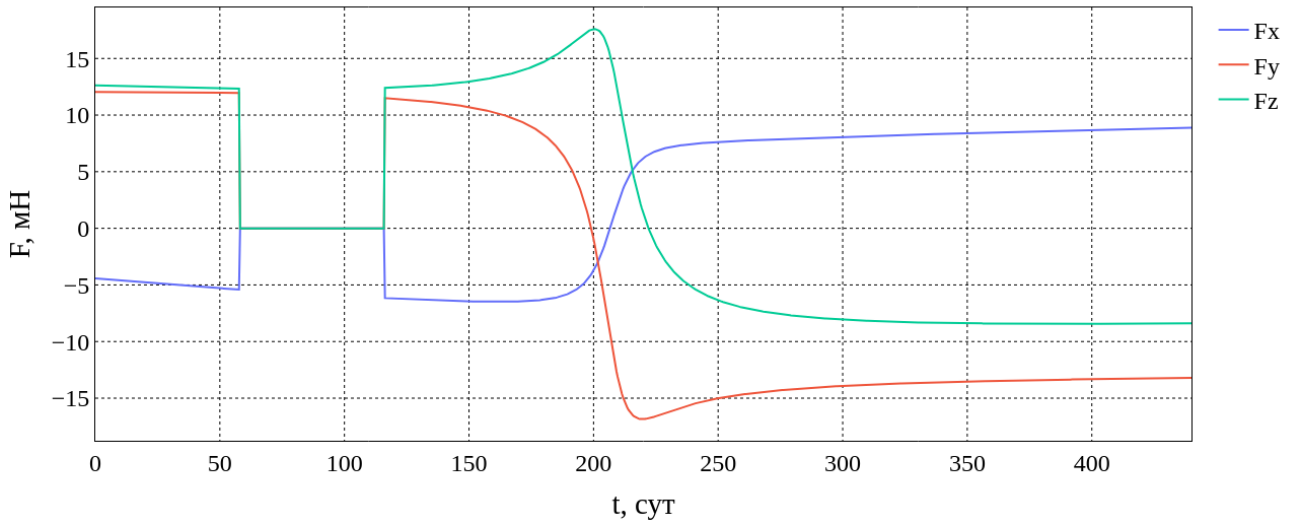


Рис. 9. Профиль одного допустимого управления для заданного пассивного участка из раздела 4.4

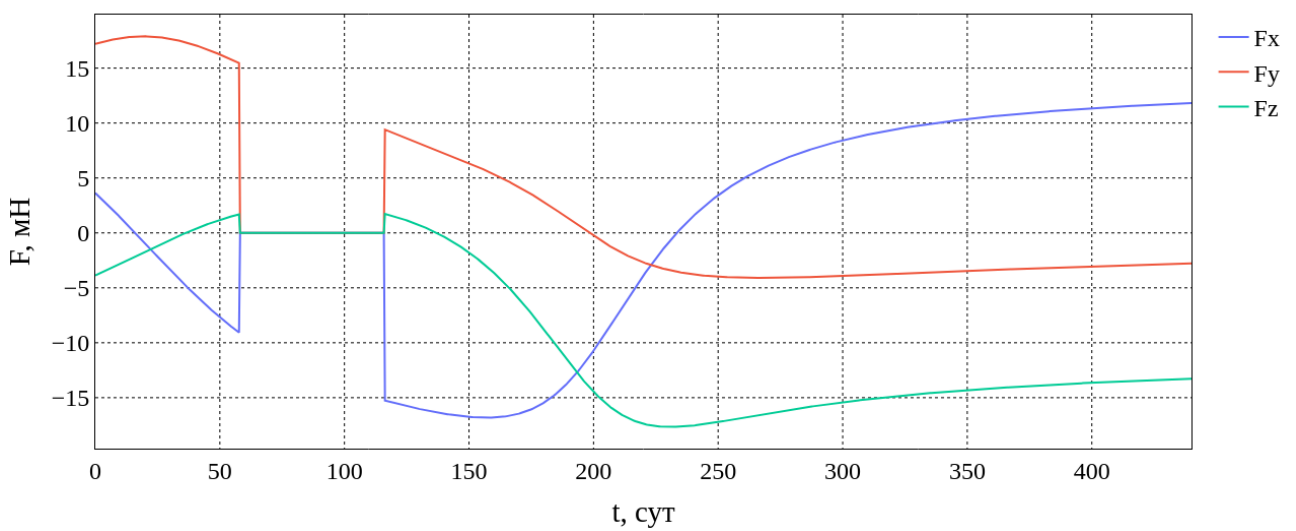


Рис. 10. Профиль другого допустимого управления для заданного пассивного участка из раздела 4.4

4.5. Работа алгоритма при малых и больших временах полета

В данном разделе для различных дат старта ищутся наименьшие и наибольшие значения времени перелета, для которых удается найти решение. Результаты для трех произвольных дат старта представлены в таблице 1: в каждой строке с заданной датой старта записываются даты прилета с минимально и максимально возможными временем перелета, указываются соответствующие даты начала и конца пассивного участка, а также относительные затраты топлива. При временах перелета меньше или больше указанных предельных значений алгоритм решения краевой задачи перестает сходиться даже при увеличении степени полинома $p(\tau)$. В рассмотренных примерах аппарат успевает сделать один неполный оборот вокруг Солнца. Таким образом, метод эффективно работает для одновитковых перелетов. Вероятно, для сходимости на перелетах дольше одного витка следует тщательнее подбирать начальное приближение коэффициентов полиномов.

Дата старта	Дата прилета	T , сут	t_0 , сут	t_f , сут	ρ , %
23.09.2024	01.10.2025	373	36	57	29
23.09.2024	10.06.2026	625	0	150	39
09.10.2026	09.11.2027	396	42	56	31
09.10.2026	22.11.2028	775	0	202	47
01.11.2028	16.12.2029	410	35	69	31
01.11.2028	30.05.2030	575	0	146	35

Таблица 1. Минимальные и максимальные времена перелета для задачи перелета к Марсу для трех произвольных дат старта. Здесь $\rho = 1 - m(T)/m(0)$ обозначает относительные затраты топлива

5. Преобразование импульса в непрерывный участок

С помощью предлагаемого метода можно решать задачу преобразования мгновенного приращения скорости в непрерывный активный участок управления. Опишем алгоритм решения задачи.

Пусть КА на орбите в момент времени $t_{умн}$ получает приращение скорости $\Delta v_{умн}$. Требуется определить такие наименьшее время $T_{акт}$ и непрерывное управление продолжительностью $T_{акт}$, которые начинаются в момент времени $t_0 = t_{умн} - T_{акт}/2$ и заканчиваются в момент времени $t_f = t_{умн} + T_{акт}/2$, чтобы положение и скорость КА в конце маневра совпадали с положением и скоростью КА в момент t_f , управляемого импульсом $\Delta v_{умн}$.

Время перелета $T_{акт}$ оптимизируется методом Нелдера – Мида. Для каждого значения $T_{акт}$ при этом решается краевая задача между векторами состояния (положения и скорости), соответствующими траектории перелета с

импульсом, и определяются коэффициенты полиномов. Начальным приближением для $T_{акт}$ служит значение $F_{max}/\Delta v_{имп}$.

В качестве примера рассмотрим КА на экваториальной орбите Земли с большой полуосью $a = 200$ тыс. км и эксцентриситетом $e = 0.8$. В перицентре орбиты на расстоянии $r_p = 40$ тыс. км от центра Земли аппарату придается мгновенное приращение скорости по направлению скорости величиной $v_{имп} = 10$ м/с. Начальная масса КА равна $M_0 = 156$ кг. Удельный импульс $I = 1250$ с, максимальная тяга $F_{max} = 18$ мН.

В этом примере оптимальное время маневра $T_{акт} = 1.875$ сут. Траектории с импульсным и непрерывным управлениями изображены на рисунке 11. Профиль непрерывного управления, заменяющего импульс в перицентре, изображен на рисунке 12.

Для другого примера рассмотрим вытянутую орбиту с той же большой полуосью и эксцентриситетом. Пусть теперь ее наклонение $i = 51.6^\circ$. В момент прохождения КА восходящего узла ему придается мгновенное приращение скорости величиной $v_{имп} = 20$ м/с по нормали к плоскости орбиты.

Здесь оптимальное время маневра получается $T_{акт} = 2.250$ сут. Траектории с импульсным и непрерывным управлениями изображены на рисунке 13. Профиль непрерывного управления, заменяющего импульс в перицентре, изображен на рисунке 14. Заметим, что на рисунке обе траектории визуально сливаются, так как близки.

6. Заключение

В работе предложен параметрический метод оптимизации расхода топлива аппарата, снабженного двигателем малой тяги. Метод основан на релейном характере оптимальной функции управления и аппроксимации направления силы тяги полиномами. Оптимизируемыми параметрами являются моменты переключения режимов управления и коэффициенты полинома. Задача сводится к максимизации суммарной длительности пассивных участков траектории.

Суть метода состоит в двухуровневом подходе к оптимизации, устраняющем чувствительность процесса оптимизации к временным переменным: на внутреннем уровне оптимизируется решение при фиксированных пассивных участках, а на внешнем — сами пассивные участки.

В исследовании представлены результаты применения метода для расчета траектории полета к Марсу и замены импульсного управления непрерывным на длительных участках траектории. Показано, как, в отличие от прямых методов оптимизации, основанных на принципе максимума Понтрягина, метод естественным образом позволяет анализировать влияние размещения пассивных участков на затраты топлива и находить оптимальные решения при ограничениях на эти участки.

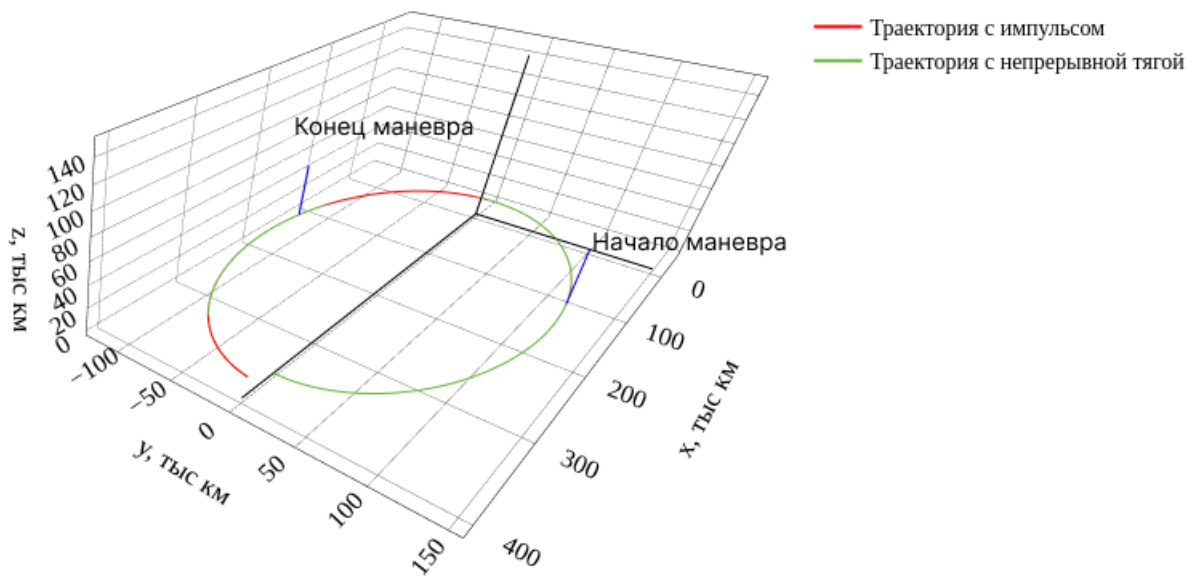


Рис. 11. Траектории КА с импульсом в перигеуме и непрерывным управлением, заменяющим импульс

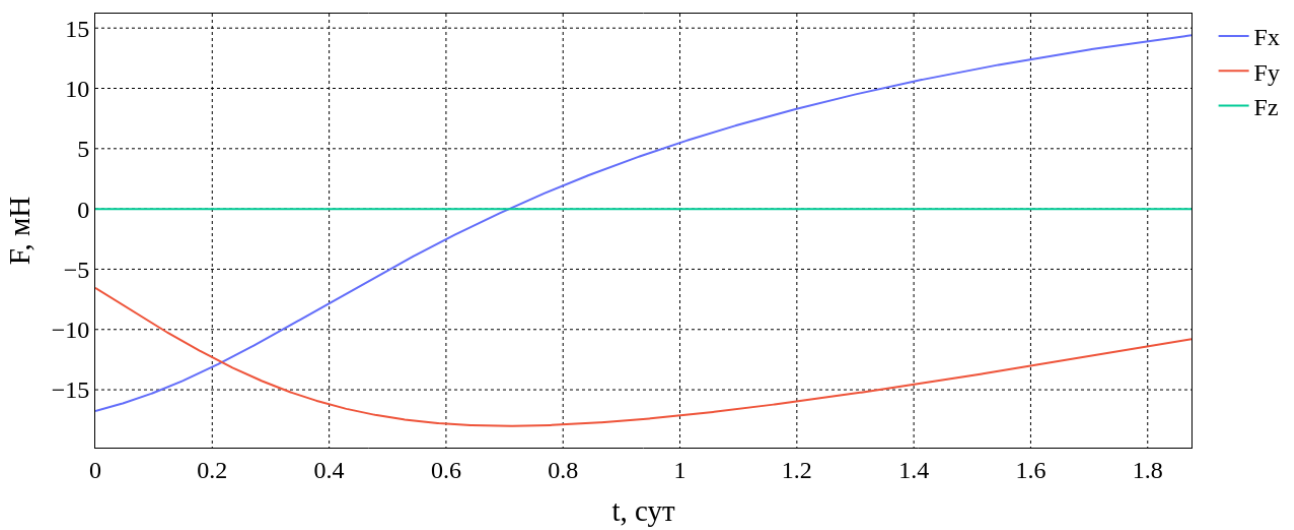


Рис. 12. Профиль непрерывного управления, заменяющего импульс в перигеуме

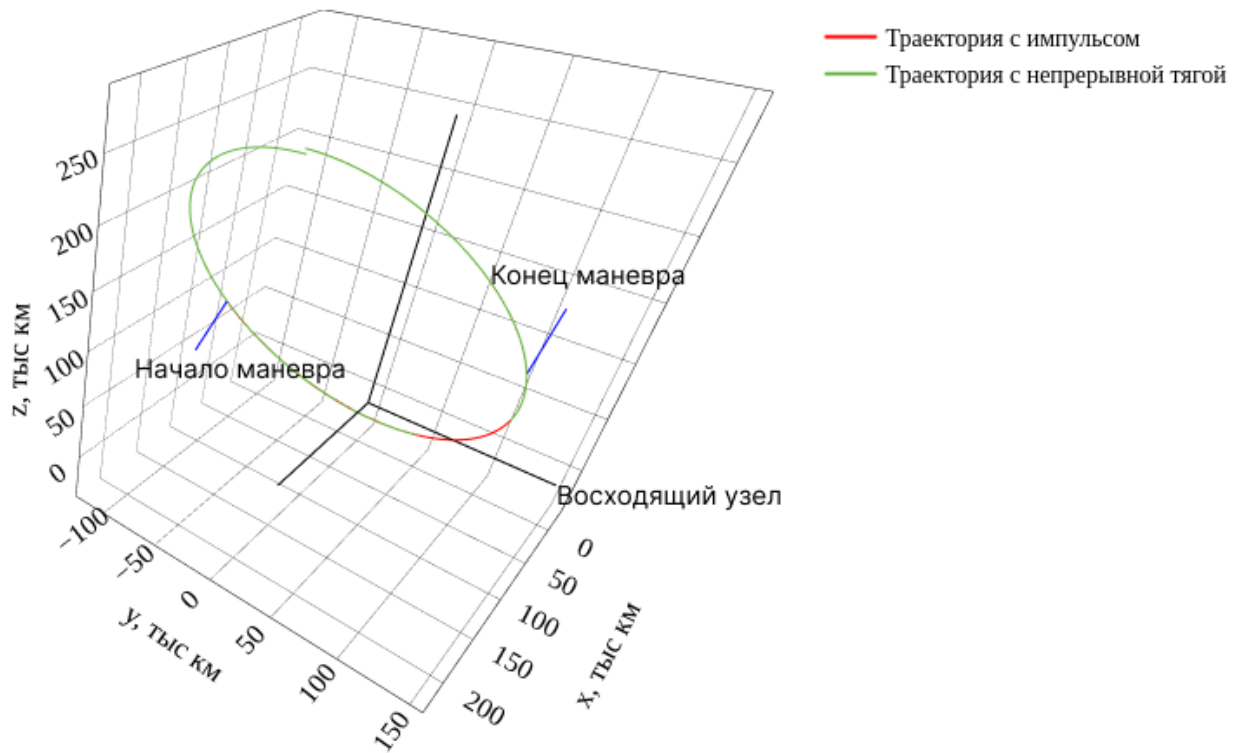


Рис. 13. Траектории КА с импульсом в восходящем узле и непрерывным управлением, заменяющим импульс

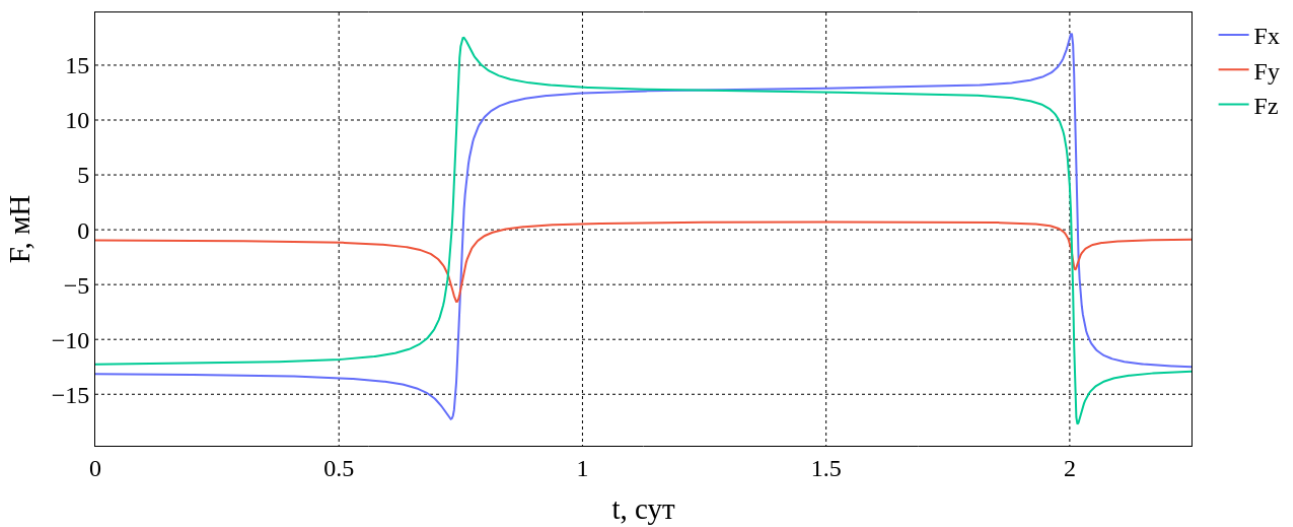


Рис. 14. Профиль непрерывного управления, заменяющего импульс в восходящем узле

Список литературы

- [1] Conway В.А. Spacecraft trajectory optimization. Cambridge University Press. 2010.
- [2] Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46. №3. С. 224–237.
- [3] Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50. №. 3. С. 258–270.
- [4] Григорьев И.С. и др. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. №. 7 (67). DOI: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1639>.
- [5] Topputo F. et al. Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications // Abstract and Applied Analysis. Hindawi, 2014. V. 2014. DOI: <https://doi.org/10.1155/2014/851720>.
- [6] Morelli A.C. et al. Convex Trajectory Optimization Using Thrust Regularization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2024. V. 47. №. 2. P. 339–346. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G007646>.
- [7] Ulybyshev Y. Discrete pseudocontrol sets for optimal control problems // Journal of guidance, control, and dynamics. 2010. V. 33. №. 4. P. 1133–1142. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.47315>.
- [8] Dachwald B. Low-thrust trajectory optimization and interplanetary mission analysis using evolutionary neurocontrol // Doktorarbeit, Institut für Raumfahrttechnik, Universität der Bundeswehr, München. 2004.
- [9] Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // Acta Astronautica. 2005. V. 57. №. 2-8. P. 175–185. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2005.03.004>.
- [10] LaFarge N.B. et al. Autonomous closed-loop guidance using reinforcement learning in a low-thrust, multi-body dynamical environment // Acta Astronautica. 2021. V. 186. P. 1–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.05.014>.
- [11] LaFarge N.B., Howell K.C., Folta D.C. Adaptive closed-loop maneuver planning for low-thrust spacecraft using reinforcement learning // Acta

- Astronautica. 2023. V. 211. P. 142–154. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.06.004>.
- [12] Morelli A.C. et al. Characterization of Singular Arcs in Spacecraft Trajectory Optimization // arXiv preprint arXiv:2311.04123. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.04123>.
- [13] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». 1976. Т. 6. С. 133–259.
- [14] KIAMToolbox // GitHub : [Электронная платформа]. URL: <https://github.com/shmaxg/KIAMToolbox>.
- [15] Branch M.A., Coleman T.F., Li Y. A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. V. 21, № 1, P. 1–23. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1064827595289108>.
- [16] Nelder J.A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // The Computer Journal. 1965. V. 7. №4. P. 308–313. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>.
- [17] Овчинников М.Ю. и др. Миссия к Марсу на базе универсальной малогабаритной платформы с ЭРДУ // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2024. №. 44. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-44>.

Оглавление

1. Введение	3
2. Постановка задачи оптимального управления	5
3. Сведение к задаче нелинейного программирования	6
4. Задача оптимального перелета к Марсу	10
4.1. Пример применения метода	11
4.2. Верификация метода на известном решении	13
4.3. Случай перелета без отлетной скорости	15
4.4. Неединственность решений	15
4.5. Работа алгоритма при малых и больших временах полета	18
5. Преобразование импульса в непрерывный участок	18
6. Заключение	19
Список литературы	22