



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.П. Варин

Рациональные
коэффициенты
ортогональных разложений
некоторых функций

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Варин В.П. Рациональные коэффициенты ортогональных разложений некоторых функций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 59. 23 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-59>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-59>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ
РАЗЛОЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Москва, 2024

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Рациональные коэффициенты ортогональных разложений некоторых функций. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2024.

Разложения многих элементарных и специальных функций в ряды по ортогональным полиномам имеют коэффициенты, известные в явном виде. Однако почти всегда эти коэффициенты иррациональны. Поэтому любой численный метод дает эти коэффициенты приближенно при расчетах в любой арифметике. Это относится и к спектральным методам, которые дают эффективные аппроксимации голономных функций. Однако в некоторых исключительных случаях коэффициенты разложений, полученные спектральным методом, оказываются рациональными и вычисляются точно в рациональной арифметике. Мы рассматриваем такие разложения по некоторым классическим ортогональным полиномам. Показано, что так можно получить бесконечный набор линейных форм для некоторых иррациональностей, в частности, для константы Эйлера.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, спектральные методы, голономные последовательности.

V.P. Varin. Rational coefficients of orthogonal expansions of some functions. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2024.

Expansions of many elementary and special functions in series of orthogonal polynomials have coefficients known explicitly. However, almost always these coefficients are irrational. Thus any numerical method would give these coefficients approximately with computations in any arithmetic. This is also true for the spectral methods, which give effective approximations for holonomic functions. However, in some exceptional cases the coefficients of expansions obtained with spectral methods turn out to be rational, and are computed exactly in rational arithmetic. We consider these expansions in series of some classical orthogonal polynomials. We demonstrate that, in this way, an infinite number of linear forms can be obtained for some irrationalities, in particular, for the Euler constant.

Key words: orthogonal polynomials, spectral methods, holonomic sequences.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
Москва, 2024 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Если набрать в поисковой строке Google «Рациональные коэффициенты ортогональных разложений», то появится множество ссылок на ортогональные полиномы и их приложения, на ортогональные рациональные функции и на многие другие интересные вещи. Однако по теме вопроса нам не удалось найти ни одной релевантной ссылки. То есть вопрос, когда коэффициенты разложений некоторых функций по ортогональным полиномам бывают рациональными числами, похоже, ранее в литературе не рассматривался.

На наш взгляд, этому факту есть несколько объяснений.

Во-первых, сама тема разложений по ортогональным полиномам в значительной ее части относится к численному анализу и его приложениям, где вычисления проводятся в плавающей арифметике и вопрос о рациональности коэффициентов этих разложений просто не возникает.

Во-вторых, коэффициенты разложений функций выражаются в виде интегралов, которые либо редко известны в явном виде, либо иррациональны. То есть рациональность коэффициентов ортогональных разложений является достаточно редким явлением и пока что не имеет, насколько нам известно, приложений к другим разделам математики.

Например, в монографии [1] можно найти множество разложений элементарных и специальных функций в ряды по полиномам Чебышева, где коэффициенты разложений известны в явном виде. Однако они имеют в качестве множителя коэффициент, зависящий от π или другой иррациональности.

Системы компьютерной алгебры (CAS) здесь, казалось бы, могут быть весьма полезны, но это не всегда так. Рассмотрим, например, последовательность интегралов

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}} p_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $p_n(x)$ – это смещенные полиномы Чебышева на интервале $[0, 1]$, а величины $\{a_n\}$ представляют коэффициенты разложения $\ln x$ на интервале $(0, 1]$ по этим полиномам. Эта последовательность имеет вид

$$\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{ -4 \ln 2, 2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots \right\} \quad (2)$$

и в некоторых версиях Maple вычисляется в этом виде. Однако в более современных версиях Maple ответ может выглядеть так:

$$a_0 = \frac{8}{9\pi} F\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right], 1\right) - 4, \quad a_1 = 4 \ln 2 - \frac{4}{3} + \frac{16}{75\pi} F\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right], 1\right), \dots,$$

где $F()$ – это гипергеометрическая функция.

Таким образом, мы получаем в качестве бонуса ряд любопытных тождеств для гипергеометрических функций, но заранее угадать в этих формулах рациональные числа представляется затруднительным.

Наш интерес к этой проблеме связан с наблюдением, которое мы сделали в [2] и [4], что иногда спектральный метод решения краевых задач для голономных ОДУ дает коэффициенты разложений решений этих задач точно в рациональной арифметике. То есть все рациональные коэффициенты разложения, полученные нашим априори приближенным методом, оказываются точными значениями, совпадающими со значениями соответствующих интегралов, начиная с некоторого номера.

Иррациональные коэффициенты ортогональных разложений, очевидно, в принципе не могут быть получены точно ни в какой арифметике, а в рациональной арифметике они получаются в виде (иногда очень хороших, см. [2, 4]) рациональных приближений.

Заметим, что спектральный метод решения этих задач, т.е. разложение голономных функций в ряды по полиномам Лежандра (см. [2]) или Чебышева (см. [4]), может давать полиномиальные приближения решений, которые оказываются даже лучше в равномерной метрике, чем отрезки разложений этих решений с точными коэффициентами в интегральной форме.

Например, разложение функции $\arctan x$ на интервале $[0, 1]$ по смещенным полиномам Лежандра имеет иррациональные коэффициенты, зависящие от π . Поэтому эти коэффициенты не могут быть получены точно в рациональной арифметике. Но на графике видно (см. [2]), что наше приближение в виде полинома с рациональными коэффициентами оказывается лучше, чем отрезок точного разложения той же длины.

В примере (1) мы не раскладываем $\ln x$ в ряд по смещенным полиномам Чебышева напрямую, а решаем спектральным методом следующую краевую задачу:

$$x y'(x) = 1, \quad y(1) = 0,$$

которая аппроксимируется как

$$X D y = e,$$

где X и D – матрицы операторов умножения на x и дифференцирования по x , действующие в пространстве коэффициентов Фурье-Чебышева, а e – это единичный вектор. Далее учитывается краевое условие, как это описано в [2] (также см. ниже). Затем конечномерная задача размерности N решается обычным способом, а решение, вектор y , содержит рациональные аппроксимации указанных выше интегралов.

Обычно результат применения спектрального метода – это именно рациональные аппроксимации нужных коэффициентов. Но в данном случае все коэффициенты $y_n = a_{n-1}$ оказываются точными, кроме последнего, y_N , что связано с методом вычисления, и кроме первого, $y_1 \approx a_0$, поскольку a_0 иррационально.

Вопрос, когда спектральный метод дает рациональные коэффициенты разложений в случае, когда они и в самом деле рациональны, является весьма нетривиальным и пока что не имеет даже приблизительного ответа.

Тот факт, что этот вопрос нетривиален, следует из наблюдения, что если бы ответ на него всегда был известен, то это дало бы доказательство иррациональности числа $\ln 2$ в примере выше, а также дало бы иррациональность константы Эйлера (см. разд. 4).

В разделе 2 мы рассматриваем все известные нам к настоящему времени краевые задачи, решения которых разлагаются в ряды по смещенным полиномам Чебышева на интервале $[+0, 1]$ и имеют при этом рациональные коэффициенты начиная с некоторого номера.

Поскольку полиномы Чебышева принимают рациональные значения в рациональных точках, полученные ряды позволяют выразить некоторые иррациональности (например, $\ln 2$) в виде все более быстро сходящихся рядов или пределов голономных последовательностей различного порядка.

Наш интерес к $\ln 2$ обусловлен тем, что эта модельная задача идентична задаче приближения константы Эйлера γ с помощью разложений некоторых функций по ортогональным полиномам Лагерра (см. разд. 4). В частности, мы получили серию голономных рациональных последовательностей, сходящихся к γ , а также выразили эту константу в виде цепной дроби с «предсказуемой» структурой.

Предсказуемость рациональных приближений иррациональной константы можно понимать в различных смыслах. Здесь имеются в виду голономные рациональные последовательности (которые являются решениями линейных форм с полиномиальными коэффициентами) различных порядков. Простейший случай – это явная формула для рационального приближения. Следующий по сложности случай – это голономная последовательность первого порядка, и т.д.

Например, для $\ln 2$ существуют линейные формы второго порядка, и это дает возможность представить $\ln 2$ в виде цепных дробей с полиномиальными коэффициентами (см. разд. 2). Для константы Эйлера пока что неизвестно, существуют ли для нее линейные формы второго порядка. Однако для нее существуют линейные формы третьего порядка (см., например, [5], [6]). Это не дает возможность выразить константу γ в виде цепной дроби, аналогичной

In 2. Однако (см. разд. 4) γ выражается в виде цепных дробей, коэффициенты которых сами являются голономными последовательностями различных порядков.

Скорость сходимости цепных дробей при этом не является приоритетом нашего исследования. Дело в том, что для цепных дробей, коэффициенты которых подчиняются известным закономерностям, существуют свои способы установления их сходимости, а также способы ее ускорения, которые (в принципе) могут дать иррациональность их предела. Например, цепная дробь Апери была получена из цепной дроби Эйлера для $\zeta(3)$ в результате серии преобразований Бауера–Муира (см. [7]).

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА

В этом разделе мы используем систему базисных функций, состоящую из смещенных полиномов Чебышева, т.е.

$$p_n(x) = T(n, 2x - 1), \quad T(n, x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

В [4] мы использовали $p_0(x) = 1/2$, но здесь мы выбрали $p_0(x) = 1$, так что единичный вектор в пространстве коэффициентов разложений, т.е. *коэффициентов Фурье* \mathcal{A}_N , соответствующий функции $e(x) = 1$, имеет вид $e = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle^t$ независимо от типа ортогональных полиномов.

Если рассматривать x как параметр, то система базисных функций (3) удовлетворяет линейной форме второго порядка:

$$\{u(n+2) = (4x-2)u(n+1) - u(n), u(0) = 1, u(1) = 2x-1\}, \quad u(n) = p_n(x).$$

Матрицы операторов X и D для системы базисных функций (3) слегка отличаются от этих матриц, введенных в [4]. Для $N = 6$ они имеют вид

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура этих матриц совершенно очевидна для любых N и не требует формализации. Матрица X – это (как и в общем случае) транспонированная матрица Якоби, ассоциированная с системой полиномов (3), а структура матрицы D следует из свойств полиномов Чебышева (см. [1]).

Матрицы преобразований Фурье, F и F^{-1} , для системы полиномов (3) также слегка отличаются от матриц этих операторов в [4]. Но здесь мы их не используем.

Пример для $\ln x$, данный во введении, позволяет сразу выписать разложение этой функции по смещенным полиномам Чебышева на интервале $(0, 1]$:

$$\ln x = -2 \ln 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} p_n(x). \quad (4)$$

Поскольку $p_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, то из (4) следует известный ряд для $\ln 2$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (5)$$

Если подставить в (4) $x = 1/2$, то, как нетрудно проверить, получится тот же ряд (5), так как $p_{2n}(1/2) = (-1)^n$ и $p_{2n+1}(1/2) = 0$.

Последовательность величин под знаком суммы в (5) является голономной порядка 1. Это значит, что последовательность частичных сумм $\{s(n)\}$ ряда (5) является голономной порядка 2. Линейная форма для нее имеет вид

$$\{(n+2)s(n+2) = s(n+1) + (n+1)s(n), s(1) = 1, s(2) = 1/2\}.$$

И хотя это разностное уравнение легко решается:

$$s(n) = \ln 2 + \frac{1}{2} (-1)^n \left(\Psi \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) - \Psi \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right),$$

в общем случае явные решения таких разностных уравнений известны редко.

Тем не менее сходящиеся голономные последовательности второго порядка всегда могут быть представлены сходящейся цепной дробью Эйлера с полиномиальными коэффициентами, которые вычисляются по формулам Д. Бернулли (см., например, [8]).

Однако здесь мы дадим (как нам представляется) более простой алгоритм вычисления коэффициентов цепной дроби, эквивалентной дроби Эйлера, который обобщается и на голономные последовательности высших порядков.

Пусть величина v является суммой сходящегося ряда

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} d(n), \quad 0 \neq d(n) \in \mathbb{Q}, \quad (6)$$

и пусть

$$\frac{d(n+1)}{d(n)} = \frac{r(n+1)}{r(n)},$$

где $\{r(n)\}$ – это другой набор рациональных (или целых) величин, который может быть более удобен, чем $\{d(n)\}$. Но всегда можно брать $r(n) = d(n)$, так как окончательный результат (цепная дробь) получается после применения преобразования эквивалентности.

Обозначим $d(n) = c(n) - c(n - 1)$, где $\{c(n)\}$ – это последовательность частичных сумм ряда (6). Тогда последовательность $\{c(n)\}$ имеет начальные значения $c(0) = 0$, $c(1) = d(1)$ и удовлетворяет следующей линейной форме:

$$c(n + 1) = \left(1 + \frac{r(n + 1)}{r(n)}\right) c(n) - \frac{r(n + 1)}{r(n)} c(n - 1). \quad (7)$$

Обозначим $q(n) = c(n + 1)$ в (7), тогда $q(n) \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$. Проведем те же выкладки для ряда

$$d(1) - v = d(1) - \sum_{n=1}^{\infty} d(n),$$

получим ту же линейную форму (7) для частичных сумм $\tilde{c}(n)$ этого ряда, но с другими начальными значениями, т.е. $\tilde{c}(0) = d(1)$, $\tilde{c}(1) = 0$. Обозначим теперь $p(n) = \tilde{c}(n + 1)$ в (7). Тогда получаем две стандартные рекурсии для числителей, $p(n)$, и знаменателей, $q(n)$, цепной дроби, которая по определению сходится к величине $(d(1) - v)/v$, т.е.

$$\frac{d(1) - v}{v} = \mathbf{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{b(n)},$$

где

$$a(n) = -\frac{r(n + 1)}{r(n)}, \quad b(n) = 1 - a(n).$$

Отличие этого определения подходящих дробей от классического в том, что там в начальных данных берется $p(-1) = 1$, $q(0) = 1$. Но мы вычисляем $p(n)/q(n)$, поэтому это одно и то же. Например, для ряда (5) получим (после преобразования эквивалентности):

$$\frac{1 - \ln 2}{\ln 2} = \mathbf{K}_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1} = \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \dots}}}}.$$

Если подставить $x = 1/4$ в ряд (4), то получим (после некоторых преобразований) очень медленно сходящийся ряд:

$$\ln 2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \arctan(\frac{\sqrt{7}}{3}))}{n}. \quad (8)$$

Заметим, что Maple не может вычислить сумму этого ряда ни символьно, ни численно.

Справедливость формулы (8) можно установить простым приемом. Нужно прибавить к ней такой же ряд, умноженный на мнимую единицу i , и где вместо \cos стоит \sin . Тогда получится степенной ряд функции $-\ln(1-x)$ в точке $x = 3/4 + i\sqrt{7}/4$, т.е. на границе ее круга сходимости. Получим

$$\ln 2 + 2i \arctan(\sqrt{7}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + i\sqrt{7})^n}{4^n n}. \quad (9)$$

Сходимость этого ряда, как и ряда (8), крайне медленная и весьма напоминает сходимость ряда для константы γ , который мы нашли в [2] (и см. разд. 4).

Последовательность частичных сумм $\{u(n)\}$ ряда (8) является рациональной и голономной порядка 3. Она имеет вид

$$\{(2n + 6)u(n + 3) = (5n + 12)u(n + 2) - (5n + 8)u(n + 1) + (2n + 2)u(n)\}$$

с начальными значениями $u(0) = 0$, $u(1) = 3/2$, $u(2) = 13/8$ и дает пример неприводимой голономной последовательности (т.е. линейной формы) порядка 3 для $\ln 2$, в то время как мы уже знаем, что для этой константы существуют линейные формы порядка 2.

Неприводимость этой последовательности, впрочем, является экспериментальным фактом. Имея достаточное количество членов рациональной последовательности, можно проверить, что (по крайней мере) этот набор не удовлетворяет линейной форме меньшего порядка с полиномиальными коэффициентами не выше данной степени.

Иными словами, (насколько нам известно) пока что не существует алгоритма, позволяющего установить неприводимость данной голономной последовательности, сходящейся к некоторой константе (см. [10]).

Этот пример также интересен тем, что последовательность частичных сумм $\{v(n)\}$ ряда (9) является голономной порядка 2. Она имеет вид

$$\{4(n + 2)v(n + 2) = ((11 + i\sqrt{7}) + (7 + i\sqrt{7})n)v(n + 1) - (n + 1)(3 + i\sqrt{7})v(n)\}$$

с начальными значениями $v(0) = 0$, $v(1) = 3/2 + i\sqrt{7}/2$.

Таким образом, имеется пример, когда порядок вещественной голономной последовательности можно уменьшить, если взять ее линейную комбинацию с такой же, но чисто мнимой голономной последовательностью с другими начальными данными.

Приведенные голономные последовательности, сходящиеся к $\ln 2$, являются частью семейства таких последовательностей, которое получается из разложения функций $y_m(x) = x^m \ln x$, $m \in \mathbb{N}_0$ по полиномам $p_n(x)$.

Это семейство функций является единственным (найденным нами) примером, когда спектральный метод дает точные рациональные коэффициенты разложений по смещенным полиномам Чебышева, начиная с некоторого номера.

Функция $y_m(x)$ является решением краевой задачи:

$$x y'_m(x) - m y_m(x) = x^m, \quad y_m(1) = 0. \quad (10)$$

При этом правая часть (10), x^m , является решением такой же, но однородной краевой задачи с краевым условием $y(1) = 1$.

Согласно алгоритму решения таких задач спектральным методом (см. [2, 4]) для размерности аппроксимации N возьмем матрицу левой части (10), $A = X D - m E$, где E – это единичная матрица. Затем заменим последнюю строку матрицы A на строку

$$\langle p_0(1), \dots, p_{N-1}(1) \rangle = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle.$$

Получаем матрицу \tilde{A} , аппроксимирующую дифференциальный оператор в (10) с учетом краевого условия.

Затем берем вектор $r = 0$ правой части и заменяем его последний элемент на единицу, т.е. $r_N = 1$, для аппроксимации правой части краевой задачи, \tilde{r} . Получаем коэффициенты аппроксимации функции x^m :

$$s = \tilde{A}^{-1} \tilde{r}.$$

Элементы вектора s являются рациональными функциями параметра m . Можно проверить, что для $m \leq N - 1$ разложение

$$\sum_{k=1}^N s_k p_{k-1}(x)$$

в точности равно x^m , а для других m (необязательно целых) это разложение дает чебышевскую аппроксимацию этой функции.

Далее решаем неоднородную задачу. Для этого последний элемент вектора s заменяем на краевое условие, $s_N = 0$, и применяем тот же оператор. Получаем

$$y = \tilde{A}^{-1} \tilde{s},$$

где вектор y , элементы которого являются рациональными функциями параметра m , дает разложение функции $y_m(x)$:

$$x^m \ln x \approx \sum_{k=1}^N y_k p_{k-1}(x), \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (11)$$

Можно проверить, что для $m = 0$ вектор y соответствует последовательности (2), кроме $y_1 \approx a_0$, так как a_0 иррационально, и кроме y_N , что связано с методом вычисления. Все остальные коэффициенты разложения (4) находятся точно в рациональной арифметике.

Для $m \in \mathbb{N}$ элементы вектора y_k , $k = 1, \dots, N$ в (11) находятся точно для $m + 1 < k \leq N - 1$. То есть коэффициенты разложения функции $y_m(x)$, $a_k = y_{k+1}$, являются иррациональными числами (зависящими от $\ln 2$) до номера $k = m$ включительно, и получаются как рациональные приближения (зависящие от N). Далее же коэффициенты разложения являются рациональными числами и находятся точно спектральным методом до номера $N - 1$. Напомним (см. разд. 1), что это пока что экспериментальный факт.

Вероятно, утверждение выше можно доказать по индукции, но важность его не столь велика, чтобы на этом останавливаться.

Например, для функции $x \ln x$ коэффициенты Фурье ее разложения по полиномам $p_n(x)$ имеют вид

$$a_0 = 1 - \ln 2, \quad a_1 = \frac{3}{4} - \ln 2, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n(n^2 - 1)}, \quad 2 \leq n,$$

а для функции $x^2 \ln x$ коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_0 = \frac{7}{8} - \frac{3}{2} \ln 2, \quad a_1 = \frac{2}{3} - \ln 2, \quad a_2 = \frac{25}{96} - \frac{1}{4} \ln 2, \quad a_n = \frac{3(-1)^{n+1}}{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)}, \quad 3 \leq n.$$

Иррациональные коэффициенты, разумеется, мы вычисляли с помощью квадратур.

После некоторого исследования все полученные результаты представляет формула:

$$x^m \ln x = Q(m, x) - x^m \ln 4 - 2(-1)^m 4^{-m} (2m)! \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n p_n(x) (n - m - 1)!}{(n + m)!}, \quad (12)$$

где $Q(m, x)$ – это полином степени m с рациональными коэффициентами, который (вместе с $-x^m \ln 4$) является суммой первых $m + 1$ членов разложения функции $y_m(x)$ с иррациональными коэффициентами. Имеем:

$$Q(0, x) = 0, \quad Q(1, x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}, \quad Q(2, x) = \frac{25}{12}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{32}, \quad \dots$$

Пока что неизвестно, есть ли у последовательности полиномов $Q(m, x)$ какая-либо закономерность. Однако последовательность $A(n) = Q(n, 1)$ является голономной порядка 2:

$$A(n) = \frac{(60n^3 - 112n^2 + 51n - 3)A(n-1) - (n-1)(6n-1)(2n-3)A(n-2)}{4n(2n-1)(6n-7)},$$

с начальными значениями $A(1) = 5/4$, $A(2) = 131/96$. Имеется также и точное решение этого разностного уравнения:

$$A(n) = 2 \ln 2 - 2 \frac{4^{-n} F([1, 1], [2n + 2], -1)}{2n + 1}.$$

Ряд (12) для достаточно больших m сходится и вне отрезка $[0, 1]$, где полиномы $p_n(x)$ ортогональны, например, для $x = 2$. Поэтому для константы $\ln 2$ имеется набор все более быстро сходящихся к ней голономных последовательностей порядка 3.

Ряд (12) суммируется в явном виде так же, как и ряд (8) с использованием тригонометрического представления полиномов Чебышева. Однако полученная формула весьма громоздка, и мы ее опускаем.

Напомним, что все коэффициенты в сумме в формуле (12) вычисляются точно в рациональной арифметике данным спектральным методом (при $n < N$).

Для нас здесь существенно то, что найденные закономерности в коэффициентах разложения функций $y_m(x) = x^m \ln x$ по полиномам $p_n(x)$ наблюдаются также в разложениях этих функций по другим системам ортогональных полиномов (см. разд. 4).

При разложении функций $y_m(x)$ по смещенным полиномам Лежандра (см. [2]) все коэффициенты разложений являются рациональными числами и все они находятся точно описанным выше методом, причем также и в символьном виде. Например,

$$a_0 = \frac{-1}{(m+1)^2}, a_1 = \frac{-3(m^2-2)}{(m+1)^2(m+2)^2}, a_2 = \frac{-5(m^4-2m^3-17m^2-12m+6)}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}, \dots$$

Однако при подстановке в эту последовательность конкретных значений $m = 0, 1, \dots$ получаются голономные последовательности рациональных чисел начиная с номера $m + 1$. То есть в точном соответствии с тем, как ведет себя разложение (12) и его начальный отрезок.

Эта же закономерность наблюдается в разложении функций $y_m(x)$ по общим полиномам Лагерра (разд. 4).

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

В этом разделе мы приведем матрицы X и D , необходимые (и достаточные, см. [4]) для построения спектрального метода, реализующего разложение голономных функций в ряды по общим полиномам Лагерра.

Напомним, что общие полиномы Лагерра, $L(n, a, x)$, называемые также полиномами Сонина, были впервые введены Чебышевым (см. [11]). Они ортогональны на интервале $[0, \infty)$ с весом $w(x) = x^a \exp(-x)$, $a > -1$. При

этом дискретные веса, w_n , определяют нормировку полиномов $L(n, a, x)$:

$$1/w_n = \int_0^\infty x^a \exp(-x) L^2(n, a, x) dx = \Gamma(n+1+a)/\Gamma(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Если обозначить $u(n) = L(n, a, x)$, то $u(0) = 1$, $u(1) = a+1-x$, а голономная последовательность $\{u(n)\}$ порядка 2 дается линейной формой

$$\{(n+2)u(n+2) = (a+3-x+2n)u(n+1) - (a+1+n)u(n)\}. \quad (13)$$

Если для функции $y(x)$ определены ее коэффициенты Фурье–Лагерра,

$$a_n = \int_0^\infty x^a \exp(-x) y(x) L(n, a, x) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (14)$$

то имеем формальное разложение функции $y(x)$ на интервале $[0, \infty)$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n L(n, a, x), \quad (15)$$

которое (вообще говоря) сходится к этой функции в среднем в норме пространства $L_2[0, \infty)$ с весом $w(x)$.

Сходимость этих рядов в конкретной точке требует отдельного исследования, но в ряде интересных случаев она имеет место.

Если функция $y(x)$ голономна, то, как и для других ортогональных полиномов, ее коэффициенты Фурье–Лагерра можно эффективно вычислять (приблизительно) спектральным методом. Для этого достаточно предъявить всего две матрицы: оператора X умножения на x , и D – дифференцирования по x , действующие в пространстве коэффициентов Фурье(–Лагерра) \mathcal{A}_N , где N – это размерность аппроксимации.

Матрицы операторов X и D для системы базисных функций $\{L(n, a, x)\}$ устроены весьма просто и не требуют формализации. Для $N = 5$ они имеют вид

$$X = \begin{bmatrix} a+1 & -a-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a+3 & -a-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & a+5 & -a-3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & a+7 & -a-4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & a+9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Хотя вывод этих формул довольно громоздок, они легко проверяемы.

Зная матрицу $y(X)$, мы сразу имеем рациональные приближения коэффициентов разложения (15), $s = y(X)e$, $s_{n+1} = a_n w_n$. Точно так же, как это делается в общем случае (см. [4]).

Например, для функции $y(x) = 1/(1+x)$ матрица $y(X)$ вычисляется формальной подстановкой матрицы X вместо переменной x (см. [12]). Имеем

$$s = (E + X)^{-1} e, \quad s_1 \approx a_0 w_0 = w_0 \int_0^\infty \frac{x^a \exp(-x)}{1+x} dx = \exp(1) \operatorname{Ei}(a+1, 1),$$

где $\operatorname{Ei}()$ – это интегральная экспонента. Для $a = 0$ и $N = 10$ получаем

$$s_1 = \frac{139931620}{234662231}, \quad s_1 - \exp(1) \operatorname{Ei}(1, 1) \approx 3.6573 \cdot 10^{-5},$$

что зеркально воспроизводит аналогичную выкладку для квадратур Гаусса любых рациональных функций (см. [2]).

Отметим одно свойство нашего спектрального метода, которое (насколько нам известно) ранее не отмечалось в литературе.

Последовательность полиномов (13) определена формально для любых $a, x \in \mathbb{C}$. То есть ортогональность этих полиномов не является необходимой для того, чтобы они могли служить системой базисных функций, поскольку матрицы X и D также определяются из формальных соображений и не используют свойство ортогональности.

Заметим, что в CAS Maple полиномы $L(n, a, x)$ вообще не определены для $a \leq -1$, хотя в справочнике [13] можно найти формулы для произвольных a . Тем не менее разложения функций по таким полиномам имеют смысл и могут хорошо приближать функцию в некоторых специальных случаях. Это видно из разложения (15), где смысл имеют не коэффициенты a_n , а коэффициенты разложения $a_n w_n$. Например, для $N = 10$ и $a = -10$ полученное выше разложение функции $y(x) = 1/(1+x)$ совпадает с отрезком ее ряда Тейлора в нуле до члена x^9 включительно.

Далее, впрочем, мы используем (в основном) традиционные полиномы Лагерра.

Напомним, что нас интересуют те (редкие) случаи, когда коэффициенты разложения (15) голономной функции рациональны (хотя бы начиная с некоторого номера) и вычисляются точно спектральным методом. Для полиномов Лежандра и Чебышева нам удалось найти лишь один такой пример, описанный в разд. 2. Для полиномов Лагерра таких случаев больше.

Рассмотрим функцию $y(x) = \exp(-x)$, для которой существует разложение по полиномам Лагерра, сходящееся (по крайней мере) на интервале $[0, 1]$:

$$\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(n, a, x)}{2^{n+1+a}}, \quad a > -1, \quad x \in [0, 1]. \quad (16)$$

Однако можно проверить, что это разложение также имеет смысл для полиномов (13) для $a \leq -1$ и, возможно, при произвольных $a \in \mathbb{C}$ для некоторых

x . При этом коэффициенты Фурье–Лагерра (14), очевидно, не определены. Например, после некоторого исследования получаем:

$$u(n)|_{a=-1, x=1} = \frac{L(n, 0, 1) - L(n, 1, 1)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $n = 0$ это равенство получается в пределе $n \rightarrow 0$. Последовательность $\{u(n)|_{a=-1, x=1}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ имеет производящую функцию $\exp(x/(x-1))$.

Последняя формула, впрочем, является весьма частным случаем тождества для полиномов Лагерра:

$$L(n, a, x) = \frac{(a+1+x)L(n, a+1, x) - xL(n, a+2, x)}{a+1+n}, \quad (17)$$

которое можно рассматривать как формальное тождество для голономных последовательностей (13).

Разложение (16) (или его аппроксимация) получается спектральным методом стандартным образом.

Для размерности аппроксимации N берем матрицу $A = D + E$, соответствующую голоному ОДУ $y'(x) + y(x) = 0$, и заменяем ее последнюю строку на строку $\langle u(0), u(1), \dots, u(N-1) \rangle|_{x=0}$. Параметр a здесь произвольный. Затем берем вектор правой части $r = 0$ и заменяем его последний элемент на начальное значение функции $\exp(-x)$, т.е. на единицу. Тогда вектор $s = A^{-1}r$ дает (вообще говоря, приближенные) значения коэффициентов разложения (16).

Однако можно проверить, что для $a = 0, -1, -2, \dots$ все рациональные коэффициенты разложения (16), s_{n+1} , $n = 0, 1, \dots$, вычисляются точно для $N > |a|$, $n < N$.

Этот пример интересен также тем, что для $a = 1, 2, \dots$ все коэффициенты разложения (16) рациональны, но спектральный метод дает лишь их (достаточно хорошие) приближения.

Приведем еще один пример, который (вместе с примером из разд. 4) исчерпывает найденные нами примеры точного разложения голономных функций этим спектральным методом. Рассмотрим функцию

$$y(x) = x^{-a} \exp(x) \Gamma(a, x) = \exp(x) \operatorname{Ei}(1-a, x), \quad \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt,$$

где $\Gamma(a, x)$ – это неполная Гамма-функция и параметр a тот же, что и в полиномах Лагерра.

Функция $y(x)$ удовлетворяет простому ОДУ

$$x y'(x) - (x-a) y(x) + 1 = 0 \quad (18)$$

и раскладывается в хорошо известный ряд (см. [13, (8.976(2))]):

$$x^{-a} \exp(x) \Gamma(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(n, a, x)}{n+1}, \quad a > -1, \quad x > 0. \quad (19)$$

Условие на a в [13], очевидно, наложено для того, чтобы существовали коэффициенты Фурье (14). Однако формула (19) справедлива и для $a \leq -1$, при $x > 0$, если под полиномами Лагерра понимать голономные последовательности полиномов (13). Это можно проверить численно, например, для $x \in [0, 1]$. Причем сходимость к функции $\exp(x) \text{Ei}(1-a, x)$ тем быстрее, чем меньше $a < -1$.

Доказать сходимость для конкретных $x > 0$ (например, для $x = 1$) можно так же, как это делалось в (Предл. 4 в [2], или Предл. 5 в [3]), пользуясь голономностью последовательности (13).

Чтобы найти разложение функции $y(x)$, удовлетворяющей ОДУ (18), спектральным методом, нужно составить матрицу

$$A = X D - X + a E$$

и вектор правой части, $r = -e$. При этом никакой модификации матрицы A и вектора r для учета краевых условий делать не нужно, так как задача (18) сингулярна (см. [4]).

Матрица оператора A не зависит от параметра a . Для $N = 5$ она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Далее находим вектор $s = A^{-1} r$, который содержит коэффициенты разложения (19), т.е. $s_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots, N$.

4. ГОЛОНОМНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ КОНСТАНТЫ γ

Прежде чем продолжить использование нашего спектрального метода, приведем (пользуясь случаем) линейную форму второго порядка, которая дает в пределе константу Эйлера γ . Пусть $s(0, x) = 0$, $s(1, x) = x$. Рассмотрим голономную последовательность полиномов $s(n, x)$, $n = 0, 1, \dots$,

$$\{(n+1)^2 s(n+1, x) - (2n^2 + 2n + 1 - nx) s(n, x) + n(n-x) s(n-1, x) = 0\}.$$

Тогда

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s(n, x) dx. \quad (20)$$

Разумеется, это не та голономность, которая нас интересует, так как полиномы $s(n, x)$ нельзя проинтегрировать, сохранив голономность. Напомним, что голономных последовательностей порядка 2, сходящихся к γ , возможно, не существует. Но это пока открытая проблема.

Формула (20) следует из формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n, x) = x F([1, 1, 1 - x], [2, 2], 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n, \quad x \in [0, 1],$$

которая выводится из формулы (21) в [8] (см. также [9]) или из формулы [13, (0.131)]. Таким образом, последовательность $\{s(n, x)\}$ также содержит (неявно) все значения $\zeta(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если полиномы $s(n, x)$ раскладывать в ряды при $x = 1$, то предыдущая формула примет вид

$$x F([1, 1, 1 - x], [2, 2], 1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \zeta(n+1)) (1 - x)^n, \quad x \in [0, 1].$$

Заменяя моном $(1 - x)^n$ на его биномиальное разложение и собирая подобные члены, получаем любопытное тождество:

$$\zeta(n+1) = \sum_{m=n}^{\infty} (\zeta(m+1) - 1) C(m, n), \quad n \in \mathbb{N},$$

которое напоминает биномиальное преобразование двух последовательностей. Поэтому можно сразу выписать обратное преобразование и получить тождество

$$\zeta(n+1) - 1 = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^{n+m} \zeta(m+1) C(m, n), \quad n \in \mathbb{N},$$

которое может быть проверено численно в CAS Maple для небольших n . Но сходимость здесь есть только по Абелю либо в обобщенном смысле (см. [9]).

Теперь мы вернемся к функциям $y_m(x) = x^m \ln x$, $m \in \mathbb{N}_0$, рассмотренным в разд. 2, и разложим их по полиномам $L(n, a, x)$, $a > -1$, $0 < x$.

Разложения функций $y_m(x)$ по ортогональным полиномам обладают одним общим свойством, которое пока что не имеет объяснения. Возьмем, например, $a = 2$, $m = 3$, $N = 10$ и вычислим

$$a_n w_n = w_n \int_0^{\infty} x^a \exp(-x) y_m(x) L(n, a, x) dx, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

т.е. первые N коэффициентов разложения функции $y_3(x) = x^3 \ln x$ по полиномам Лагерра. Получим

$$\{a_n w_n\} \in \left[137 - 60\gamma, 60\gamma - 157, \frac{187}{2} - 30\gamma, -\frac{247}{10} + 6\gamma, 1, \frac{1}{7}, \frac{1}{28}, \frac{1}{84}, \frac{1}{210}, \frac{1}{462} \right]$$

в точном соответствии с разложением этой функции по полиномам Чебышева в разд. 2: т.е. первые $m + 1$ коэффициентов разложения функции $y_m(x)$ являются иррациональными числами, зависящими от γ , а далее они все рациональны.

Отличие от полиномов Чебышева состоит в том, что там иррациональности зависели от $\ln 2$. Для полиномов Лежандра (см. [2]) первые $m + 1$ коэффициентов разложения также являются рациональными числами (и находятся точно спектральным методом), но не подчиняются закономерностям, которые существуют для последующих коэффициентов разложения.

Одно из преимуществ нашего спектрального метода состоит в том, что разложения функций проводятся по одному и тому же алгоритму. Надо лишь заменить матрицы X и D , а также векторы начальных и краевых значений. Поэтому в формулах разд. 2 между (10) и (11) заменяем эти матрицы на те, что мы привели в разд. 3, и получаем для $N = 10$

$$\{a_n w_n\} \in \left[\frac{1419237671}{13970880}, -\frac{1698655271}{13970880}, \frac{2117781671}{27941760}, -\frac{2956034471}{139708800}, 1, \frac{1}{7}, \frac{1}{28}, \frac{1}{84}, \frac{1}{210}, \frac{1}{462} \right],$$

т.е. получаем рациональные приближения для иррациональных коэффициентов, а далее все коэффициенты находятся точно в рациональной арифметике, включая последний, a_{N-1} (что отличает этот случай от разложений по полиномам Чебышева и Лежандра).

Сравнение двух предыдущих таблиц дает одно и то же рациональное приближение для γ :

$$\frac{494772889}{838252800} - \gamma \approx 0.0130273.$$

Из разложения функции $y_m(x)$ для $a = 2$, $m = 3$ и $x = 1$ получаем (пока что эмпирически):

$$\gamma = -\frac{53}{60} - 720 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\Gamma(n-3)}{\Gamma(n+3)} L(n, 2, 1), \quad (21)$$

откуда, подставив $\infty \rightarrow N - 1 = 9$, получаем приближение, данное в предыдущей формуле.

Хотя выявленные закономерности в коэффициентах разложения (21) получены эмпирически, справедливость этого разложения (как и общих разложений, данных ниже) может быть доказана точно так же, как доказывалась

справедливость формул (29) в Предл. 4 в [2]. (В препринте [3] этой статьи, соответственно, (28), Предл. 5).

Опуская (довольно громоздкие) выкладки, получаем разложение функции $y_m(x)$ по общим полиномам Лагерра, которое аналогично такому разложению (12) по полиномам Чебышева:

$$x^m \ln x = U(m, x) - \gamma V(m, x) - (-1)^m m! (m+a)! \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(n-m-1)!}{(n+a)!} L(n, a, x), \quad (22)$$

где факториал определен как $x! = \Gamma(x+1)$, а $U(m, x)$ и $V(m, x)$ – это полиномы степени m (зависящие от a), которые вычисляются по формулам:

$$V(m, x) = \sum_{n=1}^{m+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (k+m+a)!}{(n-k-1)! (k+a)! k!} \right) (n-1)! L(n-1, a, x) = x^m,$$

то есть для $V(m, x)$ получаем довольно необычное тождество. Для $U(m, x)$ получаем

$$U(m, x) = \sum_{n=1}^{m+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k H(k+m+a)(k+m+a)!}{(n-k-1)! (k+a)! k!} \right) (n-1)! L(n-1, a, x),$$

где $\psi(x+1) + \gamma = H(x)$ – это гармоническое число (определенное не только для натуральных x), а $\psi(x) = (\ln \Gamma(x))'$ – это дигамма функция.

Например, подставив в формулу (22) значения $m = 0$, $a = 0$ и $x = 1$, получим первую из формул (29) в [2]:

$$\gamma = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n, 0, 1)}{n}, \quad (23)$$

а подставив в (22) значения $m = 3$, $a = 2$ и $x = 1$, получим формулу (21).

Полиномы $U(m, x)$ также образуют голономную последовательность, которая, однако, нам не нужна, так как нас интересуют, в основном, значения этих полиномов при $x = 1$. Обозначим $U(m, 1) = u(m)$, тогда

$$\{m(m+a)u(m) + (2m-1+a)(ma-a-2m+m^2)u(m-1) + (a^2-a+8ma-3ma^2-2m+m^2a^2+8m^2-9m^2a-6m^3+2m^3a+m^4)u(m-2) - (m-2)(m+a-2)m(m+a)u(m-3) = 0, m \geq 3\},$$

где

$$\begin{aligned} u(0) &= H(a), \quad u(1) = -a(2+a)H(2+a) + (1+a)^2 H(1+a), \\ u(2) &= \frac{1}{2}(1+a)(2+a)(a^2+3a+1)H(2+a) - (3+a)(2+a) \\ &\quad (a^2+2a-1)H(3+a) + \frac{1}{2}(4+a)(3+a)(a^2+a-1)H(4+a). \end{aligned}$$

Сравнение формул, полученных по явной формуле $U(m, 1)$ и по рекуррентной последовательности для $u(m)$, $m \geq 3$, дает ряд весьма неочевидных и очень громоздких тождеств для гармонических чисел $H(a + n)$ (или для ψ -функции для $a \notin \mathbb{N}_0$). Приведем лишь одно для $m = 3$ и $a = 3/2$:

$$75933 H\left(\frac{13}{2}\right) - 1337 H\left(\frac{9}{2}\right) - 60181 H\left(\frac{11}{2}\right) - 26455 H\left(\frac{15}{2}\right) - 320 H\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{121240}{9} H\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{10000}{9} H\left(\frac{5}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, имеем семейство разложений константы Эйлера в ряды рациональных чисел:

$$\gamma = u(m) - (-1)^m m! (m + a)! \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(n - m - 1)!}{(n + a)!} L(n, a, 1). \quad (24)$$

При $m = a = 0$ получаем разложение (23), (медленная) сходимость которого установлена в [2]. Для $m, a \in \mathbb{N}_0$ эти ряды также, очевидно, сходятся, причем тем быстрее, чем больше параметр m . Правда, надо иметь в виду, что эта сходимость для больших m (или a) будет проявляться для все больших значений индекса n в (24) из-за большего множителя перед суммой.

Формула (24) дает семейство линейных форм 3-го порядка, которые в пределе дают константу γ . А именно: для фиксированных m и a обозначим

$$\begin{aligned} v(0) &= u(m), \\ v(1) &= v(0) - \frac{(-1)^m m!}{m + 1 + a} L(m + 1, a, 1), \\ v(2) &= v(1) - \frac{(-1)^m m!}{(m + 1 + a)(m + 2 + a)} L(m + 2, a, 1). \end{aligned}$$

Тогда для $n \geq 3$:

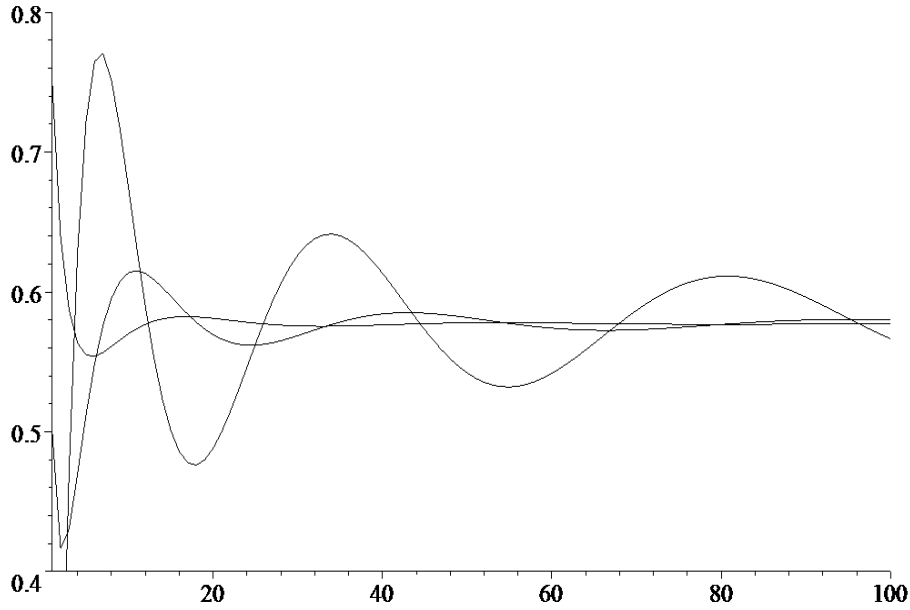
$$\begin{aligned} v(n) &= \frac{(ma - a + 2an + 4mn - 4n + 3n^2 + m^2 - 2m + 2)}{(n + m)(n + m + a)} v(n - 1) \\ &\quad - \frac{(n - 1)(3n + a + 2m - 4)}{(n + m)(n + m + a)} v(n - 2) + \frac{(n - 2)(n - 1)}{(n + m)(n + m + a)} v(n - 3). \end{aligned}$$

Расчет по этой формуле в CAS значительно быстрее, чем по исходной формуле (24). Если подставить в нее $m = a = 0$, то получим линейную форму для γ , приведенную в [2].

На фиг. 1 приведены графики последовательностей $v(n)$ для некоторых m и a , расположенные в порядке увеличения скорости их сходимости к константе γ .

Заметим, что формула (24) (или последовательность $v(n)$) дает константу γ для произвольных $a > -1$, но только эта последовательность будет включать другие иррациональности. Например, для $a = 2.5$ и $m = 3$ получаем

$$\gamma - v(200) \approx 4.37463 \cdot 10^{-9}.$$



Фиг. 1. Последовательности $v(n)$ для $a = m = 0$; $a = 1, m = 0$; и $a = 0, m = 1$.

Отметим, что поточечная сходимость в формуле (22) для $x = 1$ может быть установлена стандартным мажорированием с использованием известных оценок для значений полиномов Лагерра $L(n, a, 1)$. Для произвольных $x > 0$ такая сходимость, вообще говоря, не имеет места. Однако всегда имеется сходимость по Абелю. Например, последовательность полиномов Лагерра (13) имеет производящую функцию

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} L(n, a, x) z^n = \frac{\exp(-x z/(1-z))}{(1-z)^{a+1}},$$

поэтому всегда $F(x, 1) = 0$ для $x > 0$, если в качестве значения функции понимать предел $F(x, 1) = \lim_{z \nearrow 1} F(x, z)$.

В заключение этого раздела (и статьи) приведем обещанную «голономную» цепную дробь для (преобразования Мёбиуса) константы γ . Для этого воспользуемся простейшей из имеющихся формул – (23).

Обозначим $L(n, 0, x) = L(n, x)$, $\beta = 1 - 1/(4\gamma)$ и воспользуемся алгоритмом из раздела 2. Тогда, с учетом того, что $L(1, 1) = 0$, получаем разложение

$$\beta = \frac{2L(3, 1)}{3L(2, 1) + 2L(3, 1) - \frac{9L(2, 1)L(4, 1)}{4L(3, 1) + 3L(4, 1) - \frac{16L(3, 1)L(5, 1)}{5L(4, 1) + 4L(5, 1) - \frac{25L(4, 1)L(6, 1)}{6L(5, 1) + 5L(6, 1) - \dots}}},$$

где закономерности в частных числителях и знаменателях очевидны.

Для частных знаменателей, $b(n)$, имеем, $b(1) = -17/6$, $b(2) = -109/24$, а для $n \geq 3$:

$$(n+4)(4n^2+17n+19)b(n+2) = (8n^3+66n^2+175n+143)b(n+1) - (n+3)(4n^2+25n+40)b(n).$$

Для частных числителей, $a(n)$, имеем, $a(1) = -4/3$, $a(2) = -45/16$, $a(3) = -224/45$, $a(4) = -4625/1152$, $a(5) = -17/25$, а для $n \geq 6$:

$$\begin{aligned} n^2(n+2)(6363601n^2 - 24819693n + 21434382)a(n) = & -4(n+1)(n-1)(2323037n^4 - \\ & 24115429n^3 + 64350540n^2 - 44081587n - 10389721)a(n-1) + n(27876444n^5 - \\ & 260495690n^4 + 717327998n^3 - 575849753n^2 - 95323599n + 155084058)a(n-2) - \\ & 4(n-1)(6969111n^5 - 48003900n^4 + 81924028n^3 - 36816278n^2 - 17768442n + 10717191) \\ & a(n-3) + (n-2)(n-1)^2(9292148n^3 - 12325877n^2 - 1610125n + 2941974)a(n-4). \end{aligned}$$

Здесь значение $a(5)$ необходимо было задать потому, что $a(1)$ не подчиняется тем же закономерностям, что $a(n)$, $n \geq 2$.

Заметим также, что цепная дробь для β может быть записана с помощью преобразования эквивалентности так, что все ее элементы будут целыми числами, образующими голономные последовательности. Однако эти вычисления весьма громоздки, и мы их опускаем.

Список литературы

- [1] *Pashkovskii S.* Computational Application of Chebyshev Polynomials and Series (Nauka. Moscow. 1983) [in Russian].
- [2] *Варин В.П.* Аппроксимация дифференциальных операторов с учетом граничных условий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 63. № 8. С. 1251-1271. (2023).
- [3] *Варин В.П.* Аппроксимация дифференциальных операторов с учетом граничных условий // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 77.
- [4] *Варин В.П.* Spectral Methods for Solution of Differential and Functional Equations // Comp. Math. and Math. Phys., 2024, V. 64. № 5, pp. 888-904. (2024).
- [5] *Aptekarev A.I.* On linear forms containing the Euler constant // [arXiv:0902.1768v2] (2009). (<http://arxiv.org/abs/0902.1768v2>).
- [6] *Aptekarev A.I., Tulyakov D.N.* Four-Termed Recurrence Relations for γ -Forms // Sovrem. Probl. Mat., Issue 9, pp. 37-43. (2007).
- [7] *Belabas K., Cohen H.* Numerical Algorithms for Number Theory. Mathematical Surveys and Monographs, V. 254. Amer. Math. Soc. (2021).
- [8] *Варин В.П.* Преобразование последовательностей в доказательствах иррациональности некоторых фундаментальных констант // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 62. № 10. С. 1587-1614. (2022).

- [9] *Варин В.П.* Функциональное суммирование рядов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 63. № 1. С. 3-17. (2023).
- [10] *Huang H., Kauers M.* D-finite Numbers // International Journal of Number Theory. (2016). (<https://www.researchgate.net/publication/310595024>).
- [11] *Tchebichef P.I.* Sur le developpement des fonctions a une seule variable // Bulletin de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. V. 1. pp. 193-200. (1859).
- [12] *Gantmacher F.R.* Application of the Theory of Matrices. (Chelsea Press. New-York. 1960).
- [13] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. (7th ed. Academic Press, Elsevier, 2007).