[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](https://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](https://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](https://library.keldysh.ru/preprints) • [Препринт № 6 за 2024 г.](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-6)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.Б. Барчев, В.А. Судаков

Исследование методов модификации функций принадлежности нечетких множеств на основе эталонов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Барчев Н.Б., Судаков В.А. Исследование методов модификации функций принадлежности нечетких множеств на основе эталонов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 6. 19 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2024-6**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-6

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Б. Барчев, В.А. Судаков

Исследование методов модификации функций принадлежности нечетких множеств на основе эталонов

Москва — 2024

Барчев Н.Б., Судаков В.А.

Исследование методов модификации функций принадлежности нечетких множеств на основе эталонов

Функции принадлежности нечетких множеств достаточно широко используются для отражения экспертных предпочтений в ситуациях неопределенности. Процедуры модификации функций принадлежности предоставляют возможности получения новых функций на основе имеющихся без дополнительного привлечения экспертов. В работе исследуются существующие и предлагаются новые подходы к построению процедур модификации, способы их реализации и компенсации возникающих при этом затруднений.

Ключевые слова: нечеткое множество, функция принадлежности, эксперт, модификатор

Nikolay Borisovich Barchev, Vladimir Anatolievich Sudakov

Research on methods for modifying membership functions of fuzzy sets based on pattern

Fuzzy set membership functions are widely used to reflect expert preferences in situations of uncertainty. Procedures for modifying membership functions provide the opportunity to obtain new functions based on existing ones without the additional involvement of experts. The work examines existing and proposes new approaches to the construction of modification procedures, methods for their implementation and compensation for the difficulties arising in this case.

Key words: fuzzy set, membership function, expert, modifier

Оглавление

Введение

Аппарат теории нечетких множеств достаточно давно активно используется при принятии решений в условиях неопределенности. В подобного рода задачах адекватность формализации и наглядность визуализации различных понятий при помощи функций принадлежности играют весьма серьезную роль для лиц, участвующих в процессах формирования принимаемых решений. Вместе с тем немаловажное значение имеет простота процедур формализации и визуализации, непосредственно влияющая на качество работы как лиц, принимающих решения, так и экспертов, задействованных в соответствующих сценариях работы. Простота этих процедур дополнительно способствует снижению трудоемкости построения функций принадлежности, выполняемого экспертным путем.

По отмеченным причинам распространенной практикой формализации и визуализации нечетких экспертных суждений является использование функций принадлежности некоторого стандартизованного вида, среди которых в качестве наиболее часто применяемых следует отметить кусочно-линейные функции треугольной, трапецеидальной и S-образной формы [1 – 4, 17, 19, 20].

Унификация представления функций принадлежности позволяет стандартизировать и упростить процедуры их построения и обработки [1 – 6, 10], что способствует повышению качества обобщения, систематизации и тиражирования экспертного опыта. В частности, использование функций треугольного вида предполагает задание трех точек концентрации экспертной уверенности, которые эксперт, как правило, может обозначить с минимальными затратами времени и сил при помощи тройки различающихся значений $\{x_i;\ i = 1,3\}$ области определения функции принадлежности $\mu(x)$ [2, 3, 19]. При этом среднее значение x_2 такой тройки соответствует полной уверенности эксперта в принадлежности значения рассматриваемому нечеткому понятию ($\mu(x_2) = 1$), а крайние значения x_1 и x_3 являются границами областей, относительно которых у эксперта имеется полная уверенность в том, что значения, в них входящие, рассматриваемому понятию не принадлежат:

$$\forall x \le x_1 \colon \mu(x) = 0;\ \forall x \ge x_3 \colon \mu(x) = 0. \qquad (1)$$

Функциями треугольного вида, получающимися при соединении отрезками на координатной плоскости соответствующих точек, определяемых тройкой $\{x_i;\ i = 1,3\}$, практически приемлемо может быть описано достаточно большое число нечетких понятий.

Тем не менее особенности экспертного оценивания временами требуют отражения уверенности в отношении множества значений, с позиции эксперта наверняка принадлежащих тому или иному понятию. В подобных случаях области концентрации экспертной уверенности в отношении этих значений представляют собой множество точек, которое не может быть отражено при помощи треугольных функций принадлежности, имеющих единственную такую точку, без неприемлемой потери адекватности представления. Практически удовлетворительное отражение экспертных суждений в данной ситуации часто может быть достигнуто при помощи функций принадлежности, имеющих трапецеидальный либо S-образный вид (см. рис 1).

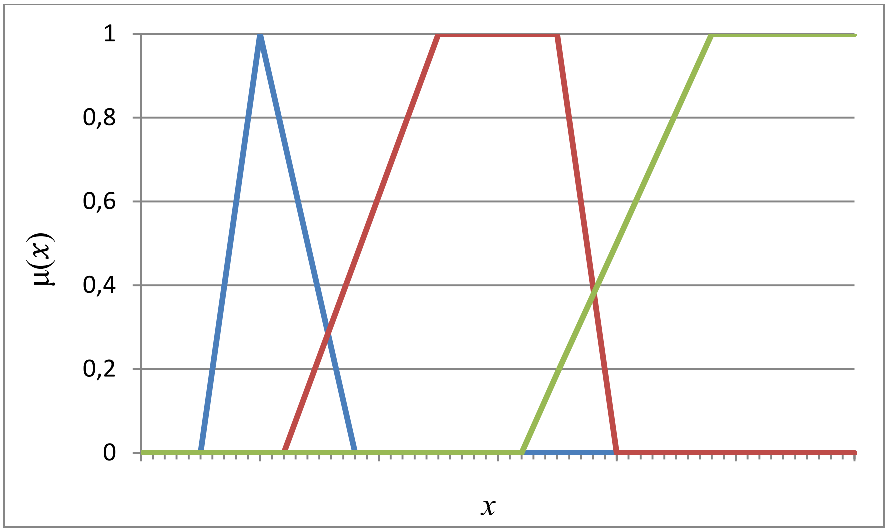

Рис. 1. Примеры функций принадлежности треугольного, трапецеидального и S-образного вида

Применение функций принадлежности трапецеидального вида подразумевает использование для их определения четверки значений $\{x_i;\ i = \overline{1,4}\}$. Множество точек концентрации экспертной уверенности в отношении значений, без сомнения принадлежащих, по мнению эксперта, некоторому нечеткому понятию, при этом имеет вид отрезка $[x_2;\ x_3]$:

$$\forall x \in [x_2;\ x_3]: \mu(x) = 1;\ \forall x \leq x_1: \mu(x) = 0;\ \forall x \geq x_4: \mu(x) = 0. \qquad (2)$$

Кусочно-линейные функции принадлежности S-образного вида могут рассматриваться как частный случай функций треугольного вида, получающийся при движении одной из крайних точек концентрации экспертной уверенности этих функций в $-\infty$ или $+\infty$ соответственно. Таким образом, для определения функций S-образного вида может использоваться пара различающихся значений $\{x_i;\ i = \overline{1,2}\}$. При этом, в зависимости от расположения области концентрации экспертной уверенности в отношении значений, наверняка принадлежащих рассматриваемому понятию, и соответствующей ориентации графика функции

$$\forall x \leq x_1: \mu(x) = 1;\ \forall x \geq x_2: \mu(\mathrm{x}) = 0 \qquad (3)$$

либо:

$$\forall x \leq x_1: \mu(x) = 0;\ \forall x \geq x_2: \mu(\mathrm{x}) = 1. \qquad (4)$$

Практика экспертного оценивания показывает, что формализация и визуализация нечетких понятий с использованием инструментария кусочно-линейных функций принадлежности треугольного, трапецеидального и S-образного вида является наглядной, простой и достаточно хорошо применимой к понятиям различной природы. Помимо сказанного, кусочно-линейный характер обсуждаемых функций делает возможным использование относительно несложных алгоритмов их обработки, дополнительно позволяющих отчетливо разделять обработку фрагментов функций, соответствующих различным вариантам экспертных суждений относительно тех или иных значений.

Авторами в течение длительного времени изучаются автоматизированные способы построения функций принадлежности. Промежуточные результаты этих исследований были опубликованы в [19, 20]. Предлагаемый материал является дальнейшим развитием соответствующего подхода.

Состояние вопроса

Попытки автоматизации построения функций принадлежности, формализующих те или иные нечеткие понятия, предпринимались уже в последние десятилетия двадцатого века [1–5, 18]. Актуальность данной тематики представляется достаточно ясной и связана с возможностью применения автоматизации для существенного сокращения числа проводимых экспертиз. В реальных прикладных задачах объем экспертиз часто оказывается неприемлемо велик, при этом их проведение влечет известные организационные сложности и сопутствующие затраты. Использование автоматизированных способов построения функций принадлежности позволяет компенсировать обозначенные сложности, а также снизить трудоемкость и стоимость экспертных процедур.

Сложившаяся практика применения аппарата теории нечетких множеств в прикладных задачах, как правило, подразумевает автоматизацию построения функций принадлежности путем применения к существующим (ранее полученным) функциям различных преобразований, называемых обычно логико-лингвистическими модификаторами [1–5, 7, 8, 11]. Использование модификаторов обеспечивает унификацию процесса построения функций принадлежности, относящихся к нечетким множествам, формализующим близкие лингвистические понятия. Такие понятия в большинстве случаев имеют одну и ту же область определения их функций принадлежности и лингвистически связаны между собой по смыслу при помощи некоторых содержательно стандартных лингвистических переходов типа «очень / не очень», «сильнее / слабее», «более / менее» и аналогичных им [2, 19, 20].

Дополнительный практический интерес представляет исследование возможностей универсального применения модификаторов для обработки понятий, относящихся к различным предметным областям [19]. Эвристической базой таких исследований является существенная универсальность смыслов упомянутых переходов, используемых при экспертных оценках, практическая устойчивость подобного рода экспертных суждений, а также их слабая зависимость от предметных областей, в которых выполняются соответствующие оценки. Вопрос границ приемлемости обозначенного применения логико-лингвистических модификаторов в настоящее время остается открытым.

Современные научные источники [9 – 16] предлагают различные подходы к модификации функций принадлежности. Так, например, одним из распространенных подходов является применение к существующим (исходным) функциям некоторых однократно определенных формальных математических преобразований. Методы, основанные на таком подходе, достаточно часто упоминаются в профильной литературе ([5, 6, 11–16]) в связи с очевидной простотой применения однажды определенного преобразования к значениям исходной функции принадлежности.

При данном подходе в качестве конкретных преобразований, формализующих содержательный переход типа «очень», часто рекомендуется применять операции возведения значений исходной функции принадлежности в различные целочисленные степени (операции концентрации или усиления [5, 6]). Переход типа «не очень» при этом предлагается формализовать путем извлечения корней соответствующих степеней из значений исходной функции (операции растяжения или ослабления [5, 6]).

Основным и фактически единственным достоинством преобразований данного типа является простота. Кроме того, многие преобразования подобного рода являются исключительно эвристическими и не имеют достаточно весомых обоснований. Сопоставление результатов применения таких преобразований с реальными экспертными оценками, к сожалению, часто обнаруживает их существенное расхождение. В частности, использование операций концентрации и растяжения (усиления и ослабления) очевидным образом приводит к сжатию либо растяжению в процессе модификации графиков исходных функций принадлежности при неизменности положения их максимумов. Содержательно это, скорее, соответствует изменению степени уверенности эксперта относительно того или иного понятия (по сути, изменению степени нечеткости описания), нежели изменениям, отражаемым в реальности при помощи переходов типа «очень / не очень».

Дополнительным побочным эффектом применения преобразований рассмотренного типа является изменение в общем случае вида получаемых функций по отношению к исходным. Сказанное, в том числе при использовании в качестве исходных кусочно-линейных функций, означает потерю свойств кусочной линейности результирующими функциями. Указанное обстоятельство весьма часто представляется нежелательным, а иногда вовсе неприемлемым, поскольку использование функций определенного вида предполагает возможность их единообразной обработки и смысловой интерпретации.

Более перспективным и содержательным, по нашему мнению, выглядит подход к автоматизации построения функций принадлежности с привлечением методов, использующих практику формализации конкретного лингвистического перехода при помощи пары ранее определенных (найденных или известных) и в этом смысле эталонных функций принадлежности, называемой также прототипом. При этом в соответствующей паре (прототипе) одна из функций является исходной, именуемой прообразом, а вторая – результирующей, именуемой образом [19, 20].

Пример определения лингвистического перехода типа «очень» при помощи пары эталонных функций принадлежности треугольного вида (прототипа), найденных экспертным путем (прообраз соответствует понятию «теплая вода», образ – понятию «очень теплая вода») показан на рисунке 2.

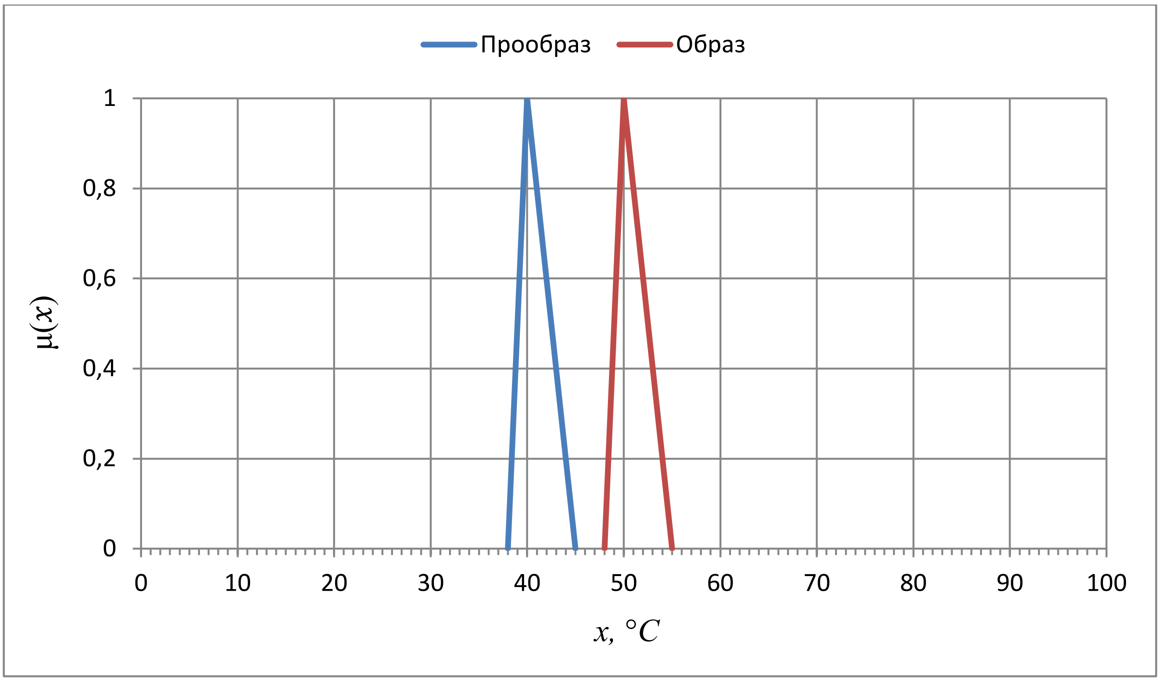

Рис. 2. Пример определения лингвистического перехода

Формализация лингвистического перехода на основе имеющегося прототипа в развитие данного подхода может выполняться также различными способами. Некоторые из них, в частности, предполагают получение в качестве результата единственного преобразования (модификатора), применяемого впоследствии к функциям принадлежности конкретного вида для получения результирующих функций, связанных с исходными аналогичными смысловыми переходами типа «очень / не очень» и им подобными.

При формализации данного типа рекомендации по подбору конкретного преобразования в конкретной ситуации также далеко не всегда опираются на достаточно весомую аргументацию авторов, что затрудняет содержательную интерпретацию получаемых результатов. Помимо этого, практика применения таких преобразований обнаруживает весьма высокую чувствительность результатов выполняемых модификаций к выбору исходных функций принадлежности и совпадение результатов с реальными экспертными оценками только в некоторых случаях [19, 20]. Примером модификаций, демонстрирующих обозначенное поведение, может служить рассмотренный в [2, 4] метод, использующий дробно-линейные преобразования на множестве автоморфных функций.

Ранее нами был описан и аргументирован [19] метод модификации функций принадлежности, в основу которого в качестве базовой положена идея сохранения задаваемой эталонными функциями (прототипом) при переходе конкретного типа от одного понятия к другому динамики изменения экспертных суждений относительно степени соответствия тех или иных значений области определения функции принадлежности некоторому понятию при их приближении к областям концентрации экспертной уверенности (участкам, на которых функция равна единице, либо нулю), а также при удалении от этих областей.

По нашему мнению, требование сохранения в процессе модификации соотношения динамики изменения исходной и преобразованной функций, определяемого используемым прототипом, является принципиальным моментом, поскольку именно указанное соотношение должно служить инвариантом изменения экспертного суждения при смысловом (лингвистическом) переходе конкретного типа от исходного понятия к модифицированному.

Исследования в данном направлении проводились нами с использованием кусочно-линейных функций принадлежности, достаточно активно применяемых для формализации мнений экспертов в силу несложности их построения и использования. Наибольшее внимание уделялось функциям треугольной формы как средству практически приемлемого описания множества нечетких понятий различной природы.

Метод

Трактовка модификации функции принадлежности прежде всего как перехода от одной динамики изменения экспертных суждений к другой приводит к необходимости раздельного выполнения модификаций для участков кусочной линейности рассматриваемых функций [19]. При этом используемый прототип (пара эталонных функций) определяет не единственное преобразование, а их совокупность, представляющую собой искомый модификатор. Дальнейшее использование найденного модификатора предполагает применение определяемых им преобразований также в совокупности к исходным функциям принадлежности, имеющим структуру, аналогичную структуре эталонных функций.

Для функций принадлежности треугольного вида, задаваемых в их областях определения тройками различающихся чисел, соответствующих абсциссам точек концентрации экспертной уверенности:

$$\{x_i \in X;\ i = 1,3\}: \mu(x_1) = \mu(x_3) = 0, \mu(x_2) = 1, \qquad (5)$$

принцип раздельного применения различных в общем случае трансформаций к участкам функций с различной динамикой изменения экспертных суждений предполагает нахождение пары линейных преобразований:

$$f_j(x) = a_j x + b_j;\ j = 1,2. \qquad (6)$$

Каждое из таких преобразований выполняет трансформацию одного из двух фрагментов исходной функции принадлежности (прообраза) треугольного вида в соответствующий фрагмент результирующей функции (образа) [19].

При этом линейные преобразования (6) находятся на основе имеющегося прототипа – пары эталонных функций принадлежности, одна из которых, $\mu_A(x)$, представляет собой исходную (прообраз), а другая, $\mu_B(x)$ – результирующую (образ), задаваемые соответствующими тройками чисел:

$$\{x_{A_i} \in X;\ i = 1,3\}: \mu_A(x_{A_1}) = \mu_A(x_{A_3}) = 0,\ \mu_A(x_{A_2}) = 1, \qquad (7)$$

$$\{x_{B_i} \in X;\ i = 1,3\}: \mu_B(x_{B_1}) = \mu_B(x_{B_3}) = 0,\ \mu_B(x_{B_2}) = 1. \qquad (8)$$

Вариант прототипа, определяющего пару линейных преобразований типа (6) (модификатор), для функций принадлежности треугольного вида показан на рисунке 3.

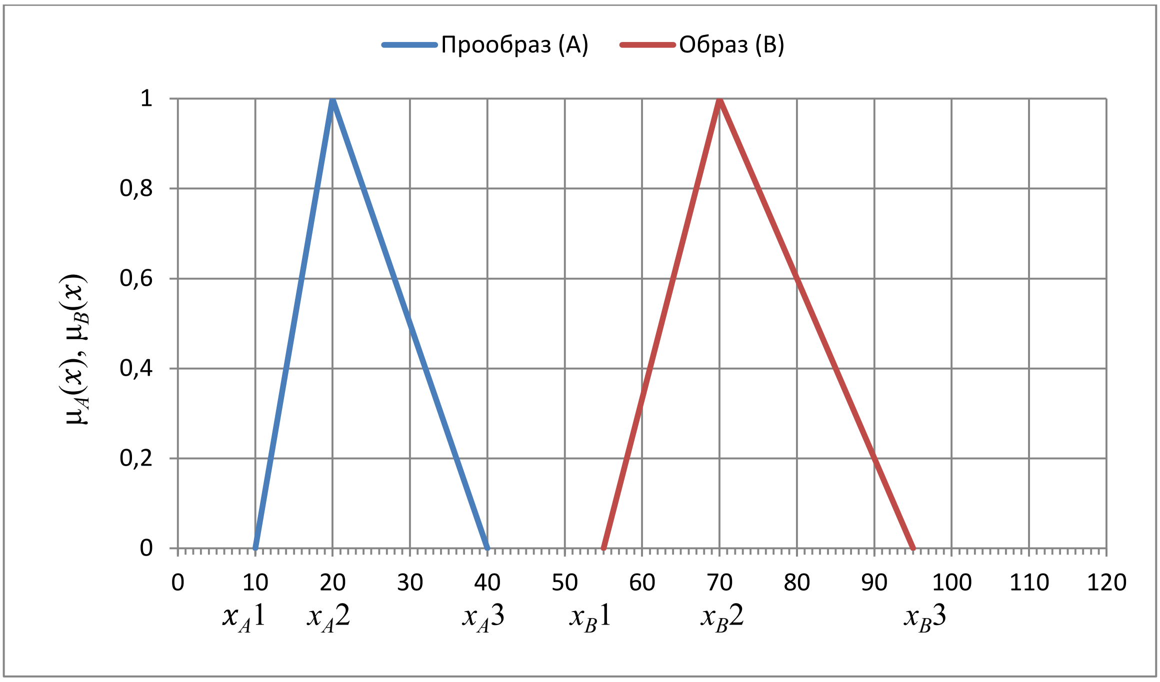

Рис. 3. Вариант прототипа, определяющего пару линейных преобразований

Расчет коэффициентов a_j при условии совпадения областей значений рассматриваемых функций принадлежности выполняется с помощью соотношений, определяющих динамику изменения экспертных суждений, выражаемую функциями прототипа [19]:

$$a_1 = \frac{x_{B_2} - x_{B_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}};\ a_2 = \frac{x_{B_3} - x_{B_2}}{x_{A_3} - x_{A_2}}. \quad (9)$$

Значения b_j определяются при этом очевидным образом после подстановки в (6) известных и найденных величин:

$$b_1 = \frac{x_{A_2}x_{B_1} - x_{A_1}x_{B_2}}{x_{A_2} - x_{A_1}};\ b_2 = \frac{x_{A_3}x_{B_2} - x_{A_2}x_{B_3}}{x_{A_3} - x_{A_2}}. \quad (10)$$

Далее модификация некоторой исходной функции принадлежности (прообраза) $\mu_C(y)$, определяемой тройкой чисел:

$$\{y_{C_i} \in Y;\ i = 1,3\}\colon \mu_C(y_{C_1}) = \mu_C(y_{C_3}) = 0,\ \mu_C(y_{C_2}) = 1, \quad (11)$$

осуществляется применением каждого из найденных преобразований к соответствующим участкам области определения данной функции.

Результатом модификации является получение новой тройки чисел, определяющей искомую функцию (образ) $\mu_D(y)$ [19]:

$$\{y_{D_i} \in Y;\ i = 1,3\}\colon \mu_D(y_{D_1}) = \mu_D(y_{D_3}) = 0,\ \mu_D(y_{D_2}) = 1. \quad (12)$$

Абсциссы крайних точек концентрации экспертной уверенности модифицированной функции $\mu_D(y)$ при выполнении обсуждаемых преобразований находятся однозначно:

$$y_{D_1} = f_1(y_{C_1}) = a_1 y_{C_1} + b_1, \quad (13)$$

$$y_{D_3} = f_2(y_{C_3}) = a_2 y_{C_3} + b_2. \quad (14)$$

Для абсциссы средней точки y_{D_2} функции $\mu_D(y)$ применение преобразований в общем случае приводит к получению двух различных значений:

$$y_{D_2}^{(1)} = f_1(y_{C_2}) = a_1 y_{C_2} + b_1, \quad (15)$$

$$y_{D_2}^{(2)} = f_2(y_{C_2}) = a_2 y_{C_2} + b_2. \quad (16)$$

Соответствующая неоднозначность может быть интерпретирована как получение в качестве результирующей кусочно-линейной функции трапецеидального вида, определяемой найденной четверкой чисел:

$$\{y_{D_i} \in Y;\ i = 1, 3\}: \mu_D(y_{D_1}) = \mu_D(y_{D_3}) = 0, \mu_D\left(y_{D_2}^{(1)}\right) = \mu_D\left(y_{D_2}^{(2)}\right) = 1. \quad (17)$$

На рисунке 4 показан пример неоднозначности определения положения абсциссы средней точки модифицированной функции принадлежности при применении модификатора, найденного на основе прототипа, приведенного на рис. 3.

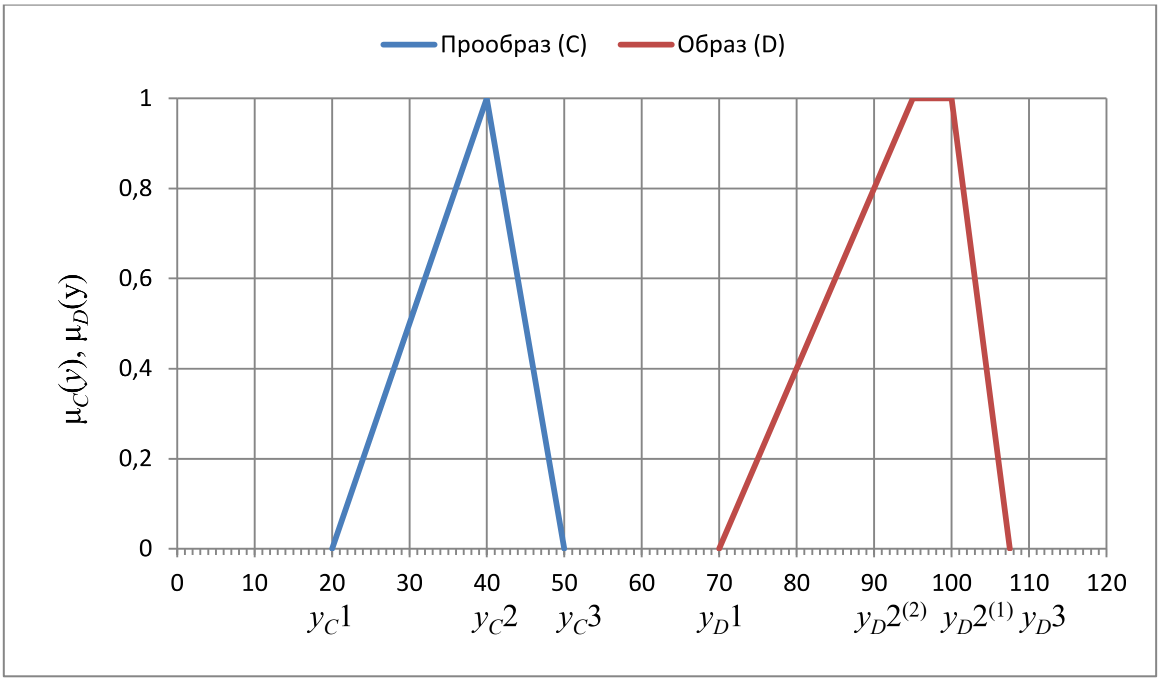

Рис. 4. Пример неоднозначности определения положения абсциссы средней точки

Данная интерпретация, тем не менее, представляется не слишком желательной по соображениям как технического, так и принципиального характера, поскольку для реальных преобразований часто актуально сохранение вида получаемых функций по отношению к исходным. Кроме того, существенная трансформация областей концентрации экспертной уверенности в процессе модификации требует содержательного экспертного истолкования.

Таким образом, в большинстве случаев целесообразным является устранение отмеченной неоднозначности. Как показывает выполненное в [20] исследование, для этого могут быть применены различные эвристические экспертно-приемлемые способы.

Следует заметить, что проведенные выше рассуждения предполагают возможность их естественного распространения на случаи использования функций принадлежности трапецеидального вида, задаваемых в их областях определения четверками различающихся чисел:

$$\{x_i \in X;\ i = 1,4\}\colon \mu(x_1) = \mu(x_4) = 0, \mu(x_2) = \mu(x_3) = 1. \tag{18}$$

Пара преобразований (6) в таких случаях выполняет трансформацию боковых фрагментов исходной функции принадлежности (прообраза) трапецеидального вида и определяется с использованием прототипа, представляющего собой пару эталонных функций принадлежности того же вида $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ (прообраз и образ), задаваемых соответствующими четверками чисел:

$$\{x_{A_i} \in X;\ i = 1,4\}\colon \mu_A(x_{A_1}) = \mu_A(x_{A_4}) = 0,\ \mu_A(x_{A_2}) = \mu_A(x_{A_3}) = 1, \tag{19}$$

$$\{x_{B_i} \in X;\ i = 1,4\}\colon \mu_B(x_{B_1}) = \mu_B(x_{B_4}) = 0,\ \mu_B(x_{B_2}) = \mu_B(x_{B_3}) = 1. \tag{20}$$

Расчетные соотношения (9) и (10) при этом требуют минимальной коррекции для значений a_2 и b_2:

$$a_2 = \frac{x_{B_4} - x_{B_3}}{x_{A_4} - x_{A_3}}, \tag{21}$$

$$b_2 = \frac{x_{A_4}x_{B_3} - x_{A_3}x_{B_4}}{x_{A_4} - x_{A_3}}. \tag{22}$$

Последующее применение найденных преобразований для модификации некоторой функции $\mu_C(y)$, задаваемой четверкой чисел:

$$\{y_{C_i} \in Y;\ i = 1,4\}\colon \mu_C(y_{C_1}) = \mu_C(y_{C_4}) = 0,\ \mu_C(y_{C_2}) = \mu_C(y_{C_3}) = 1, \tag{23}$$

выполняется аналогично рассмотренному выше с получением в качестве результата четверки чисел, определяющей модифицированную функцию $\mu_D(y)$:

$$\{y_{D_i} \in Y;\ i = 1,4\}\colon \mu_D(y_{D_1}) = \mu_D(y_{D_4}) = 0,\ \mu_D(y_{D_2}) = \mu_D(y_{D_3}) = 1, \tag{24}$$

где

$$\{y_{C_i}, y_{D_i};\ i = 1,2\}\colon y_{D_i} = f_1(y_{C_i}) = a_1 y_{C_i} + b_1, \tag{25}$$

$$\{y_{C_i}, y_{D_i};\ i = 3,4\}: y_{D_i} = f_2(y_{C_i}) = a_2 y_{C_i} + b_2. \quad (26)$$

В контексте обсуждаемого модификация кусочно-линейных функций принадлежности S-образного вида, определяемых в зависимости от ориентации графика функции парой различающихся чисел:

$$\{x_i \in X;\ i = 1,2\}: \mu(x_1) = 0, \mu(x_2) = 1 \quad (27)$$

либо

$$\{x_i \in X;\ i = 1,2\}: \mu(x_1) = 1, \mu(x_2) = 0, \quad (28)$$

может трактоваться как частный случай ранее рассмотренных модификаций, требующий трансформации лишь одного фрагмента исходной функции принадлежности и определения только одного линейного преобразования типа (6) по аналогии с изложенным выше. Применение полученного преобразования также соответствует рассмотренному.

Соображения, касающиеся сохранения в процессе модификации соотношения некоторой эталонной в том или ином смысле динамики изменения прообраза и образа, определяемого выбранным (заданным) прототипом, по-видимому, могут допускать обобщение на случаи использования функций принадлежности различного вида. Так, адекватное аналитическое выявление этой динамики, предположительно, возможно для множества кусочно-гладких функций, к числу которых, в частности, относятся достаточно распространенные функции принадлежности колоколообразной формы. Исследования в данном направлении также являются предметом интереса авторов.

Возвращаясь к вопросу устранения неоднозначности определения положения абсциссы средней точки концентрации экспертной уверенности y_{D_2} модифицированной функции принадлежности $\mu_D(y)$, возникающей в результате применения преобразований (15) и (16) при работе с функциями треугольного вида, следует обратить внимание на ситуацию, когда одно из значений, найденных в результате упомянутых преобразований, не попадает внутрь отрезка $[y_{D_1};\ y_{D_3}]$.

По данным экспериментов [19, 20], это может происходить, в частности, при формальном применении рассматриваемых преобразований для модификации исходных функций (прообразов), форма графиков которых имеет значительные отличия от формы графиков функций-прообразов использованных прототипов. Подобное обычно свидетельствует о не слишком хорошем выборе пары эталонных функций (прототипа) для выполнения модификации в условиях конкретной задачи. При отсутствии экспертных оснований сомневаться в правильности применения выбранного варианта модификации из значений $y_{D_2}^{(1)}$ и $y_{D_2}^{(2)}$ в качестве y_{D_2} тривиально выбирается значение, лежащее внутри отрезка $[y_{D_1};\ y_{D_3}]$.

В случае, когда оба значения $y_{D_2}^{(1)}$ и $y_{D_2}^{(2)}$, полученные в результате применения преобразований (15) и (16), находятся на отрезке $\left[y_{D_1};\ y_{D_3}\right]$, для получения результирующего значения y_{D_2} могут быть использованы несколько эвристически обоснованных способов, проанализированных нами в [20].

Одним из таких способов является выбор из полученных значений $y_{D_2}^{(1)}$ и $y_{D_2}^{(2)}$ в качестве y_{D_2} того, которое было определено при помощи преобразования, обеспечивающего более существенную трансформацию соответствующих фрагментов функций принадлежности. Эвристическим обоснованием данного выбора является уверенность исследователя в том, что более существенная трансформация лучше отражает экспертное различие между понятиями, формализуемыми рассматриваемыми нечеткими множествами, и, следовательно, более близка реальности.

Так как степень трансформации фрагментов обсуждаемых функций в рамках предлагаемых преобразований выражается коэффициентами a_j, определяемыми соотношениями (9), с учетом возможного как увеличения, так и уменьшения в результате трансформации длин отрезков, являющихся опорными для соответствующих фрагментов результирующей функции принадлежности (образа):

$$y_{D_2} = \begin{cases} y_{D_2}^{(1)},\ \max\left(a_1, \frac{1}{a_1}\right) > \max\left(a_2, \frac{1}{a_2}\right), \\ y_{D_2}^{(2)}, \max\left(a_1, \frac{1}{a_1}\right) \leq \max\left(a_2, \frac{1}{a_2}\right). \end{cases} \tag{29}$$

В противоположность рассмотренному эвристически вполне обоснованным представляется также вариант, когда исследователь стремится по тем или иным причинам сгладить экспертные различия между понятиями, формализуемыми исходной и модифицированной функциями, используя для выбора итогового значения y_{D_2} преобразование, выполняющее менее существенную трансформацию фрагментов функций. С учетом проведенных рассуждений такой выбор формализуется соотношением:

$$y_{D_2} = \begin{cases} y_{D_2}^{(1)},\ \max\left(a_1, \frac{1}{a_1}\right) < \max\left(a_2, \frac{1}{a_2}\right), \\ y_{D_2}^{(2)}, \max\left(a_1, \frac{1}{a_1}\right) \geq \max\left(a_2, \frac{1}{a_2}\right). \end{cases} \tag{30}$$

Результаты

Экспериментальная проверка приемлемости применения соотношений (29) и (30) показывает в большинстве случаев их использования получение результатов, явным образом не противоречащих соответствующим экспертным суждениям. При этом более экспертно-приемлемые результаты в среднем демонстрирует применение соотношения (30).

Дополнительно относительно нейтральная позиция исследователя может эвристически выражаться в выборе вариантов определения результирующего значения y_{D_2} с помощью операций усреднения. Такое усреднение, в частности, может выполняться формальным образом:

$$y_{D_2} = \frac{y_{D_2}^{(1)} + y_{D_2}^{(2)}}{2} \tag{31}$$

либо с использованием весовых коэффициентов, в роли которых могут выступать коэффициенты трансформации соответствующих фрагментов функций принадлежности:

$$y_{D_2} = \frac{a_1 y_{D_2}^{(1)} + a_2 y_{D_2}^{(2)}}{a_1 + a_2}. \tag{32}$$

По данным экспериментов, результаты применения вариантов усреднения (31) и (32) в большинстве случаев близки друг другу и, как правило, несколько менее соответствуют реальным экспертным оценкам, нежели результаты, получаемые при использовании соотношения (30).

На рисунке 5 показаны варианты устранения неоднозначности определения положения абсциссы средней точки y_{D_2} модифицированной функции принадлежности треугольного вида в соответствии с соотношениями (29), (30) и (31) для исходных данных, показанных на рисунке 4.

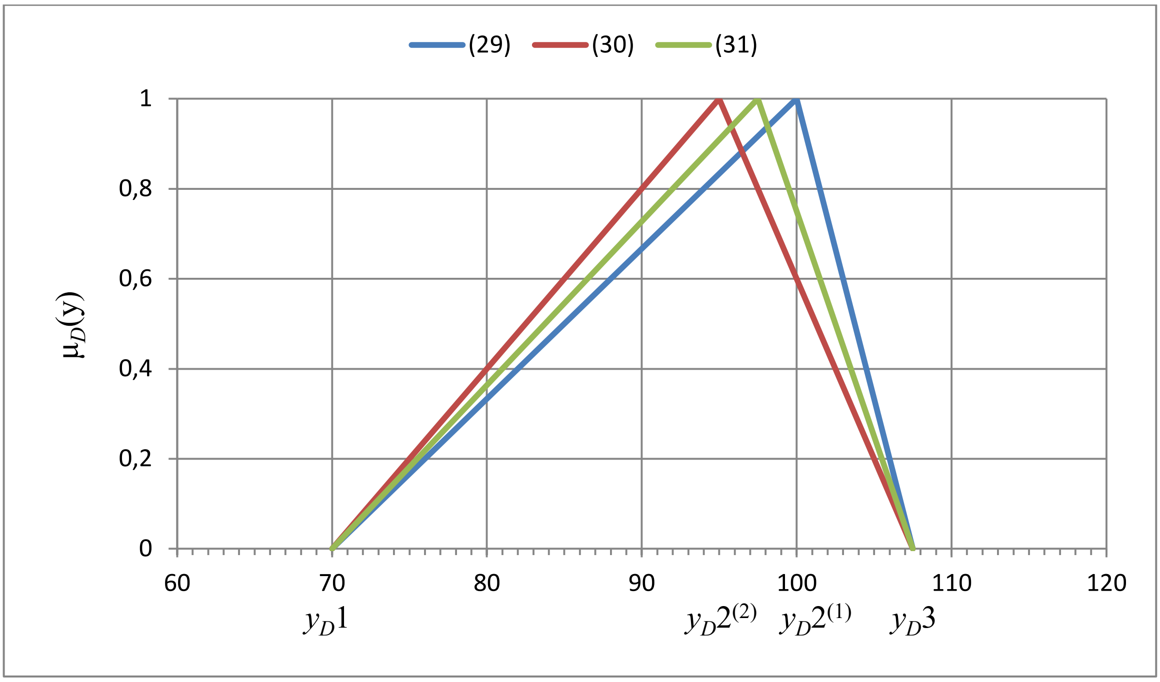

Рис. 5. Варианты устранения неоднозначности определения положения абсциссы средней точки

В заключение следует отметить, что устранение неоднозначности положения точки y_{D_2} рассмотренными способами приводит к определенному искажению соотношения динамики изменения исходной и модифицированной функций по отношению к динамике изменения, определяемой используемым прототипом. Сказанное может относиться как к одному из двух фрагментов модифицированной функции принадлежности при использовании соотношений (29) и (30), так и к обоим – при использовании операций усреднения (31) и (32). Данное обстоятельство нельзя оценить положительно, поскольку в основу проведенных рассуждений была положена идея сохранения этой динамики.

Изменение экспертной уверенности, отражаемое функцией принадлежности, происходит относительно точек концентрации уверенности, при этом центральная точка треугольной функции принадлежности является такой точкой (отвечает полной уверенности эксперта в принадлежности соответствующего значения рассматриваемому понятию), а динамика изменения уверенности определяется длинами отрезков, на которые опираются фрагменты функций. Таким образом, представляется эвристически убедительной дополнительная коррекция положения крайних точек концентрации экспертной уверенности y_{D_1} и y_{D_3} по отношению к центральной точке y_{D_2} после определения окончательного положения этой точки одним из приведенных выше способов.

Соответствующая коррекция может выглядеть следующим образом:

$$y_{D_1}^{corr} = y_{D_2} - \left(y_{D_2}^{(1)} - y_{D_1}\right), \tag{33}$$

$$y_{D_3}^{corr} = y_{D_2} + \left(y_{D_3} - y_{D_2}^{(2)}\right), \tag{34}$$

после чего модифицированная функция принадлежности $\mu_D(y)$ определяется тройкой чисел:

$$\left\{y_{D_i} \in Y;\ i = 1,3\right\}: \mu_D\left(y_{D_1}^{corr}\right) = \mu_D\left(y_{D_3}^{corr}\right) = 0,\ \mu_D\left(y_{D_2}\right) = 1. \tag{35}$$

На рисунке 6 показаны варианты коррекции положения абсцисс крайних точек модифицированных функций принадлежности треугольного вида в соответствии с соотношениями (33) и (34) для примера рис. 5.

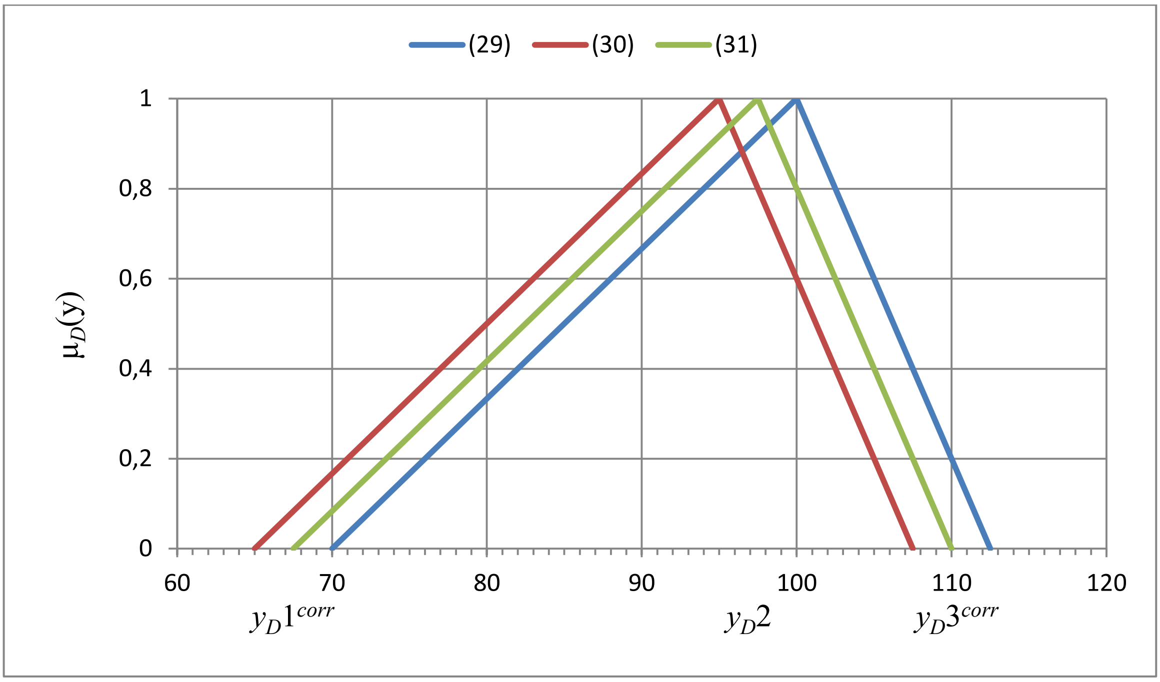

Рис. 6. Варианты коррекции положения абсцисс крайних точек

Применение предложенной коррекции при проведении экспериментов в большинстве случаев продемонстрировало более хорошее соответствие скорректированных результатов экспертным оценкам, нежели использование результатов без коррекции.

Заключение

В результате проведенных исследований удалось сформировать подход к обработке неоднозначностей, характерных для экспертных суждений.

Дискуссионными в настоящее время представляются вопросы границ приемлемости применения изложенного подхода, включая вопрос приемлемой сочетаемости пар эталонных функций (прототипов) и модифицированных функций, а также вопрос инвариантности выполняемых преобразований по отношению к понятиям различной природы. Несколько обособленным, но также дискуссионным выглядит вопрос возможности адекватного обобщения рассмотренного подхода на случаи использования функций принадлежности различного вида.

Предложенные в работе новые подходы к построению процедур модификации функций принадлежности нечетких множеств позволяют разрешать возникающие у эксперта затруднения при оценке сложных систем.

Библиографический список

1. Borisov A., Krumberg O.: Theory of Possibility for Decision-Making. Fuzzy Sets and Systems 9 (1), 13 – 23, 1983.

2. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990.

3. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. / Борисов А.Н., Алексеев А.В., Крумберг О.А. и др. – Рига: Зинатне, 1982.

4. Alexeyev A., Borisov A., Glushkov V., Krumberg O., Merkuryeva G., Popov V., Slyadz N.: A Linguistic Approach to Decision-Making Problems. Fuzzy Sets and Systems 22 (1–2), pp. 25–41, 1987.

5. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

6. Батыршин И.З., Недосекин А.О., Стецко А.А., Тарасов В.Б., Язенин А.В., Ярушкина Н.Г. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика. / Под ред. Н.Г. Ярушкиной. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

7. Dutov A., Nesterov V., Sudakov V., Sypalo K.: Fuzzy preference domains and their use for selecting an electronic flight bag for flight crews. J. Comput. Syst. Sci. Int. 57 (2), pp. 230 – 238, 2018.

8. Dombi J., Csiszár O. Modifiers and Membership Functions in Fuzzy Sets. In: Explainable Neural Networks Based on Fuzzy Logic and Multi-criteria Decision Tools. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 408. Springer, Cham, 2021.

9. Dubois D., Prade H. Membership Functions. In: MJ. Lesot, C. Marsala (eds). Fuzzy Approaches for Soft Computing and Approximate Reasoning: Theories and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 394. Springer, Cham, 2021.

10. Aida-Zade K.R., Guliyeva P.S., Ismibayli R.E. Analysis of the Methods for Constructing Membership Functions Using Expert Data. In: S.N. Shahbazova, A.M. Abbasov, V. Kreinovich, J. Kacprzyk, I.Z. Batyrshin (eds). Recent Developments and the New Directions of Research, Foundations, and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 422. Springer, Cham, 2023.

11. Atanassov K., Vassilev P.: Intuitionistic Fuzzy Sets and Other Fuzzy Sets Extensions Representable by Them. Journal of Intelligent & Fuzzy Syst. 38 (1), 525 – 530, 2020.

12. Bentkowska U.: Fuzzy Sets and Their Extensions. In: Interval-Valued Methods in Classifications and Decisions. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 378. Springer, Cham, 2020.

13. Bustince H., Barrenechea E., Pagola M., Fernandez J., Xu Z., Bedregal B., Montero J., Hagras H., Herrera F., De Baets B.: A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 24 (1), 179 – 194, 2016.

14. Bentkowska U., Bustince H., Jurio A., Pagola M., Pękala B.: Decision making with an interval-valued fuzzy preference relation and admissible orders. Appl. Soft Comput. 35, 792 – 801, 2015.

15. Taneja S.: A New Approach for Data Classification using Fuzzy Logic. In: 6th International Conference – Cloud System and Big Data Engineering, Noida, India, 2016.

16. Pękala B.: Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory. Properties, Algorithms and Applications. Studies in fuzziness and soft computing. Springer, Cham, 2019.

17. Kreinovich V., Kosheleva O., Shahbazova S.: Why Triangular and Trapezoid Membership Functions: A Simple Explanation. In: Recent Developments in Fuzzy Logic and Fuzzy Sets. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 391. Springer, Cham, 2020.

18. Bělohlávek R., Dauben J.W., Klir G.J. Fuzzy logic and mathematics: A historical perspective. Oxford: Oxford University Press, 2017.

19. Barchev N., Sudakov V. On the Question of Modifying Membership Functions. In: R. Silhavy, P. Silhavy, Z. Prokopova (eds). Software Engineering Perspectives in Intelligent Systems. CoMeSySo 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1295. Springer, Cham, 2020.

20. Barchev N., Sudakov V. On Determining the Position of Expert Confidence Concentration Points When Modifying Membership Functions. In: Data Science and Intelligent Systems; CoMeSySo 2021. Lecture Notes in Networks and Systems. R. Silhavy, P. Silhavy, Z. Prokopova, Eds., vol. 231. Springer, Cham, Switzerland, 2021.