



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 62 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.С. Бойков, А.А. Унанян,
В.А. Гасилов

Сравнительный анализ
проекционного и
диффузионного методов
обеспечения
соленоидальности
расчетного магнитного поля

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бойков Д.С., Унанян А.А., Гасилов В.А. Сравнительный анализ проекционного и диффузионного методов обеспечения соленоидальности расчетного магнитного поля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 62. 26 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-62>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-62>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Д.С. Бойков, А.А. Унанян, В.А. Гасилов

**Сравнительный анализ проекционного
и диффузионного методов обеспечения
соленоидальности расчетного магнитного поля**

Москва — 2024

Бойков Д.С., Унанян А.А., Гасилов В.А.

Сравнительный анализ проекционного и диффузионного методов обеспечения соленоидальности расчетного магнитного поля

Численное моделирование динамики токонесущей плазмы, основывается, как правило, на мультифизических МГД-моделях, включающих описание совокупности волновых и диссипативных процессов, сопровождающих обмены импульсом и энергией с электромагнитным полем. Для решения уравнений, описывающих эволюцию магнитного поля, в том числе в результате магнитной диффузии, сеточная система уравнений дискретной МГД-модели не всегда строится таким образом, что в ней условие соленоидальности магнитного поля выполняется «автоматически». В результате могут накапливаться численные погрешности, создающие эффект появления нефизических «магнитных зарядов», и обусловленных этими зарядами потоков плазмы, не соответствующих истинной физической ситуации. Для обеспечения условия соленоидальности применяется калибровка рассчитанного магнитного поля. В данной работе в вычислительных экспериментах с кодом MARPLE (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) оценивалась практическая точность методов калибровки, таких как проекционный и диффузионный. Калибровка магнитного поля рассчитывалась с применением стабилизированной явной схемы решения параболических уравнений. Численные эксперименты показывают, что диффузионный метод более точен, а по экономичности не уступает проекционному методу.

Ключевые слова: МГД-моделирование, разностные схемы, условие соленоидальности магнитного поля.

Dmitrii Sergeevich Boykov, Harutyun Aramovich Hunanyan, Vladimir Anatolievich Gasilov.

Comparative analysis of projection and diffusion methods for ensuring the solenoidality of the calculated magnetic field

Numerical modeling of current-carrying plasma dynamics is based, as a rule, on multiphysics models, which include equations describing MHD waves, transport and dissipative processes accompanying the exchange of momentum and energy with the electromagnetic field. To solve the equations describing the evolution of the magnetic field, including as a result of magnetic diffusion, the grid system of equations of the discrete MHD model is not always constructed in such a way that the magnetic field

divergence constraint is satisfied «automatically». As a result, numerical errors can accumulate, creating the effect of the appearance of non-physical «magnetic charges» and plasma flows caused by these charges that do not correspond to the true physical situation. To maintain the solenoidal condition, calibration of the calculated magnetic field is used. In this work, in computational experiments with the MHD MARPLE code (M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS), the practical accuracy of calibration methods such as projection and diffusion is assessed. The magnetic field correction was calculated using a stabilized explicit scheme for solving parabolic equations. It has been shown via numerical experiments that the diffusion method is more accurate and is not inferior to the projection method in terms of efficiency.

Key words: *MHD modeling, difference schemes, solenoidality constraint of a magnetic field*

Оглавление

Введение.....	5
1 Методы коррекции расчетного магнитного поля	7
2. Результаты вычислительных экспериментов.	10
Заключение.....	22
Список литературы.....	24

Введение

Уравнения магнитной гидродинамики (МГД) дают самосогласованное описание эволюции крупномасштабных плазменных структур и переходных явлений в широком диапазоне условий лабораторной и космической плазмы. Современные компьютерные модели МГД наиболее часто разрабатываются на основе метода конечных объемов [1-3], а в соответствующих численных методиках используются как регулярные, так и неструктурированные расчетные сетки и сеточные переменные, определенные в различных сеточных пространствах. Известно, что непосредственное обобщение на уравнения МГД разностных аппроксимаций гидродинамических уравнений в форме законов сохранения не может, вообще говоря, обеспечивать «по умолчанию» соленоидальность рассчитываемого магнитного поля ([4,5] и др.). Погрешность в $\nabla \cdot B$, накопленная во время расчета, может неконтролируемо расти, что выражается в возникновении «магнитных зарядов» и нефизических сил, под действием которых возникают значительные ложные потоки плазмы и зачастую развивается численная неустойчивость [6]. Поэтому одной из проблем в МГД-моделировании является разработка методик, обеспечивающих с достаточной точностью выполнение условия соленоидальности расчетного магнитного поля.

В разностных схемах типа [7-10], аппроксимирующих уравнения Максвелла на основе «разнесенных» компонент сеточных векторов электрического и магнитного полей, условие соленоидальности выполняется без дополнительной коррекции расчетных величин. Такого рода дискретизация широко применяется в МГД-кодах, ориентированных на решение задач астрофизики [11-13]. При разработке дискретных моделей МГД получили распространение также другие подходы к реализации условия соленоидальности, которая обеспечивается за счет выполнения различных корректирующих методик [14-23]. Такие подходы популярны в разработках методик решения задач МГД на сетках нерегулярной структуры (тетраэдральных, гексаэдральных, сеток смешанного состава элементов, адаптивных иерархических и т.д.). Для коррекции рассчитанного магнитного поля с целью уменьшения уровня численной ошибки в $\nabla \cdot B$ разрабатываются разные алгоритмы. Так «8-волновой» метод [4, 21, 24], предусматривает решение уравнения МГД с дополнительными слагаемыми, пропорциональными $\nabla \cdot B$. Развиты и применяются при решении задач космической физики метод «ограниченного переноса» (Constrained Transport) [2; 11], и метод гиперболизации уравнений Максвелла [11; 15].

Достаточно просты в реализации проекционный и диффузионный методы. Они, как показывают многочисленные тесты, обеспечивают хорошую точность выполнения условия соленоидальности. Проекционный метод основан на представлении магнитного поля как суммы градиента скалярного поля и ротора векторного поля [5, 6, 15, 16]. Диффузионный метод [17, 18, 20, 22] состоит в том, чтобы решать дополнительное к основной МГД-системе эволюционное (параболическое) уравнение, описывающее диффузию магнитного поля, пропорциональную его дивергенции. Таким образом, введенная диффузионная поправка непосредственно уменьшает погрешность $\sim \nabla \mathbf{B}$, так что влияние «магнитных монополей» численного происхождения может быть эффективно подавлено со скоростью, ограниченной условием устойчивости разностной схемы.

Таким образом, к настоящему времени предложен ряд методик, реализующих условие соленоидальности магнитного поля. Вместе с тем, данные об их экономичности, точности, применимости к решению задач из достаточно широкой предметной области, приводимые в публикациях разных лет (см. [12, 15, 17, 20] и др.) в определенной мере разнятся. Поэтому возникает необходимость проведения дополнительной тестовой работы, чтобы установить, какая методика предпочтительна для включения в состав того или иного прикладного кода. В настоящей работе мы остановились на двух методиках, которые нам представляются наиболее подходящими с учетом свойств тех разностных аппроксимаций, которые реализованы в МГД-коде MARPLE [26], активно применяемом в настоящее время для решения разнообразных задач динамики токонесущей плазмы.

Проекционный и диффузионный методы привлекают тем, что, в отличие от методов типа обобщенных множителей Лагранжа или гиперболизации уравнений Максвелла, не связаны с модификацией исходной системы уравнений МГД. Их несложно применять совместно с основной конечно-объемной методикой решения на основе аппроксимации законов сохранения, благодаря чему в ряде случаев оказывается возможным более точно рассчитать течение в окрестности МГД-разрывов, чем, например, на основе методик 8-волнового подхода [18-20]. Их применение связано с необходимостью решать дополнительно к основной системе уравнений уравнения «калибровки» магнитного поля. Иногда это обстоятельство отмечается как недостаток методов, поскольку требуются дополнительные затраты на вычисления. Однако

эти затраты можно значительно сократить, что повышает привлекательность этих методов. Одна из возможных схем реализации проекционного и диффузионного методов применяется в настоящей работе.

В разделе 1 излагаются основные принципы проекционного и диффузионного методов обеспечения соленоидальности магнитного поля. В разделе 2 точность проекционного и диффузионного методов исследуется в вычислительных экспериментах с известными тестовыми задачами.

1 Методы коррекции расчетного магнитного поля

Код MARPLE, с помощью которого выполнялась тестовая работа, был создан на основе методики решения системы уравнений МГД в форме законов сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + P_{tot} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + P_{tot}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) = 0 \quad (4)$$

где $P_{tot} = P + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$, $E = \frac{P}{\gamma - 1} + \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$

Такой вид уравнений МГД учитывает условие соленоидальности магнитного поля. Однако в той аппроксимации методом конечных объемов, которая заложена в численную методику (все сеточные величины отнесены к ячейкам разностной сетки), это условие может быть нарушено [6].

Проекционная схема коррекции магнитного поля [6, 15, 20] опирается на теорему Гельмгольца [27], согласно которой однозначное, непрерывное и ограниченное во всем пространстве векторное поле может быть разложено на сумму потенциального и соленоидального векторных полей. Соответственно, для обеспечения условия соленоидальности расчетное магнитное поле \mathbf{B}^*

корректируется путем вычитания из него некоторого потенциального поля, которое могло появиться как результат численной погрешности схемы расчета.

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi \quad (5)$$

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \mathbf{B}^* \quad (6)$$

относительно скалярной функции ϕ , решив уравнение (6), магнитное поле можно скорректировать с помощью (5).

Численная дивергенция \mathbf{B}^{n+1} будет в точности равна нулю, если оператор Лапласа в (5) оценивается как дивергенция градиента с теми же разностными операторами, которые используются для вычисления $\nabla \cdot \mathbf{B}^*$ и $\nabla \phi$ в уравнениях (5) и (6) соответственно. Ротор векторного потенциала A представляет физически значимую часть расчетного поля \mathbf{B}^* . Процесс корректировки можно представить так, что после завершения расчета текущего шага по времени поле \mathbf{B}^* , полученное базовой расчетной схемой, проецируется на «бездивергентное» поле \mathbf{B}^{n+1} .

Из (5) следует одно важное свойство проекционного метода, а именно, данная корректировка магнитного поля не влияет на плотность тока:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \times \mathbf{B}^*$$

В коде MARPLE проекционная схема реализована введением производной по фиктивному времени τ . Для калибровки поля решается уравнение:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \text{div}(\text{grad}(\phi)) = -\text{div}(\mathbf{B}) \quad (7)$$

Данное уравнение решается относительно потенциала ϕ , а \mathbf{B} берется как решение других солверов, работающих до калибровки. Аппроксимация уравнения типа (7) на неструктурированной сетке, выполнена по схеме, предложенной в работе [28]. Для решения (7) были использованы неявная схема Кранка-Никольсона, а также более экономичная стабилизированная явная схема [29]. Как видно, проекционная схема достаточно проста и не требует больших вычислительных затрат. Для практического использования проекционной схемы ее необходимо дополнить граничными условиями на потенциальное поле ϕ . Очевидно, выбор аппроксимации граничных условий оказывает влияние на точность метода. В некоторых случаях постановка граничных условий для уравнения (7) затруднена (например, при

необходимости учета некоторых приэлектродных процессов в исследованиях лабораторной плазмы).

Диффузионный метод [12, 17, 20] понижения погрешности выполнения условия $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, состоит во введении добавочной (искусственной) диффузии поля, пропорциональной $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})$. Идея диффузионного метода состоит в «рассеивании» численно созданной дивергенции, причем темп рассеивания тем больше, чем выше уровень численной дивергенции. В реализации MARPLE данная процедура выполняется отдельным солвером, в котором решается соответствующее уравнение счетом по некоторому фиктивному времени τ :

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \eta \Delta \tau \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}^k), \quad (8)$$

в (8) $\mathbf{B}^k, \mathbf{B}^{k+1}$ — магнитное поле на итерациях k и $k+1$ соответственно, η — параметр, регулирующий уровень искусственной диффузии, и выбираемый с учетом устойчивости и точности выполнения условия соленоидальности. Шаг $\Delta \tau$ явной схемы (8) ограничен условием

$$\eta \Delta \tau \leq C_d \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right)^{-1}$$

где $\Delta x, \Delta y$ и Δz — размеры ячеек сетки в декартовых координатах. Здесь $0 \leq C_d \leq 2$, и мы устанавливаем $C_d = 1,3$. При решении уравнения (8) с помощью стабилизированной явной схемы [29], ограничение на параметр η ослабляется

$$\eta \Delta \tau \leq C_d h^{3/2}, \quad h = \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right)^{-3/2}.$$

Метод искусственной диффузии естественным образом включается в схему сквозного счета разрывных решений и обеспечивает, по крайней мере, второй порядок точности в области гладкости решений МГД-системы. Аналогичная стратегия вычислений, наряду с проекционным методом, использована в версиях кода FLASH, разработанного для решения задач астрофизики [25].

2. Результаты вычислительных экспериментов.

Задачи, выбранные для тестирования методик коррекции расчетного магнитного поля, приведены в различных публикациях, посвященных известным кодам магнитной плазмодинамики, таким как ZEUS-MP [12], FLASH [25]. ATHENA [30, 31]. Первая задача состоит в расчете магнитного поля в цилиндрической разрядной камере. Поле создается постоянным током, проходящим по боковой поверхности камеры. Задача как тест для численной методики удобна тем, что можно легко сравнить численное решение с аналитическим. При соблюдении условия $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ линии магнитного поля должны оказаться кольцевыми. Решение этой задачи дает простой и наглядный пример важности процедуры коррекции магнитного поля, отсутствие которой приводит в данном случае к потере симметрии решения. При нарушении условия соленоидальности в решении задачи возникают заметные возмущения конфигурации магнитного поля.

Вторым тестом является задача о сферическом взрыве [30]. Этот тест хорошо демонстрирует качественные особенности течения, возникающего вследствие мгновенного энерговыделения в проводящей среде. На начальном этапе движения плазмы расширяющаяся взрывная волна должна сохранять сферическую форму, т.е. влияние сеточных эффектов должно быть минимальным. На поздней стадии расширения сфероидальной области взаимодействие ударной волны с окружающим веществом инициирует гидромагнитную неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, которая могла бы привести к формированию протяженных нитевидных структур. Однако в присутствии магнитного поля неустойчивость подавляется. В целом задача представляет интерес для проверки качества коррекции магнитного поля в нестационарном решении системы МГД в случае разрывных начальных условий. Разностные схемы сквозного счета во многих случаях характеризуются снижением точности решений в области разрыва, и в подобных задачах необходимость подавления влияния численных «магнитных монополей» особенно важна.

Задача о вихре Орзага-Танга [31, 32] — это известная модельная задача для тестирования перехода к сверхзвуковой МГД-турбулентности в двумерной постановке задачи. Несмотря на неполный аналитический анализ, задача является весьма распространенным тестом для МГД-кодов в двух измерениях и использовалась во многих предыдущих исследованиях. Естественно, данное решение можно воспроизвести в полном трехмерном расчете,

соответствующим образом задавая начальные и граничные условия. Такой расчет является хорошей проверкой кода при использовании как регулярных, так и неструктурированных сеток. Численный эксперимент с данной задачей показывает качество воспроизведения процессов формирования и взаимодействия нелинейных МГД-волн. Также данная задача позволяет оценить количественно допустимый уровень погрешности выполнения условия соленоидальности магнитного поля.

Для количественной оценки работы калибровки во всех ячейках на каждом шаге калибровки оценивается относительная ошибка дивергенции магнитного поля следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} |R| \quad (9)$$

где R — характерный линейный размер разностной ячейки.

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов.

Контур с током. В этой задаче моделируется магнитное поле между двумя цилиндрическими областями, на гранях которых течет ток. Граничное условие для магнитного поля, созданного постоянным током на границе бесконечного цилиндра, имеет вид:

$$B_\phi = \frac{2I}{r} \quad (10)$$

где I — сила тока, r — расстояние от оси цилиндра.

Расчетная область представляет собой пространство между идеально проводящими цилиндрами с радиусами $r_1 = 0.5$ и $r_2 = 1.5$. В качестве граничных условий задается постоянный ток на внутренней и внешней границах цилиндрической области равных соответственно $I_1 = 0.0025$, $I_2 = 0$. Начальное условие для магнитного поля выработано из соображений ускорения численного счета равного $2I_1 / r_2$. Для теста использована треугольная расчетная сетка с 40000 элементами размера ~ 0.001 . Расчет магнитного поля в данном тесте выполнен путем решения уравнения диффузии. После нескольких шагов по времени распределение магнитного поля становится практически совпадающим с его аналитическим описанием (рис. 1). Магнитное поле, созданное постоянным током, имеет только азимутальную компоненту. Без коррекции магнитного поля в численном решении возникают заметные искажения магнитных силовых линий (рис. 2). Относительная ошибка ~ 1 возникает вблизи границ расчетной области. При включении коррекции магнитное поле

становится полностью «кольцевым», исчезают нефизические флуктуации. Диффузионный метод допускает ошибку порядка 10^{-12} , а максимальная ошибка не превышает уровень 10^{-3} (рис. 3). Проекционный метод внутри области решения допускает ошибку порядка 10^{-10} . На границе области ошибка возрастает до $\sim 10^{-1}$ (рис. 4).

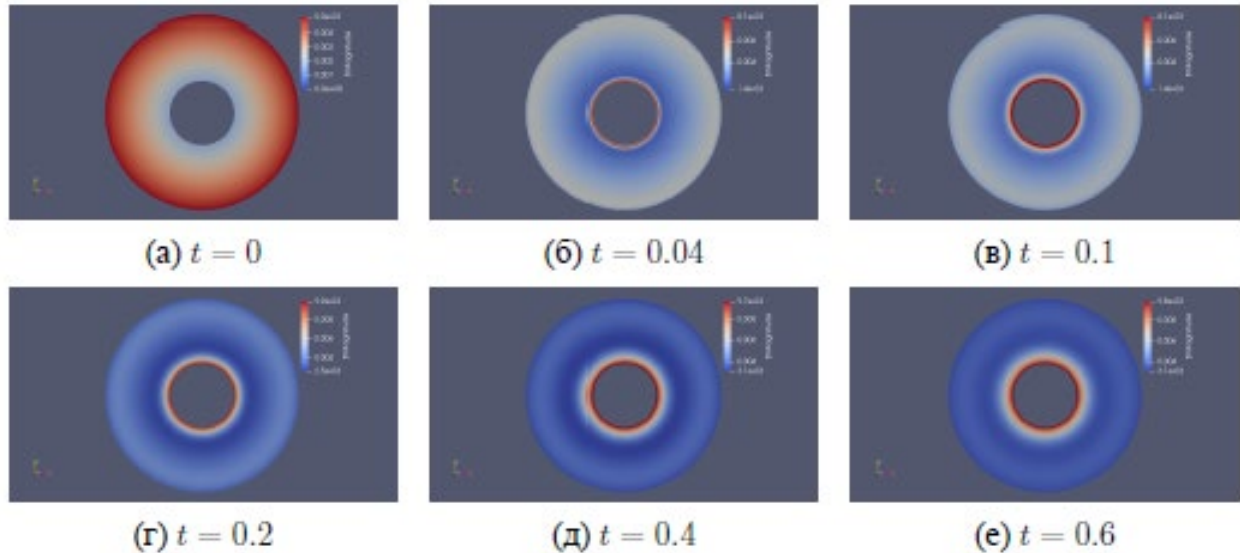


Рис. 1. Магнитное поле B для различных моментов времени при диффузионном методе коррекции.

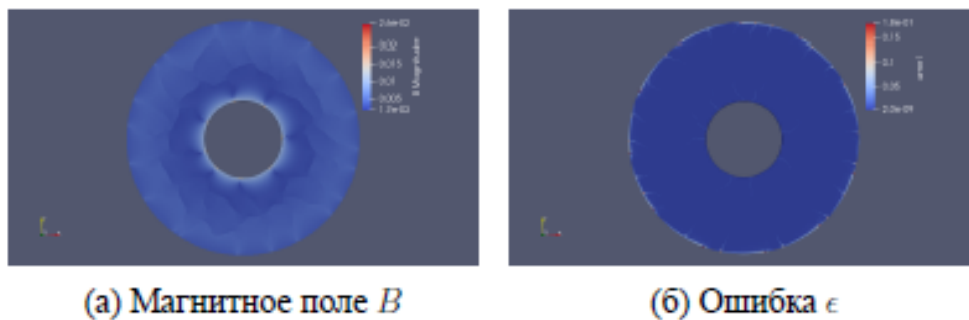


Рис. 2. Магнитное поле и относительная ошибка в отсутствие коррекции.

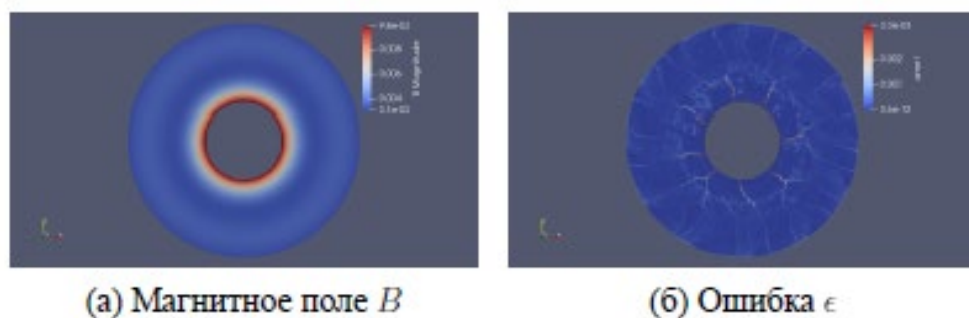


Рис. 3. Магнитное поле и относительная ошибка в диффузионном методе коррекции.

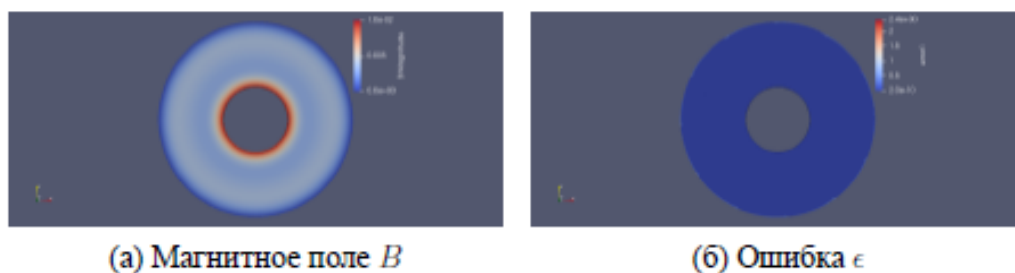


Рис. 4. Магнитное поле и относительная ошибка в проекционном методе коррекции.

Вторая тестовая задача «сферический взрыв» рассчитана с начальными данными, приведенными в [30]. Взрыв создается в покоящейся среде, в сферической области с радиусом $r=0.1$, и моделируется как возникновение большого избыточного давления. Начальная плотность среды $\rho=1$, давление $P_1=0.1$, избыточное давление $P_2=1$. Начальное магнитное поле постоянное, равно $B = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}$. Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с размерами $l_x=1.5$, $l_y=1$, $l_z=0.1$, максимальный размер сеточных ячеек ~ 0.01 .

Ниже представлены результаты расчета магнитного поля (рис. 5), давления (рис. 6), температуры (рис. 7) и относительной ошибки расчетной дивергенции (рис. 8).

Результаты, показанные на рис. 5-7 демонстрируют важность коррекции магнитного поля. В частности, при включении коррекции четко прослеживается движение ударной волны после взрыва. В отсутствие коррекции в некоторых местах области расчета возникают аномальные флуктуации магнитного поля, понижения давления и температуры, меняющиеся скачкообразно и не имеющие какого-либо физического смысла. Без коррекции поля относительная ошибка для дивергенции в среднем составляет $\sim 10^{-1}$. Проекционный метод коррекции в данной задаче понижает погрешность численной дивергенции в среднем до величины $\sim 10^{-2}$, в отдельных точках на порядок превышая это значение. Диффузионный метод работает заметно лучше, понижая относительную ошибку в среднем до значения $\sim 10^{-12}$, при этом максимальная локальная погрешность в некоторых точках достигает значения $\sim 10^{-4}$ (рис. 7).

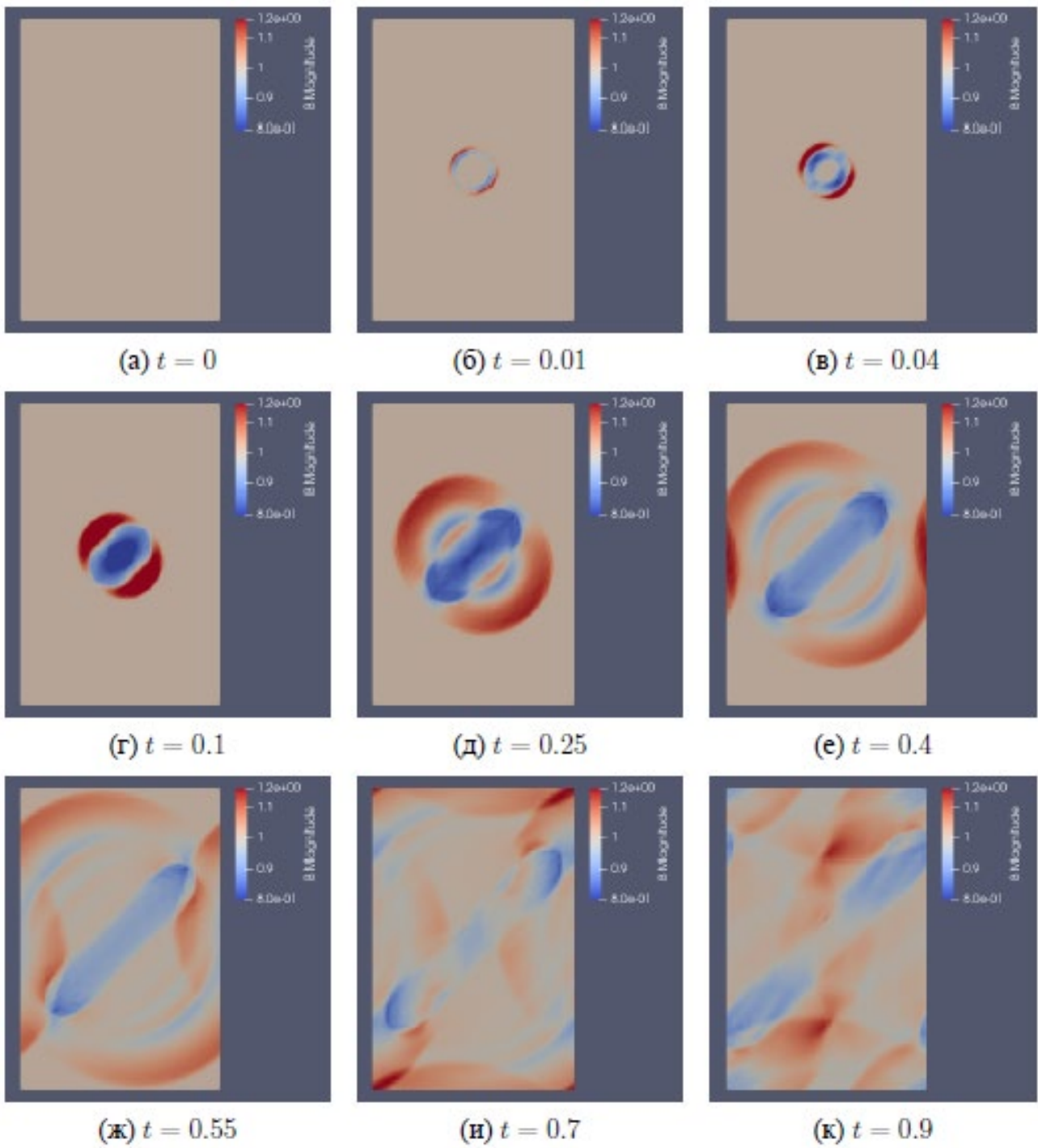


Рис. 5. Модуль магнитного поля B на различные моменты времени при диффузионном методе калибровки

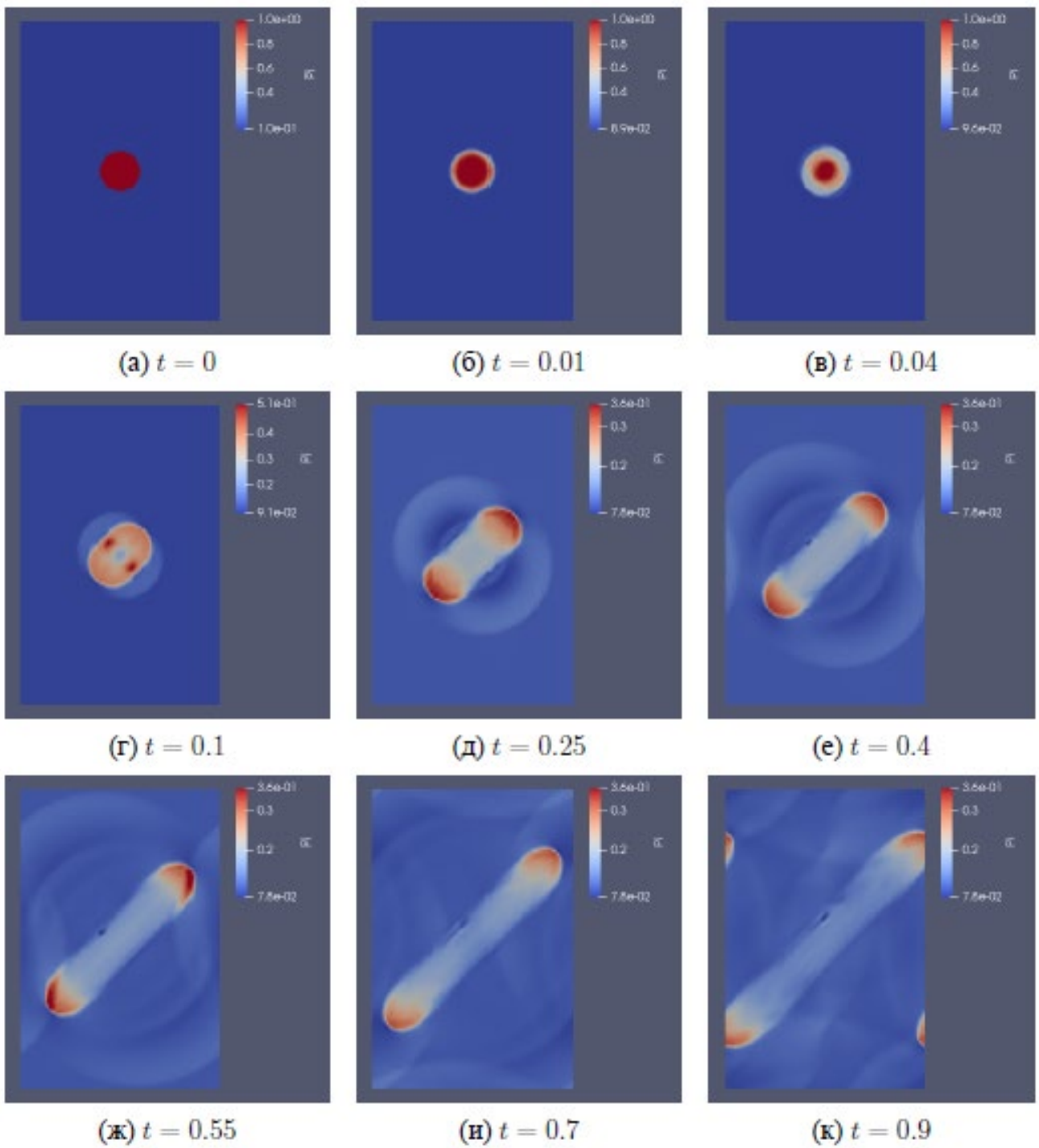


Рис.6. Давление P на различные моменты времени при диффузионном методе калибровки

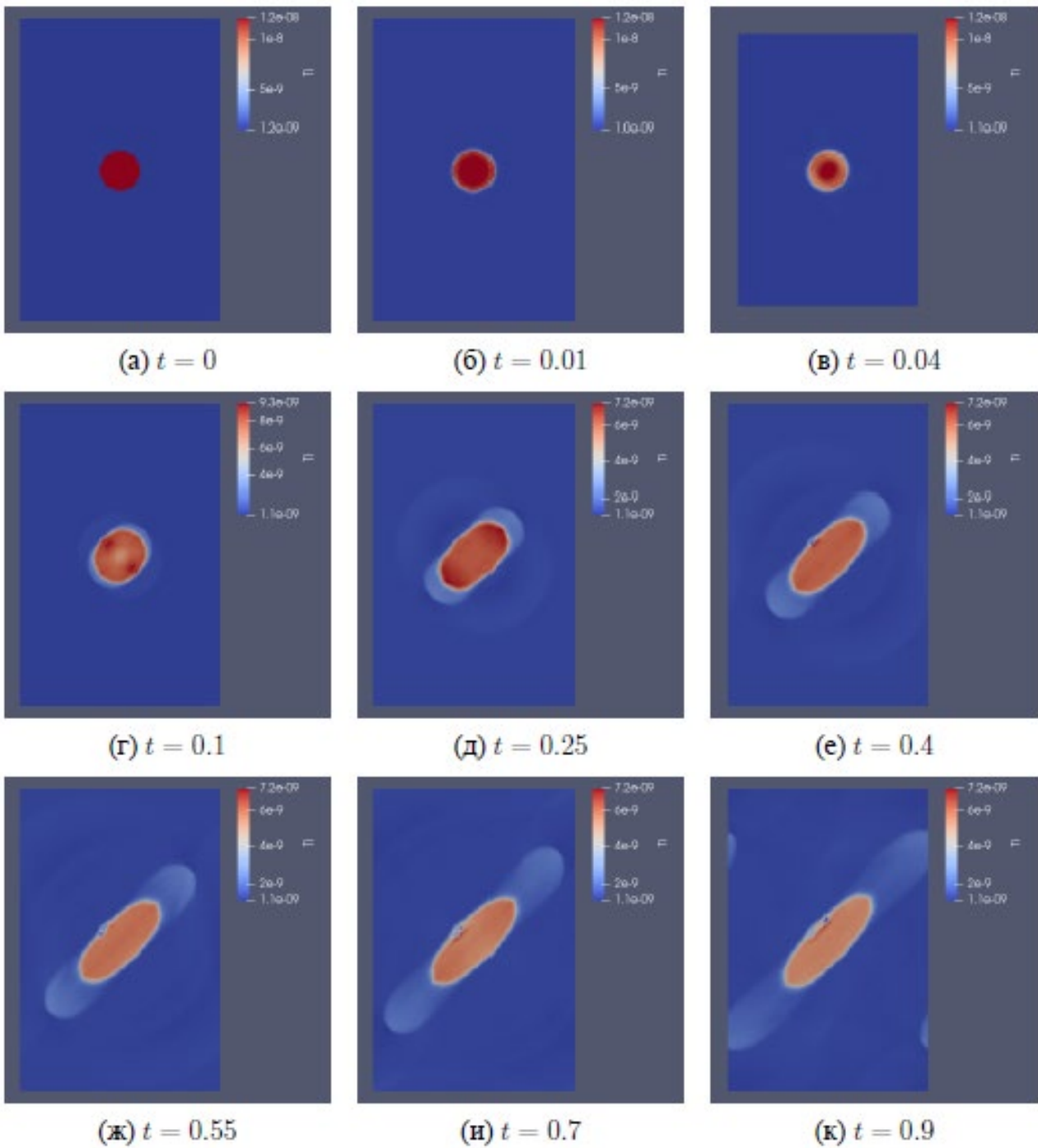


Рис. 7. Температура T на различные моменты времени при диффузионном методе калибровки

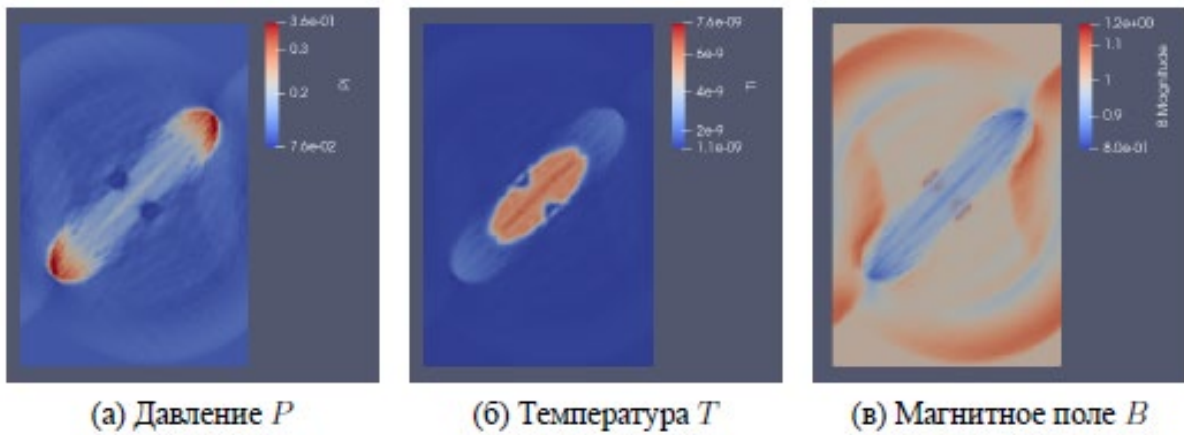


Рис. 8. Нефизичные «скачки» в распределениях T , P , B в отсутствие калибровки

Начальные и граничные условия для третьего теста — задачи Орзага-Танга [32] — были взяты в соответствии с описанием [31]. Расчетная область имеет форму параллелепипеда с размерами $l_x = 1.5$, $l_y = 1$, $l_z = 0.1$, характерный размер ячеек не превышает 0.01. На гранях параллелепипеда заданы периодические граничные условия для магнитного поля и поля скорости. Начальные условия по магнитному полю и скорости имеют следующий вид:

$$B_x = -B_0 \sin 2\pi y, \quad B_y = B_0 \sin 2\pi x,$$

$$V_x = -V_0 \sin 2\pi y, \quad V_y = V_0 \sin 2\pi x.$$

Параметры B_0 и V_0 были взяты равными 1.

Результаты расчета приведены на рис. 9 — 12. Представлены динамика скоростей (рис. 9), магнитного поля (рис. 10), давления (рис. 11), и плотности (рис. 12). Распределения расчетных величин соответствуют данным [31]. Относительная ошибка (погрешность расчетной дивергенции магнитного поля) как и прежде посчитана по формуле (16).

В отсутствие калибровки в центрах вихрей накапливается большое отклонение $\nabla \mathbf{B}$ от нуля, что проявляется в аномалиях распределений расчетных величин. Примеры аномальных распределений магнитного поля, давления и температуры плазмы показаны на рис. 13. Такие аномалии отсутствуют при калибровке диффузионным методом. При отсутствии калибровки относительная ошибка составляет в среднем ~ 1 , принимая максимальное локальное значение в центрах вихрей на уровне нескольких единиц. Относительная ошибка дивергенции при калибровке проекционным методом составляет $\sim 10^{-1}$, при этом максимальная относительная ошибка достигает ~ 1 в

центрах вихрей. Диффузионный метод калибровки допускает среднюю ошибку $\sim 10^{-13}$, а максимальная локальная ошибка не превышает $\sim 10^{-4}$.

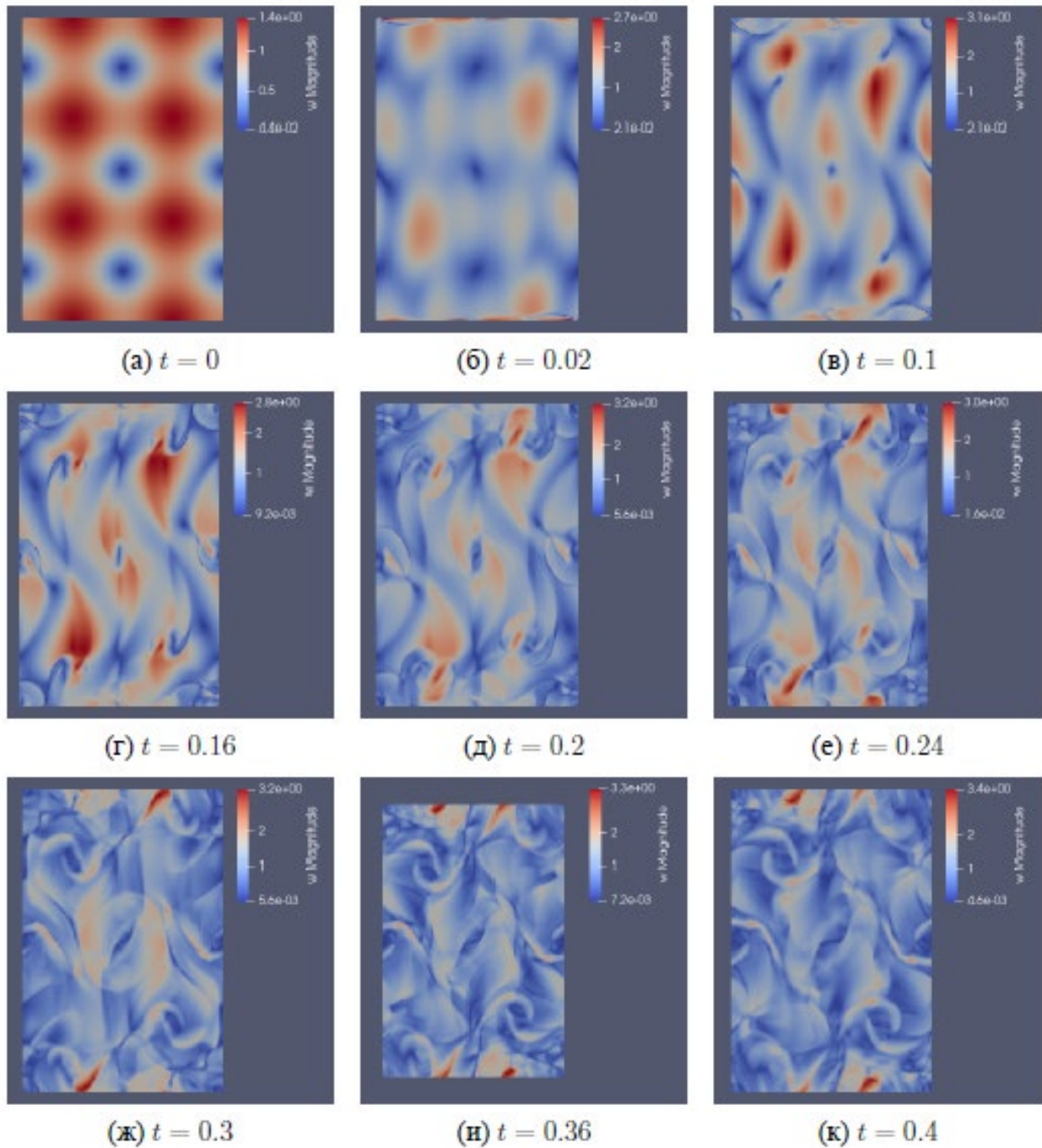


Рис. 9. Модуль скорости плазмы на ряд моментов времени при диффузионном методе коррекции.

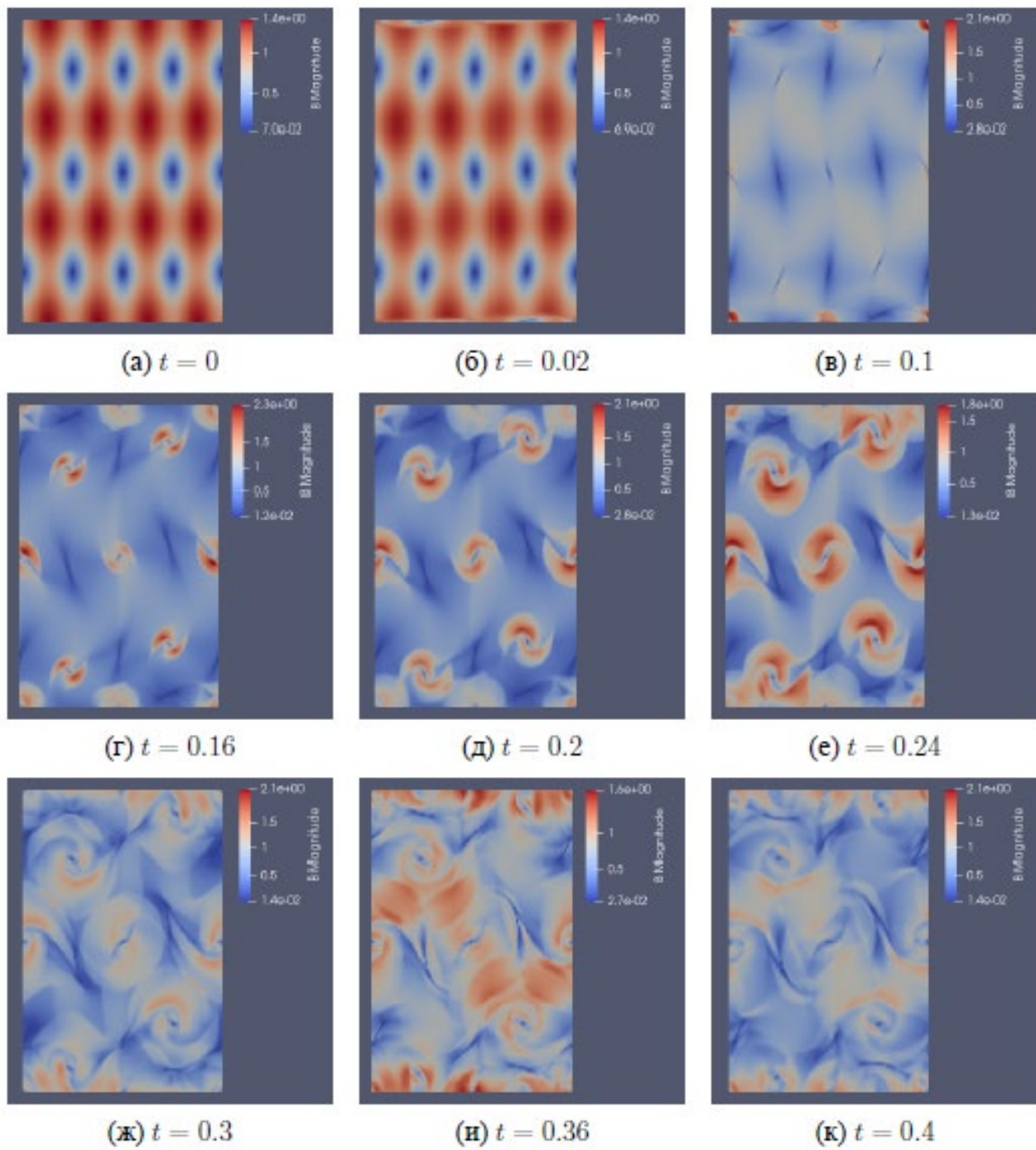


Рис. 10. Модуль индукции магнитного поля на ряд моментов времени при диффузионном методе коррекции

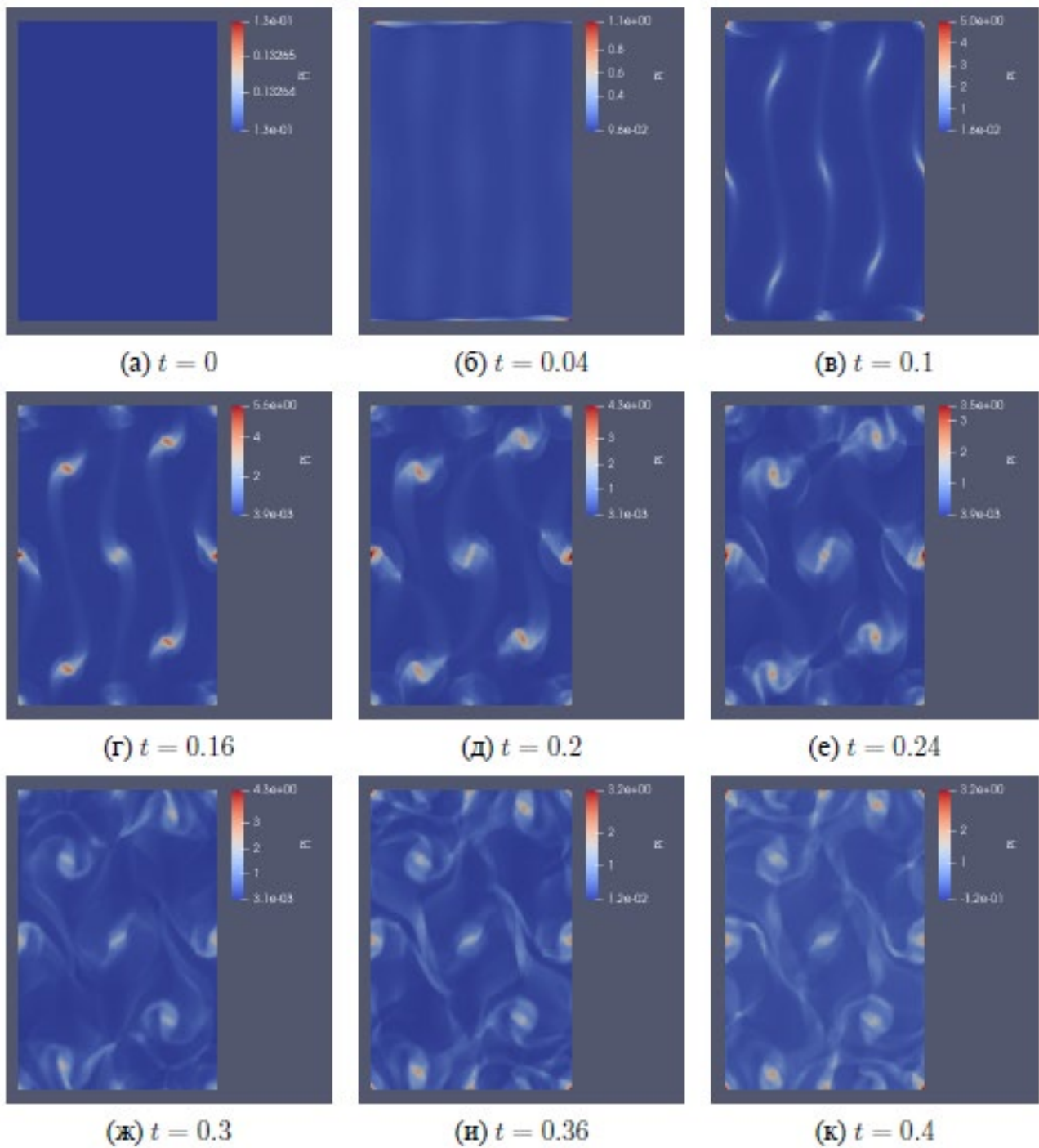


Рис. 11. Распределение давления плазмы на ряд моментов времени при диффузионном методе калибровки

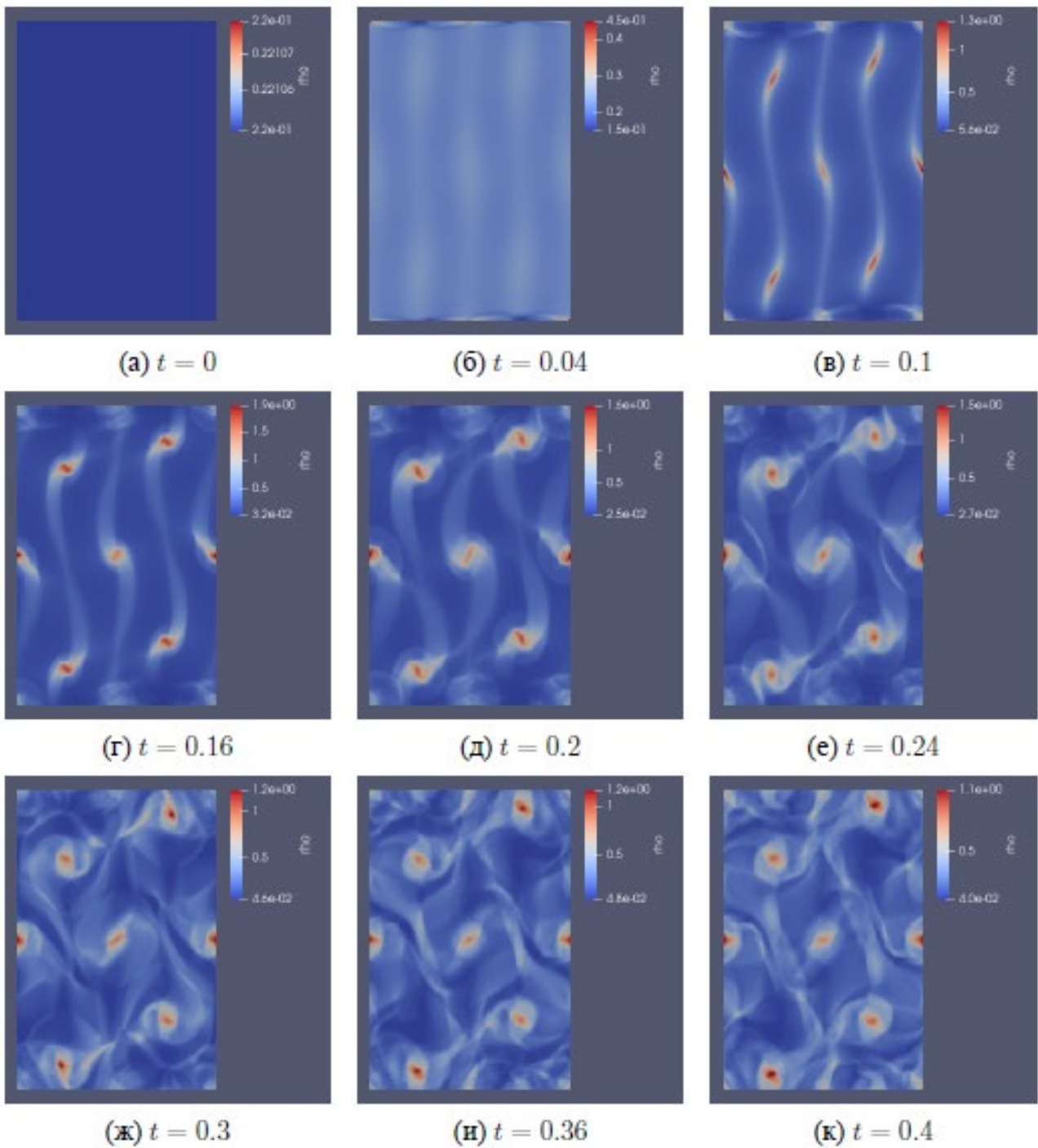


Рис. 12. Распределение плотности плазмы на ряд моментов времени при диффузионном методе калибровки

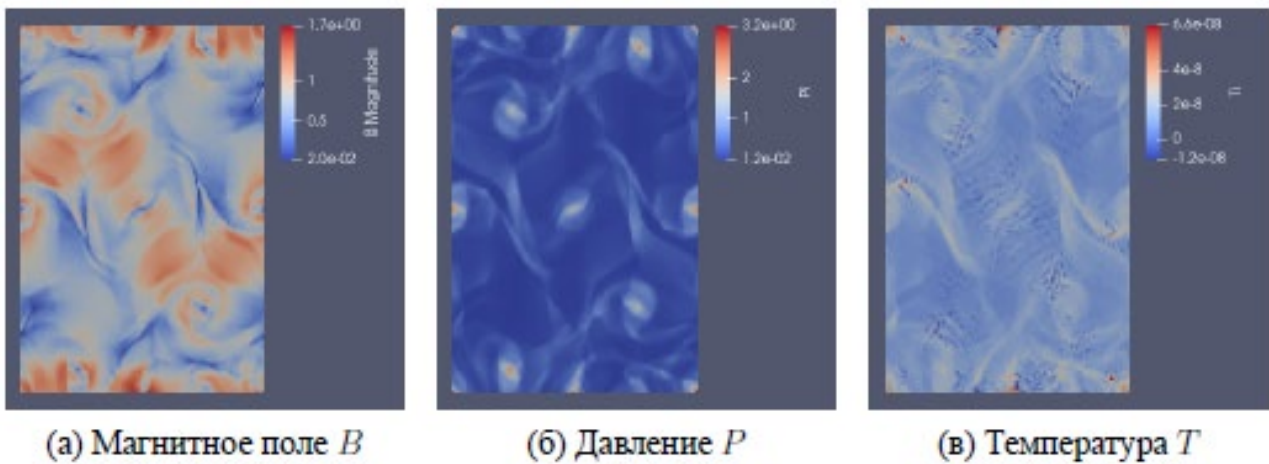


Рис. 13. Аномальные распределения расчетных величин в отсутствие калибровки, момент времени $t=0.4$.

Заключение

Приведенные примеры показывают, что проекционный и диффузионный методы коррекции расчетного магнитного поля обеспечивают выполнение условия соленидальности с хорошей точностью и позволяют получить физически корректное решение системы уравнений МГД для нестационарных постановок задач. Затраты вычислительных ресурсов на их реализацию оказываются довольно умеренными сравнительно с общими затратами на вычисления при моделировании плазменных потоков, взаимодействующих с магнитным полем.

Оба метода воспроизводят качественные и количественные характеристики магнитного поля и гидродинамических структур с высоким разрешением. Вычислительные эксперименты, приведенные в данной работе, показали, что диффузионный метод, как правило, оказывается более точен и позволяет производить вычисления с сохранением свойств монотонности и устойчивости разностных решений на нерегулярных разностных сетках. Несмотря на несколько более сложный вид оператора корректировки, данный метод достаточно прост в реализации. Он оказался весьма эффективным в устранении локализованных участков течения, в которых погрешность расчетной дивергенции магнитного поля заметно превышает среднюю по всей области расчета. В сравнении с проекционным методом диффузионный имеет ряд преимуществ. Уравнение диффузии (8) решается относительно магнитного поля, поэтому граничные условия по магнитному полю не имеют присущих

проекционному методу ограничений. По той же причине диффузионный метод не продуцирует осцилляции магнитного поля на границах расчетной области. Численные эксперименты по сравнению различных вариантов решения диффузионного уравнения (8), по явной и неявной схемам, показали, что с помощью стабилизированной явной схемы [28] достигается экономия времени примерно в полтора-два раза по сравнению с решением по неявной схеме. В этих экспериментах использовались итерационные солверы из библиотеки AztecOO [33].

Отметим также, что качество диффузионной методики не ухудшается при изменении отношения $\frac{P}{\mathbf{B}^2}$ в весьма широком диапазоне значений.

Список литературы

1. LeVeque, Randall (1990), Numerical Methods for Conservation Laws, ETH Lectures in Mathematics Series, Birkhauser-Verlag.
2. Toro, E. F. (1999), Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag.
3. LeVeque, Randall (2002), Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press.
4. Powell K.G. An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics // Upwind and High-Resolution Schemes. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997. — P. 570-583.
5. Tanaka T.. Finite Volume TVD Scheme on an Unstructured Grid System for Three- Dimensional MHD Simulation of Inhomogeneous Systems Including Strong Background Potential Fields. Journal of computational physics 111, 381-389 (1994)
6. Brackbill J., Barnes D. The Effect of Nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations // Journal of Computational Physics. — 1980. — Vol. 35, no. 3. — P. 426-430.
7. Zachary A.L., Malagoli A., Colella P. A Higher-Order Godunov Method for Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1994. — Vol. 15, no. 2. — P. 263-284.
8. John F. Hawley, James M. Stone. MOCCT: A numerical technique for astrophysical MHD. Computer Physics Communications, 89 (1995), 127-148.
9. Gardiner T.A., Stone J.M. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport // Journal of Computational Physics. — 2005. — Vol. 205, no. 2. — P. 509-539.
10. Dumbser M., Balsara D., Tavelli M., Fambri F. A divergence-free semi-implicit finite volume scheme for ideal, viscous, and resistive magnetohydrodynamics // Int. J. Numer. Meth. Fluids 2018; 00:1–26.
11. Stone, James M. Norman, Michael L. ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. Astrophysical Journal Supplement, 1992, v.80, p.791. DOI: 10.1086/191681.

12. Hayes J.C., Norman M.L., Fiedler R.A., [et al.]. Simulating Radiating and Magnetized Flows in Multiple Dimensions with ZEUS-MP // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2006. — July. — Vol. 165, no. 1. — P. 188.
13. Duffell, Paul C. et al. The Santa Barbara Binary-disk Code Comparison. *The Astrophysical Journal*, 2024, V. 970, Issue 2, id.156, 24 pp.
DOI: 10.3847/1538-4357/ad5a7e.
14. Busto S., Dumbser M. A New Thermodynamically Compatible Finite Volume Scheme for Magnetohydrodynamics // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2023. — Vol. 61, no. 1. — P. 343-364.
15. Toth G. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 161, no. 2. — P. 605-652.
16. Ramshaw J., A method for enforcing the solenoidal condition on magnetic fields in numerical calculation. *J. Comput. Phys.* 52, 592 (1983).
17. Marder B. A method for incorporating Gauss' laws into electromagnetic PIC codes. *Journal of Computational Physics*, 1987, 2, DOI: 10.1016/0021-9991(87)90043-X
18. Feng X., Zhang S., Xiang C., [et al.]. A hybrid solar wind model of the CESE+HLL method with a Yin-Yang overset grid and an AMR grid // *The Astrophysical Journal*. — 2011. — May. — Vol. 734, no. 1. — P. 50.
19. Shen F., Shen C., Zhang J., [et al.]. Evolution of the 12 July 2012 CME from the Sun to the Earth: Data-constrained three-dimensional MHD simulations // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2014. — Vol. 119, no. 9. — P. 7128-7141.
20. Zhang M., Feng X. A Comparative Study of Divergence Cleaning Methods of Magnetic Field in the Solar Coronal Numerical Simulation // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. — 2016. — Vol. 3.
21. Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., Gombosi T.I., De Zeeuw D.L. A Solution- Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics // *Journal of Computational Physics*. — 1999. — Vol. 154, no. 2. — P. 284-309.
22. Van der Holst B., Keppens R. Hybrid block-AMR in cartesian and curvilinear coordinates: MHD applications // *Journal of Computational Physics*. — 2007. — Vol. 226, no. 1. — P. 925-946.

23. Munz C.-D., Ommes P, Schneider R. A three-dimensional finite-volume solver for the Maxwell equations with divergence cleaning on unstructured meshes // *Computer Physics Communications*. — 2000. — Vol. 130, no. 1. — P. 83-117.
24. Powell K.G. An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics // *Upwind and High-Resolution Schemes*. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997. — P. 570-583
25. FLASH Center of Computational Science. URL: <https://astro.uchicago.edu/research/flash.php>. — 2019. — Vol. 89, no. 1/2. — P. 16-42.
26. Gasilov V.A., Boldarev A.S., Olkhovskaya O.G., Boykov D.S., Sharova Yu.S., Savenko N.O., Kotelnikov A. M., «MARPLE: software for multiphysics modelling in continuous media», *Numerical Methods and Programming*. 24 (4), 316–338 (2023). Doi 10.26089/NumMet.v24r423.
27. Корн Г.А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: «Наука», 1974. — С. 177.
28. Ольховская О.Г. Проекционно-сеточные схемы для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка на нерегулярных сетках // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. — Москва, 2018. — № 226. — С. 1-24.
29. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. On stabilization of an explicit scheme for solving a nonlinear equation of parabolic type. — *Doklady Mathematics*, 2022, Volume 106, issue 2, pages 326 — 331. DOI:<https://doi.org/10.1134/S1064562422050088>
30. Athena. Spherical Blast Waves Test. — URL: <https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/blast/blast.html>.
31. Athena. Orszag-Tang Vortex Test. — URL: <https://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/orszag-tang/pagesource.html>.
32. Orszag S.A., Tang C.-M. Small-scale structure of two-dimensional magneto-hydrodynamic turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1979. — Vol. 90, no. 1. — P. 129-143.
33. Heroux M.A. Trilinos. AztecOO User Guide // Sandia National Laboratories. — 2007. — URL: <https://trilinos.github.io/pdfs/AztecOOUserGuide.pdf>.