



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 64 за 2024 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[Е.Н. Аристова](#), [Н.И. Караваева](#)

Реализация бикомпактной  
схемы для HOLO алгоритма  
решения задач переноса  
излучения в среде

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аристова Е.Н., Караваева Н.И. Реализация бикомпактной схемы для HOLO алгоритма решения задач переноса излучения в среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 64. 27 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-64>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-64>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева**

**Реализация бикомпактной схемы  
для HOLO-алгоритма решения задач  
переноса излучения в среде**

**Москва — 2024**

*Аристова Е.Н., Караваяева Н.И.*

**Реализация бикомпактной схемы для HOLO-алгоритма решения задач переноса излучения в среде**

Бикомпактные схемы для HOLO-алгоритма решения уравнения переноса были применены для решения модельных задач переноса излучения в среде (первой и второй задач Флека). Основной идеей HOLO-алгоритмов является ускорение сходимости итерационных процессов за счёт совместного решения кинетических уравнений высокой и низкой размерностей (HO – high order, LO – low order). Схемы строятся методом прямых на минимальном двухточечном шаблоне и обладают четвёртым порядком аппроксимации по пространству. Для интегрирования по времени использовался метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации. Были проведены верификация и валидация схемы. Решения первой и второй задач Флека хорошо совпали с решениями, полученными другими методами. Была предложена модификация второй задачи Флека, и исследована зависимость скорости движения фронта тепловой волны от коэффициента поглощения в оптически толстой области.

**Ключевые слова:** уравнение переноса, метод квазидиффузии, HOLO-алгоритм решения уравнения переноса, бикомпактная схема, диагонально-неявный метод Рунге–Кутты, задача Флека.

*Elena Nikolaevna Aristova, Nataliia Igorevna Karavaeva*

**Implementation of bicomcompact scheme for the HOLO algorithm for solving radiative transport problems in a medium**

Bicomcompact schemes for the HOLO algorithm for solving the transport equation were applied to solve model problems of radiation transport in a medium (the first and the second Fleck problems). The main idea of HOLO algorithms is to accelerate the convergence of iterative processes due to the joint solving of high order (HO) and low order (LO) kinetic equations. The schemes are constructed by the method of lines on a minimal two-point stencil and have the fourth order of approximation in space. The Runge-Kutta method of the third order of approximation was used for integration over time. Verification and validation of the schemes were carried out. Solutions of the first and the second Fleck problems by the proposed method coincided well with solutions obtained by other methods. A modification of the second Fleck problem was proposed to investigate the dependence of the velocity of the thermal wave front on the absorption coefficient in the optically thick region.

**Key words:** transport equation, quasi-diffusion method, HOLO algorithm for transport equation solving, bicomcompact scheme, diagonally implicit Runge–Kutta method, Fleck problem.

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| 1. Введение .....   | 3  |
| 2. Постановка задачи .....  | 4  |
| 3. Многогрупповое приближение .....                                     | 5  |
| 4. HОLO-алгоритм .....  | 6  |
| 5. Разностная схема для HОLO-алгоритма.....                             | 9  |
| 6. Итерационный процесс .....   | 11 |
| 7. Численное решение задач о взаимодействии излучения с веществом ..... | 13 |
| 8. Особенности старта и детали расчёта.....                             | 21 |
| 9. Заключение .....   | 23 |
| Литература .....  | 23 |

### 1. Введение

Моделирование процессов переноса излучения в среде является неотъемлемой частью решения многих научных и практических задач [1-2]. При решении задач высокотемпературной радиационной газовой динамики при использовании метода расщепления по физическим процессам выделяют блок совместного решения уравнения переноса излучения с уравнением энергии [3]. Решение уравнений этого блока позволяет описать процессы поглощения, излучения и переноса фотонов.

Численное решение уравнения переноса излучения сопряжено с рядом трудностей, в числе которых высокая размерность задачи, нелинейность и нелокальность взаимодействия излучения с веществом, широкий диапазон, в котором изменяются коэффициенты поглощения [3]. Для эффективного понижения размерности используются HОLO-алгоритмы, в которых организуется совместное решение уравнений высокой размерности (НО – high order) и низкой размерности (ЛО – low order) [4-12]. Нелинейность и жесткость задачи обуславливают использование неявных схем. Значительное изменение коэффициента поглощения от ячейки к ячейке ведет к необходимости использовать разностные схемы на компактном шаблоне.

Перечисленным требованиям отвечают бикомпактные схемы, предложенные Б.В. Роговым и его коллегами для решения уравнения переноса [13-19], а также разработанные авторами на их основе бикомпактные схемы для уравнений более низкой размерности [20, 21]. Схемы строятся методом прямых на минимальном двухточечном шаблоне, обладают четвёртым порядком аппроксимации по пространству. Для интегрирования по времени может быть использован метод любого порядка аппроксимации. Используемый авторами диагонально-неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации хорошо зарекомендовал себя при решении модельной задачи переноса

нейтронов [22] и поэтому в рамках данной работы применяется для интегрирования по времени. Бикомпактные схемы для HОLО-алгоритма решения задач переноса излучения были ранее исследованы на аналитических тестах [23].

В этой работе предложенные бикомпактные схемы применяются для решения задач Флека [24, 25]: первой задачи Флека, в которой коэффициент поглощения является непрерывной функцией, а также второй задачи Флека и её модификаций, в которых присутствуют разрывы коэффициента поглощения, а его значения изменяются на несколько порядков.

## 2. Постановка задачи

При решении системы уравнений газовой динамики выделяют блок решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии. В одномерной плоской геометрии задача принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_v}{\partial x} + \kappa'_v I_v = \kappa'_v I_v^{Pl}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \int_0^1 \int_{-1}^1 \kappa'_v (I_v - I_v^{Pl}) dv d\mu. \quad (2)$$

Уравнение переноса (1) и уравнение энергии (2) дополняются уравнением состояния

$$\varepsilon = \varepsilon(T), \quad (3)$$

а также начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} I_v(x, 0, \mu, \nu) &= \psi(x, \mu, \nu), \\ I_v(x, t, \mu, \nu) \Big|_{x=0} &= \varphi_0(t, \mu, \nu) \quad \text{при } \mu > 0, \\ I_v(x, t, \mu, \nu) \Big|_{x=L} &= \varphi_L(t, \mu, \nu) \quad \text{при } \mu < 0, \\ T(x, 0) &= T^*(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Искомыми являются следующие функции:  $I_v(x, t, \mu, \nu)$  – спектральная интенсивность излучения, проинтегрированная по азимутальному углу,  $T(x, t)$  – температура вещества. В (1-4) используются следующие обозначения:  $\varepsilon(T)$  – внутренняя энергия вещества,  $\kappa'_v(T, \nu)$  – спектральный коэффициент поглощения излучения с поправкой на вынужденное испускание,  $I_v^{Pl}(T, \nu)$  – спектральная интенсивность равновесного излучения, проинтегрированная по азимутальному углу,  $c$  – скорость света,  $\mu$  – косинус угла направления полета частицы, составляемого с направлением оси  $x$ .

Спектральная интенсивность равновесного излучения, проинтегрированная по азимутальному углу, представляет собой функцию Планка, умноженную на  $2\pi$ :

$$I_v^{Pl}(T, \nu) = 2\pi \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1},$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана.

### 3. Многогрупповое приближение

Задача (1-4) может быть решена в многогрупповом приближении, тогда уравнения (1-2), начальные и граничные условия (4) примут вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I^p}{\partial t} + \mu \frac{\partial I^p}{\partial x} + \kappa_U^p I^p = \kappa_{Pl}^p I_{Pl}^p, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \int \sum_{-1}^p (\kappa_U^p I^p - \kappa_{Pl}^p I_{Pl}^p) d\mu, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I^p(x, 0, \mu) &= \psi^p(x, \mu), \quad p = 1, \dots, P, \\ I^p(x, t, \mu) \Big|_{x=0} &= \varphi_0^p(t, \mu) \quad \text{при } \mu > 0, \\ I^p(x, t, \mu) \Big|_{x=L} &= \varphi_L^p(t, \mu) \quad \text{при } \mu < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$T(x, 0) = T^*(x), \quad (8)$$

где  $p$  – номер группы,

$$I^p(x, t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu(x, t, \mu, \nu) d\nu, \quad I_{Pl}^p(T) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu,$$

$$\psi^p(x, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \psi(x, \mu, \nu) d\nu, \quad \varphi_0^p(t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi_0(t, \mu, \nu) d\nu, \quad \varphi_L^p(t, \mu) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi_L(t, \mu, \nu) d\nu,$$

$$\kappa_{Pl}^p(T) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \kappa'_\nu(T, \nu) I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu \Big/ \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(T, \nu) d\nu,$$

$$\kappa_U^p(T, \theta^p) = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \kappa'_\nu(T, \nu) I_\nu^{Pl}(\theta^p, \nu) d\nu \Big/ \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} I_\nu^{Pl}(\theta^p, \nu) d\nu,$$

$I^p(x, t, \mu)$  – групповая интенсивность излучения,  $\theta^p$  – эффективная температура излучения [26],  $\kappa_U^p$ ,  $\kappa_{PI}^p$  – коэффициенты поглощения в  $p$ -й группе.

Правую часть уравнения (5) для удобства обозначим  $Q^p$  и преобразуем к виду

$$Q^p = \kappa_{PI}^p I_{PI}^p = 2\kappa_{PI}^p \sigma^p T^4,$$

где  $\sigma^p(T) = \frac{2h\pi}{c^2 T^4} \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \nu^3 (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1} d\nu$ .

#### 4. HOLO-алгоритм

Для понижения размерности задачи (3, 5-8) и получения многогрупповой системы уравнений квазидиффузии (уравнений LO<sub>1</sub>) проводится осреднение по угловой переменной. Вводятся групповые плотность  $U^p(x, t) = \int_{-1}^1 I^p(x, t, \mu) d\mu$  и поток излучения  $W^p(x, t) = \int_{-1}^1 \mu I^p(x, t, \mu) d\mu$ , уравнение (5) интегрируется по  $\mu$  с весами 1 и  $\mu$ , и получается система

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U^p}{\partial t} + \frac{\partial W^p}{\partial x} + \kappa_U^p U^p = Q_1^p, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W^p}{\partial t} + \frac{\partial (D^p U^p)}{\partial x} + \kappa_R^p W^p = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $Q_1^p = \int_{-1}^1 Q^p d\mu = 2Q^p = 4\kappa_{PI}^p \sigma^p T^4 = \kappa_{PI}^p U_{PI}^p$ ,  $U_{PI}^p = 4\sigma^p T^4$ ,  $\kappa_R^p$  – коэффициент поглощения, осреднённый по Росселанду [26], в  $p$ -й группе с эффективной температурой  $\theta^p$ ,  $D^p(x, t)$  – групповой коэффициент квазидиффузии, замыкающий систему уравнений [4],

$$D^p(x, t) = \int_{-1}^1 \mu^2 I^p(x, t, \mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^1 I^p(x, t, \mu) d\mu. \quad (10)$$

Начальные условия для системы (9) также получаются интегрированием условий (7) по  $\mu$  с весами 1 и  $\mu$ :

$$U^p(x, 0) = \int_{-1}^1 \psi^p(x, \mu) d\mu, \quad W^p(x, 0) = \int_{-1}^1 \mu \psi^p(x, \mu) d\mu, \quad p = 1, \dots, P.$$

Краевые условия в классическом варианте постановки задачи представляются в виде дробно-линейных функционалов

$$\begin{aligned} \frac{W^p - W_{in}^p}{U^p - U_{in}^p} \Big|_{x=0} &= c_0^p, \quad \frac{W^p - W_{in}^p}{U^p - U_{in}^p} \Big|_{x=L} = c_L^p, \quad p=1, \dots, P, \\ U_{in,0}^p &= U_{in}^p \Big|_{x=0} = \int_0^1 \varphi_0^p(t, \mu) d\mu, \quad W_{in,0}^p = W_{in}^p \Big|_{x=0} = \int_0^1 \mu \varphi_0^p(t, \mu) d\mu, \\ U_{in,L}^p &= U_{in}^p \Big|_{x=L} = \int_{-1}^0 \varphi_L^p(t, \mu) d\mu, \quad W_{in,L}^p = W_{in}^p \Big|_{x=L} = \int_{-1}^0 \mu \varphi_L^p(t, \mu) d\mu, \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты  $c_0^p$ ,  $c_L^p$  рассчитываются по выходящей из области функции распределения

$$\begin{aligned} c_0^p &= \int_{-1}^0 \mu I^p(0, t, \mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^0 I^p(0, t, \mu) d\mu, \\ c_L^p &= \int_0^1 \mu I^p(L, t, \mu) d\mu \Big/ \int_0^1 I^p(L, t, \mu) d\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Следующим этапом осреднения является осреднение по энергии, в результате чего получается одногрупповая система уравнений квазидиффузии (уравнения LO<sub>2</sub>). Введём одногрупповые плотность излучения  $U = \sum_{p=1}^P U^p$  и поток излучения  $W = \sum_{p=1}^P W^p$ . Просуммируем уравнения (9) по группам и получим

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} + \kappa_U U = Q_{pl}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(DU)}{\partial x} + \kappa_R W + \zeta U = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$Q_{pl} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty Q_v dv = 4\kappa_{pl} \sigma T^4, \quad \kappa_{pl} = \sum_{p=1}^P \kappa_{pl}^p U_{pl}^p \Big/ \sum_{p=1}^P U_{pl}^p,$$

$$D = \sum_{p=1}^P D^p U^p \Big/ \sum_{p=1}^P U^p, \quad \kappa_U = \sum_{p=1}^P \kappa_U^p U^p \Big/ \sum_{p=1}^P U^p, \quad (14)$$

$$\kappa_R = \sum_{p=1}^P \kappa_R^p |W^p| \Big/ \sum_{p=1}^P |W^p|, \quad \zeta = \sum_{p=1}^P (\kappa_R^p - \kappa_R) W^p \Big/ \sum_{p=1}^P U^p,$$



где  $D$  – коэффициент квазидиффузии,  $\zeta$  – функционал, введённый для корректировки осреднения  $\kappa_R^P$  с возможно знакопеременной весовой функцией  $W^p$ ,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана. Начальные условия для (13) также получаются суммированием групповых значений плотности и потока излучения

$$U(x,0) = \sum_{p=1}^P U^p(x,0), \quad W(x,0) = \sum_{p=1}^P W^p(x,0).$$

Аналогично поступают с граничными условиями. Введём

$$\begin{aligned} U_{in,0} &= U_{in}|_{x=0} = \sum_{p=1}^P U_{in,0}^p, & W_{in,0} &= W_{in}|_{x=0} = \sum_{p=1}^P W_{in,0}^p, \\ U_{in,L} &= U_{in}|_{x=L} = \sum_{p=1}^P U_{in,L}^p, & W_{in,L} &= W_{in}|_{x=L} = \sum_{p=1}^P W_{in,L}^p, \\ c_0 &= \sum_{p=1}^P c_0^p (U^p(0,t) - U_{in,0}) / \sum_{p=1}^P (U^p(0,t) - U_{in,0}), \\ c_L &= \sum_{p=1}^P c_L^p (U^p(L,t) - U_{in,L}) / \sum_{p=1}^P (U^p(L,t) - U_{in,L}). \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда граничные условия примут вид

$$\frac{W - W_{in}}{U - U_{in}} \Big|_{x=0} = c_0, \quad \frac{W - W_{in}}{U - U_{in}} \Big|_{x=L} = c_L. \tag{16}$$

Система (13) решается совместно с уравнением энергии (6), которое записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \kappa_U U - Q_{pl} \tag{17}$$

и дополняется начальным условием (8). Для замыкания системы уравнений (13,17) она дополняется уравнением состояния (3) в виде [25]

$$\varepsilon = aT. \tag{18}$$

Коэффициенты поглощения  $\kappa_U$ ,  $\kappa_R$  и правая часть  $Q_{pl}$  являются нелинейными функциями температуры. Уравнение состояния (3) также может иметь другой вид и представлять собой нелинейную функцию температуры.

В рамках HOLO-алгоритма осуществляется эффективное взаимодействие между уравнениями высокого порядка HO (5) и уравнениями низкого порядка LO<sub>1</sub> (9) и LO<sub>2</sub> (13). Решая уравнение переноса (НО) (5), получают групповые коэффициенты граничных условий (12) и групповой коэффициент

квазидиффузии (10) для каждой группы для дальнейшего решения многогрупповой системы уравнений квазидиффузии  $LO_1$  (9). После решения системы  $LO_1$  (9) производят суммирование по группам и получают коэффициенты граничных условий (15) и коэффициент квазидиффузии (14), необходимые для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии  $LO_2$  (13) совместно с уравнением энергии (17). В результате совместного решения уравнений (13) и (17) получают значения температуры, через которую пересчитываются значения коэффициентов и правых частей, входящих в (5,9).

## 5. Разностная схема для HОLО-алгоритма

Для HОLО-алгоритма предлагается использовать разностную схему, ранее описанную в [23]. Для каждого из этапов HОLО-алгоритма, на которых решаются уравнения НО (5),  $LO_1$  (9) и  $LO_2$  (13), используется бикомпактная схема, построенная на двухточечном шаблоне методом прямых. Порядок аппроксимации по пространству равен четырём, а порядок аппроксимации по времени определяется используемым численным методом интегрирования по времени. В данной работе будет использоваться диагонально-неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 1/3 & 0 & 1/3 & \\ 1 & -1/12 & 3/4 & 1/3 \\ \hline & -1/12 & 3/4 & 1/3 \end{array} \quad (19)$$

Каждая стадия метода (19) может быть реализована как неявный метод Эйлера [27].

Построение пространственной аппроксимации состоит из нескольких этапов. Список неизвестных расширяют, и помимо значений искомой функции в узлах в него включают интегральные средние по ячейке. Уравнения и их дифференциальные следствия при дифференцировании по пространственной переменной интегрируют по ячейке. Для замыкания получаемой системы используют формулу Эйлера–Маклорена, что и определяет четвёртый порядок аппроксимации по пространству. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется по времени при помощи метода (19).

Для уравнения НО (5) система уравнений, полученная методом прямых, принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\bar{I}_i^p}{dt} + \frac{\mu}{h} (I_{i+1}^p - I_i^p) + \overline{\kappa_{U_i}^p I_i^p} = \bar{Q}_i^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d(I_{i+1}^p - I_i^p)}{dt} + \frac{6\mu}{h} (I_{i+1}^p - 2\bar{I}_i^p + I_i^p) + (\kappa_U^p I^p)_{i+1} - (\kappa_U^p I^p)_i = Q_{i+1}^p - Q_i^p, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\bar{I}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} I^p dx$ ,  $\bar{Q}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q^p dx$ . Для среднего по ячейке от произведения

$\overline{\kappa_{U_i}^p I_i^p}$  используется формула четвёртого порядка аппроксимации [28]

$$\overline{\kappa_{U_i}^p I_i^p} = (\kappa_{U_i}^p - \kappa_{U_{i+1/2}}^p) I_i^p / 6 + \kappa_{U_{i+1/2}}^p \bar{I}_i^p + (\kappa_{U_{i+1}}^p - \kappa_{U_{i+1/2}}^p) I_{i+1}^p / 6. \quad (21)$$

Интегрирование по времени системы (20) при помощи метода (19) приводит к расчёту неизвестных на новом временном слое в режиме бегущего счёта.

Система дифференциальных уравнений для многогрупповой системы уравнений квазидиффузии LO<sub>1</sub> (9) записывается в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{d\bar{U}_i^p}{dt} + \frac{1}{h} (W_{i+1}^p - W_i^p) + \overline{\kappa_U^p U_i^p} = \bar{Q}_{1,i}^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d\bar{W}_i^p}{dt} + \frac{1}{h} (D_{i+1}^p U_{i+1}^p - D_i^p U_i^p) + \overline{\kappa_R^p W_i^p} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{d(U_{i+1}^p - U_i^p)}{dt} + \frac{6}{h} (W_{i+1}^p - 2\bar{W}_i^p + W_i^p) + (\kappa_U^p U^p)_{i+1} - (\kappa_U^p U^p)_i = Q_{1,i+1}^p - Q_{1,i}^p, \\ \frac{1}{c} \frac{d(W_{i+1}^p - W_i^p)}{dt} + \frac{6}{h} (D_{i+1}^p U_{i+1}^p - 2\bar{D}_i^p U_i^p + D_i^p U_i^p) + (\kappa_R^p W^p)_{i+1} - (\kappa_R^p W^p)_i = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\bar{U}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U^p dx$ ,  $\bar{W}_i^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} W^p dx$ ,  $\bar{Q}_{1,i}^p = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_1^p dx$ . Средние от произведений,

входящие в первые два уравнения (22), аппроксимируются аналогично (21).

Среднее  $\overline{D_i^p U_i^p}$  аппроксимируется формально со вторым порядком:

$\overline{D_i^p U_i^p} = \bar{D}_i^p \cdot \bar{U}_i^p$ , но ввиду кинетической согласованности схем и того, что коэффициент  $D_i^p$  не является независимым коэффициентом, это в итоге не приводит к понижению порядка сходимости [28].

Использование метода (19) для интегрирования по времени системы (22) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена методом потоковой прогонки.

Аналогичный вид имеет система дифференциально-разностных уравнений, получаемая методом прямых для системы (13)

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{h} (W_{i+1} - W_i) + \overline{\kappa_U U}_i = \bar{Q}_{Pl_i}, \\
\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \frac{1}{h} ((DU)_{i+1} - (DU)_i) + \overline{\kappa_R W}_i + \overline{\zeta U}_i = 0, \\
\frac{1}{c} \frac{\partial (U_{i+1} - U_i)}{\partial t} + \frac{6}{h} (W_{i+1} - 2\bar{w}_i + W_i) + (\kappa_U U)_{i+1} - (\kappa_U U)_i = Q_{Pl_{i+1}} - Q_{Pl_i}, \\
\frac{1}{c} \frac{\partial (W_{i+1} - W_i)}{\partial t} + \frac{6}{h} ((DU)_{i+1} - 2\overline{(DU)}_i + (DU)_i) + \\
+ (\kappa_R W)_{i+1} - (\kappa_R W)_i + (\zeta U)_{i+1} - (\zeta U)_i = 0.
\end{array} \right. \quad (23)$$

Уравнение баланса энергии интегрируется по времени также методом (19).

Бикомпактные схемы для уравнения переноса были разработаны Б.В. Роговым и его коллегами [13-19], бикомпактные схемы для многогрупповой и одногрупповой систем квазидиффузии были разработаны авторами [20, 21]. Так как схемы построены в рамках одной ячейки, можно использовать неравномерную сетку по пространству, а также менять шаг по времени в процессе расчёта в зависимости от того, сколько итераций необходимо для сходимости итерационных процессов.

## 6. Итерационный процесс

Используемая неявная разностная схема для HОLО-алгоритма, а также нелинейный вид зависимости коэффициентов системы и правых частей от температуры определяют необходимость организовать итерационный процесс для нахождения решения задачи. В [23, 25] подробно описаны все этапы итерационного процесса, в рамках этой работы приведём его короткое описание и схему (рис. 1).

Расчёт начинается с внутренних квазиньютоновских итераций, в процессе которых определяется следующее приближение к температуре на новом слое по времени с точностью  $\varepsilon_T$ . Для этого решается одногрупповая система уравнений квазидиффузии LO<sub>2</sub> (13) совместно с уравнением энергии (17). По новому приближению для температуры рассчитываются коэффициенты и правые части в уравнении переноса НО (5), после чего находится новое приближение для спектральной интенсивности излучения для различных угловых направлений в каждой из групп по энергии. По полученному решению многогруппового уравнения переноса находятся коэффициенты граничных условий и многогрупповые коэффициенты квазидиффузии, которые используются для нахождения нового приближения для групповых плотности и потока излучения. Найденные значения используются для осреднения по

энергии и нахождения коэффициентов, необходимых для решения одногрупповой системы уравнений квазидиффузии  $LO_2$  (13).

Всё описанное в абзаце выше представляет собой последовательность действий, которые повторяются во внешнем итерационном процессе. Итерации повторяются до сходимости с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Во внутреннем итерационном процессе слагаемые, входящие в правую часть (17), линеаризуют в окрестности температуры, рассчитанной на предыдущей внутренней итерации, считая значения одногрупповой плотности излучения  $U$  известными с предыдущей внутренней итерации, при этом производную  $\frac{dQ_{pl}}{dt}$  находят аналитически, а производную одногруппового

коэффициента поглощения  $\frac{\delta\kappa_U}{\delta T}$  вычисляют разностно по значениям коэффициента поглощения и температуры, известным из двух предыдущих внешних итераций. В качестве начального приближения для значений на следующем шаге по времени выбираются значения, полученные на текущем шаге.

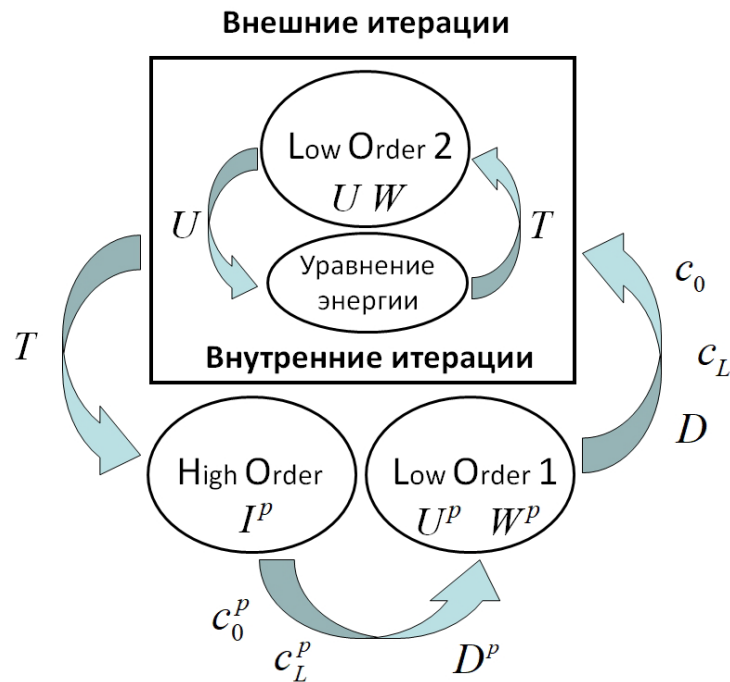


Рис. 1. Схема взаимодействия решений уравнений НО (5),  $LO_1$  (9),  $LO_2$  (13) и уравнения энергии (17) во внешнем и внутреннем итерационных процессах.

## 7. Численное решение задач о взаимодействии излучения с веществом

Предложенная схема ранее была исследована на аналитическом тесте, была показана сходимость схемы с третьим порядком по времени и четвёртым по пространству [23]. Теперь применим разностную схему для решения задач о взаимодействии излучения с веществом. Для удобства будем использовать энергетические единицы для температуры и частоты. Пусть дан одномерный плоскопараллельный слой толщиной  $L=4$  см, на левую границу которого падает излучение с планковским спектром, соответствующим температуре  $T=1$  кэВ, коэффициент излучения вещества имеет вид  $\kappa_\nu = \frac{\kappa_0}{\nu^3} (1 - e^{-\nu/T})$  см<sup>-1</sup> (значения коэффициента  $\kappa_0$  см. в Табл. I), уравнение состояния выбрано в форме (18), где  $a = 8.1 \cdot 10^{-3}$ . Начальная температура слоя  $T^* = 10^{-4}$ .

Пусть  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_T = 10^{-6}$ . Будем использовать 15-групповое приближение, сетку по частоте (кэВ) зададим набором точек  $[0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4, 2.7, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15]$ . Для дискретизации по угловой переменной выберем сетку из 5 узлов квадратуры Гаусса на отрезках  $[-1,0]$  и  $[0,1]$ . Будем использовать равномерную сетку с шагом  $h$  по пространству,  $h = L/N_x$ . Для начала применим схему для задачи с непрерывным коэффициентом излучения вещества [24]. В этом случае будет использоваться также равномерная сетка с шагом  $\Delta t$  по времени,  $\Delta t = t/N_t$ .

Таблица I.

Коэффициент  $\kappa_0$  в задачах о взаимодействии излучения с веществом

| Первая задача Флека               | Вторая задача Флека   | Модифицированная вторая задача Флека   |
|-----------------------------------|---|--|
| $\kappa_0 = 27$ при $x \in [0,4]$ | $\kappa_0 = \begin{cases} 27, & 0 \leq x < 2, \\ 10^4, & 2 \leq x \leq 2.4, \\ 27, & 2.4 < x \leq 4. \end{cases}$ | $\kappa_0 = \begin{cases} 27, & 0 \leq x < 2, \\ K, & 2 \leq x \leq 2.4, \\ 27, & 2.4 < x \leq 4. \end{cases}$ |

### Первая задача Флека

Полученные профили решений первой задачи Флека представлены на рис. 2. При использовании сетки с  $N_x = 100$  заметны значительные немонотонности вблизи правой границы отрезка  $x \in [0,4]$ , а также небольшие немонотонности вблизи левой границы (рис. 2А)). При  $N_x = 300$  немонотонности остаются только вблизи правой границы отрезка (рис. 2Б)).

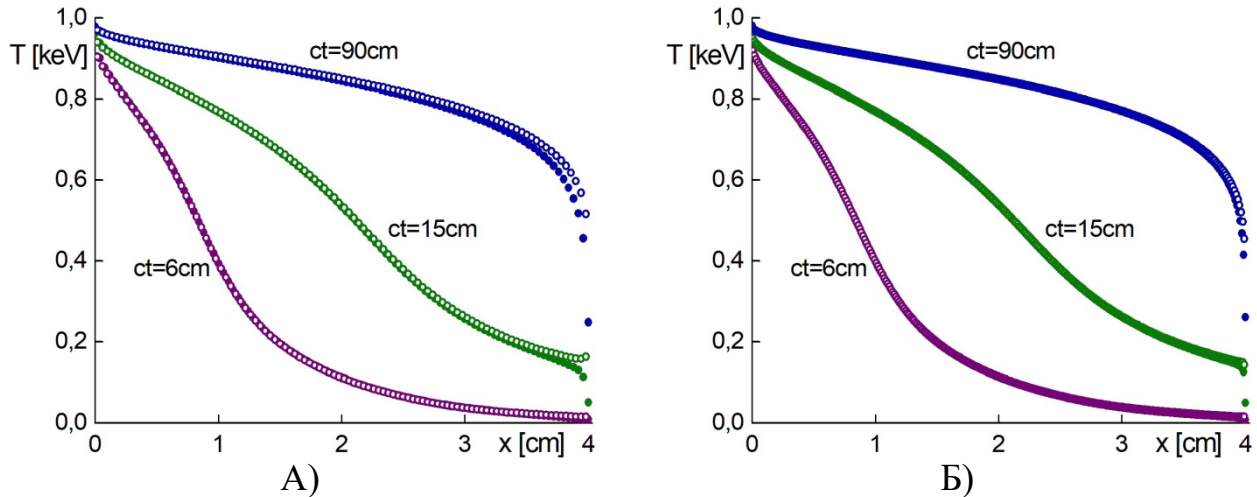


Рис. 2. Зависимость температуры  $T$  [кэВ] от координаты  $x$  [см] в решении первой задачи Флека при  $\Delta t/h = 0.025$  в три момента времени:  $ct=6$  см,  $ct=15$  см,  $ct=90$  см. Закрашенные круги – решения в целых точках, полые круги – решения в полуцелых точках, пересчитываемые из интегральных средних с использованием формулы Симпсона. А)  $N_x = 100$ , Б)  $N_x = 300$ .

Таблица II.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени при фиксированном  $N_x = 150$ , определённый из процесса Эйткена при использовании сеток с  $N_t = 15, 30, 60$ ,  $ct = 9$ ,  $x \in [0.6, 3.4]$

| $N_t$ | $\ y_{\Delta t} - y_{\Delta t/2}\ _C$ | Порядок сходимости схемы |
|-------|---------------------------------------|--------------------------|
| 15    | $4.61 \cdot 10^{-2}$                  | 2.03                     |
| 30    | $1.13 \cdot 10^{-2}$                  |                          |

Таблица III.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по пространству при фиксированных  $\Delta t = 10^{-3}$ ,  $N_t = 20$ , определённый из процесса Эйткена при использовании сеток с  $N_x = 100, 200, 400$ ,  $x \in [0.4, 3.6]$

| $N_x$ | $\ y_h - y_{h/2}\ _C$ | Порядок сходимости схемы |
|-------|-----------------------|--------------------------|
| 100   | $4.21 \cdot 10^{-2}$  | 3.82                     |
| 200   | $2.98 \cdot 10^{-3}$  |                          |

Порядок сходимости по времени в области монотонного решения равен двум, а порядок сходимости по пространству равен четырём, что демонстрируют Табл. II и Табл. III. Снижение порядка сходимости по времени ожидаемо и связано со структурой погрешности используемого метода Рунге–Кутты [23, 27, 29]. Учёт приграничных областей, в которых значительны немонотонности, снижает порядок сходимости по обеим переменным.

Полученные результаты качественно согласуются с результатами, которые приведены в [24, 25]. Количественное сопоставление проведено с результатами работы [30] и представлено в Табл. IV. Стационарные решения первой задачи Флека, полученные по предложенной в данной работе разностной схеме и по явно-неявной разностной схеме из [30], совпадают с хорошей точностью.

Таблица IV.

Значения температуры  $T$  в точках  $x=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$  при  $ct=6, 15, 90$ , полученные при решении первой задачи Флека по схемам: HOLO – бикомпактной схеме для HOLO-алгоритма, предложенной в данной работе; E-I – явно-неявной схеме (*explicit-implicit scheme*), предложенной в [30]

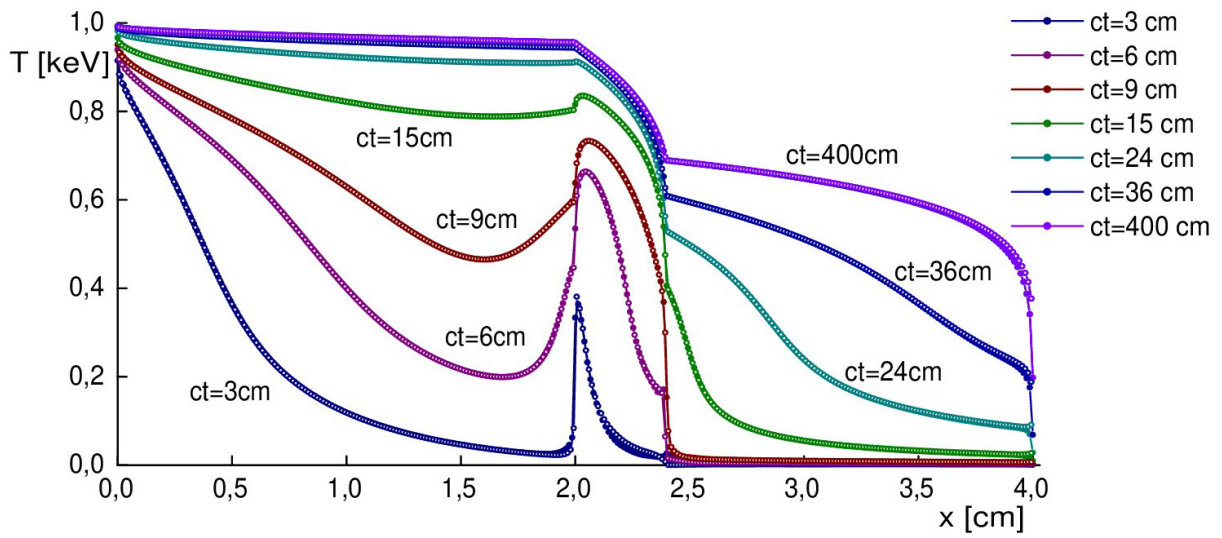
|               | $x=0.5$ | $x=1.0$ | $x=1.5$ | $x=2.0$ | $x=2.5$ | $x=3.0$ | $x=3.5$ |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| HOLO $ct=6$   | 0.6925  | 0.3935  | 0.1968  | 0.1127  | 0.0662  | 0.0383  | 0.0234  |
| HOLO $ct=15$  | 0.8490  | 0.7683  | 0.6703  | 0.5368  | 0.3784  | 0.2608  | 0.1892  |
| HOLO $ct=90$  | 0.9302  | 0.9031  | 0.8764  | 0.8475  | 0.8138  | 0.7705  | 0.7046  |
| E-I стационар | 0.9330  | 0.9060  | 0.8792  | 0.8501  | 0.8161  | 0.7726  | 0.7071  |

Теперь при помощи предложенной схемы решим набор задач с разрывом коэффициента излучения вещества.

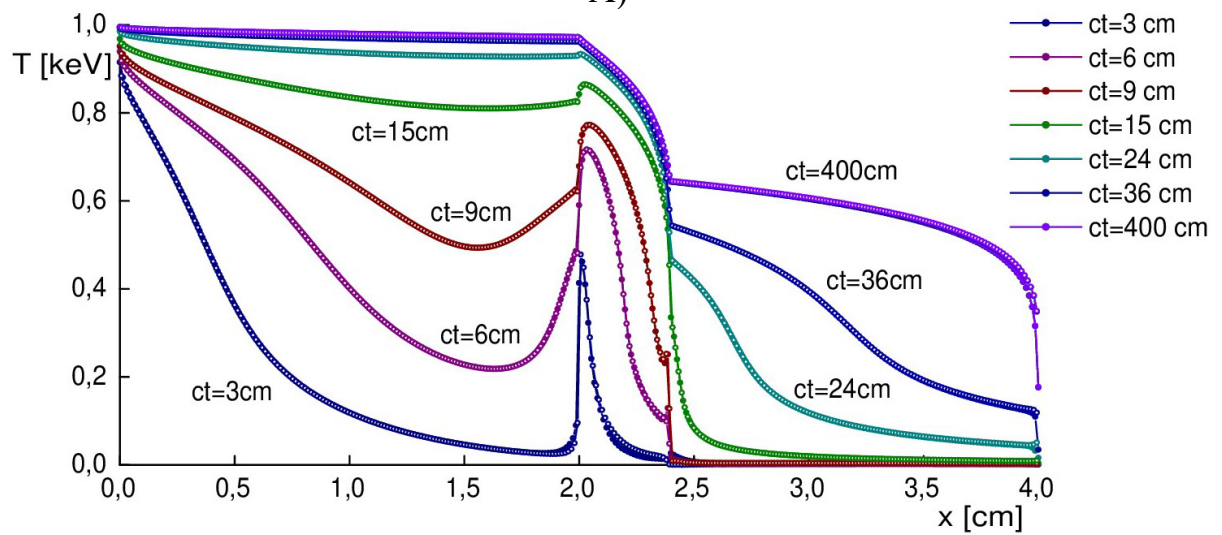
### Вторая задача Флека

Как уже говорилось выше, из-за высокого порядка аппроксимации схемы может быть значительным влияние немонотонностей, обусловленных как пространственной, так и временной аппроксимацией. Так как во второй задаче Флека коэффициент излучения вещества является разрывной функцией, то влияние немонотонностей на решение становится ещё более выраженным, и интегрирование по времени при помощи метода (19) третьего порядка не позволяет получить решение. Поэтому при решении задач с разрывом коэффициентов для интегрирования по времени используется метод первого порядка – неявный метод Эйлера, который задаётся первой стадией метода (19). Использование метода первого порядка по времени является естественным, так как расщепление по физическим процессам в задачах высокотемпературной радиационной газовой динамики обычно делается с первым порядком аппроксимации по времени. При решении второй задачи Флека, а также предложенных ниже её модификаций используется неравномерная сетка по времени, уменьшение шага  $\Delta t$  требуется в те моменты времени, когда температурный фронт входит в область с более высоким коэффициентом поглощения или выходит из неё. На рис. 3Е) можно видеть полученный профиль решения второй задачи Флека, результат хорошо согласуется с результатами, полученными другими методами (рис. 4, Табл. V).

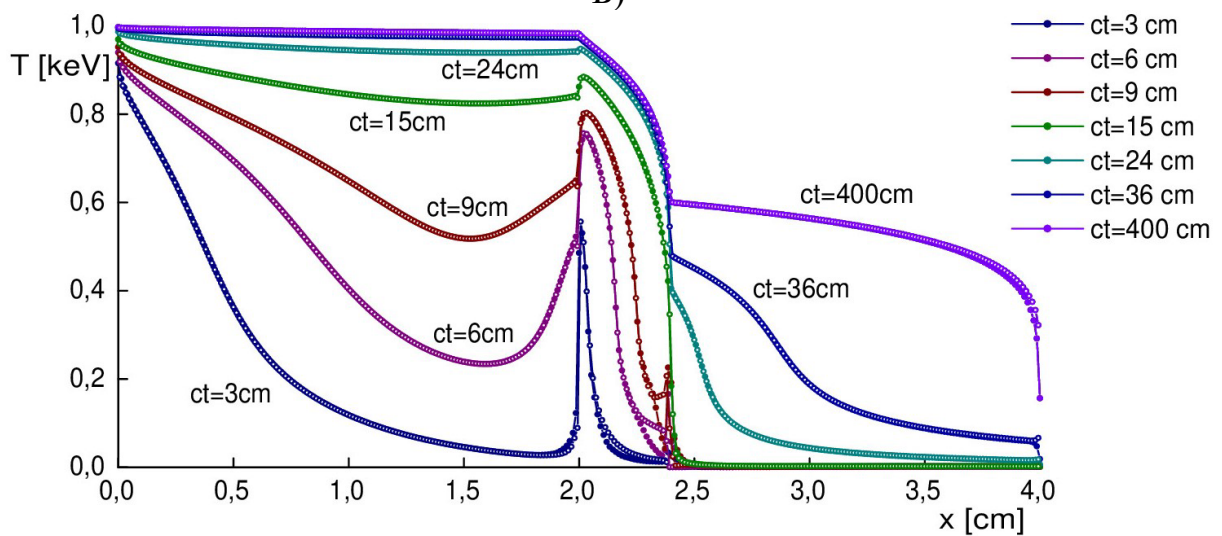




A)

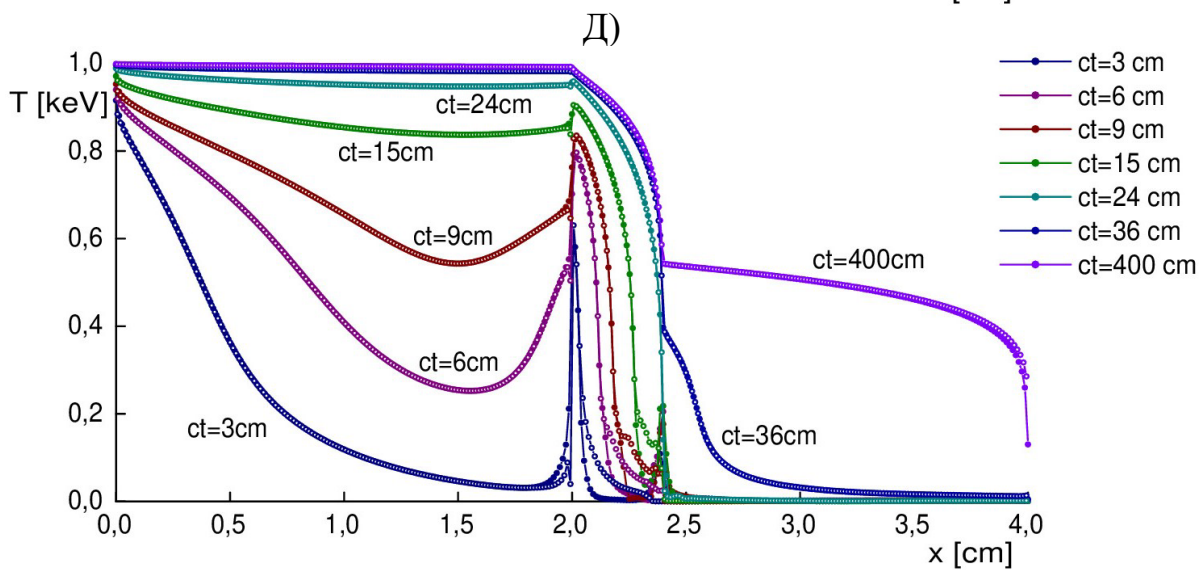
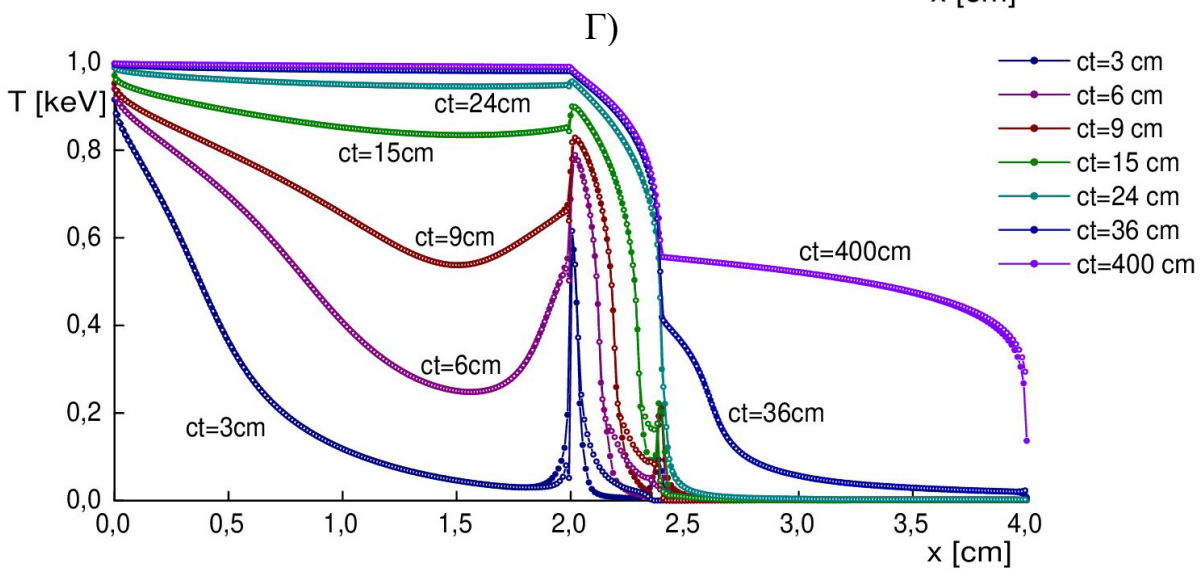
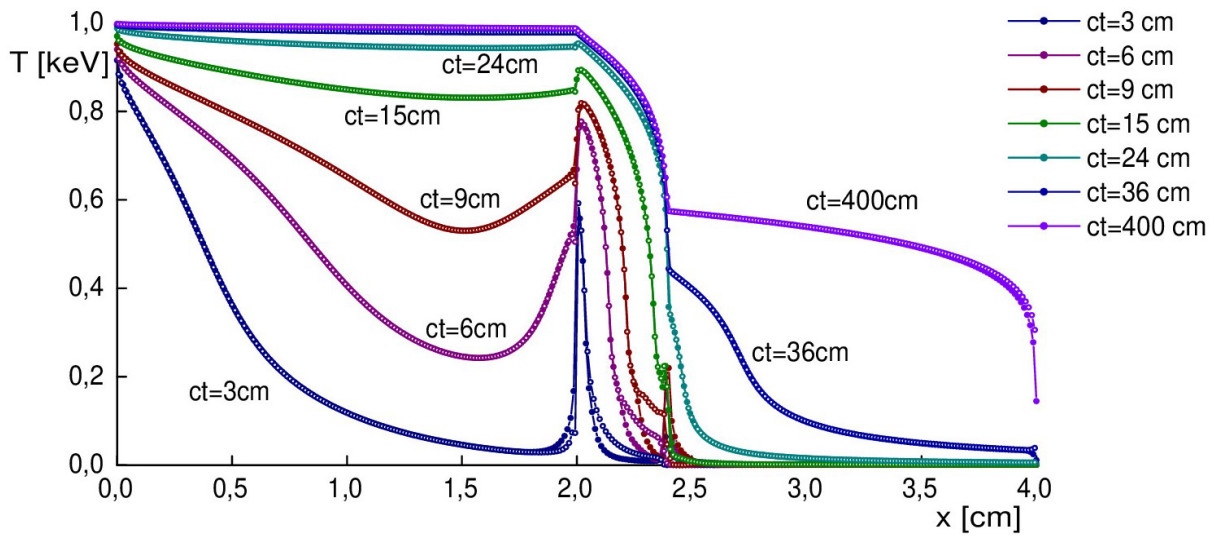


B)



B)

Рис. 3. Зависимость температуры  $T$  [кэВ] от координаты  $x$  [см] в решении модифицированной второй задачи Флека при  $N_x = 300$  при  $ct=3, 6, 9, 15, 24, 36, 400$  см. А)  $K = 10^3$ , Б)  $K = 2 \cdot 10^3$ , В)  $K = 4 \cdot 10^3$ ,



Е)

Г)  $K = 6 \cdot 10^3$ , Д)  $K = 8 \cdot 10^3$  и Е) второй задачи Флека. Закрашенные круги – решения в целых точках, полые круги – решения в полуцелых точках.

Таблица V.

Экстремальные и промежуточные значения в решении второй задачи Флека при помощи: HOLO – бикомпактной схемы для HOLO-алгоритма, предложенной в данной работе; QD – квазидиффузионного метода из [25]

| HOLO       | Наименьшее значение на отрезке $x \in [0,2]$ | Наибольшее значение на отрезке $x \in [2,2.4]$ | Значение при $x = 2.4$ | Значение при $x = 3$ |
|------------|--|--|------------------------|----------------------|
| $ct = 3$   | 0.031  | 0.630  | –                      | –                    |
| $ct = 6$   | 0.252  | 0.796  | –                      | –                    |
| $ct = 9$   | 0.543  | 0.835  | –                      | –                    |
| $ct = 15$  | 0.837  | 0.905  | –                      | –                    |
| $ct = 24$  | –  | 0.959  | 0.141                  | –                    |
| $ct = 36$  | –  | 0.982  | 0.397                  | 0.031                |
| $ct = 400$ | –  | 0.990  | 0.543                  | 0.507                |

| QD        | Наименьшее значение на отрезке $x \in [0,2]$ | Наибольшее значение на отрезке $x \in [2,2.4]$ | Значение при $x = 2.4$ | Значение при $x = 3$ |
|-----------|--|--|------------------------|----------------------|
| $ct = 3$  | 0.052  | 0.637  | –                      | –                    |
| $ct = 6$  | 0.317  | 0.806  | –                      | –                    |
| $ct = 15$ | 0.840  | 0.905  | –                      | –                    |
| $ct = 24$ | –  | 0.959  | 0.140                  | –                    |
| $ct = 36$ | –  | 0.978  | 0.309                  | 0.097                |

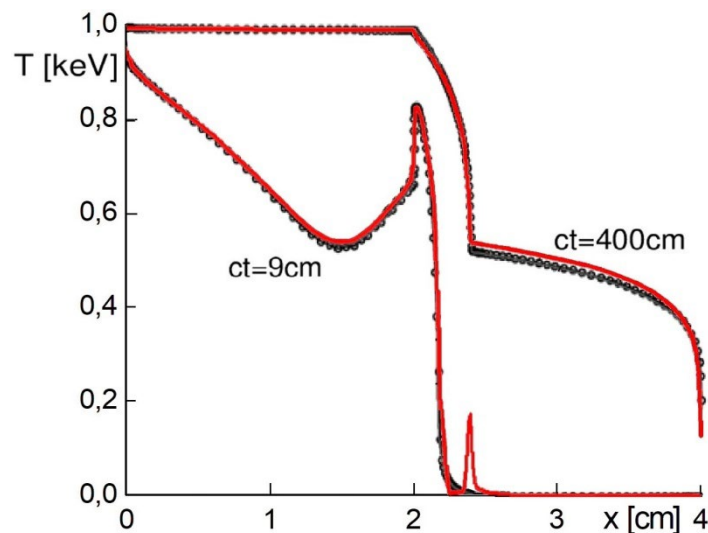


Рис. 4. Зависимость температуры  $T$  [кэВ] от координаты  $x$  [см] в решении второй задачи Флека. Красная сплошная линия – решение по бикомпактной схеме для HOLO-алгоритма, предложенной в данной работе при  $N_x = 300$ . Черные полые круги – решение по  $MDS_n$  схеме [30,31], черная сплошная линия – решение по явно-неявной схеме из [30].

Табл. V позволяет провести сравнение результатов решения второй задачи Флека по предложенной бикомпактной схеме с решением квазидиффузионным методом, предложенным в [25]. Значения в таблице для квазидиффузионной схемы получены по рис. 4 из [25] с точностью 0.005. Решение из работы [25] было получено на неравномерной сетке с  $h_{\max} = 0.4$  и  $h_{\min} = 0.01$ , сетка в области  $x \in [2, 2.4]$  была более подробной. Поэтому в первую очередь имеет смысл сравнивать значения в области с большим коэффициентом поглощения. Значения решений по предложенной нами схеме и по квазидиффузионной схеме более низкого порядка аппроксимации по пространству в этой области практически не отличаются. В остальных областях результаты качественно не отличаются.

Решения по явно-неявной схеме и  $MDS_n$ -схеме взяты из [30,31] (рис. 4). Сравнить результаты расчётов по этим схемам с предложенной нами схемой позволяет рис. 4, из которого видно хорошее совпадение решений в области  $x \in [0, 2.4]$ , за исключением области вблизи  $x = 2.4$ , в которой проявились немонотонности схемы для HOLO-алгоритма. В области  $x \in [2.4, 4]$  результаты качественно совпадают. Сопоставление с графиками решения по REED-схеме и DDAD-схеме, представленными в [31], также даёт хорошее совпадение. При  $x = 2.4$  и  $ct = 400$  значение по  $MDS_n$ -схеме примерно равно 0.516, а значение по схемам REED и DDAD примерно равно 0.535, что ближе к значению 0.543, получаемому в предложенной нами схеме.

Рассмотрим также набор задач, представляющих собой модификацию второй задачи Флека и отличающихся значением коэффициента излучения в центральной области  $x \in [2, 2.4]$ .

### Модифицированная вторая задача Флека

Решения модифицированной второй задачи Флека для набора значений  $K = 10^3, 2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 6 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3$  представлены на рис. 3 А–Д). Из рис. 3 А) и Б) видно, что при значениях коэффициента поглощения  $K \leq 2 \cdot 10^3$  немонотонности проявляются незначительно, а при дальнейшем увеличении величины  $K$  достигают величины 10–20% от максимального значения температуры и слабо зависят от величины  $K$ .

Рис. 5 демонстрирует, как растёт со временем максимальная температура в оптически толстой области, рис. 6 показывает, как со временем изменяется положение теплового фронта, которое определялось как координата, в которой температура принимает значение 0.5 кэВ. Скорость движения теплового фронта  $v_T$  в оптически толстой области зависит от  $K$ , что демонстрирует рис. 7А). Полученная зависимость в двойных логарифмических координатах хорошо приближается линейной функцией (рис. 7 Б)). Прямую, построенную по методу наименьших квадратов, также можно видеть на рис. 7 Б). После возвращения к

исходным координатам полученная аппроксимация зависимости скорости фронта  $v_T$  от  $K$  имеет вид  $v_T = 10^{3.150} / K^{0.633}$ .

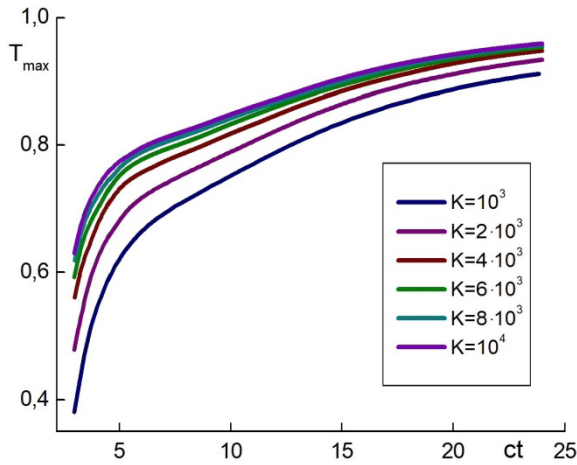


Рис. 5. Зависимость максимальной температуры на отрезке  $x \in [2, 2.4]$  от времени в решении модифицированной второй задачи Флека.

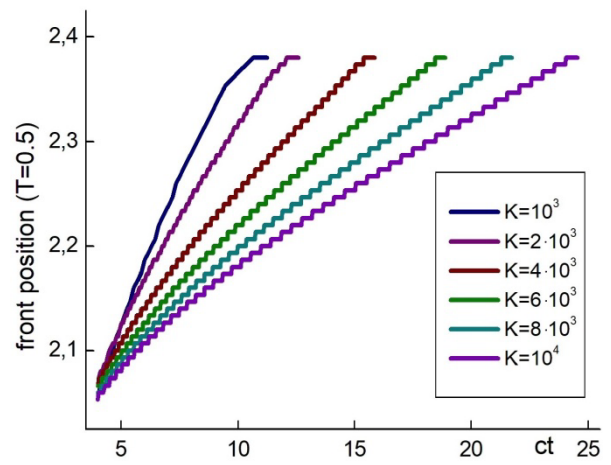


Рис. 6. Зависимость координаты теплового фронта от времени в решении модифицированной второй задачи Флека.

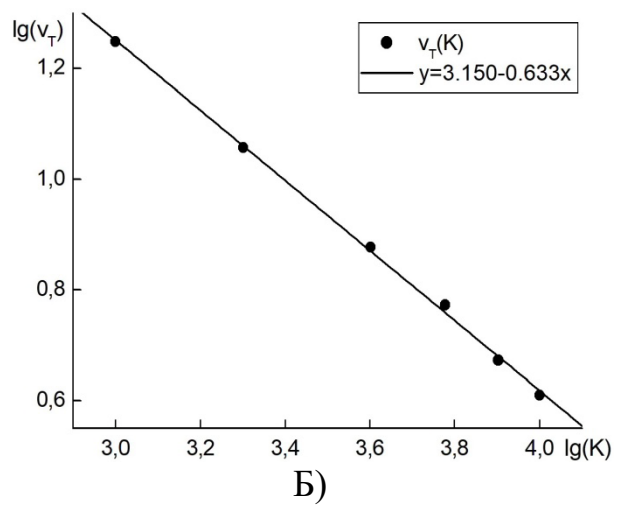
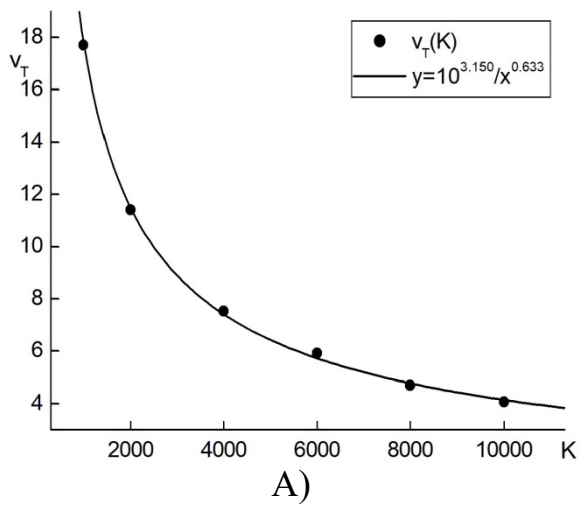


Рис. 7. Зависимость скорости движения теплового фронта от величины коэффициента поглощения  $K$  в центральной области А) в обычных координатах; Б) в двойных логарифмических координатах. На рисунке Б) проведена прямая  $y = 3.150 - 0.633x$ , полученная методом наименьших квадратов, что соответствует зависимости  $y = 10^{3.150} / x^{0.633}$  на рисунке А).



## 8. Особенности старта и детали расчёта

Сходимость итерационного процесса зависит от выбора целого набора параметров расчёта. Так как внутренние итерации являются квазиньютоновскими, то важно выбрать не слишком крупный шаг по времени, а также удачное начальное приближение. Модуль производной  $\frac{\delta \kappa_U}{\delta T}$  необходимо ограничить сверху, так как от итерации к итерации может происходить сильная перестройка спектра.

Несмотря на то что при  $t=0$  значения величин, вычисляемых на различных этапах HОLО-алгоритма, полагаются малыми, групповые и осреднённые по энергии значения плотности и потока излучения уже в начальном распределении должны быть согласованными и удовлетворять соотношениям  $U = \sum_{p=1}^P U^p$  и  $W = \sum_{p=1}^P W^p$ . Так как используемые в работе схемы являются кинетически согласованными, то и на следующих шагах по времени одногрупповые плотность и поток излучения равны суммам групповых значений плотности и потока соответственно с хорошей точностью.

В расчётах полагалось, что начальная температура  $T(x,0) = 10^{-4}$ , начальные значения групповых величин  $I^p(x,0,\mu) = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $U^p(x,0,\mu) = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $W^p(x,0,\mu) = 10^{-7}$ , начальные значения величин, осреднённых по энергии,  $U(x,0,\mu) = P \cdot U^p(x,0,\mu)$ ,  $W(x,0,\mu) = P \cdot W^p(x,0,\mu)$ , производная одногруппового коэффициента поглощения  $\left| \frac{\delta \kappa_U}{\delta T} \right| \leq 10^{-4}$ . На первом шаге по времени и на первой

внутренней итерации значения коэффициентов  $\kappa_U = \kappa_R = 10^4$ ,  $\zeta = 0$ . Коэффициенты, входящие в многогрупповую систему уравнений квазидиффузии и уравнение переноса, задавать отдельно не требуется, так как после расчёта температуры во внутреннем итерационном процессе они могут быть рассчитаны по формулам из раздела 2, необходимая для вычисления эффективная температура считалась равной температуре падающего излучения  $\theta^p = 1$  кэВ.

Так как используемая схема является немонотонной, то ещё до достижения сходимости первой внешней итерации могут возникнуть отрицательные значения  $I^p$ ,  $U^p$ ,  $U$ ,  $T$ , которые требуется скорректировать. Полагалось, что если  $I^p(x,t,\mu) < 0$ , то  $I^p(x,t,\mu) = 10^{-9}$ , аналогично если  $U^p(x,t) < 0$ , то  $U^p(x,t) = 10^{-8}$ , если  $U(x,t) < 0$ , то  $U(x,t) = 10^{-8}$ . Значения температуры также корректировались: если  $T(x,t) < 10^{-4}$ , то  $T(x,t) = 10^{-4}$ .

Описанный выбор начального приближения и способ корректировки отрицательных значений позволяют достичь сходимости итерационных процессов в первой задаче Флека в достаточно широкой области изменения

сеточных параметров. Ещё расширить область значения параметров сетки, при которых имеет место сходимость итерационных процессов, можно, если на первом шаге по времени или первых нескольких шагах по времени использовать для интегрирования по времени вместо метода (19) третьего порядка неявный метод Эйлера первого порядка, который задаётся первой стадией метода (19). Если и это не приводит к сходимости итерационного процесса, то можно сделать расчёт температуры на первом слое по времени в диффузионном приближении. В таком случае расчёт не включает в себя решение уравнения переноса, групповые значения коэффициента квазидиффузии полагаются равными  $1/3$ , коэффициенты граничных условий  $c_0^p = -0.5$ ,  $c_L^p = 0.5$ . Полученные значения температуры используются как нулевое приближение во внутреннем итерационном процессе в расчёте по полному алгоритму. Использование описанных подходов позволяет получить решение первой задачи Флека при числе точек по пространству от 30 до 3200. Расчёт решения при  $N_x > 3200$  требует большого времени, поэтому более подробные сетки не рассматривались. Шаг по времени обычно выбирался достаточно крупным, порядка  $10^{-3}$ , и не изменялся в ходе расчёта. На пространственной сетке с крупным шагом сходимость возможна при довольно крупных шагах и по времени, на подробных сетках по пространству расчёт возможен и с более мелким шагом по времени.

При решении второй задачи Флека и её модификаций на всех шагах по времени используется метод Эйлера первого порядка, как и было сказано в предыдущем разделе. При значениях коэффициента поглощения в центральной области  $K \leq 10^3$  никаких дополнений к описанным выше подходам не требуется, но приходится измельчать шаг по времени при входе тепловой волны в оптически толстую область и выходе из неё. При  $K > 10^3$  возникает необходимость начинать расчёт с  $K_0 = 10^3$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ , а на следующих шагах увеличивать значение  $K$  и уменьшать  $\Delta t$ . В данной работе коэффициент  $K$  увеличивался обычно скачкообразно в два-три этапа. Увеличение до заданного в задаче значения  $K$  необходимо осуществить к моменту времени, когда тепловая волна достигнет оптически толстого слоя. Область значений сеточных параметров, при которых достигается сходимость итерационных процессов во второй задаче Флека и её модификациях, значительно более узкая. Сетка по пространству также выбиралась равномерной, использование неравномерной сетки, более подробной в центральной области, приводит к более сильному развитию немонотонностей, а иногда и к отсутствию сходимости итерационного процесса.

## 9. Заключение

Для решения модельных задач переноса излучения в среде были применены бикомпактные схемы высокого порядка аппроксимации для HOLO-алгоритма решения уравнения переноса.

Схемы были применены для решения первой задачи Флека. Был показан четвёртый порядок сходимости схемы по пространству в области монотонного решения, что соответствует четвёртому порядку аппроксимации схемы. Показано, что порядок сходимости по времени в области монотонного решения равен двум, что меньше третьего порядка аппроксимации схемы по времени. Снижение порядка сходимости связано со структурой погрешности используемого метода Рунге–Кутты и использованием классических граничных условий для однокрупной и многокрупной систем уравнений квазидиффузии. Была проведена валидация полученного решения первой задачи Флека по решениям, полученным другими методами, было получено хорошее совпадение результатов по предложенной схеме и по явно-неявной схеме Н.Я. Моисеева.

Схемы были применены для решения второй задачи Флека с разрывами коэффициента поглощения, было проведено сопоставление с результатами других авторов, стационарные решения задачи хорошо согласуются между собой. Решение по бикомпактной схеме до выхода тепловой волны из оптически толстого слоя подвержено значительным немонотонностям, вне области развития немонотонностей решение по бикомпактной схеме совпадает с решениями, полученными другими методами.

Было предложено использовать для тестирования схем модификацию второй задачи Флека, которая отличается от второй задачи Флека величиной коэффициента поглощения  $K$  в центральной области. Было показано, что при  $K \leq 2 \cdot 10^3$  решение слабо подвержено немонотонностям, при увеличении  $K$  немонотонности становятся значительными. Была исследована зависимость скорости движения фронта  $v_T$  в оптически толстой области от величины  $K$  и было получено, что эта зависимость хорошо описывается формулой  $v_T = 10^{3.150} / K^{0.633}$ .

В дальнейшем представляет интерес провести монотонизацию предложенной схемы, после чего можно будет проанализировать целесообразность её применения для решения полной системы уравнений высокотемпературной радиационной газовой динамики.

## Литература

1. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966.
2. Д. Михалас. Звездные атмосферы. – М.: Мир, 1982.



3. *Б.Н. Четверушкин*. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985.
4. *В.Я. Гольдин*. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1964, т. 4, № 6, с. 1078–1087.  
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf7676>  
*V.Ya. Gol'din*. A quasi-diffusion method of solving the kinetic equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, V. 4, No. 6, 1964, p. 136–149.  
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90085-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90085-0)
5. *В.Я. Гольдин, Б.Н. Четверушкин*. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 990–1000.  
<https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf6661>  
*V.Ya. Gol'din, B.N. Chetverushkin*. Methods of solving one-dimensional problems of radiation gas dynamics // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, V. 12, № 4, 1972, p. 177–189.  
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90122-X](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90122-X)
6. *В.Я. Гольдин*. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Современные проблемы матем. физики и вычисл. матем. – М.: Наука, 1982, 340 с.  
*V.Ya. Gol'din*. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Sovremennye problemy matematicheskoi fiziki i vychislitelnoi matematiki – М., Nauka, 1982, 340p.
7. *M.L. Adams, E.W. Larsen*, Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy, 2002, vol. 40, No. 1, p. 3–159.  
[https://www.researchgate.net/publication/223921410\\_Fast\\_iterative\\_methods\\_for\\_discrete-ordinates\\_particle\\_transport\\_calculations](https://www.researchgate.net/publication/223921410_Fast_iterative_methods_for_discrete-ordinates_particle_transport_calculations)
8. *L. Chacón, G. Chen, D.A. Knoll, C. Newman, H. Park et al.* Multiscale high-order/low-order (HOLO) algorithms and applications // J. Comp. Phys., Feb. 2017, v. 330, p. 21–45.  
[https://www.researchgate.net/publication/309959093\\_Multiscale\\_high-orderlow-order\\_HOLO\\_algorithms\\_and\\_applications](https://www.researchgate.net/publication/309959093_Multiscale_high-orderlow-order_HOLO_algorithms_and_applications)
9. *W.A. Wiesequist, D.Y. Anistratov, J.E. Morel*, A cell-local finite difference discretization of the low order of the quasidiffusion equations for neutral particle transport on unstructured quadrilateral meshes // J. Comp. Phys., 2014, v. 273, p. 343–357.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S002199911400357X>
10. *E.N. Aristova*. Simulation of radiation transport in channel on the basis of quasi-diffusion method // Transport Theory and Statistical Physics, 2008, v. 37 (05–07), p. 483–503.  
[https://www.researchgate.net/publication/233316595\\_Simulation\\_of\\_Radiation\\_Transport\\_in\\_a\\_Channel\\_Based\\_on\\_the\\_Quasi-Diffusion\\_Method](https://www.researchgate.net/publication/233316595_Simulation_of_Radiation_Transport_in_a_Channel_Based_on_the_Quasi-Diffusion_Method)
11. *Е.Н. Аристова, Д.Ф. Байдин*. Экономичность методов квазидиффузии расчета критических параметров быстрого реактора // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 4, с. 129–136.  
<http://mi.mathnet.ru/mm3264>

- E.N. Aristova, D.F. Baydin.* Efficiency of Quasi Diffusion Method for Calculating Critical Parameters of a Fast Reactor // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, Vol. 4, No. 6, p. 568–573.  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048212060026>
12. *Е.Н. Аристова, Д.Ф. Байдин.* Реализация метода квазидиффузии для расчета критических параметров реактора на быстрых нейтронах в трехмерной гексагональной геометрии // *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 8, с. 65–80.  
<http://mi.mathnet.ru/mm3301>  
*E.N. Aristova, D.F. Baydin.* Implementation of the Quasi Diffusion Method for Calculating the Critical Parameters of a Fast Neutron Reactor in 3D Hexagonal Geometry // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, Vol. 5, No. 2, p. 145–155.  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048213020026>
13. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // *ДАН*, 2011, т.436, №5, с. 600–605.  
*B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya.* Monotone Bicomact Schemes for a Linear Advection Equation // *Doklady Mathematics*, 2011, v. 83, No. 1, p. 121–125.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562411010273>
14. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // *Математическое моделирование*, 2011, т.23, №6, с. 98–110.  
<http://mi.mathnet.ru/mm3122>  
*B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya.* Monotonic bicomact schemes for linear transport equations // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, v. 4, No. 1, p. 92–100.  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048212010103>
15. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // *ДАН*, 2010, т.430, № 4, с. 470–474.  
*B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya.* Fourth-Order Accurate Bicomact Schemes for Hyperbolic Equations // *Doklady Mathematics*, 2010, v. 81, No. 1, p. 146–150.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562410010400>
16. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* О сходимости компактных разностных схем // *Математическое моделирование*, 2008, т.20, №1, с. 99–116.  
<http://mi.mathnet.ru/mm2141>  
*B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya.* On the convergence of compact difference schemes // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, v. 1, No. 1, p. 91–104.  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048209010104>
17. *А.В. Чикиткин, Б.В. Рогов, Е.Н. Аристова.* Высокоточные бикомпактные схемы для многомерного неоднородного уравнения переноса и их эффективная параллельная реализация // *Доклады Академии Наук, серия Математика*, 2016, т. 469, № 4, с. 1–6.  
*A.V. Chikitkin, B.V. Rogov, E.N. Aristova.* High-Order Accurate Bicomact Schemes for Solving the Multidimensional Inhomogeneous Transport Equation

- and Their Efficient Parallel Implementation // *Doklady Mathematics*, 2016, v. 94, No. 2, p. 516–521.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/s1064562416040189>
18. *М.Д. Брагин, Б.В. Рогов*. Метод итерированной приближенной факторизации операторов высокоточной бикompактной схемы для систем многомерных неоднородных уравнений гиперболического типа // *Доклады РАН*, 2017, т.473, №3, с. 263–267.  
*M.D. Bragin, B.V. Rogov*. Iterative Approximate Factorization for Difference Operators of High-Order Bicomact Schemes for Multidimensional Nonhomogeneous Hyperbolic Systems // *Doklady Mathematics*, 2017, v. 95, No. 2, p. 140–143.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562417020107>
19. *Е.Н. Аристова, Б.В. Рогов, А.В. Чикиткин*. Оптимальная монотонизация высокоточной бикompактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // *ЖВМ и МФ*, 2016, т. 56, № 6, с. 973–988.  
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf10399>  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS0965542516060038>
20. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева*. Бикompактные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнений квазидиффузии // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН*, 2018, №45, 28 с.  
*E.N. Aristova, N.I. Karavaeva*. Bicomact High Order Schemes for Quasi-Diffusion Equations // *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*, 2018, №45, 28 p.  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-45>
21. *Н.И. Караваева*. Бикompактные схемы для решения однопрупповой системы уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН*, 2023, №25, 16 с.  
*N.I. Karavaeva*. Bicomact schemes for the joint solution of a one-group system of quasidiffusion equations with the energy equation // *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*, 2023, №25, 16 p.  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-25>
22. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева*. Бикompактные схемы для численного решения модельной задачи нестационарного переноса нейтронов HOLO алгоритмами // *Матем. моделирование*, 2021, том 33, номер 8, с. 3–26.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm4309>  
*E.N. Aristova, N.I. Karavaeva*. Bicomact schemes for the numerical solution of the Reed problem using HOLO algorithms // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, Vol. 14, No. 2, p. 187–202.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S2070048222020028>
23. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева*. Бикompактные схемы для HOLO-алгоритма решения уравнения переноса излучения совместно с уравнением энергии // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2023, т. 15, № 6, с. 1429–1448  
<http://crm.ics.org.ru/journal/article/3404/>
24. *J.A. Fleck, J.D. Cummings*. An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // *Journal of Computational Physics*, 1971, v. 8, p. 313–342.  
<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121047944>

25. Д.Ю. Анистратов, Е.Н. Аристова, В.Я. Гольдин. Нелинейный метод решения задач переноса излучения в среде // Матем. моделирование, 1996, т. 8, № 12, с 3–28.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm/v8/i12/p3>
26. В.Я. Гольдин, Д.А. Гольдина, А.В. Колпаков, А.В. Шильков. Математическое моделирование газодинамических процессов при высокой плотности энергии излучения // ВАНТ, серия “Методики и программы численного решения задач математической физики”, 1986, вып. 2, с. 59–66.
27. Е.Н. Аристова, Б.В. Рогов. О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 10, стр. 3–14.  
<http://mi.mathnet.ru/mm3316>  
*E.N. Aristova, B.V. Rogov.* Boundary conditions implementation in bicomcompact schemes for the linear transport equation // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, v. 5, №3, p. 199–208.  
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048213030022>
28. Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева. Реализация бикомпактной схемы для HOLO алгоритмов решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2019, №21, 28 с.  
*E.N. Aristova, N.I. Karavaeva.* Implementation of the bicomcompact scheme for HOLO algorithms for solving the transport equation // *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*, 2019, №21, 28 p.  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-21>
29. Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева. Постановка граничных условий в бикомпактных схемах для HOLO алгоритмов решения уравнения переноса // Матем. моделирование, 2019, т. 31, № 9, с. 3–20.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm4107>  
*E.N. Aristova, N.I. Karavaeva.* Boundary Conditions in Bicomcompact Schemes for HOLO Algorithms to Solve Transport Equations // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, v. 12, No. 3, p. 271–281.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S2070048220030059>
30. Н.Я. Моисеев. // Явно-неявная разностная схема для совместного решения уравнений переноса теплового излучения и энергии методом расщепления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2013, т. 53, № 3, с. 442–458.  
<https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf9890>  
*N. Ya. Moiseev.* // Explicit-implicit difference scheme for the joint solution of the radiative transfer and energy equations by the splitting method // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, v. 53, No., p. 320–335.  
<https://link.springer.com/article/10.1134/S0965542513030093>
31. В.В. Завьялов, М.Ю. Козманов, В.Н. Селезнёв и др. // Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // ВАНТ, 2005, Сер. Матем. моделирование физ. процессов. Вып. 3, с. 26–36.  
[https://vant.vniief.ru/ref\\_vant\\_search\\_aut.php?ID\\_journal=305&avtor=Селезнёв&param=search&alpha=C](https://vant.vniief.ru/ref_vant_search_aut.php?ID_journal=305&avtor=Селезнёв&param=search&alpha=C)