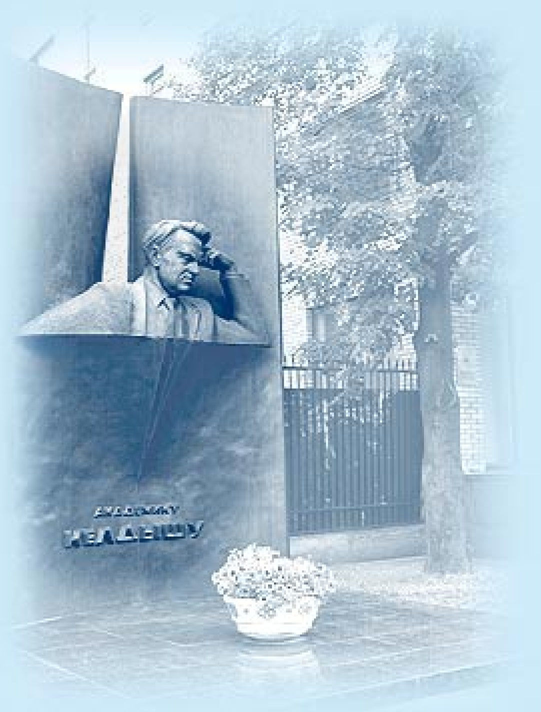
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 67 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Энтропийная космология на основе модифицированной энтропии Шарма-Миттала на космологическом горизонте Вселенной

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Энтропийная космология на основе модифицированной энтропии Шарма-Миттала на космологическом горизонте Вселенной // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 67. 36 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2024-67
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-67

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко

Энтропийная космология на основе модифицированной энтропии Шарма-Миттала на космологическом горизонте Вселенной

Москва — 2024

Колесниченко А.В.

Энтропийная космология на основе модифицированной энтропии Шарма-Миттала на космологическом горизонте Вселенной

В рамках энтропийной космологии рассматриваются несколько сценариев эволюции Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), основанных на новой модификации неаддитивных энтропийных мер информации Шарма-Миттала и Реньи на космологическом горизонте. Это сделано путем замены в исходных логарифмических формулах для этих энтропий энтропии Тсаллиса на энтропию Барроу, связанную с фрактальностью поверхности горизонта за счет гравитационно-квантовых эффектов. Сконструировано несколько версий обобщенных уравнений FRW, которые могут служить эффективной теоретической основой для моделирования ускоряющейся фазы расширения поздней Вселенной. В рассматриваемой модели нет взаимодействия между черными компонентами космоса. Предлагаемый подход, основанный на использовании экстенсивных негауссовских энтропийных мер на космологическом горизонте, отвечает хорошо известным требованиям к термодинамическому моделированию динамической эволюции Вселенной без привлечения концепции гипотетической темной энергии, но при использовании антигравитационного воздействия энтропийных сил. Полученные результаты показывают, что обобщенный энтропийный формализм может открыть новые возможности для более глубокого ознакомления с природой пространства-времени и фрактальности видимого горизонта Вселенной.

***Ключевые слова*:** энтропийная космология, модифицированная энтропия Шарма-Миттала, ускоренное расширение Вселенной.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Entropic cosmology based on modified Sharma-Mittal entropy on the cosmological horizon of the Universe.

In the framework of entropic cosmology, several scenarios of the evolution of the Friedman-Robertson-Walker (FRW) Universe are considered, based on a new modification of the non-additive Sharma-Mittal and Renyi entropy measures on the cosmological horizon. This is done by replacing in the original logarithmic formulas for these entropies, the Tsallis entropy by the Barrow entropy associated with the modification of the horizon surface due to quantum gravitational effects. Several versions of the generalised FRW equations have been constructed, which can serve as an effective theoretical basis for describing the accelerating phase of the expansion of the late Universe. In the considered model there is no mutual interaction between the black components of the cosmos. The proposed approach, based on the use of non-additive extensive entropic measures on the cosmological horizon, meets the well-known requirements for thermodynamic modelling of the dynamical evolution of the Universe without involving the concept of hypothetical dark energy, but using the antigravity effect of entropic forces. The obtained results show that the generalised entropic formalism can open new possibilities for a deeper insight into the nature of spacetime and its fractal properties.

***Key words*:** entropic cosmology, modified Sharma-Mittal and Renyi entropies, accelerated expansion of the Universe.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на растущее количество наблюдательных свидетельств существования ускоренного расширения Вселенной, его природа и фундаментальное происхождение все еще остаются нерешенным вопросом. Для объяснения этого факта были рассмотрены различные космологические теории. В частности, в ранних моделях Вселенной ΛCDM (*lambda cold dark matter*) вводился в уравнения ОТО управляющий член – неизвестный источник энергии-импульса, называемый темной энергией, плотность которой в настоящее время связывают с космологической постоянной Λ (вакуумной энергией, являющейся эквивалентом отталкивающей гравитационной силы, не зависящей от наличия или отсутствия вещества). Введение глобальных сил отталкивания с помощью положительной космологической постоянной компенсирует как гравитационное притяжение со стороны всей материи Вселенной, так и влияние кривизны пространства-времени. Однако численное значение параметра $\Lambda = 1{,}0905 \cdot 10^{-52}$ м$^{-2}$, полученное в последних публикациях для стандартной космологической модели ΛCDM (которое соответствует плотности энергии вакуума $5{,}25 \cdot 10^{-10}$ Дж/м^3), на много порядков меньше его теоретической величины, оцененной квантовой теорией поля. Для разрешения этого расхождения были предложены многочисленные модели, такие как термодинамические модели создания материи CCDM (*creation cold dark matter*), модель космологической жидкости с объемной вязкостью, модели $\Lambda(t)$ CDM, допускающие изменяющийся во времени космологический член, неэкстенсивные термодинамические модели на основе энтропийной космологии и ряд других.

В динамических моделях CCDM управляющий член получается из процесса диссипации, основанного на термодинамическом моделировании эволюции Вселенной с учетом различных форм необратимой энтропии на космологическом горизонте (используемом в качестве ИК-предела), связанных с передачей энергии от гравитационного поля к сгенерированным гравитационно-индуцированным путем частицам материи. При этом необратимое производство материи порождает крупномасштабную космологическую энтропию в соответствии со вторым законом термодинамики (см. Prigogine и др., 1989; Marov, Kolesnichenko, 2024).

В рамках космологических моделей $\Lambda(t)$ CDM, также пытающихся объяснить ускоренное расширение Вселенной, были разработаны различные сценарии ее эволюции, основанные на ассоциированной с ее космологическим горизонтом энтропии Бекенштейна–Хокинга S_{BH} (Bekenstein, 1975; Hawking 1975) и на голографическом принципе, связанном с хранением голографической информации на поверхностном экране[1], «расположенном» на горизонте (Bousso, 2002). В работах (Padmanabhan, 2010a, b; Verlinde, 2011), опирающихся в большой степени на физику черных дыр, была разработана новая концепция эволюции Вселенной, связанная с возникновением гравитации, обусловленным ростом энтропии на видимом горизонте, который в свою очередь «голографически» наполнен обычной материей и темной энергией (Susskind, 1995). При этом предполагалось, что горизонт имеет ассоциированные температуру и энтропию, которые образуются при голографическом хранении информации на экране поверхности горизонта. С помощью голографического принципа[2] было высказано предположение, что гравитация сама по себе является энтропийной силой, производной от количественных изменений энтропии Бекенштейна-Хокинга S_{BH} на космологической границе. Впервые понятие энтропийной силы было предложено голландским физиком («струнным теоретиком») Эриком Верлинде, который в статье (Verlinde, 2011) предложил достаточно «безумную» теорию, согласно которой явление гравитации объясняется через энтропию, т.е. сила гравитации по сути своей имеет термодинамическое происхождение (Padmanabhan, 2010a). В цитируемой статье автором было показано, что в рамках голографического принципа образования пространства неизбежно возникает гравитация, которую возможно отождествить с энтропийной силой, обусловленной изменениями информации, связанными с ростом площади, занимаемой материальными телами.

Незамедлительно в том же году в рамках гипотезы Верлинде в работе (Easson и др., 2011) получила окончательное развитие эвристическая теория ускоренного расширения Вселенной (так называемая энтропийная космология), базирующаяся на понятии энтропийной силе. Авторами этой теории была предложена наиболее явная формулировка теории энтропийной гравитации, в которой эйнштейновская гравитация остается фундаментальной концепцией ОТО, но с введением дополнительного отрицательного давления P_h, связанного с проявлением отталкивающей энтропийной силы в объемной физике. В результате, при таком подходе, физическое понимание процесса ускоренного расширения Вселенной достигается без применения концепции темной энергии – гипотетической среды с отрицательным давлением. Другими словами, ускорение Вселен-

[1] Здесь под голографией понимается информация о Вселенной, закодированная на экране, который трактуется как двумерная поверхность Вселенной.

[2] Согласно голографическому принципу, рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийной силы), направленного против увеличения радиуса площади поверхности, что интерпретируется как проявление гравитации.

ной возникает как естественное следствие роста энтропии на ее видимой горизонте. *Следует, однако, иметь в виду, что из возможности описания космологического ускорения Вселенной энтропийной силой не следует, что сама по себе гравитация является энтропийной силой* (см. Verlinde, 2011).

Основываясь на этой концепции, модифицированные уравнения Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW) для плоской однородной и изотропной Вселенной были подробно рассмотрены в космологической литературе (см., например, Cai и др., 2010; Cai, Saridakis, 2011; Basilakos и др., 2012; Easson и др., 2011; Qiu, Saridakis, 2012; Komatsu, Kimura, 2013a, b, 2014; Wissner-Gross, Freer, 2013; Moradpour, 2016; Keul и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019; Moradpouri др., 2017, 2018, 2019; Jalalzadeh и др., 2023). В результате было продемонстрировано, что наряду с традиционным объяснением ускоренного расширения Вселенной, основанном на присутствии управляющей силы в уравнениях FRW, обусловленной в конечном счете темной энергией (гипотетической средой с отрицательным давлением), возможна альтернативная интерпретация ее эволюции, связанная с наличием отталкивающей энтропийной силы.

Заметим, что в ранних космологических работах по эволюции вселенных де Ситтера[3] (de Sitter, 1917) широко использовалась в качестве приближенной температуры на хаббловском горизонте постоянная температура T_{GH} Гиббонса-Хокинга (Gibbons, Hawking, 1977), как и постоянные радиус Хаббла r_h и хаббловская скорость H. Вместе с тем эти три величины изменяются со временем в поздних вселенных (включая нашу Вселенную). Однако большинство построенных моделей подразумевают, что современная Вселенная в конечном итоге приближается к вселенной де Ситтера с преобладанием космологической постоянной Λ.

Таким образом, во всех цитируемых выше публикациях наряду с температурой де Ситтера (de Sitter, 1917) используется энтропия S_{BH}, а вместо космологической постоянной Λ в уравнениях FRW добавляется дополнительный (управляющий член), связанный с энтропией и температурой горизонта Вселенной. С помощью полученных таким образом обобщенных уравнений FRW было показано, что подобные модели объясняют нынешнее ускоряющее расширение Вселенной и удовлетворительно согласуются с данными по сверхновым типа Ia (SNIa). Важно также отметить, что найденное при этом космологическое ускорение (как следствие энтропийной силы) получается сравнительно небольшим (по-

[3] Вселенная де Ситтера (de Sitter, 1917) находится в тепловом равновесии с точки зрения горизонтальной термодинамики, которая тесно связана с термодинамикой черных дыр (см. Komatsu, Kimura, 2013a, b).

рядка постоянной Хаббла), в отличие от приводящего в замешательство большинство космологов огромного значения ускоренного расширения, предсказываемого квантовой теорией поля в сочетании с GTR. Таким образом, изучение влияния энтропийных сил на ускоренное расширение Вселенной представляет безусловный интерес, поскольку из-за антигравитационного действия именно эти силы могут сыграть роль фантомной темной энергии как в форме космологической постоянной, так и в форме скалярных полей (Вайнберг, 2000).

Вместе с тем в последнее время стало ясно, что для эффективного решения космологических задач не совсем корректно выводить управляющий член с помощью зависящей от площади горизонта энтропии Бекенштейна-Хокинга, являющейся неэкстенсивной мерой информации. В связи с этим для самогравитирующих крупномасштабных космологических систем, которые обладают специфическими особенностями, обусловленными дальнодействующей природой гравитации, были предложены в качестве альтернативы различные экстенсивные негауссовы объемные энтропии, к которым, в частности, относятся неаддитивные энтропии Реньи S_{Re} (Renyi, 1961, 1970) и Тсаллиса S_T (Tsallis, 1988, 2009), пропорциональная объему горизонта неаддитивная энтропия Тсаллиса-Кирто S_{TC} (Tsallis, Cirto, 2013), учитывающая фрактальную структуру хаббловского горизонта, неаддитивная энтропия Барроу S_B, энтропия Шарма-Миттала S_{SM} (Sharma, Mittal, 1975, 1977), энтропия Каниадакиса (Drepanou и др., 2022) и др. Эти энтропии были успешно использованы при построении новых модифицированных космологических моделей, которые открывают новые перспективы в области термодинамики космоса и не соответствуют стандартному подходу Бекенштейна-Хокинга (см. Biró, Czinner, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Torres и др., 1997; Plastino, Plastino A.R., 1993; Taruya, Sakagami, 2003; Landsberg, Vedral, 1998; Barboza и др., 2015; Anagnostopoulos и др., 2020; Barrow, 2020; Saridakis, 2020). В частности, в работе (Biró, Czinner, 2013) авторы предложили новый вид модифицированных энтропий Реньи S_{Re} и Шарма-Миттала S_{SM} (функционально связанных с энтропией S_{Ts} в исходной логарифмической форме записи), для которых энтропия Тсаллиса заменяется на энтропию Бекенштейна-Хокинга S_{BH}. Хотя физическая интерпретация подобной замены остается в настоящее время все-таки не вполне ясной, тем не менее, в ряде работ (Czinner, Iguchi, 2016; Komatsu, 2017, 2019b) было показано, что подобные модифицированные энтропии могут служить эффективной теоретической основой для энтропийной космологии, порождая ее различные варианты.

В представленной работе предлагается новая модификация неаддитивных энтропий Шарма-Миттала и Реньи на космологическом горизонте[4], на основе которых сконструированы (в контексте энтропийной космологии) энтропийно-силовые модели, предназначенные для анализа эволюции однородной, изотропной, пространственно плоской (бесконечной) поздней[5] Вселенной. Эти модели, основанные на модифицированных уравнениях FRW (управляющие члены которых исчезают в случае, когда энтропия Барроу становится стандартной энтропией Бекенштейна-Хокинга), согласуются с наблюдаемыми данными по сверхновым и вполне корректно описывают фоновую эволюцию поздней Вселенной. Конечной целью при их конструировании была демонстрация того, что гравитационно-квантовые и неаддитивные аспекты пространства-времени обладают достаточным потенциалом для адекватного моделирования в рамках энтропийной космологии ускоренного расширения Вселенной в соответствии с наблюдениями.

1. ЭНТРОПИЯ БЕКЕНШТЕЙНА-ХОКИНГА НА КОСМОЛОГИЧЕСКОМ ГОРИЗОНТЕ ВСЕЛЕННОЙ

В данной работе рассматривается пространственно плоская Вселенная, для которой горизонт Хаббла эквивалентен видимому космологическому горизонту. При этом горизонт Вселенной исследуется так же, как и событийный горизонт черной дыры, поскольку существующая тесная связь между горизонтом событий и термодинамикой черной дыры может быть распространена и на космологические модели Вселенной с космологической постоянной отталкивания (Gibbons, Hawking, 1977). Далее используется подобная замена, поскольку она является наиболее стандартной, т.е. принята в большинстве космологических исследований (см., например, Padmanabhan, 2010; Verlinde, 2011; Easson, 2011, 2012; Cai, Saridakis, 2011; Abreu и др., 2018; Sheykhi, 2018, 2021).

1.1. Двумерная энтропия Бекенштейна-Хокинга

В настоящем разделе предполагается, что космологический горизонт Вселенной имеет энтропию, в качестве которой используется «термодинамическая» двумерная энтропия Бекенштейна-Хокинга. При этом ускоренное расширение плоской Вселенной объясняется в рамках энтропийной космологии (см. Verlinde,

---

[4] Предложенная модификация энтропий Шарма-Миттала и Реньи проведена на основе неаддитивной энтропии Барроу, представляющей собой новую голографическую модель энтропии, связанную с модификацией горизонта поверхности Вселенной за счет квантовых гравитационных эффектов.

[5] Инфляция ранней Вселенной и возмущения плотности, связанные с формированием структур, в работе не рассматриваются.

2011; Easson и др., 2011; Anagnostopoulos и др., 2019), для которой центральную роль играет направленная наружу (к голографическому горизонту Вселенной) так называемая энтропийная сила, благодаря которой гравитация воспринимается как своего рода сила, связанная с ростом энтропии на горизонте[6]. При таком подходе, по аналогии с термодинамическими характеристиками горизонта черной дыры, описываемой термодинамической температурой и энтропией, предполагается, что космологический горизонт расширяющейся Вселенной также имеет свою температуру, пропорциональную температуре горизонта пространства де Ситтера $T_{GH} := \hbar H / 2\pi k$ (Gibbons, Hawking,1977), и связанную с ней ассоциированную энтропию, в качестве которой часто используется энтропия Бекенштейна-Хокинга (Bekenstein, 1975)

$$S_{BH} := k\left(\frac{A_h}{A_{Pl}}\right) = \frac{kc^3}{\hbar G}\frac{A_h}{4}. \tag{1}$$

Здесь k и $\hbar = h / 2\pi$ – постоянная Больцмана и приведенная постоянная Планка соответственно; $A_{Pl} := \hbar G / c^3$ – планковская площадь, $A_h := 4\pi r_h^2 = 4\pi c^2 / H^2$ – площадь поверхности сферы (горизонта Вселенной) радиуса $r_h := c / H$; $H(t) := a_{,t} / a$ — параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной[7]; c – скорость света; G – гравитационная постоянная; t — космологическая временная координата; $a(t)$ — коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона-Уокера (см. Вайнберг, 2000)). При подстановке величины A_h в соотношение (1) получим

$$S_{BH} = k\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)\pi r_h^2 = \left(\frac{k\pi c^5}{\hbar G}\right)\frac{1}{H^2} \equiv \frac{K}{H^2} \sim (2.6 \pm 0.3) \times 10^{122} k, \tag{2}$$

---

[6] В энтропийной космологии, в отличие от классической ОТО, не пренебрегают граничным членом, который появляется в ней в качестве дополнительного управляющего члена в уравнениях поля. При этом используются два вида давления: один — это статическое давление космологической жидкости, а другой — энтропийное давление на границу, которое выталкивает ее наружу. Именно в этом и заключается причина расширения Вселенной.

[7] В данной работе в качестве радиуса горизонта плоской Вселенной выбрана величина $r_h := c / H$, а также использован горизонт Хаббла для обеспечения согласованности теории.

где $K := \dfrac{\pi k c^5}{\hbar G} = \dfrac{\pi k c^2}{L_{Pl}^2} = \dfrac{\pi k c^2}{A_{Pl}} > 0$ — положительная константа.

Таким образом, аддитивная энтропия Бекенштейна-Хокинга S_{BH} на горизонте Хаббла пропорциональна площади горизонта A_h и связана только с хаббловской скоростью расширения Вселенной $H(t)$.

Нормализованная энтропия S_{BH} записывается как $S_{BH} / S_{BH,0} = (H / H_0)^{-2}$, где индекс «0» означает текущее время t_0. Для статичного горизонта вселенной де Ситтера, горизонт которой считается находящимся в тепловом равновесии, величины r_h и S_{BH} постоянны в течение ее эволюции, поскольку хаббловская скорость расширения Вселенной $H_0 = 2.2 \times 10^{-18} c^{-1}$ постоянна. При этом масштабный коэффициент $a(t)$ изменяется со временем как $a(t) / a_0 = \exp[H(t - t_0)]$, где a_0 представляет коэффициент $a(t)$ в настоящее время.

Рассмотрим теперь температуру $T_h(t)$ на горизонте Хаббла. В научной литературе первоначально ограничивались статическим горизонтом Вселенной, а в качестве приближенной температуры широко использовали пропорциональную H температуру Гиббонса-Хокинга (Gibbons, Hawking, 1977):

$$T_{GH} := \frac{\hbar H}{2\pi k} \sim 3 \times 10^{-30} K.$$

Эта температура, как и параметр Хаббла H, постоянна в течение эволюции вселенной де Ситтера. В этом смысле горизонт вселенной де Ситтера статичен, в то время как горизонты других вселенных (в том числе и современной Вселенной) являются динамичными. Поскольку наша Вселенная является лишь асимптотически вселенной де Ситтера, то температура ее горизонта необязательно определяется, как T_{GH}. На основе работы (Hayward и др., 2009) в последнее время было предложено использовать на горизонте Вселенной динамическую температуру $T_h(t)$, которая для плоской Вселенной (FRW) может быть записана как (см. Cai, Cao, 2007):

$$T_h(t) := \frac{\hbar H(t)}{2\pi k}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H(t)^2}\right) = T_{GH}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H(t)^2}\right), \tag{3}$$

где $H(t) > 0$ для расширяющейся Вселенной, а производная $H(t)_{,t}$ по многочисленным данным наблюдений меньше нуля (см. Farooq и др., 2017). Для вселенных де Ситтера температура $T_h(t)$ уменьшается до T_{GH}, т.е. температуру $T_h(t)$ можно считать динамической версией T_{GH}.

Увеличение радиуса горизонта r_h на dr_h увеличивает энтропию Бекенштейна-Хокинга S_{BH} на dS_{BH} в соответствии с соотношением

$$dS_{BH} = 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)\left(\frac{c}{H}\right)dr_h = -2K\frac{1}{H^3}dH. \qquad (4)$$

Поскольку $dH < 0$, то для энтропии Бекенштейна-Хокинга второй закон термодинамики удовлетворяется, $dS_{BH} = -2KH^{-3}dH > 0$.

Энтропийная сила F_{BH}, отвечающая росту энтропии S_{BH} на горизонте Вселенной, определяется согласно формализму энтропийной космологии (Easson и др., 2011) как $F_{BH} := -T_h\, dS_{BH} / dr_h$, где знак минус указывает на голографический экран (на направление роста энтропии), которым в плоском случае является хаббловский горизонт.

При использовании соотношения (4), формул для динамической температуры $T_h(t)$ и площади A_h стандартного событийного горизонта получим следующее выражение для динамической энтропийной силы:

$$F_{BH}(t) := -T_h\frac{dS_{BH}}{dr_h} = -\frac{c^4}{G}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right). \qquad (5)$$

Тогда давление $P_{BH}(t)$ этой силы на горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_{BH}(t) := \frac{F_{BH}}{A_h} = -\frac{c^2H^2}{4\pi G}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) \cong -\frac{2c^2}{3}\rho_{cr}, \qquad (6)$$

где $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$ – критическая плотность энергии. Это значение отрицательного давления близко к измеренному давлению (натяжению) темной энергии в форме космологической постоянной Λ (см. Вайнберг, 2012). Таким образом, в голографическом подходе Верлинде (Verlinde, 2011) давление возникает не за счет отрицательного давления фантомной темной энергии, а за счет энтропийного натяжения, обязанного энтропийному содержанию на горизонте Вселенной. Наличие такого натяжения эквивалентно направленному вовне космологическому ускорению. Именно по этой причине влияние «неоднозначной» темной энергии на эволюцию Вселенной в формализме энтропийной космологии не учитывается.

1.2. Некоторые элементы плоской энтропийной космологии

В этой статье мы ограничимся обсуждением различных модификаций классических уравнений FRW для пространственно плоской, однородной и изотропной Вселенной, которая моделируется одной идеальной космологической жидкостью (относящейся к темной материи[8]).

В соответствии с энтропийным космологическим подходом, к уравнениям поля Эйнштейна необходимо добавить дополнительные члены энтропийной силы, которые возникают из пренебрегаемых обычно граничных членов в действии Эйнштейна-Гильберта. Действие I, включающее поверхностный член и действие материи, записанное схематично, имеет вид $I = \int_M (R + \mathcal{L}_m) + \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} K$,

где R − скалярная кривизна, $\mathcal{L}_m$ − лагранжиан вещества и поля, а K − след внешней кривизны границы (Easson и др., 2011). Применение вариационных процедур приводит к получению обычных уравнений Эйнштейна для общей теории относительности с добавлением поверхностного энергетического члена:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \textit{поверх.члены}.$$

Благодаря этому в уравнениях Фридмана и ускорения можно получить дополнительный (космологический) член, который более способен обеспечить хорошее соответствие данным сверхновых типа Ia. Физическая мотивация термина энтропийной силы связана с идеей голографического хранения информации на границе Вселенной. Следовательно, в связи с энтропией и температурой на границе Вселенной может существовать энтропийная сила, действующая на границе Вселенной, которая ответственна за раннее и позднее ускоренное расширение Вселенной. Она добавляются в уравнения поля из-за квантовых эффектов, скалярных полей и модифицированной теории гравитации.

Из уравнения Эйнштейна гравитационного поля общей теории относительности в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера вытекают следующие стандартные уравнения FRW для масштабного фактора $a(t)$ (см. Мизнер и др., 1977):

$$\left(\frac{a,_t(t)}{a(t)}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + f_\Lambda(t), \tag{7}$$

[8] В общем случае Вселенная считается заполненной излучением, обычной материей и темной материей − идеальными жидкостями с соответствующими давлениями и плотностями энергии. В данной работе рассматривается только однокомпонентная космологическая жидкость (темная материя) при стандартном предположении, означающем, что указанные жидкие компоненты не взаимодействуют.

$$\frac{a_{,tt}}{a(t)} \equiv \left[H_{,t} + H(t)^2 \right] = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + 3\frac{P(t)}{c^2} \right) + f_\Lambda(t), \qquad (8)$$

описывающие эволюцию плоской Вселенной. Здесь $P(t)$ − скалярное давление; $\rho(t) := \rho_r(t) + \rho_{dm}(t) + \rho_m(t)$ − эффективная плотность энергии (излучения и темной материи, и обычной материи) космологической жидкости (см. Clowe и др., 2006). Уравнения (7) и (8) включают изменяющийся во времени дополнительный управляющий параметр $f_\Lambda(t)$. В эйнштейновской ОТО это так называемый космологический член $\Lambda(t)$, который эквивалентен ковариантно сохраняющейся плотности энергии вакуума (Sola, 2015); при надлежащем определении параметр $\Lambda(t)$ может объяснить ускоренное расширение Вселенной (Вайнберг, 2000). В энтропийной космологии, которая используется в данной работе, параметр $f_\Lambda(t)$, описывающий влияние давления $P_h(t)$ энтропийной силы на космологический горизонт Вселенной, имеет вид $f_\Lambda(t) = -(4\pi G / c^2)P_h(t)$.

Из уравнений (7) и (8) следует закон сохранения энергии (или уравнение неразрывности):

$$\rho_{,t} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2} \right] + \frac{3}{8\pi G} f_\Lambda(t)_{,t} = 0. \qquad (9)$$

Для его получения нужно продифференцировать фундаментальное уравнение Фридмана (7), связанное с расширением Вселенной, и результат скомбинировать с уравнением ускорения (8), которому удовлетворяет скалярное давление космологической жидкости.

Если управляющий параметр $f_\Lambda(t)$ и функциональная зависимость давления $P(t)$ от плотности $\rho(t)$ (например, уравнение состояния $P(t) = w\rho(t)/3c^{-2}$, где w не зависит от времени) известны, то, решив уравнения (7) и (9), можно определить масштабный фактор $a(t)$ для всех моментов времени. Таким образом, можно считать, что фундаментальными уравнениями классической динамической космологии являются уравнение Эйнштейна (7), уравнение сохранения энергии (9) и соответствующее уравнение состояния. Найденное при этом решение $a(t)$ автоматически удовлетворяет и уравнению ускорения (8).

По поводу уравнения неразрывности (9) отметим следующее: с космологической точки зрения это уравнение может быть выведено непосредственно из законов термодинамики, применяемых к самому пространству-времени (Ryden, 2003). Это связано с тем, что квантовая теория гравитации, первоначально связанная с исследованиями термодинамических особенностей черных дыр, утверждает, что уравнения поля общей теории относительности (в частности, уравнения Фридмана) могут быть выведены путем применения первого закона термодинамики к горизонту Вселенной (Jacobso, 1995), что открывает интересные сценарии во множестве контекстов (Akbar, Cai, 2006; Sheykhi, Wang, 2009).

Заметим также, что в общем случае правая часть уравнения неразрывности (9) ненулевая. Однако если $f_\Lambda \equiv \Lambda - \mathrm{const}$, то правая часть уравнения неразрывности (9) равна нулю, а уравнения Фридмана (7) и ускорения (8), содержащие космологическую постоянную Λ, описывают ускоренное расширение вселенных де Ситтера. В космологической литературе в последнее время исследуются многочисленные модели $\Lambda(t)$ CDM, допускающие зависящий от времени космологический член. Соответственно, совокупность моделей $\Lambda(t)$ CDM интерпретируется как своего рода *энергетическая обменная космология*, которая допускает обмен энергией между двумя компонентами − темной материей и темной энергией (Wang и др., 2014; Tamanini, 2015), либо между энергиями основной массы Вселенной и ее космологического горизонта (см. Hu, Ling, 2006; Tamanini, 2015), поскольку предполагается, что энергия накапливается и голографически хранится на космологической границе (Easson и др., 2011). Важно при этом отметить, что модифицированные уравнения FRW, полученные как в рамках энергетически обменной космологии, так и методом энтропийной космологии (используемым в данной статье), предсказывают одинаковое ускоренное расширение Вселенной (см., например, Kolesnichenko, Marov, 2021).

1.3. Ускоренное расширение Вселенной под воздействиемэнтропийной силы Бекенштейна-Хокинга

В этом разделе в качестве иллюстрации применения формализма энтропийной космологии (Verlinde, 2011; Easson, 2011, 2012) рассмотрим принятый подход к выводу модифицированных уравнений FRW, которые предназначены для моделирования ускоренного расширения поздней Вселенной под воздействием энтропийной силы Бекенштейна-Хокинга.

Согласно методологии этого подхода эффективное давление P'_{BH}, основанное на энтропии S_{BH}, определяется как

$$P'_{BH}(t) := P(t) + P_{BH}(t) = P(t) - \frac{c^2 H(t)^2}{4\pi G}\left[1 + \frac{H_{,t}(t)}{2H(t)^2}\right]. \tag{10}$$

При использовании $P'_{BH}(t)$ вместо скалярного давления $P(t)$ в уравнениях (7) и (8) они принимают следующий вид:

$$\left(\frac{a_{,t}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + H(t)^2\left(1 + \frac{H_{,t}(t)}{2H(t)^2}\right), \tag{11}$$

$$\frac{a_{,tt}}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + 3\frac{P}{c^2}\right) + H(t)^2\left(1 + \frac{H_{,t}(t)}{2H(t)^2}\right). \tag{12}$$

Легко показать, что в случае когда H^2 сильно доминирует в правой части уравнения ускорения (8), то его решение описывает пространство де Ситтера[9] (модели вселенных, которые описывают вакуумное состояние) с масштабным коэффициентом $a(t) = a(t_0)\exp H(t - t_0)$.

Таким образом, уравнения (11) и (12) можно рассматривать как полученную в рамках формализма энтропийной космологии модификацию классических уравнений FRW, которая объясняет ускоренное расширение Вселенной без введения понятия темной энергии (связанной с космологической постоянной Λ). Этот подход, хотя и является эвристическим, обеспечивает физическое понимание явления ускорения, отсутствующее при описании его в терминах темной энергии. Доказательства и общие аргументы в поддержку подобного подхода были представлены в работе (Easson и др., 2010), а затем в целом ряде последующих публикаций, в которых было показано, что модели, выполненные в рамках энтропийной космологии с использованием энтропии Бекенштейна-Хокинга на космологическом горизонте, способны обеспечить относительно хорошее соответствие данным о сверхновых типа Ia (SNIa) с высоким красным смещением.

Вместе с тем следует отметить, что поскольку энтропия Бекенштейна-Хокинга пропорциональна площади поверхности событийного горизонта, то конструктивные возможности моделей, основанных на этой неэкстенсивной энтропии весьма ограничены.

2. ЭНТРОПИЙНАЯ КОСМОЛОГИЯ НА ОСНОВЕ ЭНТРОПИИ БАРРОУ

Недавно, из-за неизвестной природы пространства-времени, природы гравитации на больших расстояниях, а также из-за того факта, что энтропия Бекенштейна-Хокинга является неэкстенсивной мерой информации, в литературе появились другие альтернативные объяснений ускоренного расширения Вселенной, основанные на использовании неаддитивной термодинамики. Вновь стало актуальным недоумение различных авторов о том, что энтропия черной дыры (и, соответственно, космологического горизонта) пропорциональна ее площади, то-

[9] Считается, что реальная Вселенная описывалась моделью де Ситтера на очень ранних стадиях расширения (инфляционная модель Вселенной). В настоящее время, возможно, вновь происходит переход к де-ситтеровскому режиму расширения.

гда как многим и ранее представлялось, что она должна быть пропорциональна ее объему. Например, в работе (Maddox, 1993) автор пишет: «Так почему же энтропия черной дыры пропорциональна квадрату ее радиуса, а не ее кубу?». Авторы другой работы (Das, Shankaranarayanan, 2006) специально отмечали, что пропорциональность площади энтропии Бекенштейна-Хокинга S_{BH} является интригующим вопросом на протяжении десятилетий.

Еще при изучении физики черных дыр голографический принцип был предложен в качестве значимого свойства квантовой гравитации Эйнштейна, согласно которому физика объема пространства закодирована на его границе, на которой соблюдаются законы термодинамики (t Hooft, 2009). В недавнем исследовании Барроу (Barrow, 2020) предположил, что поверхность черной дыры может быть увеличена на квантовом гравитационном уровне, что сопряжено с возможно фрактальной ее структурой, вызванной квантовыми флуктуациями вакуумной энергии (Jalalzadeh и др., 2021). В связи с этим следует заметить, что именно черные дыры дают современное представление о том, каким образом гравитация может быть объединена как с квантовой механикой, так и с термодинамикой.

2.1. Энтропия Барроу на космологическом горизонте

В цитируемой работе Барроу была рассмотрена модель, согласно которой квантово-гравитационные флуктуации темной энергии могут вызвать изменение топологии пространства-времени на планковском масштабе. В результате получается сложная фрактальная структура, похожая на пространственно-временную пену. Введение понятия квантово-гравитационной пены для оценки энтропии черных дыр и, в более общем плане, космологического горизонта Вселенной, способствует увеличению площади ее поверхности и, в конечном итоге росту энтропии (Barrow, 2020). Энтропийное предположение Барроу является лишь первым приближением к вопросу квантовых гравитационных последствий на горизонте Вселенной и может быть аппроксимативно описано свободным параметром деформации δ, который не является фиксированным, но остается в интервале между экстремальными значениями[10]. Таким образом, возможные эффекты квантово-гравитационной пены в области космологического горизонта

[10] В действительности, лежащая в основе предположения деформация пены в пространстве-времени будет сложной и динамичной. В связи с этим, в качестве более реалистичного сценария, включающего динамику пены пространства-времени, можно было бы предположить, что параметр δ переменный, т.е. зависит от времени и масштаба, как это уже было сделано в работе (Nojiri, 2020) с параметром деформации q энтропии Тсаллиса.

Вселенной приводят к следующему определению неаддитивной энтропии S_{Bar}, связанной с аддитивной энтропией Бекенштейна-Хокинга[11]:

$$S_{Bar} / k := \left(S_{BH} / k\right)^{\delta}. \tag{13}$$

Показатель фрактальной массовой размерности δ $(1 \leq \delta \leq 3/2)$ в этом соотношении количественно определяет деформацию структуры горизонта Вселенной[12]. Хотя энтропия Барроу была первоначально сформулирована для черных дыр, она эффективно применяется и для исследования космологической структуры Вселенной, что позволяет сопоставить построенные на ее основе модифицированные космологические уравнения с наблюдательными данными и получить в том числе ограничения на показатель Барроу δ (Anagnostopoulos и др., 2020; Leon и др., 2021; Barrow и др., 2021). Как и ожидалось, во всех этих исследованиях отклонения от энтропии S_{BH} оказались относительно небольшими, т.е. квантовые флуктуации гравитации, играющие нетривиальную роль на горизонте в ранней Вселенной, приводят все же к незначительному эффекту последующей космологической эволюции. Тем не менее, исследования космологии, основанные на энтропии Барроу, дают ценные подсказки в понимании влияния квантово-флуктуационных эффектов на свойства горизонта и связанную с ним феноменологию.

Легко показать, что энтропия Барроу неаддитивная, т.е. подчиняется следующему псевдоаддитивному закону для двух независимых систем I и II:

$$S_{Bar}^{I,II} / k = \left[\left(S_{Bar}^{I} / k\right)^{1/\delta} + \left(S_{Bar}^{II} / k\right)^{1/\delta}\right]^{\delta}.$$

Определение (13) для энтропии Барроу S_{Bar} можно записать в следующем эквивалентном виде:

[11] Фрактальность энтропии гравитационных систем влияет, вообще говоря, на пространственные элементы, такие как объем, площадь и радиус. С учетом этого обстоятельства в недавней работе (Jalalzadeha и др., 2024) была сконструирована оригинальная фрактальная космологическая модель Λ CDM и определены наблюдаемые фрактальные космологические объекты.

[12] При определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической «снежинки Коха», использующей бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее, эта простая эвристическая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов получила важные последствия при оценке энтропии горизонта Вселенной.

$$S_{Bar} = k\left(\frac{A_h}{A_{Pl}}\right)^{\delta} = k\left(\frac{\pi r_h^2}{A_{Pl}}\right)^{\delta} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\left(\frac{r_h}{c}\right)^{2\delta} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} H^{-2\delta}. \qquad (14)$$

В случае $\delta = 1$, который соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается стандартная энтропия S_{BH}. Когда показатель Барроу $\delta = 3/2$, то деформация максимальна, т.е. имеет место фрактальная пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при которой

$$S_{Bar} \equiv S_{TC} := k\left(A_H / A_{Pl}\right)^{3/2} = K\left(K/k\right)^{1/2} H^{-3}. \qquad (15)$$

Это соотношение аналогично формуле для неаддитивной энтропии Тсаллиса-Кирто S_{TC}, введенной в работе (Tsallis., Cirto, 2013) при исследовании эволюции черной дыры на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации квантово-гравитационной пены (см. Torres и др., 1997; Aditya и др., 2019; Wilk, Wlodarczyk, 2020; Waheed, 2020).

2.2. Модификация уравнений Фридмана−Робертсона−Уокера, связанная с энтропией Барроу на космологическом горизонте

С целью получения модифицированных космологических уравнений используем процедуру вывода энтропийной силы (рассмотренную в предыдущем разделе), но теперь уже с энтропией Барроу (14). Увеличение радиуса горизонта r_h на dr_h увеличивает энтропию S_{Bar} на dS_{Bar} в соответствии с выражением

$$dS_{Bar} = 2\delta c^{-2\delta} K\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} r_h^{2\delta-1} dr_h = -2\delta K\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} H^{-(2\delta+1)} dH > 0. \qquad (16)$$

Тогда для энтропийной силы F_B, возникающей из-за модификации горизонта Вселенной, связанной с квантово-гравитационными эффектами, будем иметь:

$$F_{Bar} = -T_h \frac{dS_{Bar}}{dr_h} = -\frac{\hbar H}{2\pi k}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) \times \frac{2\delta}{c} K\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\left(\frac{r_h}{c}\right)^{2\delta-1} =$$

$$= -\delta\frac{c^4}{G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) H^{2-2\delta}. \qquad (17)$$

Соответственно, давление P_{Bar} этой силы на космологический горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_{Bar} = \frac{F_{Bar}}{4A_H} = -\delta \frac{c^4}{G} \left(K/k\right)^{\delta-1} \left(H^2 + \frac{H_{,t}}{2}\right) H^{-2\delta} \times \frac{H^2}{4\pi c^2} =$$

$$= -\delta \frac{c^2}{4\pi G} \left(K/k\right)^{\delta-1} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) H^{4-2\delta}. \qquad (18)$$

В энтропийной космологии эффективное давление P'_{Bar}, основанное на энтропии Барроу, определяется соотношением

$$P'_{Bar} := P + P_{Bar} = P - \delta \frac{c^2}{4\pi G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) H^{4-2\delta}. \qquad (19)$$

При использовании P'_{Bar} уравнения ускорения (8) и неразрывности (9) принимают вид

$$\left(\frac{a_{,t}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \delta \left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) H^{4-2\delta}, \qquad (20)$$

$$\frac{a_{,tt}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3}{c^2} P\right) + \delta \left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) H^{4-2\delta}. \qquad (21)$$

Ясно, что в общем случае фрактальной космологической жидкости с дробной фрактальной размерностью $(1 \le \delta \le 3/2)$ соответствующие модифицированные космологические уравнения, основанные на голографической энтропии Барроу, открывают новые возможности для моделирования различных термодинамических сценариев эволюции фрактального горизонта Вселенной. Вместе с тем проведенные в последнее время исследования в области космологической термодинамики показали, что если энтропия Барроу возможна в природе, то ее допустимая область все же ограничена в узкой области значений вблизи стандартной энтропии S_{BH}. В частности, авторы работ (Saridakis, 2020; Anagnostopoulos и др., 2020), опираясь на данные наблюдений из выборки коллекции (SNIa) сверхновых и используя прямые измерения параметра Хаббла космическими хронометрами, показали, что этим данным лучше соответствует значение параметра деформации, равное $\delta = =1{,}047$, т.е. ими допускается, что небольшое отклонение от стандартной голографической энтропии Бекенштейна-Хокинга является более предпочтительным.

Важно также иметь в виду, что в случае нулевой деформации $\delta = 1$ эти уравнения полностью соответствуют стандартной энтропийной силе, рассмотренной в работе (Easson и др., 2011). Случай $\delta = 3/2$ соответствует максимальной деформации области космологического горизонта, связанной с неаддитивной энтропией Тсаллиса-Кирто $S_{TC} = K\left(K/k\right)^{1/2} H^{-3}$ (Tsallis, Cirto, 2013). Сценарий проявления этой энтропии предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakos и др., 2009). Из уравнения (20) в этом случае следует, что управляющий силовой член в этой модели пропорционален хаббловской скорости расширения Вселенной H, в отличие от аналогичного энтропийного силового члена в модели Бекенштейна-Хокинга, который пропорционален H^2.

Следует отметить, что космологические уравнения, подобные уравнениям (20) и (21), записанным при $\delta = 3/2$, неоднократно обсуждались в литературе при моделировании эволюции Вселенной, основанной на различных аппроксимациях переменного космологического члена (Padmanabhan, Chitre, 1987; Basilakos и др., 2009). В частности, полученное при $\delta = 3/2$ из (18) обобщенное давление Тсаллиса-Кирто $P'_{Bar}(t) = P(t) - \frac{3c^2}{8\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t)\left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right)$ ведет себя так же, как и движущая сила $P'(t) = P(t) - 3\eta H(t)$ в моделях вязкой космологической жидкости с объемной вязкостью η, предназначенных для моделирования темной материи. В моделях этого типа предполагается, что Вселенная заполнена космологической жидкостью с объемной вязкостью η, которая может генерировать энтропию однородной и изотропной Вселенной (см. Padmanabhan, Chitre, 1987; Li, Barrow, 2009; Avelino, Nucamendi, 2010; Meng, Dou 2009; Dou, Meng, 2011). Отмеченное сходство стало возможным по причине того, что введенная на основе голографического принципа неаддитивная энтропия Тсаллиса-Кирто ведет себя так, как если бы это была классическая энтропия однородной и изотропной Вселенной, порожденная объемным вязким напряжением космологической жидкости (Gron, 1990**;** Brevik, Gorbunova, 2005**;** Li, Barrow, 2009; Sebastian, 2010).

Таким образом, при использовании голографического принципа, с которым связано существование энтропии Барроу на горизонте Вселенной, в настоящем разделе рассмотрены две модели энтропийной силы − модель (11), (12), основанная на энтропии Бекенштейна-Хокинга, и модель (20), (21) при $\delta = 3/2$, основанная на неаддитивной энтропии Тсаллиса-Кирто. Эти модели описывают эволюцию расширяющейся Вселенной без использования понятия космологической постоянной, или энергии вакуума. При этом модель энтропийной силы Бекенштейна-Хокинга предсказывает равномерно ускоряющуюся Вселенную, тогда как модель Тсаллиса-Кирто предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakos и др., 2009).

В общем случае, когда $1 \leq \delta \leq 3/2$, мы имеем новые космологические сценарии, связанные с квантово-гравитационными эффектами горизонта Вселенной (см. Saridakis, 2020).

3. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ ШАРМА-МИТТАЛА КАК ОСНОВА РАЗНЫХ ВЕРСИЙ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

Самогравитирующие космологические системы обладают специфическими характеристиками, которые могут быть описаны в рамках неаддитивной статистической механики и неравновесной термодинамики. В последнее время из-за дальнодействующей природы гравитации, загадочной природы пространства-времени и того факта, что энтропия Бекенштейна-Хокинга является неэкстенсивной энтропийной мерой, для изучения крупномасштабных космологических и гравитационных явлений были введены в рассмотрение разнообразные негауссовы энтропии на космологическом горизонте, которые широко используются при моделировании ускоренного расширения Вселенной (Biró, Czinner, 2013; Czinner, Iguchi, 2016; Aditya и др., 2019; Waheed, 2020; Abreu, Neto, 2020, 2021). Выбор этих энтропий часто объясняется тем, что суммарная энтропия (внутренней части Вселенной и космологического горизонта) связана с объемом космологической жидкости, а не с ее поверхностью, как это имеет место в случае классической энтропии Бекенштейна-Хогинга. В частности, в работе (Sayahian Jahromi и др., 2018) был предложен особый энтропийный формализм, основанный на модифицированной двухпараметрической энтропии Шарма-Миттала, которая, являясь родоначальником целого семейства однопараметрических неаддитивных энтропий, в частности энтропий Тсаллиса, Реньи и Ландсберга-Ведрала, рассматривает их как некоторые предельные однопараметрические случаи (Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007; Колесниченко, 2021). Этот формализм основан на формальной замене энтропии Тсаллиса, фигурирующей в логарифмическом представлении оригинальной энтропии Шарма-Миттала (см. формулу (34)), на энтропию Бекенштейна-Хокинга.

В данном разделе в качестве перспективных будущих исследований представлена другая модификация энтропии Шарма-Миттала которая, приводя к новому сценарию в эволюции Вселенной, позволяет изучать ее по единообразной схеме.

3.1. Оригинальная двухпараметрическая энтропийная мера Шарма-Миттала как родоначальник семейства однопараметрических энтропий

Рассмотрим более подробно классическую энтропийную меру информации Шарма-Миттала, которая определяется формулой (Sharma, Mittal, 1975, 1977)

$$S_{SM}(P,q,r) := \frac{k}{1-r}\left[\left(\sum_{j=1}^{W} p_j{}^q\right)^{(1-r)/(1-q)} - 1\right], \tag{22}$$

где r,q – свободные параметры неаддитивности ($r \neq 1,\ \ 1 \neq q > 0, r \neq q$); $P = \{p_j\}_{j=1,\ldots,\mathrm{W}}$ – распределение вероятностей; p_j – вероятность того, что система находится в j-м микросостоянии, а W – общее количество возможных конфигураций.

Если рассматривать предельные значения параметров энтропии Шарма-Миттел, то она включает в себя как классическую энтропию Больцмана-Гиббса-Шеннона

$$S_{SM}(q \rightarrow, r \rightarrow 1) = S_{BG} := -k\sum\nolimits_j p_j \ln p_j, \tag{23}$$

так и деформированные однопараметрические энтропии:

– аддитивную энтропию Реньи (Renyi, 1961)

$$S_{SM}(q, r \rightarrow 1) = S_{Re} := \frac{k}{1-q}\ln\left(\sum\nolimits_j p_j{}^q\right),\ \ q > 0,\ \ q \neq 1; \tag{24}$$

– неаддитивную энтропию Тсаллиса (Tsallis, 1988, 2009)

$$S_{SM}(q, r = q) = S_T := \frac{k}{1-q}\left(\sum\nolimits_j p_j{}^q - 1\right); \tag{25}$$

– неаддитивную энтропию Ландсберга-Ведрала (Landsberg, Vedral, 1998)

$$S_{SM}(q, r \rightarrow 2-q) = S_{LV} := \frac{k}{1-q}\left[1 - \left(\sum\nolimits_j p_j{}^q\right)^{-1}\right], \tag{26}$$

и некоторые другие. В пределе $q \rightarrow 1,\ r \rightarrow 1$ эти однопараметрические энтропии воспроизводят стандартную энтропию Больцмана-Гиббса (23).

Для двух статистически мультипликативных систем, заданных распределениями вероятностей p_i и p'_k, энтропия Шарма-Миттала удовлетворяет соотношению

$$S_{SM}\left(\{p_i p'_k\}\right) = S_{SM}\left(\{p_i\}\right) + S_{SM}\left(\{p'_k\}\right) + (1-r)S_{SM}\left(\{p_i\}\right)S_{SM}\left(\{p'_k\}\right).$$

Это соотношение важно для того, чтобы увидеть, как энтропийная мера вероятностей Шарма-Миттала включает в себя энтропии Тсаллиса и Реньи в качестве предельных случаев. Когда $r = q$, это соотношение становится соотношением, которому удовлетворяет энтропия Тсаллиса, и показывает ее неаддитивность. С другой стороны, когда $r = 1$, имеет место аддитивное свойство, которое относится к энтропии Реньи. В этом смысле энтропия Шарма-Миттала включает в себя как аддитивные, так и неаддитивные свойства.

Далее будут использованы так называемые деформированные функции Тсаллиса: деформированный логарифм $\ln_q(y)$ и экспоненту $\exp_q(y)$, которые определяются следующим образом (Tsallis, 2029):

$$\ln_q(y) := \frac{y^{1-q} - 1}{1-q}, \quad \exp_q(y) := \left[1 + (1-q)y\right]_+^{1/(1-q)}, \tag{27}$$

где $y \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{R}$; выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[Y]_+ \equiv \max(Y, 0)$.

Легко проверить, что при $q \to 1$ деформированные функции принимают стандартный вид: $\ln_1(y) = \lim\limits_{q\to 1} \ln_q(y) = \ln(y)$, $\exp_1(y) = \lim\limits_{q\to 1} \exp_q(y) = \exp(y)$,

а также, что

$$\exp_q\left[\ln_q(y)\right] = \ln_q\left[\exp_q(y)\right] = y, \quad \forall x; \forall q. \tag{28}$$

Можно убедиться, что для деформированных функций справедливы соотношения (Tsallis, 2009):

$$\ln_q(1/y) = -\ln_{2-q}(y), \tag{29}$$

$$\frac{d}{dy}\exp_q(y) = \left[\exp_q(y)\right]^q, \quad \frac{d}{dy}\ln_q(y) = \frac{1}{y^q} \quad (y > 0; \forall q). \tag{30}$$

Используя обозначение $c_q := \sum_j p_j^{\,q}$ для так называемой обобщенной статистической суммы, перепишем выражения (24) и (25) для энтропий Реньи и Тсаллиса в виде

$$S_{Re} := k(1-q)^{-1} \ln\left[\sum_j p_j^{\,q}\right] = k(1-q)^{-1} \ln c_q,$$

$$S_T := k(1-q)^{-1}\left\{\left[\left(\sum\nolimits_j p_j{}^q\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-q)} - 1\right\} = k\ln_q\left[c_q^{1/(1-q)}\right]. \tag{31}$$

Сопоставляя эти два выражения, получим

$$c_q^{1/(1-q)} = \exp(k^{-1}S_{Re}) = \exp_q(k^{-1}S_T). \tag{32}$$

Отсюда вытекают следующие логарифмические формы записи энтропий S_T и S_{Re}

$$S_{Re} = k\ln\left\{\exp_q\left[k^{-1}S_T\right]\right\},\ S_T = k\ln_q \exp(k^{-1}S_{Re}). \tag{33}$$

С учетом (32) и (33) можно получить следующие формулы связи энтропий Шарма-Миттала и Ландсберга-Ведрала с энтропией Тсаллиса:

$$S_{SM} = \frac{k}{1-r}\left\{\left[\left(\sum\nolimits_j p_j{}^q\right)^{\frac{1}{1-q}}\right]^{(1-r)} - 1\right\} = k\ln_r\left[\exp\left(\frac{S_{Re}}{k}\right)\right] = k\ln_r\left[\exp_q\left(\frac{S_T}{k}\right)\right], \tag{34}$$

$$S_{LV} = \frac{k}{q-1}\left\{\left[\left(\sum\nolimits_j p_j{}^q\right)^{1/(1-q)}\right]^{q-1} - 1\right\} = k\ln_{2-q}\left[c_q^{\frac{1}{1-q}}\right] = k\ln_{2-q}\left\{\exp_q\left(\frac{S_T}{k}\right)\right\}. \tag{35}$$

Заметим, что соотношения (33)-(35) упрощают нахождение предельных значений (24)-(26) энтропии Шарма–Миттала:

$$S_{SM}(q, r\to q) = k\ln_{r\to q}\left\{\exp_q\left(S_T / k\right)\right\} = S_T, \tag{36}$$

$$S_{SM}(q, r\to 1) = k\ln_{r\to 1}\left\{\exp_q\left(S_T / k\right)\right\} = S_{Re}, \tag{37}$$

$$S_{SM}(q, r\to 2-q) = k\ln_{r\to 2-q}\left\{\exp_q\left(S_T / k\right)\right\} = S_{LV}. \tag{38}$$

Поскольку при $q \to 1$ имеем $p_j{}^{q-1} \equiv \exp\left\{(q-1)\ln p_j\right\} \to 1 + (q-1)\ln p_j$, то предельное значение энтропии Тсаллиса равно энтропии Больцмана-Гиббса:

$$S_T(q\to 1) = \lim_{q\to 1}\frac{k}{q-1}\sum\nolimits_j p_j(1 - p_j{}^{q-1}) = -k\sum\nolimits_j p_j \ln p_j) = S_{BG}. \tag{39}$$

Таким образом, экспонента Тсаллиса $\exp_q x$ и q-деформированный логарифм $\ln_q x$ позволяют записать все перечисленные однопараметрические энтропийные меры в компактной форме. Отсюда следует, что они могут изучаться по единообразной схеме.

3.2. Модифицированные меры энтропий Шарма-Миттала и Реньи

Недавно в статье (Abreu, Neto, 2020) был предложен в рамках неэкстенсивной статистической механики энтропийный формализм, основанный на модификации энтропии Реньи, связанный с формальной заменой оригинальной энтропии Тсаллиса S_T, фигурирующей в логарифмической формуле ее записи (33), на энтропию Бекенштейна-Хокинга S_{BH}. В результате было получено следующее выражение для модифицированной энтропии Реньи $\tilde{S}_{Re} = k \ln\left\{\exp_q\left[k^{-1} S_{BH}\right]\right\}$. Собственно говоря, физическая интерпретация подобной модификации остается в настоящее время не совсем ясной. Тем не менее, оригинальная и модифицированная форма записи энтропии Реньи на горизонте Вселенной эффективно используются для целей космологии. В частности, модифицированная энтропия Реньи успешно применялась к голографическому закону равнораспределения, предложенному Падманабханом для исследования термодинамических аспектов космической гравитации (Padmanabhan, 2010). С другой стороны, в работе (Biró, Czinner, 2015) по термодинамике микрочерных дыр была получена оценка $q \approx 1.2026$ для q-параметра в энтропии Реньи $\tilde{S}_{Re}$, которая удивительно близка к аппроксимированным q-параметрам спектров космических лучей (Beck, 2009).

В этой связи, по мнению автора данной статьи, в качестве перспективы для будущих исследований представляет определенный интерес и новая модификация энтропии Шарма-Миттала, полученная аналогичным образом на основе формулы (34), но уже с заменой энтропии Тсаллиса на энтропию Барроу $S_{Bar} = K\left(K/k\right)^{\delta-1} H^{-2\delta}$ (Колесниченко, Маров, 2022). В результате подобного преобразования модифицированная энтропия S_{SM}^{mod} принимает вид

$$S_{SM}^{mod} = k \ln_r\left[\exp_q(S_{Bar}/k)\right] = \frac{k}{1-r}\left\{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{\delta} H^{-2\delta}\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right\}. \quad (40)$$

Энтропия S_{SM}^{mod} содержит, кроме параметров неэкстенсивности q и r, дополнительный параметр δ – показатель степени деформации космологической поверхности за счет ее фрактальной структуры. Это обстоятельство позволяет значительно расширить возможности конструирования различных сценариев эволюции фрактальной Вселенной. Можно ожидать, что подобная модификация позволит по-новому взглянуть на космологические модели, полученные в рамках энтропийной космологии.

3.3. Энтропийная сила, связанная с модифицированной энтропией Шарма-Миттала

Используя свойства (28) и (31) деформированных логарифма и экспоненты, а также формулу (34), получим

$$\frac{dS_{SM}^{mod}}{dr_h} = \left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{q-r} \frac{dS_{Bar}}{dr_h} = \left[1 + k^{-1}(1-q)S_{Bar}\right]^{(q-r)/(1-q)} \frac{dS_{Bar}}{dr_h} =$$

$$= \frac{2\delta}{c} K \left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \left[1 + k^{-1}(1-q)S_{Bar}\right]^{(q-r)/(1-q)} H^{1-2\delta}. \tag{41}$$

Соответственно, энтропийная сила, отвечающая модифицированной энтропии Шарма-Миттала F_{SM}, и ее давление P_{SM} на космологический горизонт определяются формулами

$$F_{SM}^{mod} = -T_h \frac{dS_{SM}^{mod}}{dr_h} = -\delta \frac{c^4}{G} \left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \frac{(1 + H_{,t}/2H^2)}{\left[1 + k^{-1}(1-q)S_{Bar}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}} H^{2-2\delta}, \tag{42}$$

$$P_{SM}^{mod} = \frac{F_{SM}^{mod}}{4\pi r_h^2} = -\Psi(\delta) \frac{H^{4-2\delta}}{\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{r-q}} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right) =$$

$$= -\Psi(\delta) \frac{H^{4-2\delta}}{\left[1 + (1-q)\left(K/k\right)^{\delta} H^{-2\delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}} \left(1 + \frac{H_{,t}}{2H^2}\right), \tag{43}$$

где введено обозначение $\Psi(\delta) := \delta \dfrac{c^2}{4\pi G}\left(K/k\right)^{\delta-1}$.

Используя (36)-(38) и (43), можно получить следующие выражения для давлений на космологический горизонт, оказываемых модифицированными энтропийными силами Барроу, Реньи и Ландсберга-Ведрала:

$$P_{Bar}^{mod} \equiv P_{SM}^{mod}(r \to q) = -\Psi(\delta) H^{4-2\delta}\left(1 + \frac{H,_t}{2H^2}\right), \tag{44}$$

$$P_{Re}^{mod} \equiv P_{SM}^{mod}(r \to 1) = -\Psi(\delta)\frac{H^{4-2\delta}}{\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{1-q}}\left(1 + \frac{H,_t}{2H^2}\right) =$$

$$= -\Psi(\delta)\frac{H^{4-2\delta}}{1 + (1-q)\left(K/k\right)^{\delta} H^{-2\delta}}\left(1 + \frac{H,_t}{2H^2}\right), \tag{45}$$

$$P_{LV}^{mod} \equiv P_{SM}^{mod}(r \to 2-q) = -\Psi(\delta)\frac{H^{4-2\delta}}{\left[1 + (1-q)(K/k)^{\delta} H^{-2\delta}\right]^2}\left(1 + \frac{H,_t}{2H^2}\right). \tag{46}$$

Заметим, что если положить в формуле (45) параметр деформации $\delta = 1$, то получим следующее выражение для давления на космологический горизонт:

$$\tilde{P}_{Re}^{mod} = -\frac{c^2}{4\pi G}\frac{H^2}{1 + (1-q)\left(K/k\right)H^{-2}}\left(1 + \frac{H,_t}{2H^2}\right), \tag{47}$$

отвечающее модифицированной энтропии Реньи $\tilde{S}_{Re} = k\ln\left[\exp_q(k^{-1}S_{BH})\right]$, выполненной с помощью энтропии Бекенштейна-Хокинга S_{BH}.

Выражения для давлений, связанных с энтропийными мерами Тсаллиса-Кирто и Бекенштейна-Хокинга, вытекают из формулы (43), когда свободные параметры принимают значения ($q = r$; $\delta = 3/2$) и ($q = r$; $\delta = 1$) соответственно. В результате получим (Kolesnichenko, Marov, 2021):

$$P_{TK}(t) = -\frac{3c^2}{8\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t)\left(1 + \frac{H,_t}{2H(t)^2}\right), \quad P_{BH}(t) = -\frac{c^2}{4\pi G} H(t)^2\left(1 + \frac{H,_t}{2H(t)^2}\right). \tag{48}$$

При подстановке эффективного давления $P'_{SM} := P + P_{SM}^{mod}$ в космологические уравнения (7) и (8) получается замкнутая система модифицированных уравнений Фридмана и ускорения, записанных как

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + (f_\Lambda(t))_{SM}, \tag{49}$$

$$H(t)^2 + H(t),_t = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)\left(1 + 3w\right) + (f_\Lambda(t))_{SM}. \tag{50}$$

Здесь $P(t)/c^2 = w\,\rho(t)-$ уравнение состояния; $w\,(=\mathrm{const})$ – параметр уравнения состояния для обобщенного компонента материи;

$$(f_\Lambda(t))_{SM} := -\frac{4\pi G}{c^2} P_{SM}^{mod}(t) = \frac{4\pi G}{c^2}\Psi(\delta)\frac{H(t)^{4-2\delta}}{\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{r-q}}\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{\delta}H(t)^{-2\delta)}\right]^{\frac{q-r}{1-q}} H(t)^{4-2\delta}\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right). \qquad (51)$$

С использованием уравнения непрерывности систему уравнений (49), (50) можно записать также в следующем эквивалентном виде:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + (f_\Lambda(t))_{SM}\,,$$

$$\rho(t),_t + 3H(t)\left[\rho(t)+\frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{3}{8\pi G}[(f_\Lambda)_{SM}],_t = 0\,, \qquad (52)$$

где

$$\frac{3}{8\pi G}[(f_\Lambda)_{SM}],_t := -\frac{3}{2c^2}P_{SM}(t),_t \cong \delta\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\left\{H(t)^{4-2\delta}\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{q-r}\right\},_t =$$

$$= \delta\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\frac{\left\{(2-\delta)-\delta(q-r)\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{q-1}(k^{-1}S_{Bar})\right\}}{\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]^{r-q}}H(t)^{3-2\delta}H(t),_t =$$

$$= \delta\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\frac{\left\{(2-\delta)+\left[2(1-q)-\delta(1-r)\right](K/k)^{\delta}H(t)^{-2\delta}\right\}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{\delta}H(t)^{-2\delta}\right]^{1+\frac{r-q}{1-q}}}H(t)^{3-2\delta}H(t),_t\,. \qquad (53)$$

Полученные здесь модифицированные уравнения FRW можно рассматривать как частный случай моделей $\Lambda(t)$CDM. Уравнения (49), (50) и (52), выведенные в предположении, что область горизонта имеет фрактальные особенности в результате квантово-гравитационных эффектов, включают дополнительный управляющий член, связанный с модифицированной энтропией Шарма-Миттала $S_{SM}^{mod}(t)$ на горизонте. При этом важно отметить, что наличие трех свободных параметров в этих уравнениях (параметров неэкстенсивности q и r, отвечающих за учет особенностей пространства-времени, обусловленных дальнодействующей природой гравитации, и параметра δ, отвечающего за фрактальную структуру поверхности космологического горизонта, связанную с гравитационно-квантовыми флуктуациями) позволяет получить различные варианты движущих сил, вызывающих отклонение от «стандартной» голографической модели Вселенной, предложенной Верлинде (Verlinde, 2011). В результате регулирования этими свободными параметрами можно добиться более точного соответствия действительности в сравнении со стандартной космологической моделью Бекенштейна-Хокинга. Вместе с тем следует иметь в виду, что необходимость в объяснении происхождения и физики этих свободных параметров в предложенной модели приводит к затруднениям, аналогичным проблеме космологической постоянной.

В настоящее время во многих исследованиях (см., например, Abreu и др., 2013; Komatsu, Kimura, 2014; Biró, Czinner, 2015; Moradpour, 2016; Moradpour и др.,2017; Abreu, Komatsu, 2017; Komatsu, 2019a, b; Abreu и др., 2020), выполненных в рамках энтропийной космологии при использовании ряда экстенсивных неаддитивных энтропий, были сделаны различные интерпретации полученных модифицированных уравнений FRW. В частности, некоторые из них были нацелены на проблемы космологии, связанные с темной энергией и с различными видами непертурбативной петлевой квантовой гравитации. В этой связи предложенный в этом разделе подход может быть полезен при конструировании космологических моделей, основанных на энтропийной силе, соотнесенной с модифицированной энтропией Шарма-Миттела на хаббловском горизонте Вселенной. *В итоге он представляет собой еще одно новое моделирование зависящего от времени космологического члена* $\Lambda(t)$.

3.4. Некоторые примеры модифицированных уравнений FRW

В случае, когда параметр деформации $\delta = 1$, уравнение (50) принимает вид обобщенного уравнения ускорения Бекенштейна–Хокинга

$$H(t)^2 + H(t)_{,t} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)\left(1+3w\right) + \frac{H(t)^2}{\left[1+k^{-1}(1-q)KH(t)^{-2)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}\left(1+\frac{H(t)_{,t}}{2H(t)^2}\right), \quad (54)$$

которое при $q = r$ совпадает с уравнением (12).

Если $\delta = 3/2$, то уравнение ускорения (50) принимает вид обобщенного уравнения Тсаллиса-Кирто

$$H(t)^2 + H(t)_{,t} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)\left(1+3w\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\left(K/k\right)^{1/2}\frac{H(t)}{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{3/2}H(t)^{-3)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right), \qquad (55)$$

которое при $r = q$ совпадает с традиционным уравнением ускорения Тсаллиса-Кирто

$$H(t)^2 + H(t),_t = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)\left(1+3w\right)+\frac{3}{2}\left(K/k\right)^{1/2}H(t)\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right). \qquad (56)$$

Когда $(r \to 1)$, уравнения (49) и (52) принимают следующий вид космологических обобщенных уравнений Реньи:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)+\delta\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1}\frac{H(t)^{4-2\delta}}{1+(1-q)\left(K/k\right)^{\delta}H(t)^{-2\delta}}\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right), \qquad (57)$$

$$\rho,_t + 3(1+w)H(t)\,\rho(t) =$$

$$=\delta\frac{3}{4\pi G}\left(K/k\right)^{\delta-1}\frac{\left\{(2-\delta)+2(1-q)\left(K/k\right)^{\delta}H(t)^{-2\delta}\right\}}{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{\delta}H(t)^{-2\delta}\right]^2}H(t)^{3-2\delta}H(t),_t = 0\,, \qquad (58)$$

который соответствует модифицированной энтропии $S_{Re}^{mod} = k\ln\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]$ на космологическом горизонте, выполненной с помощью энтропии Барроу S_{Bar}. При $\delta = 1$ они принимают вид обобщенных уравнений, отвечающих модифицированной энтропии Реньи $\tilde{S}_R = k\ln\left[\exp_q(k^{-1}S_{BH})\right]$:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)+\frac{H(t)^2}{1+k^{-1}(1-q)KH(t)^{-2}}\left(1+\frac{H(t),_t}{2H(t)^2}\right), \qquad (60)$$

$$\rho,_t + 3(1+w)H(t)\,\rho(t)+\frac{3}{4\pi G}\frac{\left\{1+2k^{-1}(1-q)KH(t)^{-2}\right\}}{\left[1+k^{-1}(1-q)KH(t)^{-2}\right]^2}H(t)H(t),_t = 0\,. \qquad (62)$$

Если $(r \to 2-q)$, то уравнения (49) и (52) принимают следующий вид обобщенных космологических уравнений, связанных с модифицированной энтропией Ландсберга-Ведрала $S_{LV}^{mod} = k\ln_{2-q}\left[\exp_q(k^{-1}S_{Bar})\right]$ на горизонте:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \delta\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \frac{H(t)^{4-2\delta}}{\left[1+(1-q)\left(K/k\right)^{\delta} H(t)^{-2\delta)}\right]^2}\left(1+\frac{H(t)_{,t}}{2H(t)^2}\right), \quad (63)$$

$$\rho_{,t} + 3(1+w)H(t)\rho(t) =$$

$$= \delta\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\delta-1} \frac{\left\{(2-\delta)+(2+\delta)(1-q)(K/k)^{\delta} H(t)^{-2\delta}\right\}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{\delta} H(t)^{-2\delta}\right]^2} H(t)^{3-2\delta} H(t)_{,t}. \quad (64)$$

Космологические следствия выведенных здесь модифицированных уравнений FRW оставлены для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные космологические данные свидетельствуют о том, что Вселенная расширяется с ускорением. К сожалению, модифицированная ОТО, включающая ключевой параметр, характеризующий расширение − космологическую постоянную Λ – не может достаточно точно описать этот феномен. Поэтому возникает необходимость в поиске других подходов, с помощью которых можно описать ускоренное расширение Вселенной. Одним из новых направлений на этом пути является «энтропийная космология», согласно которой в основе ускоренного расширения Вселенной лежит так называемая энтропийная сила, позволяющая объяснить ускоренное расширение в терминах энтропийных сил без привлечения концепции темной энергии.

В энтропийной космологии можно рассмотреть несколько форм энтропии на космологическом горизонте, используя сценарий энтропийной силы. В рамках этой концепции космологический горизонт обладает ассоциированной энтропией и температурой. В представленном исследовании мы ввели в рассмотрение энтропийную силу из новой модификации энтропии Шарма-Миттала, полученной путем замены энтропии Тсаллиса в исходном логарифмическом представлении энтропии Шарма-Миттала на негауссову энтропию Барроу, учитывающую квантово-гравитационные деформации космологического горизонта Вселенной.

В контексте энтропийной космологии в работе получены космологические уравнения Фридмана-Робертсона-Уокера путем введения в их стандартную структуру эффективного отрицательного давления, равного сумме традиционного скалярного давления космологической жидкости и энтропийного давления, связанного с модифицированной двухпараметрической энтропией Шарма-Миттала на горизонте Вселенной, которая, в свою очередь, является родоначальником целого семейства однопараметрических неаддитивных энтропий (таких как энтропии Тсаллиса, Реньи, Ландсберга-Ведрала и др.). Важно отметить, что наличие трех свободных параметров у энтропии Шарма-Миттала (параметров неэкстенсивности q и r, отвечающих за учет особенностей пространства-времени, обусловленных дальнодействующей природой гравитации, и параметра δ, отвечающего за фрактальную структуру поверхности космологического горизонта, связанную с квантовыми флуктуациями), позволяет получить различные варианты дополнительных движущих сил при регулировании этими свободными параметрами модели и тем самым добиться более точного приближения к реальности, чем стандартная космологическая модель Бекенштейна-Хокинга.

Работа выполнена для однородной, изотропной и пространственно плоской Вселенной, моделируемой космологической жидкостью, состоящей из темной материи, излучения и обычной материи. Предлагаемый подход, предполагающий использование вероятностных экстенсивных аспектов космологического горизонта, отвечает хорошо известным основным требованиям к термодинамическому моделированию динамического поведения космического пространства без привлечения концепции гипотетической темной энергии, используя при этом сценарий энтропийной силы. Ожидается, что подобная модификация космологических уравнений позволит по-новому взглянуть на космологические модели, полученные в рамках фрактальной энтропийной космологии.

Естественно, остается множество тем, которые требуют дальнейшего анализа полученных результатов. Было бы и необходимо, и интересно провести полный наблюдательный анализ, сопоставив полученные сценарии с данными наблюдений сверхновых типа Ia и параметра Хаббла, с данными крупномасштабной структуры, с барионными акустическими колебаниями, а также с космическим микроволновым фоном. К сожалению, эти необходимые исследования выходят за рамки настоящей работы и оставлены для будущих исследований.

Работа поддержана постоянным финансированием Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство этим конкретным исследованием получено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вайнберг С. Гравитация и Космология. Принципы и приложения общей теории относительности. Волгоград: Изд-во «ПЛАТОН». 2000. 696 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87) 2019. 360 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. XLII. P. 74-101.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Барроу и Тсаллиса-Кирто // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 105. 38 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. К моделированию динамической эволюции Вселенной под воздействием энтропийной силы, связанной с модифицированной энтропией Шарма-Миттела // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 68. 36 с.

Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Изд-во «Мир». 1977. 525 с.

Abreu E.M.C., Neto J. A., Mendes A.C.R., Oliveira W. New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations // Physica A 392 (2013) 5154-5163.

Abreu E.M. C., J.A. Neto, A.C.R. Mendes, Bonilla A. Tsallis and Kaniadakis statistics from a point of view of the holographic equipartition law // Europhys. Lett. 2018. V.121 P. 45002 (1-4).

Abreu E.M.C., Neto J.A. On the nature of Rényi modified entropy and the Incomplete statistics approach in black holes thermodynamics // arXiv:2009.05012 [gr-qc] 13 Apr 2020.

Abreu E.M.C., Neto J.A. Some statistical approaches in the apparent horizon entropy and the generalized second law of thermodynamics // arXiv:2107. 04869 v1 [gr-qc] 10 Iul 2021.

Abreu E.M.C., Neto J.A., Barboza E.M. Jr., Mendes A.C.R., Soares B.B. On the equipartition theorem and black holes non-Gaussian entropies // Modern Physics Letters A. 2020. V. 35. № 32. P. 2050266 (7 pages).

Aditya Y., Mandal S., Sahoo P., Reddy D. Observational constraint on interacting Tsallis holographic dark energy in logarithmic BransDicke theory // Eur. Phys. J. 2019. V. 79. № 12. P. 1020.

Akbar M., Cai R.G. Friedmann equations of FRW universe in scalar tensor gravity, f(R) gravity and first law of thermodynamics // Phys. Lett. B. 2006. V. 635. P. 7-10.

Aktürk E., Bagci G.B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Anagnostopoulos F.K., Basilakos S., Kofinas G., Zarikas V. Constraining the Asymptotically Safe Cosmology: cosmic acceleration without dark energy // JCAP. 2019. V. 053 [arXiv:1806.10580].

Anagnostopoulos F.K., Basilakos S., Saridakis E.N. Observational constraints on Barrow holographic dark energy // Eur. Phys. J. C. 2020. V.80. P. 826 (1-9).

Avelino A., Nucamendi U. Exploring a matter-dominated model with bulk viscosity to drive the accelerated expansion of the Universe // Journal of Cosmology and Astroparticle Physic. 2010. V. 2010. № 8, article no. 009.

Barboza E.M., Nunes R.C., Abreu E.M.C., Neto J.A. Dark energy models through nonextensive Tsallis' statistics Physica A. 2015. V. 436. P. 301-310.

Barrow J.D .The area of a rough black hole // Physics Letters B. 2020. V. 808. P. 135643.

Barrow J.D., Basilakos S., Saridakis E.N. Big Bang Nucleosynthesis constraints on Barrow entropy // Physics Letters B. 2021. V. 815. P. 136134.

Basilakos S., Plionis M., Sola J. Hubble expansion and structure formation in time varying vacuum models // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. № 8. P. 083511.

Basilakos S., Polarski D., Sola J. Generalizing the running vacuum energy model and comparing with the entropic-force models // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. № 4. P. 043010.

Beck C. Superstatistics in high energy physics: Application to cosmic ray energy spectra and e+e− annihilation // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 40. P. 267-273.

Bekenstein J.D. Black Holes and Entropy//Phys. Rev. D. 1975. V. 7. № 8. P. 2333-2346.

Biró T.S., Czinner V.G. A q-parameter bound for particle spectra based on black hole thermodynamics with Rényi entropy // Physics Letters B. 2013. V. 726. № 4-5. P. 861-865.

Bousso R. The holographic principle // Reviews of modern physic. 2002. V. 74. P. 825-874.

Brevik I., Gorbunova. O.G. Dark energy and viscous cosmology // General Relativity and Gravitation. 2005. V. 37. P. 2039-2045.

Cai R.G., Cao L.-M. Unified first law and the thermodynamics of the apparent horizon in the FRW universe // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 064008

Cai Y.-F., Liu J., Li H. Entropic cosmology: A unified model of inflation and late-time acceleration // Physics Letters B. 2010. V. 690. P. 213-219.

Cai Y.-F., Saridakis E. Inflation in entropic cosmology: Primordial perturbations and non-Gaussianities // Physics Letters B. 2011. V. 697. P. 280-287.

Clowe D., Bradac M., Gonzalez A.H., Markevitch M., Randall S.W., Jones C., Zaritsky D. A direct empirical proof of the existence of dark matter // Astrophys. J. 2006. V. 648. P. L109.

Czinner V.G., Iguchi H. Rényi entropy and the thermodynamic stability of black holes // Phys. Lett. B. 2016. V. 752. P. 306-310.

Das S., Shankaranarayanan S. How robust is the entanglement entropy-area relation? // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 121701(R).

Dou X., Meng., X.-H. Bulk Viscous Cosmology: Unified Dark Matter // Adv. Astron. 2011. V. 2011. P. 829340.

Drepanou N., Lymperis A., Saridakis E.N, Yesmakhanova K. Kaniadakis holographic dark energy and cosmology // Eur. Phys. J. 2022. V. 82. № 5. P.449-.

Easson D.A., Frampton P.H., Smoot G.F. Entropic accelerating universe // Physics Letters B. 2011. V. 696. № 3. P. 273-277.

Easson D.A., Frampton P.H., Smoot, G.F. Entropic Inflation // arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] 13Apr 2012.

Farooq O., Madiyar F.R., Crandall S., Ratra B. Hubble parameter measurement constraints on the redshift of the deceleration–acceleration transition, dynamical dark energy, and space curvature // Astrophys. J. 2017. V. 835. P. 26.

Gibbons G.W., Hawking S.W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creatio // Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 738-2751.

Gron O. Viscous inflationary universe models // Astrophysics and Space Science.1990.
V. 173. P. 191-225.

Hawking S.W. Particle Creation By Black Holes // Commun Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199-220.

Hayward S.A., Criscienzo R.D., Nadalini M., Vanzo L., Zerbini S. Local Hawking temperature for dynamical black holes // arXiv:0806.0014v2 [gr-qc]. 2009. P. 1-9.

Hu B., Ling Y. Interacting dark energy, holographic principle, and coincidence problem // Physical Review D. 2006. V. 73. P. 123510.

Hooft G. Dimensional Reduction in Quantum Gravity // https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310026 (2009).

Jalalzadeh S., da Silva F.R., Moniz P.V. Prospecting black hole thermodynamics with fractional quantum mechanics // Eur. Phys. J. 2021. V. 81. P. 632 (1-13).

Jalalzadeh S., Moradpour H., Moniz P.V. Modified cosmology from quantum deformed entropy // Phys. Dark Univ. 2023. V. 42. P. 101320.

Jalalzadeha R., Jalalzadehb S., Jahromid Sayahian A., Moradpour H. Friedmann equations of the fractal apparent horizon // arXiv:2404.06986v1 [gr-qc] 10 апр 2024.

Keul N.D., Oruganty K., Bergman E.T.S., Beattie N.R., McDonald W.E., Kadirvelraj R., Gross M.L., Phillips R.S., Harvey S.C., Wood Z.A. The entropic force generated by intrinsically disordered segments tunes protein function // Nature. 2018. V. 563. P. 584-588.

Komatsu N., Kimura S. Entropic cosmology for a generalized black-hole entropy // Physical Review D. 2013b. V. 88. P. 083534.

Komatsu N., Kimura S. Evolution of the universe in entropic cosmologies via different formulations // Physical Review D. 2014. V. 89. № 12. P. 123501.

Komatsu N., Kimura S. Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology // Phys. Rev. D. 2013a. V. 87. P. 043531.

Komatsu N. Cosmological model from the holographic equipartition law with a modified Rényi entropy // Eur. Phys. J.C. 2017. V. 77. P. 229-2412.

Komatsu N. Generalized thermodynamic constraints on holographic-principle-based cosmological scenarios // Physical Review D. 2019b. V. 99. P. 043523.

Komatsu N. Thermodynamic constraints on a varying cosmological-constant-like term from the holographic equipartition law with a power-law corrected entropy // Physical Review D. 2017. V. 96. P. 103507.

Komatsu N. Generalized thermodynamic constraints on holographic-principle-based cosmological scenarios // Physical Review D. 2019a. V. 99. P. 043523.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Scenario of accelerated universe expansion under exposure to entropic forces related to with the entropies of Barrow and Tsallis-irto // Mathematica Montisnigri. 2021. V. L. P. 80-103.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Friedmann Cosmological Equations in the Sharma–Mittal Entropy Formalism // Astronomy Reports 2022. V. 66, № 9, P. 786-799.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Leon G., Magaña J., Hernández-Almada A., García-Aspeitia M.A., Verdugo T., Motta V. Barrow Entropy Cosmology: an observational approach with a hint of stability analysis // JCAP. 2021 V. 2012. № 12. P. id.032P (34 p).

Li B., Barrow J. Does bulk viscosity create a viable unified dark matter model? // Physical Review D, 2009. V. 79. № 10. P. id. 103521.

Maddox J. When entropy does not seem extensive // Nature 1993. V. 365. P. 103.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Constructing an Entropy-Force Model of the Expansion of the Universe Due to Gravitationally Induced Production of Dark Matter // Astronomy Reports. 202., V. 68. № 5. P. 499-513.

Meng X.-H., Dou X. Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy // Communicationsin Theoretical Physics. 2009. Vl. 52. № 2. P. 377.

+Padmanabhan T. Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights // Rept. Prog. Phys. 2010a. V. 73. № 4. P.046901 (1-44).

Moradpour H., Bonilla A,. Abreu E.M.C, Neto J.A. Accelerated cosmos in a nonextensive setup // Physical Review D, 2017. V. 96, № 12, id.123504.

Moradpour H. Implications, consequences and interpretations of generalized entropy in the cosmological setups // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. № 9. P. 4176-4184.

Moradpour H. Sheykhi S., Corda C., Salako I.G. Implications of the generalized entropy formalisms on the Newtonian gravity and dynamics // Physics Letters B. 2018. V. 783. P. 82-85.

Moradpour H., Corda C., Ziaie A.H., Ghaffari S. The extended uncertainty principle inspires the R´enyi entropy // EPL (Europhysics Letters). 2019. V. 127. №. 6. P. 60006.

Nojiri S., Odintsov S.D., Saridakis E.N., Myrzakulov R. Correspondence of cosmology from non-extensive thermodynamics with fluids of generalized equation of state // Nucl. Phys. B. 2020. V. 950. P. 114850.

Padmanabhan T., Chitre S.M. Viscous universes. Physics Letters A. 1987. V. 120. №. 9. P. 433-436.

Padmanabhan T. Surface density of spacetime degrees of freedom from equipartition law in theories of gravity // Physical Review D. 2010. V. 81. № 12. P. 124040 (21-12).

Padmanabhan T. Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity // Modern Physics Letters A. 2010. V. 25. № 14. P. 1129-1136.

Plastino A, Plastino A.R. Stellar polytropes and Tsallis' entropy // Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 384-386.

Prigogine I., Geheniau J., Gunzig E., Nardone P. Thermodynamics and Cosmology // General Relativity and Gravitation. 1989. V.21. № 8. P. 767-776.

Qiu T., Saridakis E.N. Entropic force scenarios and eternal inflation // Phys. Rev. D. 2012. V. 85. P. 043504.

Renyi A. Probability Theory. North-Holland, Amsterdam, 1970.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547–561.

Ryden B. Introduction to Cosmology. Cambridge University Press. 2017. 279 p.

Saridakis E.N. Modified cosmology through spacetime thermodynamics and Barrow horizon entropy // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2020. P.1-10.

Saridakis E.N. Basilakos S. The generalized second law of thermodynamics with Barrow entropy // Eur. Phys. J. C. 2021. V. 7. P. 644.

Sayahian Jahromi A., Moosavi S.A., Moradpour H., Morais Graça J.P., Lobo I.P., Salako I.G., Jawad A. Generalized entropy formalism and a new holographic dark energy model // Physics Letters B. 2018. V. 780. P. 21-24.

Scarfone A.M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72. № 2. id. 026123.

Sebastian, L. Dark viscous fluid coupled with dark matter and future singularity // European Physical Journal C. 2010. V. 69. P. 547-553.

de Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis //Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam). 1917. V. 19. P. 1217-1225.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst.Sci. 1975. V.2. P. 122-133.

Sheykhi A. Modified Friedmann equations from Tsallis entropyPhys. Lett. B. 2018. V. 785. P. 118-126.

Sheykhi A. Barrow entropy corrections to Friedmann equations // Phys. Rev. D. 2021. V.103. P. 123503 (1-9).

Sheykhi A., Wang B. Generalized second law of thermodynamics Gauss-Bonnet braneworld // Phys. Lett. B. 2009. V. 678. P. 434- 437.

Sola J. Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas // J. Phys. Conf. Ser. 2013. V. 453. P. 012015.

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6377-6396.

Tamanini N. Phenomenological models of dark energy interacting with dark matter // Physical Review D. 2015. V. 92. P. 043524.

Taruya A., Sakagami M. Long-Term Evolution of Stellar Self-Gravitating Systems Away from Thermal Equilibrium: Connection with Nonextensive Statistics // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 181101 (1-4).

Torres D.F., Vucetich H., Plastino A. Early Universe Test of Nonextensive Statistics // Phys. Rev. Lett. 1997. V.79. № 9. P. 1588-1590.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1-2. P.479-487 (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Tsallis C., Cirto L. J.L. Black hole thermodynamical entropy // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73. P. 2487. Doi: 10.1140/epjc/s10052-013-2487-6.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26.

Wang Y., Wands D., Zhao G.-B., Xu L. Post-Planck constraints on interacting vacuum energy. Physical Review D. 2014. V. 90. № 2. P. 023502 (1-14).

Waheed S. Reconstruction paradigm in a class of extended teleparallel theories using Tsallis holographic dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 1. P. 11.

Weinberg S. The cosmological constant problem // Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P. 1-23.

Wilk G., Wlodarczyk Z. On the interpretation of nonextensive parameter q in Tsallis statistics and Levy distributions // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. P. 2770.

Wissner-Gross A.D., Freer C.E. Causal entropy forces // Phys. Rev. Lett. 2013, V. 110, 168702. OhysRevLett.110.168702.

ОГЛАВЛЕНИЕ