



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 68 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.А. Кучугов

Адаптивное изменение
параметра физического
разрешения в подходе на
основе частично
усреднённых уравнений
Навье-Стокса

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кучугов П.А. Адаптивное изменение параметра физического разрешения в подходе на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 68. 27 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-68>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-68>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

П.А. Кучугов

**Адаптивное изменение параметра
физического разрешения в подходе
на основе частично усреднённых
уравнений Навье-Стокса**

Москва — 2024

П.А. Кучугов

Адаптивное изменение параметра физического разрешения в подходе на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса

В работе на примере задачи о затухании однородной изотропной турбулентности демонстрируется использование подхода на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса. В качестве базовой модели турбулентности используется k - ϵ модель. Значение параметра подсеточной модели, отвечающего за разделение масштабов турбулентного течения, меняется со временем как по заданному закону, так и на основе текущих характеристик течения. Для учёта некоммутативности оператора усреднения с пространственными и временной производными за счёт переменного значения отношения турбулентной кинетической энергии неразрешаемых оператором усреднения пульсаций к полной турбулентной кинетической энергии используется модель, базирующаяся на принципе сохранения полной энергии.

Ключевые слова: частично усреднённые уравнения Навье-Стокса, турбулентность, переменный фильтр, коммутационные ошибки

Pavel Aleksandrovich Kuchugov

Adaptive change of the resolution parameter in the approach based on partially averaged Navier-Stokes equations

In this paper, the use of an approach based on partially averaged Navier-Stokes equations is demonstrated on the example of the decay of homogeneous isotropic turbulence. The k - ϵ model is used as the basic turbulence model. The value of the subgrid model parameter, responsible for separating the scales of the turbulent flow, changes over time both according to a given law and based on the current characteristics of the flow. To take into account the non-commutativity of the averaging operator with spatial and temporal derivatives due to the variable ratio of unresolved to total turbulent kinetic energy, a model based on the principle of conservation of total energy is used.

Key words: partially averaged Navier-Stokes equations, turbulence, variable filter, commutation errors

Введение

Численное решение задач, включающих переход к турбулентным течениям и развитую турбулентность, сопряжено с множеством трудностей. Зачастую такие задачи содержат существенно различающиеся пространственные и временные масштабы, что приводит либо к использованию избыточно подробных сеток, либо к необходимости сшивки различных моделей в переходных областях.

Использование гибридных методов наряду со ставшими уже классическими подходами RANS (усреднённые по Рейнольдсу/Фавру уравнения Навье-Стокса) и LES (метод крупных вихрей) при моделировании турбулентных течений позволяет достичь хорошего согласия численных результатов с экспериментальными данными при приемлемой вычислительной ресурсоёмкости. Этого удаётся добиться, так или иначе разделяя области течения с различными характерными масштабами. Существует несколько вариантов данной процедуры. Во-первых, это зонные (zonal) гибридные подходы, когда переключение между RANS и LES происходит в заранее определённых зонах. Во-вторых, подходы на основе бесшовного перехода между RANS и LES (bridging), такие как PITM (Partially Integrated Transport Model) [1] и PANS (Partially Averaged Navier-Stokes) [2]. Анализу последнего подхода, а именно подхода на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, и будет посвящена данная работа.

Впервые подход на основе частичного усреднения уравнений Навье-Стокса был предложен в работе [2]. В последующие почти два десятилетия подход совершенствовался, обретая законченный вид. В работах [3, 4] было показано, что усреднённые уравнения Навье-Стокса инвариантны относительно оператора усреднения при условии его линейности и коммутативности с пространственными и временной производными и могут быть записаны в эквивалентной форме в терминах обобщённых корреляционных моментов. Это обстоятельство является основой для гибридных подходов. Однако следует отметить, что в зависимости от способа усреднения способ разделения масштабов имеет существенно различные физические обстоятельства. Так, в традиционном методе крупных вихрей разделение происходит на основе порогового значения пространственного масштаба фильтра, в подходах типа PANS и PITM – на основе отношения кинетических энергий в разрешённых и неразрешённых масштабах, а именно $f_k = \frac{k_u}{k}$, k_u – турбулентная кинетическая энергия неразрешённых пульсаций, k – полная турбулентная кинетическая энергия. В [1] было показано, что при рассмотрении стационарной турбулентности и постоянном значении f_k пороговое волновое число также остаётся постоянным. В случае нестационарной турбулентности и при постоянном значении f_k пороговое волновое число меняется с целью поддержания соотношения между турбулентными энергиями, что соответствует

переменному разрешению фильтрующего оператора. В первом случае подходы PANS и LES являются полностью эквивалентными. При явном изменении f_k в уравнениях, описывающих частично усреднённое течение, будут возникать дополнительные члены, отвечающие некоммутативности оператора усреднения с пространственными и временной производными [5].

В работе частично воспроизведены результаты работы [6], но при использовании $k - \epsilon$ модели в качестве базовой. Кроме того, приведены результаты использования адаптивного значения параметра f_k в задаче о затухании однородной изотропной турбулентности с учётом модели замыкания для членов, описывающих коммутационные ошибки оператора усреднения.

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

В работах [3, 4] было показано, что для оператора усреднения достаточно общего вида, предполагая только его линейность и коммутативность с временными и пространственными производными. Система усреднённых уравнений Навье-Стокса в терминах обобщённых корреляционных моментов может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \langle p \rangle \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{E} \tilde{v}_i + \langle p \rangle \tilde{v}_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle q_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{v}_j \langle \sigma_{ij} \rangle) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_2(v_i, H) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k)) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_k, v_k) \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha \tilde{v}_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tau_1(C_\alpha, v_i)) + \langle \dot{\omega}_\alpha \rangle, \\ \langle p \rangle = \langle p(\rho, T) \rangle, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\langle \varphi \rangle$ – усреднённое/отфильтрованное значение величины φ , $\tilde{\varphi} = \langle \rho \varphi \rangle / \langle \rho \rangle$ – взвешенное среднее, $\tau_1(f, g) = \tilde{f}g - \tilde{f}\tilde{g}$, $\tau_2(f, g) = \langle fg \rangle - \tilde{f}\langle g \rangle$, $\tau_1(f, g, h) = \tilde{f}gh - \tilde{f}\tau_1(g, h) - \tilde{g}\tau_1(f, h) - \tilde{h}\tau_1(f, g) - \tilde{f}\tilde{g}\tilde{h}$ – обобщённые корреляционные моменты, σ_{ij} – тензор вязких напряжений, q_i – поток тепла, $H = \rho\epsilon + p$ – энтальпия. Остальные обозначения имеют общепринятое значение. Рассмотренная выше процедура усреднения даёт

$$\tilde{E} = \tilde{\epsilon} + \frac{1}{2} \tilde{v}_k \tilde{v}_k + \frac{1}{2} \tau_1(v_k, v_k), \quad (2)$$

$k_u = \frac{1}{2}\tau_1(v_k, v_k)$ – турбулентная кинетическая энергия, заключенная в неразрешённых при фильтрации пульсациях.

Выражения для $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и $\langle q_i\rangle$ можно переписать в виде:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \check{\sigma}_{ij} + \Psi_{ij}, \quad (3)$$

где $\Psi_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle - \check{\sigma}_{ij}$,

$$\check{\sigma}_{ij} = 2\tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (4)$$

и

$$\langle q_i\rangle = \check{q}_i + Q_i, \quad (5)$$

где $Q_i = \langle q_i\rangle - \check{q}_i$,

$$\check{q}_i = -C_p \frac{\tilde{\mu}}{Pr} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i}. \quad (6)$$

В большинстве случаев можно пренебречь членами Ψ_{ij} и Q_i :

$$\frac{\tilde{\varphi}}{\langle\varphi\rangle} = 1 + \frac{\langle\rho\varphi\rangle - \langle\rho\rangle\langle\varphi\rangle}{\langle\rho\rangle\langle\varphi\rangle} \approx 1. \quad (7)$$

Подсеточные/турбулентные потоки записываются в градиентном приближении следующим образом:

$$-\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j) = 2\mu_u \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \langle\rho\rangle k_u \delta_{ij}, \quad (8)$$

μ_u – динамическая вязкость, определяемая неразрешёнными турбулентными пульсациями.

$$\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, \varepsilon) \approx -C_p \frac{\mu_u}{Pr_t} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i} \quad (9)$$

– турбулентный поток тепла,

$$\tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_k, v_k) - \tau_2(v_i, p) \approx \left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}} \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \quad (10)$$

– молекулярная диффузия и турбулентный перенос,

$$\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, C_\alpha) \approx -\frac{\mu_u}{Sc_t} \frac{\partial\tilde{C}_\alpha}{\partial x_i} \quad (11)$$

– турбулентная диффузия.

Тем самым для окончательного замыкания системы усреднённых уравнений Навье-Стокса необходимо определить подсеточную вязкость μ_u .

Для этих целей используются уравнения базовой модели турбулентности, записанные в терминах частично усреднённых турбулентных пульсаций. Далее для определённости в качестве базовой модели турбулентности будем подразумевать $k - \epsilon$ модель. Соответствующие уравнения, записанные в инвариантной относительно оператора усреднения форме, примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle k_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle k_u \tilde{v}_i) = P_{ku} - \langle \rho \rangle \epsilon_u + T_{ku}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \epsilon_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \epsilon_u \tilde{v}_i) = C_{1\epsilon}^* P_{ku} \frac{\epsilon_u}{k_u} - C_{2\epsilon}^* \frac{\langle \rho \rangle \epsilon_u^2}{k_u} + T_{\epsilon u}, \end{cases} \quad (12)$$

турбулентная вязкость

$$\mu_u = \langle \rho \rangle C_{\mu u} \frac{k_u^2}{\epsilon_u}, \quad (13)$$

генерационный член

$$P_{ku} = - \langle \rho \rangle \tau_1 (v_i, v_j) \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i}, \quad (14)$$

молекулярная диффузия и турбулентный перенос

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}} \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \right), \quad (15)$$

$$T_{\epsilon u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{\epsilon u}} \right) \frac{\partial \epsilon_u}{\partial x_i} \right). \quad (16)$$

Вводя параметры модели, отвечающие за физическое разрешение/разделение масштабов пульсаций, $f_k = \frac{k_u}{k}$, $f_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon}$, $f_\rho = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}}$ для калибровочных констант модели можно получить [7, 2, 8]:

$$\sigma_{ku} = \frac{f_k^2}{f_\epsilon} \sigma_k, \quad (17)$$

$$C_{1\epsilon}^* = C_{1\epsilon}, \quad (18)$$

$$C_{2\epsilon}^* = C_{1\epsilon} + \frac{f_k}{f_\epsilon} (C_{2\epsilon} - C_{1\epsilon}), \quad (19)$$

$$\sigma_{\epsilon u} = \frac{f_k^2}{f_\epsilon} \sigma_\epsilon, \quad (20)$$

$$C_{\mu u} = C_\mu. \quad (21)$$

Отметим, что при получении выражений (17)–(21) было сделано два существенных допущения. Во-первых, было принято приближение, в котором перенос турбулентной кинетической энергии за счёт разрешённых пульсаций

предполагается малым. Во-вторых, параметры f_k , f_ϵ и f_ρ считались константами или же слабо меняющимися функциями на рассматриваемых пространственных и временных масштабах.

Рассмотрим теперь случай существенного изменения значения параметра f_k , по-прежнему предполагая постоянство f_ϵ и f_ρ . Запишем следующее выражение с учётом нового допущения:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial k_u}{\partial x_i} = f_k \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + k \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right) = f_k \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{P_f}{\langle \rho \rangle}, \quad (22)$$

В отличие от случая $df_k/dt = 0$, (22) содержит дополнительный член

$$P_f = \langle \rho \rangle \frac{k_u}{f_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right), \quad (23)$$

отвечающий за перенос энергии из разрешённых масштабов в неразрешённые вследствие изменения порогового волнового числа. В случае растущего значения f_k данный член будет способствовать переносу энергии в неразрешённые масштабы, в случае убывающего – из неразрешённых масштабов. Далее получаем:

$$\langle \rho \rangle \left(\frac{\partial k_u}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \right) = P_{ku} + P_f - \langle \rho \rangle \epsilon_u + T_{ku} = f_k f_\rho (P_k - \bar{\rho} \epsilon + T_k) + P_f + \langle \rho \rangle f_k (\tilde{v}_i - \hat{v}_i) \frac{\partial k}{\partial x_i}. \quad (24)$$

Выразив из (24) P_k , получим выражение, совпадающее со случаем постоянного или медленно меняющегося значения f_k . Таким образом, это приведёт к тому, что все калибровочные константы подсеточной модели останутся прежними.

Как было сказано во введении, в случае стационарной турбулентности подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса эквивалентен методу крупных вихрей с постоянным фильтром. В случае нестационарной турбулентности или в случае явного изменения параметра f_k соответствующий фильтр будет переменным, что приведёт к наличию дополнительных членов в усреднённых уравнениях из-за некоммутативности такого оператора усреднения с пространственными и временными производными. Наличие этих членов вследствие нестационарности течения будем учитывать неявно через модель для корреляционного момента скоростей. В свою очередь, члены, связанные с изменением f_k , следует учесть явно и, кроме того, определить способ их вычисления. Такая модель для замыкания системы усреднённых уравнений с членами, отвечающими за коммутационные ошибки оператора усреднения, была предложена в работах [5, 6].

Следуя этим работам, запишем уравнение для импульсов с учётом наличия

коммутационных ошибок оператора усреднения:

$$\langle \rho \rangle \frac{D\tilde{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)) + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij} \rangle - R_i, \quad (25)$$

где $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Для эволюции разрешаемой кинетической энергии $Q = \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i$ на основе (25) имеем:

$$\langle \rho \rangle \frac{DQ}{Dt} = -\tilde{v}_i \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij} \rangle - \tilde{v}_i R_i. \quad (26)$$

Кинетическая энергия разрешаемого оператором усреднения течения складывается из кинетической энергии усреднённого течения E_m и турбулентной кинетической энергии разрешаемых пульсаций K_r , т.е. $Q = K_r + E_m$. Тем самым член, отвечающий за коммутационные ошибки, определяет дополнительную динамику в уравнении импульса и кинетической энергии, а также входит в уравнение неразрешённых пульсаций скорости с противоположным знаком. Это свидетельствует о том, что в уравнении для кинетической энергии неразрешённых пульсаций будет дополнительный генерационный член, который уже установлен в (23).

В работах [5, 6] для члена R_i было предложено использовать приближение, схожее с приближением Буссинеска:

$$R_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu_f \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu_f A_{ij}). \quad (27)$$

Подставляя данное выражение в (26), получим слагаемое, отвечающее за коммутационные ошибки, в следующем виде:

$$\tilde{v}_i R_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu_f \tilde{v}_i A_{ij}) + 2\mu_f A_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j}, \quad (28)$$

где первое слагаемое определяет перенос разрешённой кинетической энергии за счёт изменения пространственного масштаба, а второй – обмен энергией между разрешаемым и неразрешённым масштабами. Тем самым можно записать

$$P_f = 2\mu_f A_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j}. \quad (29)$$

Таким образом, зная субстанциональную производную f_k и параметры частично усреднённого течения, можно определить параметр μ_f , являющийся по своей сути дополнительной динамической вязкостью, отвечающей за перераспределение энергии между разрешёнными и неразрешёнными

масштабами вследствие наличия коммутационных членов. Окончательно получаем

$$\mu_f = \langle \rho \rangle \frac{k_u D f_k}{f_k D t} \Big/ \left(2 A_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \right). \quad (30)$$

Отметим, что при возрастании f_k перенос энергии происходит из разрешённых масштабов в неразрешённые и приближение (27) является естественным, соответствующим прямому каскаду энергии в трёхмерной турбулентности за счёт вязкой диссипации. В противоположном случае уменьшения f_k перенос энергии должен быть направлен от неразрешённых масштабов в разрешённые (обратный каскад), физический механизм этого процесса не до конца ясен, а в случае (27) будет соответствовать отрицательным значениям вязкости.

Запишем итоговую систему уравнений с учётом наличия членов, описывающих коммутационные ошибки за счёт изменения параметра f_k в пространстве и времени, и модели для их замыкания:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \langle p \rangle \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \sigma_{ij} \rangle + 2\mu_f A_{ij}) - \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{E} \tilde{v}_i + \langle p \rangle \tilde{v}_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle q_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_2(v_i, H) + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{v}_j (\langle \sigma_{ij} \rangle + 2\mu_f A_{ij})) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k)) + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_k, v_k) \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha \tilde{v}_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tau_1(C_\alpha, v_i)) + \langle \dot{\omega}_\alpha \rangle, \\ \langle p \rangle = \langle p(\rho, T) \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle k_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle k_u \tilde{v}_i) = P_{ku} + P_f - \langle \rho \rangle \epsilon_u + T_{ku} - \frac{\partial}{\partial x_i} (2\mu_f A_{ij} \tilde{v}_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \epsilon_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \epsilon_u \tilde{v}_i) = C_{1\epsilon}^* P_{ku} \frac{\epsilon_u}{k_u} - C_{2\epsilon}^* \frac{\langle \rho \rangle \epsilon_u^2}{k_u} + T_{\epsilon u}, \end{array} \right. \quad (31)$$

или с учётом (8)-(11), (14)-(16), (27) и (29)

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \rho \rangle \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \left(\langle p \rangle + \frac{2}{3} \langle \rho \rangle k_u \right) \delta_{ij} \right) = \\
 & \quad = \frac{\partial}{\partial x_j} (2 (\tilde{\mu} + \mu_u + \mu_f) A_{ij}), \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \rho \rangle \tilde{E} \tilde{v}_i + \left(\langle p \rangle + \frac{2}{3} \langle \rho \rangle k_u \right) \tilde{v}_i \right) = \\
 & \quad = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(C_p \left(\frac{\tilde{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_u}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} (2 (\tilde{\mu} + \mu_u + \mu_f) A_{ij} \tilde{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}} \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \right), \quad (32) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \tilde{C}_\alpha \tilde{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_u}{Sc_t} \frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial x_i} \right) + \langle \dot{\omega}_\alpha \rangle, \\
 & \quad \langle p \rangle = \langle p(\rho, T) \rangle, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle k_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle k_u \tilde{v}_i) = 2 (\mu_u + \mu_f) A_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \langle \rho \rangle k_u \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} - \\
 & \quad - \langle \rho \rangle \epsilon_u + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}} \right) \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (2 \mu_f A_{ij} \tilde{v}_j), \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \epsilon_u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \rho \rangle \epsilon_u \tilde{v}_i) = C_{1\epsilon}^* \left(2 \mu_u A_{ij} - \frac{2}{3} \langle \rho \rangle k_u \delta_{ij} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \frac{\epsilon_u}{k_u} - \\
 & \quad - C_{2\epsilon}^* \frac{\langle \rho \rangle \epsilon_u^2}{k_u} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{\epsilon u}} \right) \frac{\partial \epsilon_u}{\partial x_i} \right).
 \end{aligned} \right.$$

Данная система уравнений является базовой для дальнейших исследований и решается численно при моделировании течений с использованием подхода на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса.

Численная реализация

В данном разделе приведём краткое описание численной реализации соответствующего программного комплекса.

Область моделирования представлена ортогональной структурированной сеткой с шагом $\Delta x_{i_d}^d$, где d нумерует координатное направление. Сеточные функции U_{ijk}^n определены в центрах ячеек.

Исходная система уравнений (32) разбивается на две подсистемы согласно методу расщепления по физическим процессам. На первом этапе численно

решается однородная система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_d(\mathbf{U})}{\partial x_d} = 0, \quad (33)$$

а на втором этапе система уравнений с источниками

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (34)$$

которые в данном случае определяются только турбулентными величинами.

Для аппроксимации гиперболической части системы (33) используется схема, предложенная в работах [9, 10]. Вычисление численных конвективных потоков происходит согласно работе [11], а именно используется линейная комбинация бездиссипативного потока в форме [12] и какого-либо классического диссипативного потока. В качестве переключателя используется сенсор, отвечающий за определение наличия ударных волн в конкретной подобласти области моделирования.

Для аппроксимации диффузионных потоков требуются значения градиентов некоторых величин на гранях ячеек. Градиенты компонент скорости зачастую аппроксимируют согласованным с вычислением конвективных потоков способом, используя интерполированные на грани ячеек значения [13]. Кроме того, возможно использование подхода, представленного в работе [14]. В нашей работе используется наиболее простой способ, заключающийся в использовании центральных разностей для вычисления градиентов необходимых величин на гранях ячеек [15].

Интегрирование по времени системы (33) выполняется в соответствии с методом Рунге-Кутты 3-го порядка [16].

Интегрирование системы (34) выполняется явно-неявным способом для сохранения положительной определённости турбулентных величин [17]:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = (\mathbf{S}^+)^n - \mathbf{U}^{n+1} (\mathbf{S}^-)^n. \quad (35)$$

Моделирование затухания однородной изотропной турбулентности

В качестве задачи для демонстрации возможностей подхода на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса была выбрана задача о затухании однородной изотропной турбулентности, представляющая собой существенно нестационарную задачу с быстрым изменением характерных масштабов течения.

Инициирование начального состояния течения производится на основе экспериментальных спектров, приведённых в работе [18].

Скорость набегающего потока составляла $U_0 = 10$ м/с, расстояние между элементами сетки, инициирующей турбулизацию течения, составляло $M = 5.08$ см, кинематическая вязкость $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Данным значениям параметров соответствует число Рейнольдса $Re = \frac{U_0 M}{\nu} \approx 3.4 \cdot 10^4$. Измерения проводились в безразмерные моменты времени $t^* \nu = 42, 98, 171$, которые соответствуют физическим моментам $t = t^* \cdot t_0$, $t_0 = \frac{M}{U_0}$ ($t = 0.213, 0.498$ и 0.869 с).

В случае изотропной однородной турбулентности продольный (вдоль скорости) интегральный масштаб определяется следующим выражением:

$$\Lambda = \frac{1}{\mathcal{K}} \int_0^\infty \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa, \quad (36)$$

где $\mathcal{K} = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa$ – полная турбулентная кинетическая энергия, κ – волновое число. В свою очередь для скорости диссипации полной турбулентной энергии имеем:

$$\mathcal{E} = 2\nu \int_0^\infty \kappa^2 E(\kappa) d\kappa. \quad (37)$$

Соответственно, для заданного спектра из [18] получаем $\mathcal{K}_0 = 0.078$, $\mathcal{E}_0 = 0.37$, $\Lambda = 0.01$. Турбулентное число Рейнольдса $Re_T = \frac{\mathcal{K}^{1/2} \Lambda}{\nu} \approx 186$, что в свою

очередь позволяет определить тейлоровский масштаб как $\lambda = \sqrt{\frac{10}{Re_T}} \Lambda \approx 0.0023$ ($Re_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3}} Re_T \approx 35$), колмогоровский масштаб $\eta = (\nu^3/\mathcal{E})^{1/4}$

составляет $3 \cdot 10^{-4}$. Заранее можно ожидать, что при уменьшении размера ячейки численной сетки и приближении к тейлоровскому масштабу параметр f_ϵ будет всё больше и больше отклоняться от 1, т.к. моделирование будет захватывать масштабы, где интенсивно происходит диссипация энергии. При размере области моделирования $L = 0.565$ можно оценить соответствующее число ячеек – $N_\lambda = 240$ и $N_\eta = 1900$.

В соответствии с процедурой, описанной в [19], для генерации турбулентных пульсаций, соответствующих заданному спектру, были сгенерированы значения для амплитуд и фаз различных мод. При выполнении всех приведённых ниже расчётов эти значения не изменялись, а варьировалось пороговое значение волнового числа κ_c , отвечающее за разделение разрешённых и моделируемых масштабов течения. В случае моделирования без привлечения моделей турбулентности κ_c определяется сеточным масштабом – $\kappa = \frac{\pi}{\Delta}$, где Δ – минимальный характерный размер сеточных элементов. При моделировании

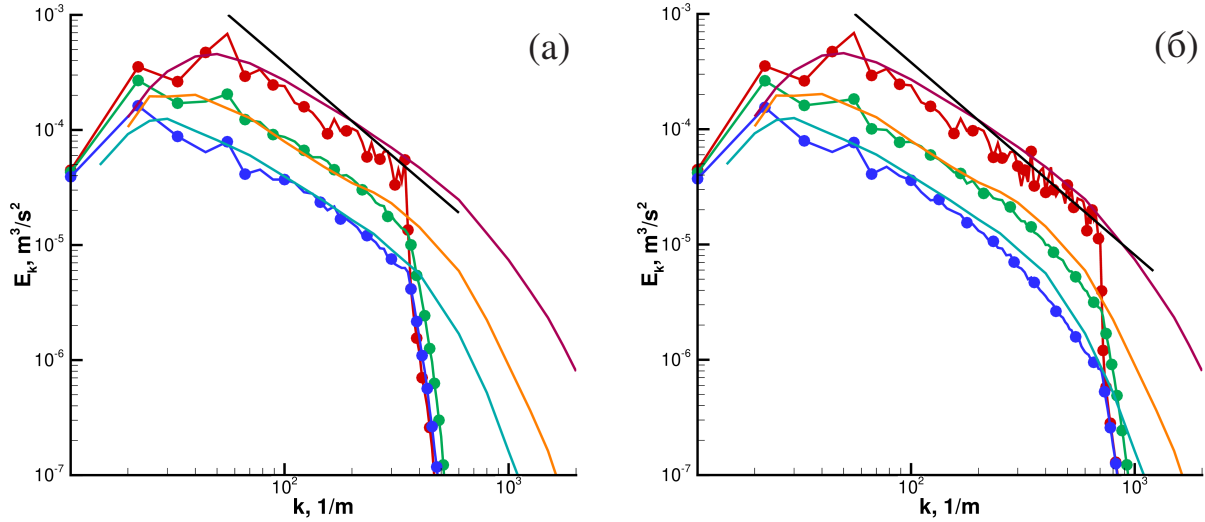


Рис. 1. Спектральная плотность турбулентных пульсаций в различные моменты времени: (а) $N = 64^3$, (б) $N = 128^3$. Кривые с маркерами соответствуют численным данным, без маркеров – экспериментальным. Сплошная прямая соответствует колмогоровскому спектру $E(k, t) = C_K (\epsilon(t))^{2/3} k^{-5/3} c$ константой $C_K = 1.37$ и экспериментальным значением скорости диссипации турбулентной кинетической энергии $\epsilon_0 = 0.474 \text{ м}^2/\text{с}^3$

турбулентных течений на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса κ_c определяется заданным значением $f_k = \frac{\mathcal{K}_u}{\mathcal{K}} = \frac{1}{\mathcal{K}} \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa$.

Неявный метод крупных вихрей

В качестве референсных расчётов были выполнены расчёты без использования каких-либо моделей турбулентности, т.е. в соответствии с неявным методом крупных вихрей (ILES), при использовании равномерных сеток различной подробности. На Рис. 1 приведены спектры турбулентных пульсаций в различные моменты времени в сравнении с экспериментальными данными. Во-первых, следует отметить хорошее согласие численных спектров и экспериментальных кривых. Во-вторых, на представленных спектрах отчётливо видно влияние использованной сетки. Так, при уменьшении линейного размера ячеек значение κ_c смещается в сторону больших волновых чисел, обеспечивая разрешение более мелких масштабов в процессе моделирования. Отклонение экспериментальных спектров и, как следствие, численных спектров от колмогоровского спектра обусловлено сжимаемостью рассматриваемого течения [18].

На Рис. 2 для тех же расчётов на двух сетках приведены зависимости от времени полной кинетической энергии $E_K = Q + \mathcal{K}_u$, нормированной на

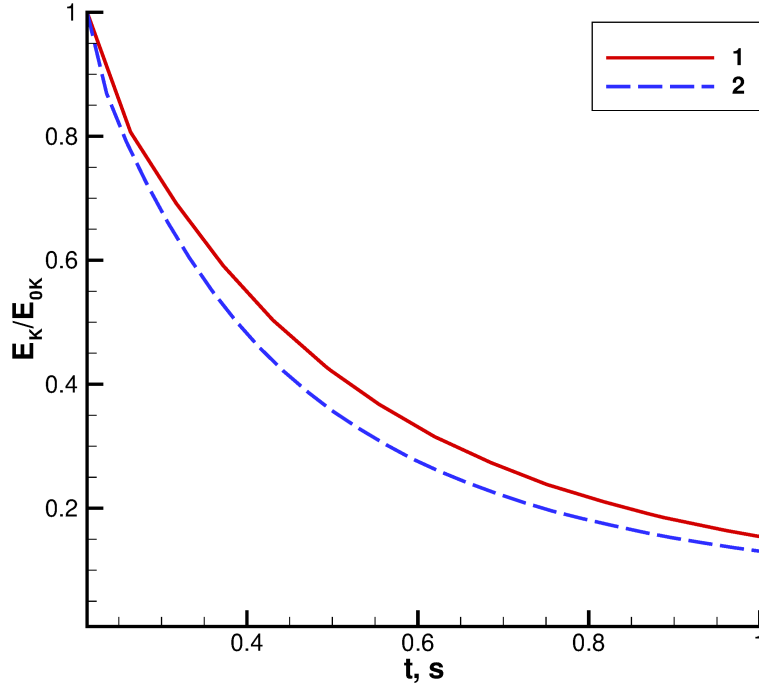


Рис. 2. Зависимости полной кинетической энергии от времени, нормированные на начальное значение: 1 – $N = 64$, 2 – $N = 128$

начальное значение E_{0K} , где Q и \mathcal{K}_u даются выражениями

$$Q = \frac{1}{M} \int \frac{1}{2} \rho \tilde{v}_i \tilde{v}_i dV, \quad (38)$$

и

$$\mathcal{K}_u = \frac{1}{M} \int k_u dV, \quad (39)$$

$M = \int \rho dV$. Отметим, что при нулевых средних значениях компонент скорости, что верно для изотропной турбулентности, $Q = \mathcal{K}_r$, где \mathcal{K}_r – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, разрешённых оператором усреднения. Приведённые зависимости близки, однако видно, что в случае более подробной сетки наблюдается более быстрая диссипация кинетической энергии за счёт включения в моделирование более мелких масштабов течения. В дальнейшем при сопоставлении результатов различных расчётов в качестве референсной кривой будем использовать результат, полученный при использовании сетки 128^3 .

Постоянное значение параметра физического разрешения

Прежде чем переходить к рассмотрению влияния переменных значений параметра f_k на характеристики турбулентного течения, следует остановиться на результатах при постоянных, но различных значениях этого параметра.

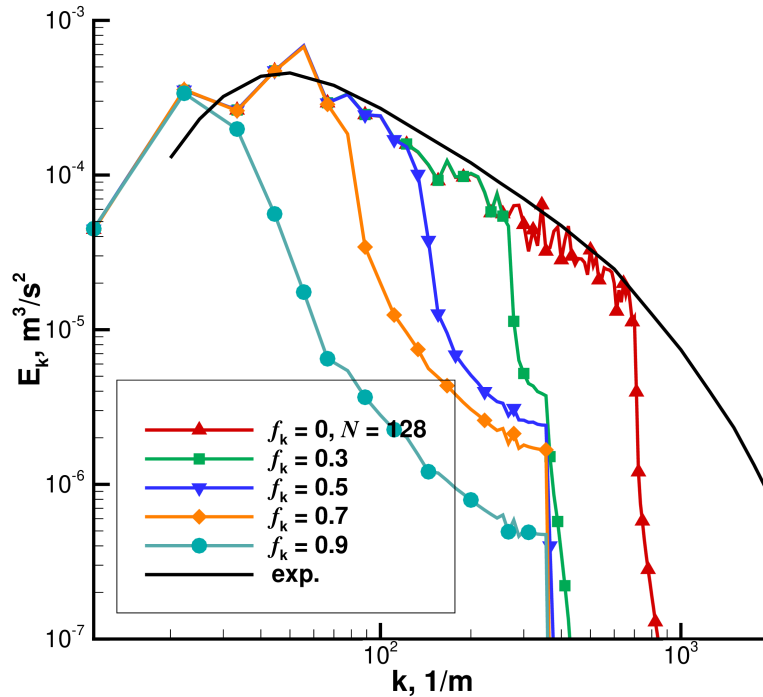


Рис. 3. Спектральная плотность турбулентных пульсаций в начальный момент времени при различных значениях параметра f_k

Как было сказано ранее, при задании конкретного значения f_k в соответствии с начальным спектром вычисляется пороговое значение волнового числа κ_c . В результате моды, соответствующие волновым числам больше κ_c , отбрасывались. Итоговые спектры в начальный момент времени приведены на Рис. 3. Увеличение значения f_k приводит к укрупнению масштабов течения, которые должны разрешаться напрямую в процессе моделирования, что приводит к возможности укрупнения и ячеек численной сетки. При этом неразрешаемая оператором усреднения часть пульсаций даётся выбранной подсеточной моделью. Выбранный способ ограничения спектрального состава исходных пульсаций не является в полной мере фильтром, по этой причине в спектре по-прежнему присутствуют моды с волновыми числами больше порогового κ_c , но меньше максимального κ_{\max} , допустимого численной сеткой, с гораздо более низкими амплитудами. Максимально корректным было бы использование резкого спектрального фильтра, что затруднительно совместно с конечно-разностными и конечно-объёмными методами.

Обратимся теперь к результатам расчётов при различных значениях параметра f_k . Для всех расчётов считалось, что диссипация происходит в наиболее мелких масштабах и $f_\epsilon = 1$ в широком диапазоне f_k .

Помимо выражений (38) и (39) также определим скорость диссипации полной кинетической энергии как

$$D_K = -\frac{dE_K}{dt} \quad (40)$$

и скорость диссипации неразрешённых турбулентных пульсаций

$$\mathcal{E}_u = \frac{1}{M} \int \epsilon_u dV. \quad (41)$$

Используя выражения (38)–(41), можно определить значение параметров f_k и f_ϵ , которые имеют место в действительном численном расчёте:

$$f_k = \frac{\mathcal{K}_u}{\mathcal{K}_r + \mathcal{K}_u} \quad (42)$$

и

$$f_\epsilon = \frac{\mathcal{E}_u}{D_K}. \quad (43)$$

На Рис. 4 представлены зависимости различных величин от времени при различных постоянных заданных значениях параметра f_k на сетке 64^3 .

На Рис. 4а можно видеть, что при значениях $f_k \leq 0.5$ кривые для полной кинетической энергии, полученные по методу PANS, практически совпадают с кривой, полученной неявным методом крупных вихрей на более подробной сетке. Скорость диссипации кинетической энергии (Рис. 4б) практически совпадает во всех выполненных расчётах.

Анализируя Рис. 4в, видим, что рассчитываемые кривые f_k ко времени 1 с выходят на постоянное значение. При этом необходимо отметить, что при промежуточных значениях f_k расчётное значение f_k с течением времени стремится к чуть более высоким значениям. На наш взгляд, это обусловлено способом обрезания начального спектра, который даёт более высокие значения турбулентной кинетической энергии разрешённых оператором усреднения пульсаций, что приводит к уменьшению начального f_k по сравнению с действительным.

Зависимости расчётных значений f_ϵ , вычисленные согласно (43), также демонстрируют близость к заданному значению $f_\epsilon = 1$ ($f_\epsilon \approx 0.9$), отражая тот факт, что диссипация энергии в основном происходит в мелких масштабах. Единственной выделяющейся кривой является зависимость для $f_k = 0.3$, располагающаяся чуть ниже ($f_\epsilon \approx 0.7$), что свидетельствует о том, что разрешаемые масштабы течения сдвигаются к тейлоровскому масштабу.

На Рис. 5 приведены спектры при различных значениях параметра физического разрешения. Как и ожидалось, при увеличении значения f_k спектры разрешённых пульсаций смещаются в сторону более низких волновых чисел. Высокочастотная часть спектра быстро затухает за счёт модели турбулентности. При этом, как видно из Рис. 4а, полная кинетическая энергия остаётся близкой во всех случаях.

Расчёт для различных значений f_k на более подробной сетке, а именно $N = 128$, во многом идентичен результатам, приведённым на Рис. 4 и 5. По этой причине здесь они не будут приводиться.

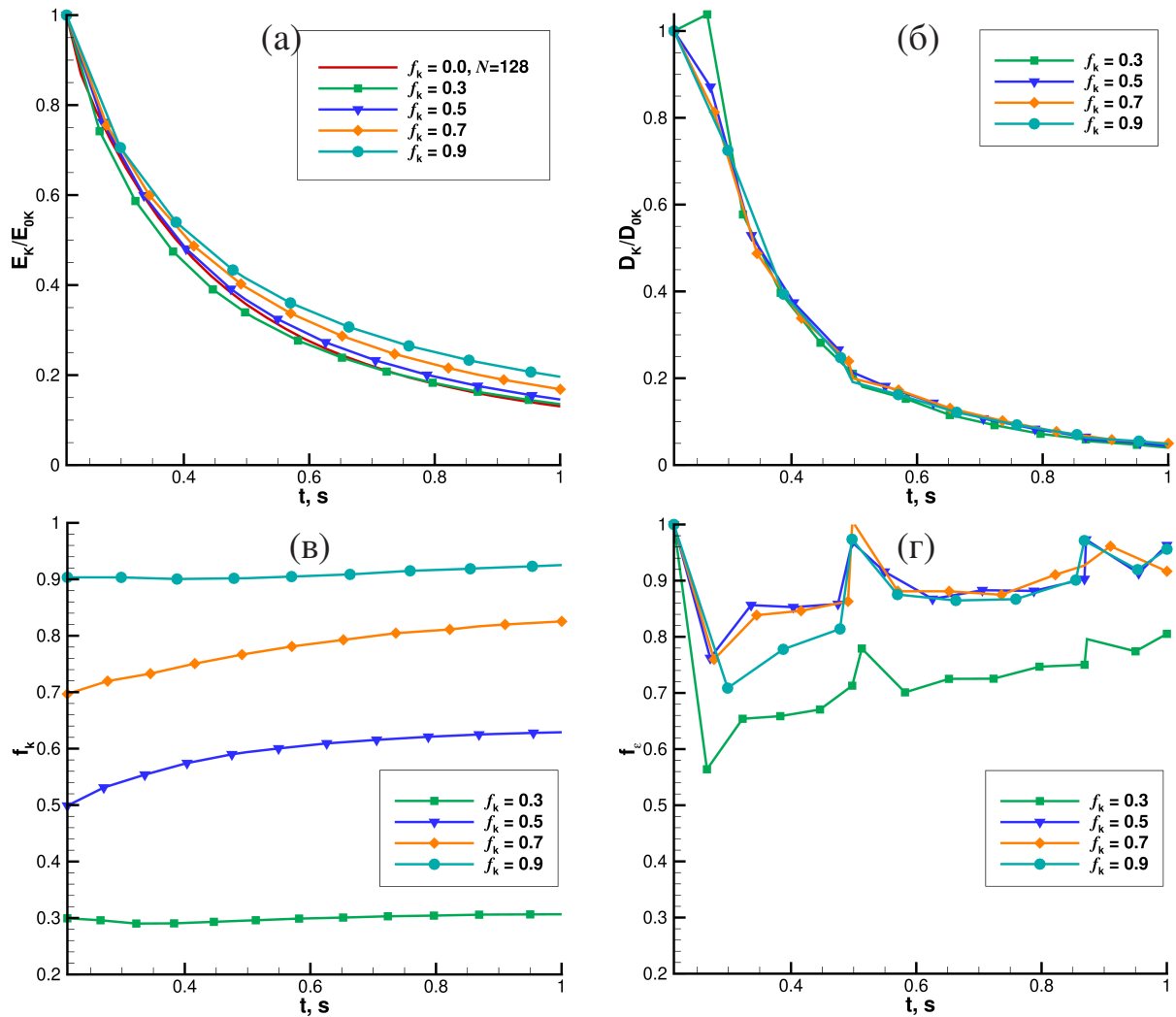


Рис. 4. Зависимости от времени полной кинетической энергии, нормированной на её начальное значение (а), скорости диссипации полной кинетической энергии, нормированной на её начальное значение (б), рассчитываемого значения f_k (в) и рассчитываемого значения f_ϵ (г), $N = 64$

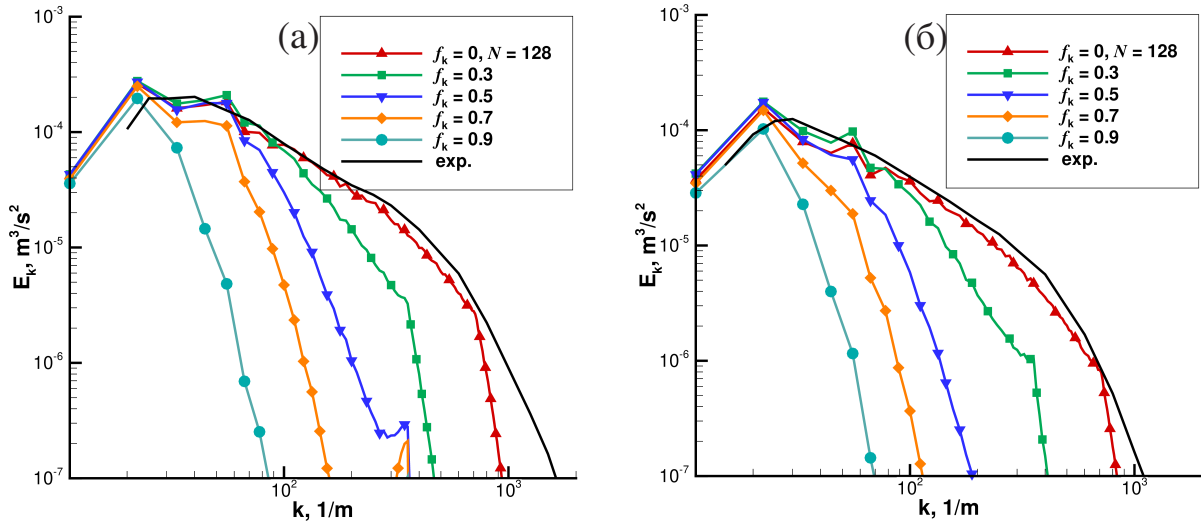


Рис. 5. Спектральная плотность в расчётах с различными значениями параметра f_k : (а) $t = 0.498$ с, (б) $t = 0.869$ с

Переменное значение параметра физического разрешения

Обратимся к случаю переменного значения параметра f_k . На первоначальном этапе будем считать, что f_k меняется по заданному временному закону, а именно, составляет 0.3 до 0.270 с, затем в течение ещё 0.270 с линейно возрастает до 0.7, после чего не меняется.

С учётом приведённой выше модели оказывается возможным рассмотреть несколько вариантов. Первый вариант состоит в заданном изменении $f_k(t)$ по ходу расчёта (см. Рис. 7), при этом $P_f = 0$ и $\mu_f = 0$. Второй вариант в дополнение к первому учитывает дополнительный генерационный член P_f в подсеточной модели (см. Рис. 8), $\mu_f = 0$ по-прежнему. И, наконец, в третьем варианте в уравнение энергии вводится дополнительная вязкая диссипация, отвечающая за сохранение энергии с учётом меняющегося значения f_k (см. Рис. 9). На Рис. 7б–9б также приведены зависимости заданного изменения параметра f_k . Анализируя зависимости на Рис. 6, можно отметить, что зависимость полной кинетической энергии хорошо соответствует варианту с постоянным заданным значением $f_k = 0.3$. Однако расчётная зависимость f_k далека от заданной, хоть и демонстрирует рост по сравнению с базовым вариантом $f_k = 0.3$. Таким образом, модель в варианте I практически не реагирует на изменение заданного значения f_k .

В случае учёта дополнительного генерационного члена в уравнении для турбулентной энергии неразрешённых пульсаций, отвечающего за наличие ошибок коммутации оператора усреднения и временной и пространственных производных, наблюдается рост \mathcal{K}_u с изменением f_k . Однако при этом видно, что полная кинетическая энергия имеет завышенное значение, т.к. диссипация \mathcal{K}_u недостаточна. Скачок в поведении полной кинетической энергии фактически свидетельствует о нарушении сохранения полной энергии.

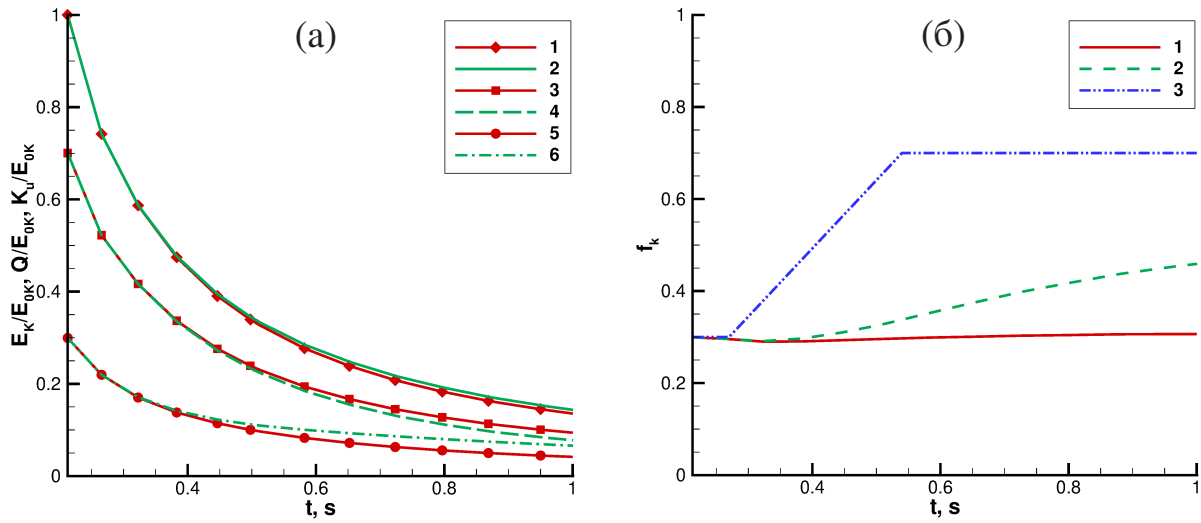


Рис. 6. Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), а также (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта в первом варианте ($P_f = 0, \mu_f = 0$)

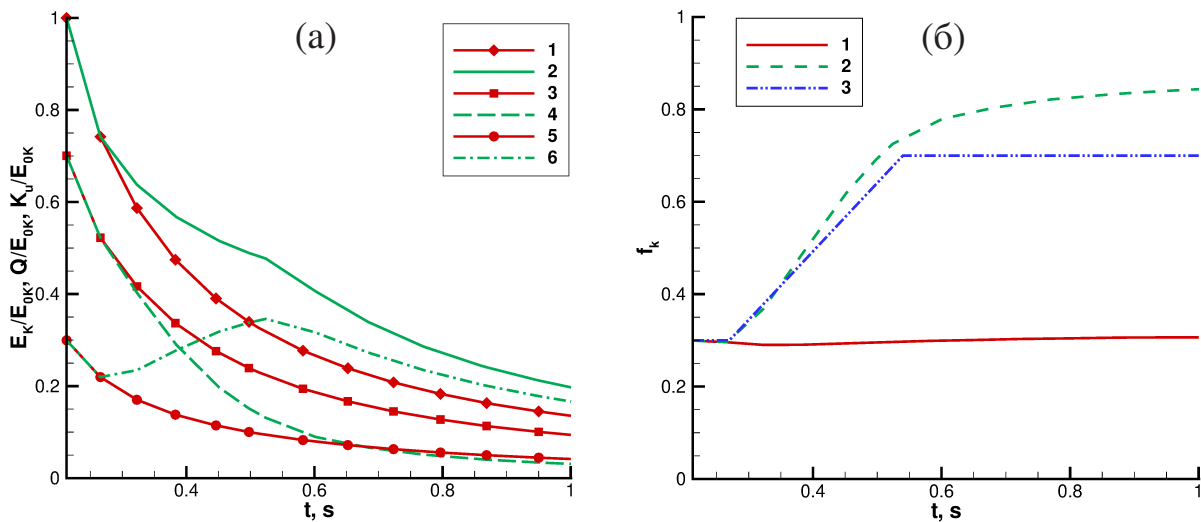


Рис. 7. Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), а также (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта во втором варианте ($P_f \neq 0, \mu_f = 0$)

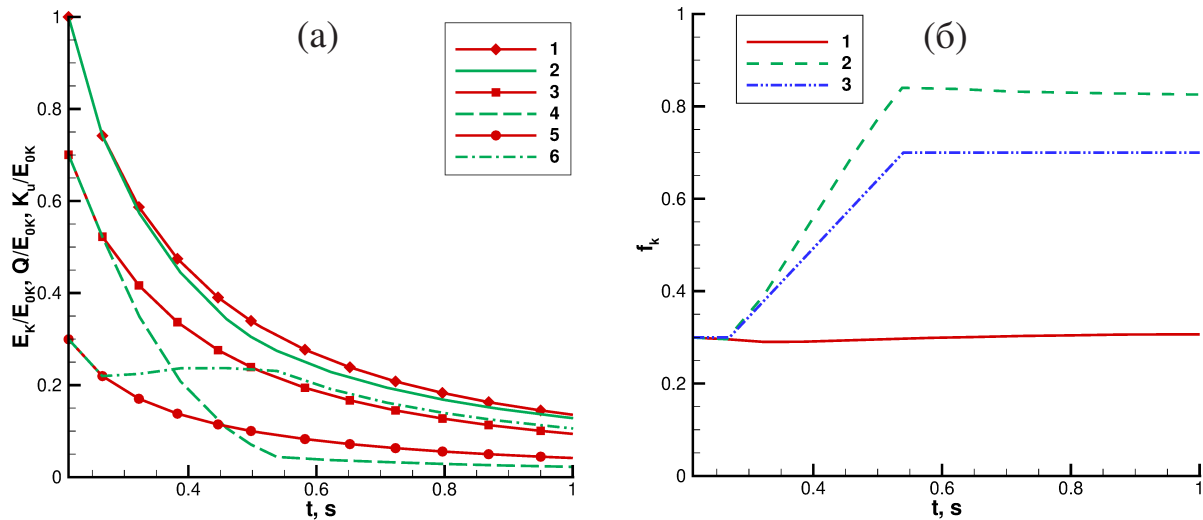


Рис. 8. Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), а также (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта в третьем варианте ($P_f \neq 0, \mu_f \neq 0$)

Вопреки первоначальным ожиданиям без учёта μ_f кинетическая энергия разрешённых пульсаций снижается. Это происходит за счёт неявного влияния роста турбулентной энергии неразрешённых пульсаций, которая увеличивает турбулентную вязкость. И, наконец, следует отметить, что расчётная зависимость f_k реагирует на изменение разрешения модели и практически повторяет заданную зависимость.

При включении в рассмотрение и P_f , и μ_f полная кинетическая энергия изменяется без скачков с изменением физического разрешения модели и практически совпадает с кривой для случая постоянного значения f_k . Кривые для турбулентных энергий разрешённых и неразрешённых пульсаций меняются местами, что соответствует заданному изменению f_k .

Напомним ещё раз, что при увеличении значения параметра физического разрешения f_k подсеточной модели в подходе PANS происходит перенос энергии из разрешённых масштабов в неразрешённые, что является естественным процессом для вязкой диссипации ($\mu_f > 0, P_f > 0$). Однако в противоположном случае уменьшения f_k механизм переноса энергии из неразрешённых масштабов в разрешённые не до конца ясен.

Адаптивное значение параметра физического разрешения

Следует отметить, что заранее неизвестен характер изменения параметра f_k и задать какую-либо зависимость от времени и пространственной координаты не представляется возможным. В предыдущем разделе это было сделано только лишь с целью демонстрации изменений, которые имеют место при переменном

f_k . Тем не менее возможно оценить значение f_k . Следуя определению f_k и предполагая колмогоровский вид спектра $E(\kappa) = C_K \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$, можно получить

$$f_k = \frac{\mathcal{K}_u}{\mathcal{K}} = \frac{1}{\mathcal{K}} \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \frac{3}{2} C_K \pi^{-2/3} \frac{1}{(\Lambda/\Delta)^{2/3}}, \quad (44)$$

где $\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}$ – максимальное волновое число, Δ – минимальный размер фильтра, который определяется численной сеткой, $\Lambda = \frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\epsilon}$ – интегральный масштаб турбулентности. Полученное выражение (44) с точностью до константы совпадает с выражением, приведённым в работе [20]. В качестве спектра можно использовать и другие выражения, например кармановский спектр, получая иные выражения для f_k [21]. В работе [22] приведён обзор различных вариантов вычисления f_k , как статического, так и переменного.

К сожалению, предлагаемые подходы к динамическому вычислению f_k не сопровождались учётом дополнительных членов в уравнениях для полной энергии и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций, что, как мы видели в предыдущем разделе, сводит на нет усилия по построению адаптивных моделей в рамках PANS. В качестве базового варианта будем рассматривать [21]

$$f_k = 1 - \left[\frac{\left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}}{\left(\frac{C_K}{(1+s)\pi^{2/3}}\right) + \left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}} \right]^{\frac{3}{2}(1+s)}. \quad (45)$$

Для $C_K = 1.5$ и параметра спектра $s = 2$ константа в знаменателе получается равной 0.23. Использование (45) также допускает несколько вариантов исполнения, поскольку рассматриваемое нами течение нестационарное. Во-первых, возможно проведение предварительного RANS расчёта для вычисления усреднённых по времени значений полной турбулентной кинетической энергии и скорости её диссипации. Эти значения позволят оценить статическое значение f_k . Во-вторых, возможно использовать вместо полных значений \mathcal{K} и \mathcal{E} значения \mathcal{K}_u и \mathcal{E}_u (см. выражения ((41) и (43)), не требующие проведения дополнительного усреднения. В этом случае f_k будет зависеть от времени, но не будет варьироваться по координате. В-третьих, возможно использование локальных значений k_u и ϵ_u для оценки интегрального турбулентного масштаба. Тогда f_k будет являться функцией и времени, и координаты, позволяя учитывать возможную анизотропию течения. И, наконец, в выражении (45) можно использовать исходный масштаб турбулентности, определяемый полными значениями k и ϵ , которые требуют вычисления локального значения кинетической энергии турбулентных пульсаций.

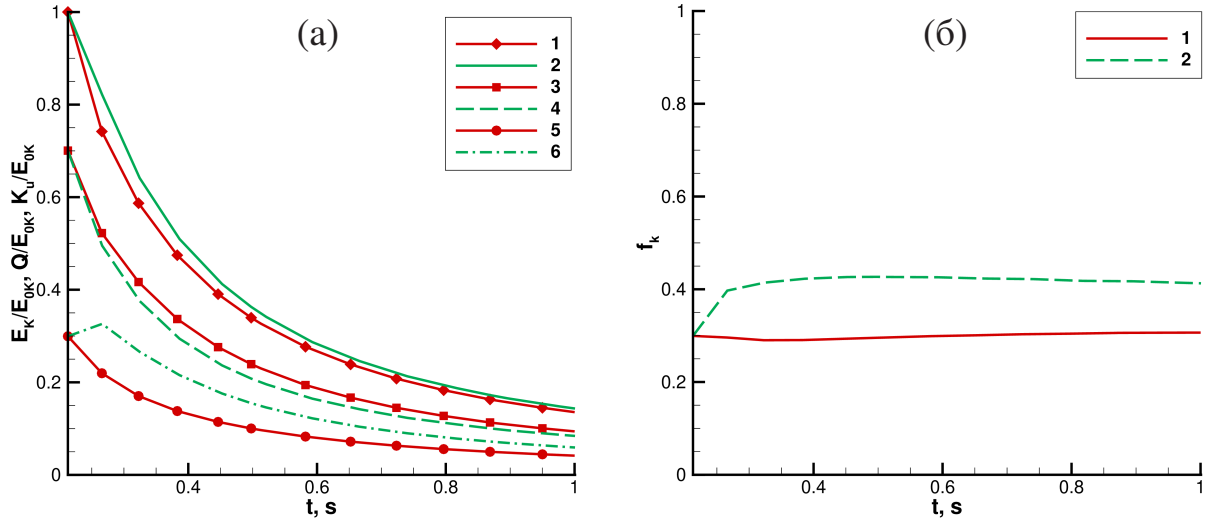


Рис. 9. Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), а также (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта с адаптивным значением f_k

На Рис. 9 приведены графики зависимостей различных энергий и параметра f_k от времени в сопоставлении с базовым вариантом с заданным постоянным значением $f_k = 0.3$ для случая, когда интегральный турбулентный масштаб определяется при использовании выражений (41) и (43).

Зависимость f_k выходит на константу 0.4 при заданном начальном значении $f_k = 0.3$. Это соответствует сделанному в предыдущем разделе замечанию о том, что за счёт способа обрезания спектра в неразрешённых турбулентных пульсациях содержится больше энергии, чем определяется начальным значением f_k . При этом нет и существенного изменения f_k , как было задано в предыдущем разделе.

Отметим, что в случае использования выражения (45) зависимость полной кинетической энергии лучше согласуется с зависимостью, полученной неявным методом крупных вихрей на более подробной сетке - см. Рис. 10.

Заключение

На примере задачи о затухании однородной изотропной турбулентности показаны возможности подхода на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса с переменным параметром, отвечающим за физическое разрешение. Изменение отношения кинетических энергий разрешённых и неразрешённых пульсаций влечёт нарушение коммутативности оператора усреднения с пространственными и временной производными. В этой связи в уравнениях для полной энергии и турбулентной кинетической энергии появляются дополнительные члены, отвечающие за перераспределении энергии

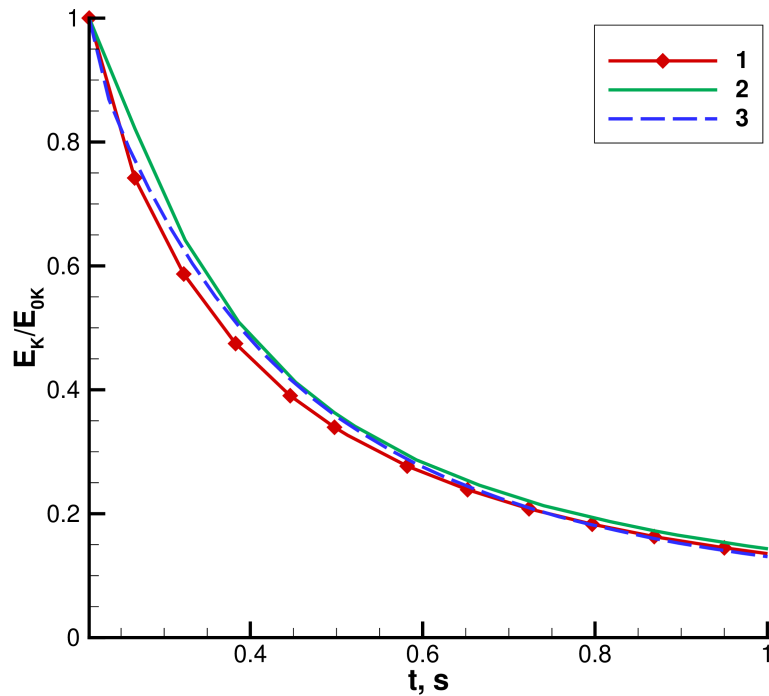


Рис. 10. Зависимости полной кинетической энергии от времени, нормированные на начальное значение: 1 – постоянное значение $f_k = 0.3$, 2 – неявный метод крупных вихрей, $N = 128$, 3 – адаптивное значение f_k

между разрешёнными и неразрешёнными масштабами при изменении f_k .

В работе при использовании $k - \epsilon$ в качестве базовой модели турбулентности были подтверждены выводы, сделанные в работе [6]. А именно, без учёта дополнительных слагаемых в уравнениях, как описано выше, подход практически не реагирует на изменение параметра f_k . При учёте дополнительного слагаемого в уравнении для турбулентной кинетической энергии происходит нарушение закона сохранения энергии, и полная кинетическая энергия испытывает скачок. В случае учёта дополнительных слагаемых в обоих уравнениях происходит корректный учёт изменения порогового волнового числа со временем.

Кроме того, были выполнены расчёты с адаптивным изменением параметра f_k на основе текущих характеристик частично усреднённого течения с учётом дополнительных членов, отвечающих за наличие коммутационных ошибок оператора усреднения.

Библиографический список

1. Schiestel R., Dejoan A. Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2005. Vol. 18, no. 6. P. 443–468.
2. Girimaji S. S. Partially-Averaged Navier-Stokes Model for Turbulence: A

- Reynolds-Averaged Navier-Stokes to Direct Numerical Simulation Bridging Method // *Journal of Applied Mechanics*. 2006. Vol. 73, no. 3. P. 413–421.
3. Germano M. Turbulence: the filtering approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. Vol. 238. P. 325–336.
 4. Suman Sawan, Girimaji Sharath S. On the Invariance of Compressible Navier-Stokes and Energy Equations Subject to Density-Weighted Filtering // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2010. Vol. 85, no. 3-4. P. 383–396.
 5. Wallin S., Girimaji S. Commutation error mitigation in variable-resolution PANS closure: Proof of concept in decaying isotropic turbulence // 6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.
 6. Girimaji S. S., Wallin S. Closure modeling in bridging regions of variable-resolution (VR) turbulence computations // *Journal of Turbulence*. 2013. Vol. 14, no. 1. P. 72–98.
 7. Girimaji S. S., Srinivasan R., Jeong E. PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS and LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results // Volume 2: Symposia, Parts A, B, and C. FEDSM2003. ASME/EDC, 2003.
 8. Кучугов П. А., Тишкин В. Ф. Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*. 2023. no. 45. P. 1–19.
 9. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // *Математическое моделирование*. 1989. Vol. 1, no. 5. P. 95–120.
 10. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // *Математическое моделирование*. 1995. Vol. 7, no. 5. P. 15–25.
 11. Lee Y., Yao W., Fan X. Low-Dissipative Hybrid Compressible Solver Designed for Large-Eddy Simulation of Supersonic Turbulent Flows // *AIAA Journal*. 2018. Vol. 56, no. 8. P. 3086–3096.
 12. Morris C. I. Studies of Inviscid Flux Schemes for Acoustics and Turbulence Problems // 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013.

13. Coralic V., Colonius T. Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows // *Journal of Computational Physics*. 2014. Vol. 274. P. 95–121.
14. Nishikawa H. Two Ways to Extend Diffusion Schemes to Navier-Stokes Schemes: Gradient Formula or Upwind Flux // 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011.
15. Hadjadj A., Kudryavtsev A. Computation and flow visualization in high-speed aerodynamics // *Journal of Turbulence*. 2005. Vol. 6. P. N16.
16. Gottlieb S., Ketcheson D., Shu C.-W. Strong Stability Preserving Runge-Kutta and Multistep Time Discretizations. World Scientific, 2011. ISBN: 9789814289276.
17. Белов А. А., Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. Моделирование химической кинетики в газах // *Математическое моделирование*. 2016. Vol. 28, no. 8. P. 46–64.
18. Comte-Bellot G., Corrsin S. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. 1966. Vol. 25, no. 4. P. 657–682.
19. Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J. C. Scalable Tools for Generating Synthetic Isotropic Turbulence with Arbitrary Spectra // *AIAA Journal*. 2017. Vol. 55, no. 1. P. 327–331.
20. Girimaji S., Abdol-Hamid K. Partially-Averaged Navier–Stokes Model for Turbulence: Implementation and Validation // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
21. Foroutan H., Yavuzkurt S. A partially-averaged Navier–Stokes model for the simulation of turbulent swirling flow with vortex breakdown // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2014. Vol. 50. P. 402–416.
22. Klapwijk M., Lloyd T., Vaz G. On the accuracy of partially averaged Navier-Stokes resolution estimates // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2019. Vol. 80. P. 108484.

Оглавление

Введение	3
Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса	4
Численная реализация	10
Моделирование затухания однородной изотропной турбулентности	11
Заключение	22
Библиографический список	23