



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.А. Зенюк

Дискретные динамические  
системы со случайными  
запаздываниями

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Зенюк Д.А. Дискретные динамические системы со случайными запаздываниями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 70. 35 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-70>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-70>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Д.А. Зенюк**

**Дискретные динамические системы  
со случайными запаздываниями**

**Москва — 2024**

УДК 519.21

*Зенюк Д. А.*

## **Дискретные динамические системы со случайными запаздываниями**

В работе дан развернутый обзор результатов по разностным уравнениям со случайными аргументами. Порождаемые ими случайные процессы имеют сильную зависимость от всей предыстории и могут представлять большой интерес как инструмент для моделирования систем, в которых эффект памяти играет одну из ведущих ролей, например, в эпидемиологии и популяционной динамике. Хотя все рассмотренные модели являются формально линейными, многие важные их характеристики все еще неизвестны. Для сравнения также приведен краткий обзор результатов по случайным блужданиям, в которых вероятности приращений демонстрируют похожую зависимость от предыстории — в их изучении удалось достичь гораздо большего прогресса.

**Ключевые слова:** случайные последовательности, эрдитарная динамика, немарковские процессы, случайные запаздывания.

*Dmitry Alexeyevich Zenyuk*

### **Discrete dynamical systems with random delays**

The paper contains a detailed survey of the results on difference equations with random delays. Processes defined by them are history-dependent and can be treated as an effective modeling tool in studies of systems with strong memory, e. g. in epidemiology or population dynamics. All discussed models have simple linear form, yet many of their characteristics remain unknown. Random walks with similar history-dependent increment probabilities, of which a much more detailed description is readily available, are also briefly reviewed.

**Key words:** random sequences, hereditary dynamics, history-dependent processes, random delays.

## **Оглавление**

Введение .....	3
Модели с явной зависимостью от предыстории .....	4
Модели с неявной зависимостью от предыстории .....	19
Аналитический аппарат .....	26
Заключительные замечания .....	29

## Введение

Изучение систем, в которых динамика существенным и нетривиальным образом зависит от всей предыстории системы, уже достаточно давно привлекает большой интерес. Насколько можно судить, первую попытку построить содержательную общую теорию таких систем предпринял Вито Вольтерра [1] в 1929 г. с позиций современного (на тот момент) функционального анализа:

Явление эредитарности\* возникает в таких системах, в которых учитывается не только настоящее положение системы или ее ближайшее будущее положение (т. е. начальные значения параметров, определяющих состояние системы, а также некоторые производные по времени), но также все предшествующие положения, которые занимала данная система [...] Примером может служить явление упругости, где деформация упругого бруса или кручение струны зависит не только от природы применяемых сил, но также от предыдущих деформаций, которым был подвергнут брус или струна.

В [1] для изучения эредитарных систем предлагалось использовать аппарат интегро-дифференциальных уравнений. Сам термин «эредитарный» не получил широкого распространения, и сейчас о подобных системах говорят обычно как об обладающих памятью.

В стохастическом анализе концепция сильной зависимости от предыстории, разумеется, тоже изучалась. Ситуация здесь, однако, несколько более интересна, поскольку эта зависимость может быть формализована самыми различными способами. Часто, хотя и не всегда, о случайных процессах такого рода говорят как об обладающих дальними корреляциями (*long range dependence*). Однако сам этот термин пока не получил общепризнанного точного наполнения. Основные подходы к определению дальних корреляций опираются на связь с законами масштабирования, стохастическим самоподобием и показателем Херста, либо сформулированы в терминах свойств второго порядка (автоковариационных функций и спектральных плотностей), либо отсылают к эргодической теории. Другие, более специфические подходы к этой проблеме, а также подробную библиографию заинтересованный читатель сможет найти в [2].

Примеры стохастических моделей, демонстрирующих нетривиальные дальние корреляции, весьма разнообразны и даже их простое перечисление выходит за рамки настоящей работы. Отметим, например, случайные блуждания без самопересечений (*self-avoiding walk, SAW*), которые сейчас активно изучаются — хорошее изложение основных результатов в этой области см. в [3].

---

\*От латинского *hērēs* «наследник».

В простейшем случае это случайное блуждание на двумерной решетке, в котором блуждающая частица никогда не может занимать положение, которое ранее уже посещалось. Здесь зависимость от предыстории процесса является неявной и связана с сокращением допустимых будущих состояний после каждого шага. Несмотря на достаточно простую формулировку, описание комбинаторных свойств SAW остается все еще нерешенной задачей. Другой пример — процессы с подкреплением (*random processes with reinforcement*), где прошлые состояния уже более явно фигурируют в конструкции. В этих процессах вероятности перехода между дискретными состояниями зависят от того, сколько раз такой переход уже случался в прошлом. Подробный обзор по таким процессам см. в [4].

В настоящей работе будет представлен обзор дискретных стохастических моделей, в которых зависимость от предыдущих состояний конструктивно используется для определения будущих состояний. Фактически, речь идет о разностных уравнениях со случайными лагами, которые в самом общем случае имеют вид

$$f(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, x_{U_n}) = 0,$$

где  $U_n$  — неотрицательные целочисленные случайные величины. Пока такие объекты изучены достаточно слабо. Их можно рассматривать как частный случай рандомизированных динамических систем, общая теория которых до некоторой степени построена, см. [5]. Однако, как будет показано далее, эта общая теория неприменима даже к некоторым простейшим моделям со случайными лагами, поскольку налагает на рассматриваемые ей динамические системы весьма сильные ограничения.

## Модели с явной зависимостью от предыстории

По всей видимости, наиболее простой моделью с подобным механизмом памяти является рандомизированная арифметическая прогрессия

$$X_{n+1} = 1 + X_{U_n}, \quad X_0 = 0, \quad (1)$$

где  $U_n$  — независимые в совокупности случайные величины с равномерными распределениями на  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Непосредственно эта конструкция была впервые рассмотрена в работе [6], хотя более сложная модель (11) к тому моменту была известна уже почти полвека. Легко удостовериться, что подобная арифметическая прогрессия с произвольным знаменателем,  $Y_{n+1} = c + Y_{U_n}$ , получается из  $X_n$  простым масштабированием  $Y_n = cX_n$ , поэтому достаточно рассмотреть лишь (1). Для иллюстрации на рис. 1 показано несколько выборочных траекторий такого процесса.

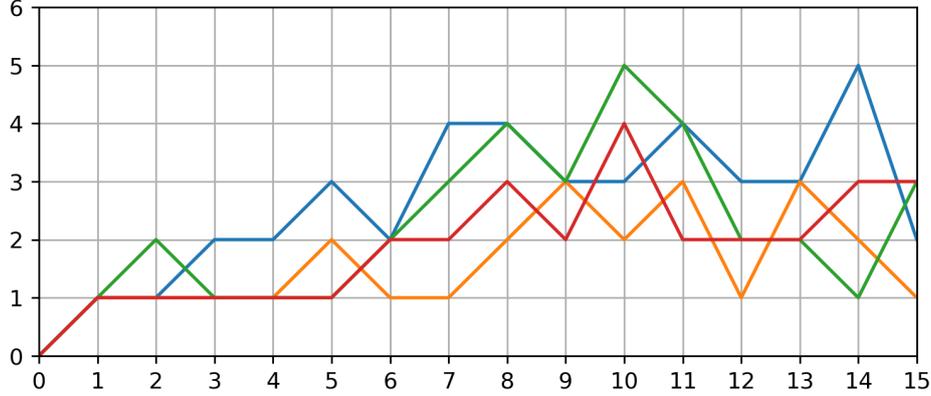


Рис. 1. Выборочные траектории процесса (1).

Можно легко найти аналитические выражения для двух первых начальных моментов этого случайного процесса. Используемая здесь техника естественным образом будет возникать и в дальнейшем при анализе более сложных моделей. Пусть  $m_{n,k} = \mathbf{E}[X_n^k]$ . Используя свойства условного математического ожидания, непосредственно из (1) получим

$$\begin{aligned} m_{n+1,1} &= 1 + \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{U_n}|U_n = k]] = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[X_k] \mathbb{P}(U_n = k) = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее  $\mathbb{P}(A)$  будет обозначать вероятность события  $A$ . Из (2) следует

$$n(m_{n,1} - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} m_{k,1},$$

так что после подстановки в (2) получим

$$m_{n+1,1} = 1 + \frac{1}{n+1} [m_{n,1} + n(m_{n,1} - 1)] = 1 + m_{n,1} - \frac{n}{n+1} = m_{n,1} + \frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

Решение этого разностного уравнения при  $n \geq 1$  имеет вид  $m_{n,1} = H_n$ , где  $H_n$  — гармонические числа. Теперь, возводя (1) в квадрат и используя выражение для  $m_{n,1}$ , можно записать разностное уравнение для  $m_{n,2}$ :

$$m_{n+1,2} = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n H_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,2}. \quad (4)$$

Используя тот же прием, что и при вычислении математического ожидания, получим окончательно

$$m_{n+1,2} = m_{n,2} + \frac{1 + 2H_n}{n + 1}.$$

Решение имеет вид

$$m_{n,2} = H_n + H_n^2 - H_{n,2}, \quad H_{n,2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad n \geq 1, \quad (5)$$

где  $H_{n,2}$  — обобщенные гармонические числа второго порядка, см., например, [7, п. 1.2.7]. Здесь были использованы некоторые известные тождества:

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n + 1)(H_n - 1), \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2H_k}{k + 1} = H_n^2 - H_{n,2}.$$

Учитывая, что

$$H_n \sim \ln n + \gamma, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} H_{n,2} = \frac{\pi^2}{6},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера–Маскерони, асимптотика первых двух начальных моментов задается степенями логарифма:  $m_{n,k} = \ln^k n$ .

В [8] был получен нетривиальный результат относительно частичных сумм  $X_n^*$ : процесс

$$M_n = \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{n}, \quad M_1 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

является ограниченным (в  $L_2$ -смысле) мартингалом относительно естественной фильтрации, порожденной  $\{X_n\}$ . Это означает, в частности, что  $M_n$  сходится (почти наверное и в среднеквадратичном смысле) к некоторой случайной величине  $M$  с  $\mathbf{E}[M] = 0$  и  $\mathbf{D}[M] = 2 - \pi^2/6$ . Точное распределение  $M$  неизвестно, но моделирование показало, что она имеет несимметричное уни-modalное распределение. Мартингал  $M_n$  позволяет указать выражение для автокорреляционной функции  $X_n$ :

$$\mathbf{Cov}[X_n, X_{n+m}] = \frac{n-1}{n} \mathbf{D}[M_{n-1}] + \frac{\mathbf{D}[X_n]}{n}.$$

Можно получить выражение для моментов произвольного порядка  $k$ , хотя оно и не будет полезно на практике при больших  $k$ . Для этого рассмотрим производящую функцию:

$$F_n(t) = \mathbf{E}[t^{X_n}] = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k(t), \quad F_0(t) = 1.$$

---

\*Важно учитывать, что там индексация  $X_n$  начинается с единицы, а не с нуля, как здесь.

Отсюда следует, что

$$F_{n+1}(t) = \frac{t}{n+1} \left( F_n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} F_k(t) \right) = \frac{t}{n+1} \left( F_n(t) + \frac{n}{t} F_n(t) \right) = \frac{t+n}{n+1} F_n(t).$$

Решение, таким образом, принимает вид

$$F_n(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{t+k}{k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{t+k-1}{k} = \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} = \frac{t^{(n)}}{n!}. \quad (6)$$

Здесь  $t^{(n)}$  — восходящий факториал, или полином Похгаммера. Начальные моменты можно выразить через  $F_n$  следующим образом:

$$\mathbf{E} [X_n^k] = \left( t \frac{\partial}{\partial t} \right)^k F_n(t) \Big|_{t \rightarrow 1-0}.$$

Впрочем, выражение для производящей функции гораздо более полезно для отыскания распределения  $X_n$ . Действительно, полином в знаменателе (6) может быть представлен в явном виде с помощью чисел Стирлинга первого рода, откуда немедленно следует выражение для вероятностей:

$$t^{(n)} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} t^k, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad n \leq 0, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (7)$$

Как отмечено в [8], выражение для производящей функции  $F_n$  (с индексацией, которая начинается с единицы) можно переписать в виде

$$F_{n+1}(t) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{t}{k} + \frac{k-1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n f_n(t), \quad (8)$$

что позволяет трактовать величину  $X_{n+1}$  как сумму  $\sum_{k=1}^n Z_k$  независимых в совокупности случайных величин с распределением Бернулли, для которых  $\mathbb{P}(Z_k = 1) = 1/k$ . Там же дано нетривиальное объяснение почему процесс  $X_n$  по распределению совпадает с такой суммой. Пусть  $V_1 = \max\{m : \sum_{k=m}^n Z_k = 1\}$ , т.е. это номер последнего успеха в схеме Бернулли из  $n$  испытаний. Нетрудно показать, что  $V_1$  имеет равномерное распределение на  $\{1, \dots, n\}$ . Тогда в определении (1) можно заменить  $U_n$  на  $V_1^*$ . Теперь, чтобы вычислить  $X_{n+1}$  окончательно, необходимо знать значение процесса в момент  $V_1$ . Рассуждая аналогичным образом, мы можем ввести величину  $V_2$  — номер предпоследнего успеха, — которая условно по  $V_1$  должна иметь равномерное распределение

---

\*Напомним, что в [8] индексы начинаются с единицы.

на  $\{0, \dots, V_1 - 1\}$ . Значение  $X_{n+1}$  будет на два больше, чем  $X_{V_2}$ . Можно показать, что это эквивалентно определению  $V_2 = \max\{m: \sum_{k=m}^n Z_k = 2\}$ . Продолжая таким образом строить величины  $V_j$ , мы достигнем наконец выполнения условия  $V_{j^*} = 1$ . Тогда по построению  $X_{n+1} = j^*$ , т.е.  $X_{n+1}$  складывается в точности из тех  $Z_k$ , которые оказались равны единице.

Интересно, что этот же самый результат для распределений можно получить напрямую, используя комбинаторный анализ, как это было показано в [9]. Траектории случайного процесса можно описать с помощью дерева, в котором вершины на  $n$ -м ярусе содержат возможные значения  $X_n$ . Пути в этом дереве соответствуют всевозможным способам выбора случайных лагов  $U_n$ . На  $n$ -м ярусе этого дерева находится  $n!$  вершин: действительно, каждая вершина  $(n-1)$ -го яруса порождает  $n$  новых вершин, поскольку любое из предыдущих значений может быть использовано. Обозначим  $N(n, k)$  количество траекторий, для которых  $X_n = k$ . Есть два способа достичь значения  $k$  на  $n$ -м шаге. Если значение  $k$  могло появиться на  $(n-1)$ -м ярусе дерева, то мы можем и на  $n$ -м ярусе получить его же, выбирая точно тот же самый лаг. Каждая из этих вершин, лежащих в том же поддереве, порождает новую вершину с тем же значением (на рис. 2 они отмечены зеленым). Таким образом, всего будет  $(n-1)N(n-1, k)$  траекторий, достигающих  $k$  этим способом. С другой стороны, можно на  $(n-1)$ -м ярусе достичь значения  $k-1$ , а после этого, при  $U_n = n-1$ , получить  $k$ . На рис. 2 такие траектории помечены красным. Таким образом, должно выполняться

$$N(n, k) = (n-1)N(n-1, k) + N(n-1, k-1), \quad N(0, k) = \delta_{0,k},$$

где  $\delta_{0,k}$  — символ Кронекера. Известно (см., например, [7, п. 1.2.6]), что это рекурсивное соотношение задает числа Стирлинга первого рода.

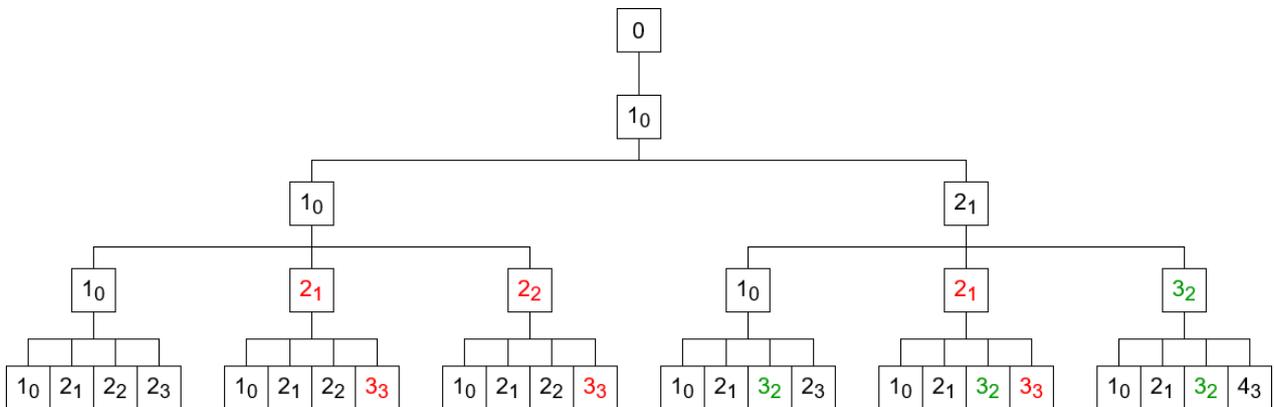


Рис. 2. Дерево траекторий рандомизированной арифметической прогрессии для первых четырех шагов. Нижние индексы показывают ярус в том же поддереве, значение с которого было использовано для получения текущего значения. Цветовые обозначения см. в тексте.

Числа Стирлинга первого рода, среди прочего, подсчитывают количество перестановок длины  $n$ , содержащих в точности  $k$  циклов (считая и циклы единичной длины). Используя эту связь, в [9] было найдено уравнение для производящих функций времени первого достижения:

$$\theta_k = \min\{n \geq 0: X_n = k\}, \quad K_s(t) = \mathbf{E}[t^{\theta_s}], \quad s \geq 0$$

$$K_{s+1}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \frac{K_s(x)}{1-x} dx\right).$$

Предельную форму распределения для процесса  $X_n$  можно получить как следствие центральной предельной теоремы с учетом того, что  $X_{n+1} = \sum_k Z_k$  и для величин  $Z_k$  выполняется условие Ляпунова: распределение отношения

$$\frac{X_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}$$

сходится к стандартному нормальному закону. Тот же самый результат можно получить и с помощью более тонких предельных теорем для распределений, которые могут быть выражены в терминах чисел Стирлинга [10].

Укажем несколько очевидных обобщений базовой модели (1). Первое заключается в использовании более сложной детерминированной рекуррентной зависимости в правой части:

$$X_{n+1} = h_n + X_{U_n}, \quad X_0 = 0.$$

Подробного исследования этой модели нет, за исключением краткого упоминания в [9]. Наиболее эффективным инструментом исследования таких процессов является производящая функция

$$\mathbf{E}[t^{X_n}] = \prod_{k=0}^n \frac{1}{k+1} t^{h_{k+1}} + \frac{k}{k+1} t^{h_{k+1}-h_k}.$$

Если  $h_n$  «достаточно хороша», это позволит получить аналитическое выражение, а через него — распределение и выражения для моментов. Другой, более сложный способ обобщения — положить

$$Y_{n+1} = W_n + Y_{U_n}, \quad X_0 = 0,$$

где  $W_n$  — еще одно семейство независимых в совокупности одинаково распределенных величин, которое не зависит от  $U_n$ . В [8] этот процесс был введен под названием возвратного случайного блуждания (*reverting random walk*), а в [6] был кратко рассмотрен один простой частный случай этой схемы, где  $W_n$  имели распределение Радемахера (т. е. принимали значения 1 и -1 с

равными вероятностями). В [8] было показано, что процесс стохастически эквивалентен  $\sum_{k=0}^{X_n} W_n^*$ , где  $W_n^*$  — независимые случайные величины с тем же распределением, что и  $W_1$ . Таким образом,  $Y_n$  является субординированным  $X_n$  процессом, а производящая функция принимает вид

$$\mathbf{E}[t^{Y_n}] = \prod_{k=1}^n \frac{k-1}{k} + \frac{\Phi(t)}{k},$$

где  $\Phi(t)$  — производящая функция случайной величины  $W_1$ . В обоих случаях характерная мультипликативная форма производящей функции позволяет также утверждать, что рассматриваемые процессы стохастически эквивалентны сумме независимых в совокупности случайных величин с относительно простыми, но не одинаковыми распределениями (подобно тому, как это было подробно показано для  $X_n$ ), и использовать различные варианты центральной предельной теоремы.

Еще одно направление для всевозможных обобщений рандомизированной арифметической прогрессии связано с отказом от равномерного распределения  $U_n$  в пользу более сложного. Наиболее подробно такой подход изучен в [8]. Пусть

$$\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{u_k}{\sum_{k=0}^n u_k} = p_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

где  $\{u_k\}$  — некоторая последовательность неотрицательных чисел, причем все они не могут быть одновременно равны нулю. Главным инструментом для изучения вновь оказывается производящая функция, которая здесь имеет вид

$$\mathbf{E}[t^{X_n}] = \prod_{k=1}^n p_k t + q_k, \quad q_k = 1 - p_k.$$

Многие результаты, полученные для случая равномерного распределения  $U_n$ , переносятся и на эту более общую конструкцию. Так, частичные суммы  $X_n$  также порождают мартингал, сам  $X_n$  может быть представлен в виде суммы независимых в совокупности бинарных случайных величин и при определенном выборе последовательности  $\{u_k\}$  удовлетворяет центральной предельной теореме. К примеру, в [8] было показано, что это справедливо при  $u_k = k^\beta$  с  $\beta \geq 1$ .

Наконец, кратко упомянем еще несколько более специфичных обобщений. Так, в [6] было предложено рассматривать процесс на двухмерной решетке, индексированной парами  $(n, m)$ . А в [8] была предложена модификация процесса, где механизм памяти сам является случайным и управляется некоторым процессом восстановления. Инструментарий для исследования этих конструкций не отличается от уже рассмотренного здесь, а качественно новых эффектов в них не возникает.

Вполне закономерно наряду с рандомизированной арифметической прогрессией рассмотреть и геометрическую:

$$Y_{n+1} = cY_{U_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad X_0 = 1.$$

По всей видимости, впервые такая конструкция для  $c = 2$  была введена в [6]. Если  $c > 0$ , то преобразование  $X_n = \log_c Y_n$  сводит этот процесс к уже рассмотренному (1). Если же  $c < 0$ , то распределения  $Y_n$  по-прежнему могут быть выражены через сопряженный процесс типа (1), порожденный той же самой последовательностью случайных лагов  $U_n$ , поскольку  $\mathbb{P}(Y_n = c^k) = \mathbb{P}(X_n = k)$  и распределение  $X_n$  известно. Для моментов произвольного порядка  $r$ , где  $r$  натуральное, из определения немедленно следует рекуррентное соотношение

$$m_{n+1,r} = \frac{c^r}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,r}.$$

Умножим здесь обе части на  $t^n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)m_{n+1,r}t^n &= c^r \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^n m_{k,r} = \\ &= c^r \sum_{n=0}^{+\infty} m_{n,r} \sum_{k=n}^{+\infty} t^k = \frac{c^r}{1-t} \sum_{n=0}^{+\infty} m_{n,r}t^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Если теперь ввести производящую функцию последовательности  $m_{n,r}$  при фиксированном  $r$ ,

$$H_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_{n,r}t^n,$$

то в силу полученного равенства она должна удовлетворять дифференциальному уравнению  $(1-t)H'_r = c^r H_r$  с начальным условием  $H_r(0) = \mathbf{E}[X_0^r] = 1$ . Нетрудно проверить, что решением является

$$H_r(t) = (1-t)^{-c^r}.$$

Разложив эту функцию в ряд по степеням  $t$ , получим аналитическое выражение для моментов через обобщенные биномиальные коэффициенты:

$$m_{n,r} = \frac{c^r(c^r+1)\dots(c^r+n-1)}{n!} = \frac{\Gamma(n+c^r)}{n!\Gamma(c^r)}.$$

Асимптотически абсолютные величины моментов растут как  $n^{c^r-1}$  — это следует из известного соотношения  $\Gamma(x+\alpha) \sim \Gamma(x)x^\alpha$  [11, п. 6.1.39].

Еще одна подробно изученная модель с явной зависимостью от предыстории имеет вид

$$X_{n+1} = X_n + X_{U_n}, \quad X_0 = 1. \quad (11)$$

Здесь пока по-прежнему  $U_n$  имеет равномерное распределение на  $\{0, \dots, n\}$ . Впервые она была предложена в 1969 г. в работе Станислава Улама и соавторов [12] во времена их работы в Лос-Аламосе: там были представлены результаты моделирования траекторий этого и некоторых других подобных процессов. Модель заинтересовала Марка Каца, который в том же году выполнил первый теоретический анализ [13], получив выражения для первых двух начальных моментов и указав их асимптотику. Поэтому, к примеру, в [9] модель названа сумматором Улама—Каца. Вместе с тем легко видеть, что можно трактовать (11) как рандомизированную последовательность Фибоначчи, где вместо одного из предыдущих значений берется какое-нибудь случайное из уже имеющихся. Несколько выборочных траекторий этого процесса показаны на рис. 3.

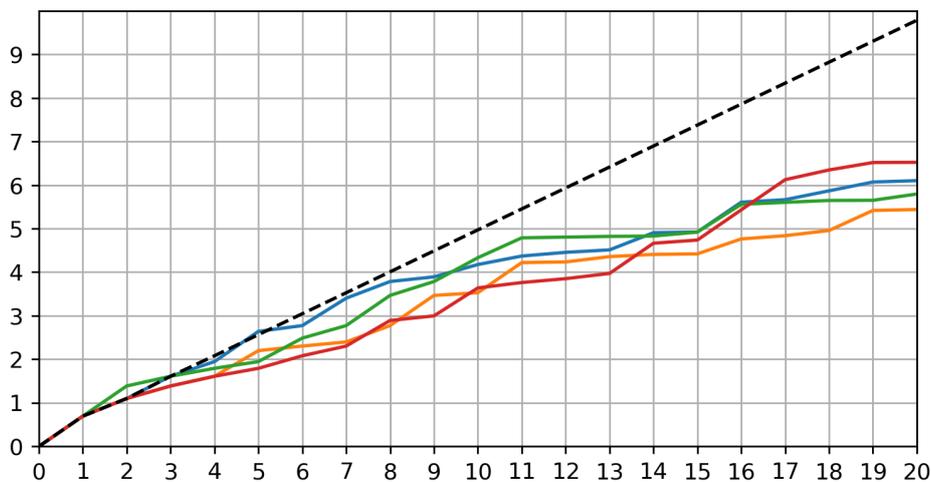


Рис. 3. Выборочные траектории процесса (11). Пунктир — обычная последовательность Фибоначчи. По оси ординат выбран логарифмический масштаб.

Следуя [13], начнем с вычисления первого начального момента, поскольку его можно найти аналитически. Используя все тот же самый прием с условным математическим ожиданием, получим

$$m_{n+1,1} = m_{n,1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,1}, \quad (12)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} m_{n+2,1} &= m_{n+1,1} + \frac{1}{n+2} [m_{n+1,1} + (n+1)(m_{n+1,1} - m_{n,1})] \\ (n+2)m_{n+2,1} - 2(n+2)m_{n+1,1} + (n+1)m_{n,1} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра в точке  $x = -1$  (см., например, [11]). Тот же результат можно получить несколько более долгим способом, вводя в рассмотрение производящую функцию последовательности  $m_{n,1}$ . Умножая (12) на  $t^n$  и суммируя по  $n$ , используя тот же самый прием, что и в (10), получим:

$$H'(t) = (tH)' + \frac{H}{1-t}, \quad H(0) = m_{0,1} = 1.$$

Его решение имеет вид

$$H(t) = \frac{e^{-\frac{t}{1-t}}}{1-t},$$

в точности совпадая с производящей функцией полиномов Лагерра в точке  $x = -1$ . Таким образом,  $m_{n,1} = L_n(-1)$ , что дает асимптотику  $\ln m_{n,1} \sim 2\sqrt{n}$ .

Чтобы вычислить второй центральный момент, понадобится ввести вспомогательные величины  $\alpha_n = n\mathbf{E}[X_n X_{U_{n-1}}] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}[X_n X_k]$ . Возводя в квадрат определение (11), получим

$$\begin{aligned} m_{n+1,2} &= m_{n,2} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[X_n X_{U_n}] + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,2} = m_{n,2} + \frac{2}{n+1} m_{n,2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}[X_n X_{U_n}] + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,2} = m_{n,2} + \frac{2}{n+1} m_{n,2} + \alpha_n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n m_{k,2}. \end{aligned}$$

Для  $\alpha_n$  можно вывести рекуррентное соотношение, которое содержит лишь  $\alpha_k$  и  $m_{k,2}$  с  $k < n$ . Действительно, подставляя в (11) выражение для  $\alpha_{n+1}$ , получим

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[X_n X_k] + \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[X_{U_n} X_k] = m_{n,2} + \alpha_n + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \mathbf{E}[X_\ell X_k] = \\ &= m_{n,2} + \alpha_n + \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{k=0}^n m_{k,2} + 2 \sum_{0 \leq k < \ell \leq n} \mathbf{E}[X_\ell X_k] \right] = \\ &= m_{n,2} + \alpha_n + \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{k=0}^n m_{k,2} + 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k \right]. \end{aligned}$$

Затем анализ становится достаточно громоздким, поэтому приведем лишь набросок дальнейших выкладок. Вводя, как и ранее, производящие функции для последовательностей  $m_{n,2}$  и  $\alpha_n$ , полученные разностные уравнения можно свести к системе линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. После серии преобразований, которая включает в себя переход к новому переменному, будет получено линейное уравнение для вспомогательной функции:

$$\frac{d^2 F}{dv^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{2\sqrt{17}} \frac{1}{v} + \frac{1}{4v^2} \right) F = 0, \quad (14)$$

$$v = \sqrt{17}u, \quad u = \frac{1}{1-t}, \quad F(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-5u/2} G(u), \quad G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_{n,2} t^k.$$

Кац в [13] получает асимптотическую оценку для  $F$ , отбросив в (14) пренебрежимо малые при больших  $v$  члены в коэффициенте при  $F$ . Но, как отмечено в [9], уравнение для  $F$  представляет собой частный случай уравнения Уиттакера (см., например, [11, гл. 13]), линейно независимые решения которого могут быть выражены через функции Куммера. Точное решение весьма громоздко, заинтересованный читатель сможет найти его в [9, стр. 88]. Впрочем, ведущие члены в асимптотическом разложении этого решения дают тот же самый результат. Асимптотику для моментов второго порядка можно получить методом перевала, как это указано в [13], хотя никаких деталей этого вычисления там не приведено:  $\ln m_{n,2} \sim \sqrt{2(5 + \sqrt{17})}n$ .

В [9] была также предложена техника, позволяющая определять асимптотические выражения для начальных моментов произвольного порядка, минуя решение системы уравнений для моментов и вспомогательных величин, содержащих суммы ожиданий перекрестных произведений (в случае со вторым моментом это были величины  $\alpha_n$ ). Для этого вводятся величины

$$M_{n,r}(q, \mathbf{p}) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \dots \sum_{i_{|\mathbf{p}|}=0}^{n-1} \mathbf{E} \left[ X_n^q \prod_{k=1}^{|\mathbf{p}|} X_{i_k}^{p_k} \right], \quad 1 \leq q \leq m,$$

для которых может быть записано рекуррентное по  $n$  соотношение. Здесь  $\mathbf{p} = \{p_1, \dots\}$  — какое-нибудь разбиение целого числа  $q - m$ , а  $|\mathbf{p}|$  — его длина. Затем, переходя к производящим функциям и упорядочивая их в вектор  $\mathbf{h}(t)$  (для удобства индекс  $r$  опущен) с помощью некоторой схемы нумерации, авторы получают систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{h}'(t) = t\mathbf{C}_1\mathbf{h}'(t) + \mathbf{C}_2\mathbf{h}(t) + \frac{1}{1-t}\mathbf{C}_3\mathbf{h}(t),$$

где матрицы  $\mathbf{C}_i$  зависят только от  $r$ . Поскольку матрица  $(\mathbf{I} - t\mathbf{C}_1)$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица соответствующего размера, обратима, эта система может быть приведена к виду  $\mathbf{h}' = \mathbf{C}(t)\mathbf{h}$ . Преобразование  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{h}(t)$ , где матрица  $\mathbf{P}(t)$  — диагональная с элементами вида  $(1 - t)^{p_s}$ , с последующей заменой переменного  $u = 1/1 - t$  сводит систему к  $\mathbf{f}' = \mathbf{Q}(u)\mathbf{f}$ . В [9] было строго доказано, что при больших  $u$  матрица  $\mathbf{Q}(u)$  стремится к примитивной матрице  $\mathbf{Q}_0$ , так что асимптотическое поведение производящих функций в итоге определяется ее максимальным собственным числом  $\lambda_r^*$ . На основе этого была указана асимптотическая оценка  $\ln m_{n,r} \sim 2\lambda_r^* \sqrt{n}$ . Определить общий вид элементов матрицы  $\mathbf{Q}_0$  весьма трудно, но их можно вычислить алгоритмически с необходимой точностью — в [9] это было сделано для небольших  $r$  вплоть до 10.

На рис. 4 приведено дерево, позволяющее наглядно показать возможные траектории случайного процесса (11). Легко видеть, что оно очень похоже на рис. 2, который описывает рандомизированную арифметическую прогрессию. Сумматор Улама—Каца обнаруживает интересную связь с дискретными объектами, известными как аддитивные цепи (*addition chains*). Аддитивная цепь для числа  $n$  — это последовательность натуральных чисел  $x_i$ , которая начинается с единицы и заканчивается числом  $n$ , такая что каждый элемент в цепи может быть представлен как сумма двух каких-нибудь предыдущих элементов (возможно, одного и того же) этой же цепи. Особое место занимают аддитивные цепи Брауэра (*Brauer chains, star addition chains*), для которых каждый элемент должен быть суммой непосредственно предыдущего элемента и еще какого-нибудь элемента этой цепи. Изучение аддитивных цепей представляет собой отдельную и весьма нетривиальную область исследований на стыке комбинаторного анализа и теории чисел. Характерным примером является задача об оптимальном возведении в степень: нахождение аддитивной цепи минимальной длины для любого заданного  $n$  позволило бы вычислить  $x^n$ , затратив наименьшее количество операций умножения. Хотя на этом направлении был получен ряд интересных результатов, в общем виде задача остается пока нерешенной. Глядя на рис. 4 легко понять, что траектории случайного процесса в точности соответствуют всевозможным цепям Брауэра. Отсюда немедленно следует, что для отыскания точного распределения,  $\mathbb{P}(X_n = k)$ , необходимо уметь подсчитывать количество цепей Брауэра фиксированной длины  $n$  для любого заданного  $k$ . Эта задача до сих пор остается открытой, см. [14, п. С6].

Модель (11) также была обобщена в нескольких различных смыслах. Например, в [15] был рассмотрен более общий случай с постоянными множителями:

$$X_{n+1} = aX_n + bX_{U_n}. \quad (15)$$

Это на первый взгляд несущественное изменение позволяет получить гораз-

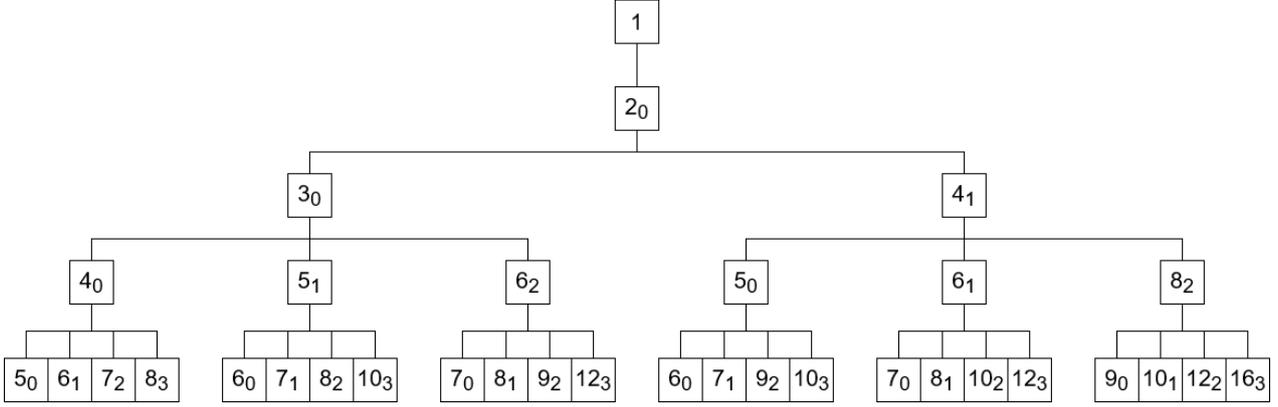


Рис. 4. Дерево траекторий сумматора Улама—Каца для первых четырех шагов. Нижние индексы показывают ярус в том же поддереве, значение с которого использовалось для получения текущего значения.

до более широкий спектр асимптотических режимов для моментов первого порядка. Однако результаты, приведенные там, вызывают некоторые вопросы. С помощью приемов, использованных ранее здесь, можно показать, что точное уравнение для моментов первого порядка имеет вид

$$m_{n+2,1} = \left( a + \frac{n+1+b}{n+2} \right) m_{n+1,1} - a \frac{n+1}{n+2} m_{n,1}.$$

Формально представим его в виде

$$\frac{m(n+2h) - 2m(n+h) + m(n)}{h^2} + A(n) \frac{m(n+h) - m(n)}{h} + B(n)m(n) = 0,$$

где  $h = 1$ . Легко показать, что

$$A(n) = 2 - a - \frac{n+1+b}{n+2}, \quad B(n) = 1 - a \frac{2n+3}{n+2} - \frac{n+1+b}{n+2}.$$

Это представление «подсказывает», как должно выглядеть дифференциальное уравнение для функции  $M(n) = m_n$ , если бы  $n$  был непрерывным аргументом. Однако в [15, п. 3.2] дифференциальный аналог дан в совсем другом виде:

$$(n+1)M'' + (1 + (1-a)n)M' + (1-a-b)M = 0,$$

причем нет никаких пояснений, как было получено это уравнение. По этой причине указанные там асимптотические представления, полученные уже с помощью этого дифференциального уравнения, не приводятся здесь. Отметим лишь, что сообщалось о показательной и степенной по  $n$  зависимостях. Для случая  $a = 1$  разностное уравнение для моментов первого порядка можно решить аналитически, поскольку оно приводит к тем же самым полиномам Лагерра:  $m_{n,1} = L_n(-b) \sim e^{2\sqrt{bn}}$ . Прямое применение методов из [16], не

требующее перехода к дифференциальным уравнениям, приводит к следующему: асимптотические решения могут быть представлены в виде рядов

$$\rho_i^n n^{\alpha_i} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{c_{s,i}}{n^s}, \quad \alpha_i = \frac{-b\rho_i}{2a - (1+a)\rho_i},$$

где  $\rho_i$  — различные решения характеристического уравнения

$$\rho^2 - (a+1)\rho + a = 0,$$

а коэффициенты  $c_{s,i}$  определяются формальной подстановкой в исходное уравнение. Если решения  $\rho_i$  совпадают, то асимптотические представления становятся несколько сложнее.

В [15] также была кратко упомянута модель с детерминированной частью второго порядка по  $n$ :

$$X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1} + cX_{U_n}.$$

Используя ту же самую технику сведения к дифференциальному уравнению (вновь без каких-либо разъяснений), были указаны уже четыре разных режима в зависимости от соотношения между  $a$  и  $b$ : экспоненциальный, «медленный» экспоненциальный (вида  $e^{cn^\gamma}$  с  $0 < \gamma < 1$ ) и степенной.

Как и в случае рандомизированной арифметической прогрессии, для (11) также рассматривались другие распределения лагов  $U_n$ . Подробное исследование этого случая было приведено в [15, 17]. Разностное уравнение для моментов первого порядка принимает вид

$$m_{n,1} = m_{n-1,1} + \frac{1}{K_n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k m_{k,1}, \quad \mathbb{P}(U_{n-1} = k) = \frac{u_k}{K_n}, \quad K_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Основным инструментом исследования являлось применение уже известной техники подстановки, которая сводит это уравнение к более простому разностному уравнению второго порядка, подобно тому, как это было проделано для (13):

$$m_{n+1,1} - 2m_{n,1} + \frac{K_n}{K_{n+1}} m_{n-1,1} = 0. \quad (16)$$

Как отмечено в [17], уравнение (16) представляет собой рекуррентное соотношение для значений некоторого семейства приведенных ортогональных полиномов в точке  $t = 2$ . Были рассмотрены степенные,  $u_k = (k+1)^\alpha$ , и показательные,  $u_k = c^k$ , распределения. Поскольку для анализа использовался тот же самый не до конца понятный метод сведения к дифференциальным уравнениям, полученные там асимптотические результаты здесь не приводятся.

Уже в [12] была рассмотрена еще одна конструкция, которую, следуя аналогии, можно было бы назвать полностью рандомизированной последовательностью Фибоначчи:

$$X_{n+1} = X_{U_n} + X_{V_n}, \quad X_0 = 1. \quad (17)$$

Здесь используются уже два случайных лага,  $U_n$  и  $V_n$ , которые независимы друг от друга и имеют равномерные распределения на  $\{0, \dots, n-1\}$ . Уравнение для моментов первого порядка принимает вид

$$m_{n,1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_{k,1}, \quad m_{n,1} = \frac{n+1}{n} m_{n-1,1}.$$

Легко проверить, что его решение имеет вид  $m_{n,1} = n+1$ . В [18] эта модель была исследована более тщательно (напомним, что там используется схема индексации, которая начинается с единицы, а не с нуля). Было показано, что для моментов второго порядка справедливо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_{n,2}}{n^2} = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} = K.$$

Ассоциированный с частичными суммами процесс

$$M_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n X_k$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации, порождаемой  $\{X_n\}$ , и сходится (почти наверное и в среднеквадратичном смысле) к случайной величине  $M$ , для которой  $\mathbf{E}[M] = 1/2$  и  $\mathbf{E}[M^2] = K/6$ . Также в [18] удалось получить асимптотическое представление для автоковариационной функции

$$\frac{\mathbf{E}[X_n X_\ell]}{n^2} \rightarrow \begin{cases} 2\theta K/3 & \ell/n \rightarrow \theta \in (0, 1) \\ K & \ell = n \end{cases}, \quad \ell \leq n.$$

Более того, оказалось возможным указать предельный закон распределения для  $X_n$  после масштабирования:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{nM_n} \leq x\right) = \int_0^x t e^{-t} dt, \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_{U_n}}{nM_n} \leq x\right) = \int_0^x e^{-t} dt, \quad x \geq 0.$$

В [15] конструкция (17) была обобщена за счет введения постоянных множителей:

$$X_{n+1} = aX_{U_n} + bX_{V_n}, \quad X_0 = 1. \quad (18)$$

Уравнение для моментов первого порядка принимает вид

$$m_{n,1} = \frac{n + a + b - 1}{n} m_{n-1,1},$$

а его решение имеет асимптотическое представление  $m_{n,1} \sim n^{a+b-1}$ .

## Модели с неявной зависимостью от предыстории

Все рассмотренные выше модели содержали единственный стохастический механизм, связанный с извлечением из памяти предыдущих значений. Перейдем теперь к рассмотрению другого класса моделей, где вероятностные эрдитарные эффекты уже накладываются на другие источники рандомизированного поведения, например, на обычные случайные блуждания. По всей видимости, наиболее изученной на сегодняшний день является модель, которая в англоязычной периодике получила название *elephant random walk* (ERW)\*. Оригинальная модель была предложена в 2004 г. [19] и имела следующий вид:

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}, n \geq 1, X_0 = 0, \quad (19)$$

где  $\xi_n$  — случайные величины, принимающие значения  $\pm 1$ . Именно с ними связана память: на первом шаге  $\xi_1 = 1$  с вероятностью  $s \in [0, 1]$ , а после этого выбирается случайный лаг  $U_{n+1}$ , имеющий равномерное распределение на  $\{1, \dots, n\}$ , и

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = \xi_{U_{n+1}}) = p, \mathbb{P}(\xi_{n+1} = -\xi_{U_{n+1}}) = 1 - p, p \in (0, 1).$$

Легко видеть, что случай  $p = 1/2$  здесь соответствует отсутствию памяти, поскольку  $\xi_n$  принимает значения  $\pm 1$  с одинаковой вероятностью и мы получим самое обычное (с точностью до особенностей первого шага, который, впрочем, не оказывает влияния на асимптотическое поведение) случайное блуждание. Спустя десятилетие в [20] была предложена весьма похожая модель, в которой память была введена несколько более явно:

$$X_{n+1} = X_n + \eta_{n+1}, n \geq 1, X_0 = 0. \quad (20)$$

Каждый шаг такого блуждания связан с одним из двух событий. В первом случае, с вероятностью  $q$ , разыгрывается обычное случайное блуждание, когда позиция может измениться на единицу с равными вероятностями:  $\mathbb{P}(\eta_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(\eta_{n+1} = -1) = 1/2$ . Во втором же случае наудачу выбирается и повторяется одно из предыдущих значений  $\eta_{U_{n+1}}$ , где  $U_{n+1}$  по-прежнему

---

\*Название отсылает к популярной в англоязычных странах идиоме «*an elephant never forgets*».

случайный лаг с равномерным распределением. Хотя вторая модель изначально позиционировалась как модификация оригинального ERW с другим поведением, позже в [21] было показано, что две этих модели стохастически эквивалентны и с точностью до обозначений дают одни и те же результаты. По этой причине мы сосредоточим внимание лишь на одной из них — первой.

В основе аналитических построений лежит утверждение об условном распределении приращений  $\xi_n$ :

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = x | \xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \alpha \xi_k x}{2}, \quad \alpha = 2p - 1, \quad n \geq 1.$$

Сумма возникает из-за того, что необходимо учесть все возможные способы выбора случайного лага, а при фиксированных  $\xi_k$  и  $x$  выражение под знаком суммы будет давать либо  $p$ , либо  $1-p$ , в чем легко убедиться непосредственно. Тогда, с учетом того, что из (19) немедленно следует  $X_n = X_0 + \sum_k \xi_k$ , для условного математического ожидания получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\xi_{n+1} = x | \xi_1, \dots, \xi_n] &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = +1 | \xi_1, \dots, \xi_n) - \\ &\quad - \mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1 | \xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\alpha}{n} (X_n - X_0). \end{aligned}$$

Отсюда, наконец, для  $\dot{m}_{n,1} = \mathbf{E}[X_n - X_0]$  получается уравнение

$$\dot{m}_{n+1,1} = \dot{m}_{n,1} + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] = \dot{m}_{n,1} + \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi_{n+1} = x | \xi_1, \dots, \xi_n]] = \frac{n - \alpha}{n} \dot{m}_{n,1}.$$

Поскольку  $\dot{m}_{1,1} = \mathbf{E}[\xi_1] = 2s - 1 = \beta$ , окончательное решение принимает вид

$$\dot{m}_{n,1} = \beta \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n)}.$$

Аналогичные рассуждения для моментов второго порядка  $\dot{m}_{n,2} = \mathbf{E}[(X_n - X_0)^2]$  приводят к рекурсивному соотношению

$$\dot{m}_{n+1,2} = 1 + \frac{n + 2\alpha}{n} \dot{m}_{n,2},$$

решение которого принимает вид

$$\dot{m}_{n,2} = \frac{n}{2\alpha - 1} \left[ \frac{\Gamma(n + 2\alpha)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right].$$

Интересно, что оно не зависит от  $s$ , поскольку  $\dot{m}_{1,2} = 1$ . Асимптотическое поведение  $\dot{m}_{n,2}$  имеет два качественно отличающихся режима: линейный при

$\alpha < 1/2$  и степенной с показателем  $2\alpha$  при  $\alpha > 1/2$ . В пограничном случае  $\alpha = 1$  асимптотика является линейно-логарифмической. Уравнения для центрированных моментов произвольного порядка  $r$  также известны [19], но решения становятся все более громоздкими с ростом  $r$ .

Точные распределения процесса неизвестны, но, как указано в [19], можно легко получить уравнение для характеристических функций:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(t) &= \mathbf{E} \left[ e^{it\dot{X}_n} \right] = \mathbf{E} \left[ e^{it\dot{X}_n} \left\{ \frac{e^{it}}{2n} \sum_{k=1}^n (1 + \alpha\xi_k) + \frac{e^{-it}}{2n} \sum_{k=1}^n (1 - \alpha\xi_k) \right\} \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[ e^{it\dot{X}_n} \left\{ \cos(t) + \frac{\alpha}{n} \sin(t)\dot{X}_n \right\} \right] = \cos(t)Q_n(t) + \sin(t)\frac{\alpha}{n} \frac{dQ_n}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь  $\dot{X}_n = X_n - X_0$ . Из него, в свою очередь, можно получить эволюционное уравнение для вероятностей  $P(x, t) = \mathbb{P}(X_t = x)$ , которое после предельного перехода (детали которого не поясняются) при больших  $x$  и  $t$  стремится к линейному уравнению в частных производных

$$t \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{t}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} (xP).$$

Как и в случае с рассмотренными ранее моделями, здесь обнаруживается интересная и нетривиальная связь с деревьями, отмеченная в [22]. Будем для удобства рассматривать сейчас уже конструкцию, предложенную в [20]. Каждый шаг добавляет к дереву одну вершину, которая помечается номером шага и значением приращения  $\xi_n$ . Последнее предлагается называть спином, поскольку оно может принимать лишь значения  $\pm 1$ , что напоминает хорошо известную модель Изинга. Немного модифицируем схему, считая, что случайный лаг  $U_n$  разыгрывается на каждом шаге, но с вероятностью  $1 - q$  он не будет использован, поскольку приращение будет выбираться наудачу, а не на основе прошлого значения. На  $n$ -м шаге новая вершина соединяется с вершиной, соответствующей шагу  $U_n$ . Однако, если механизм памяти так и не было задействован, то это ребро сразу же удаляется из графа. Таким образом, мы будем получать некоторый случайных лес, состоящий из корневых деревьев (возможно, вырожденных до единственной вершины). Пример построения такого дерева по траектории процесса  $X_n$  приведен на рис. 5. Важно, что в этом лесу ребра соединяют только те вершины, которые имеют одинаковый спин — наличие ребра означает, что было скопировано одно из предыдущих приращений. Более того, значение  $X_n$  в точности совпадает с суммой спинов. Отсюда становится видна тесная связь этого случайного процесса с задачей о перколяции ребер (*bond percolation*) на случайном графе. На основе этого наблюдения в [22] было показано, как можно получить некоторые статистические характеристики перколяционных кластеров на таких случайных деревьях. И если для рассмотренного здесь варианта эти характеристики и так

были известны, то другие конструкции ERW (например, отмеченная здесь оригинальная схема из [19]) позволили получить неизвестные ранее точные и асимптотические выражения для соответствующих перколяционных процессов.

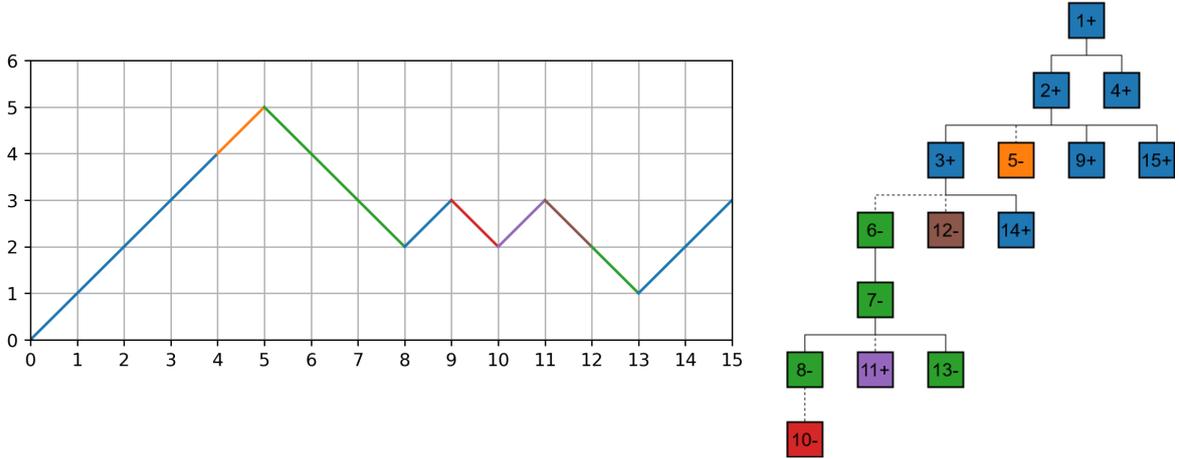


Рис. 5. Выборочная траектория ERW-процесса (слева) и соответствующее раскрашенное дерево (справа). Удаленные ребра показаны пунктиром.

ERW-процессы изучены весьма тщательно и подробно на сегодняшний день. По всей видимости, это объясняется тем, что они представляют собой простейшую наглядную модель аномальной диффузии (подробнее об этом классе процессов см., например, [23]), которая допускает аналитическое решение. Не претендуя на исчерпывающий обзор, отметим здесь лишь некоторые работы. Множество ссылок вместе с подробным обзором и оригинальными результатами можно найти в недавней диссертации [24]. Так, в [25] была исследована связь между оригинальным ERW и урновой схемой Пойя, что позволяет использовать известные для последней комбинаторные результаты и предельные теоремы. Основным результатом таков: при  $0 \leq p < 3/4$  выполняется

$$\frac{X_{[tn]}}{\sqrt{n}} \Rightarrow W_t, \quad \mathbf{E}[W_t] = 0, \quad \mathbf{E}[W_t W_s] = \frac{s}{3 - 4p} \left(\frac{t}{s}\right)^{2p-1}, \quad 0 < s \leq t,$$

где  $W_t$  — вещественный гауссовский случайный процесс и сходимость понимается по распределению. Если же  $3/4 < p \leq 1$ , то известно, что

$$\frac{X_{[tn]}}{n^\alpha} \Rightarrow t^\alpha Y,$$

где  $Y$  — некоторая случайная величина, распределение которой в общем виде все еще неизвестно (оно точно не является гауссовским), но для которой найдены моменты первых двух порядков. Тот же самый результат был получен

в [26] с помощью мартингалльных методов, что позволило попутно получить несколько нетривиальных утверждений для частичных сумм ERW-процесса. Доказан аналог теоремы Донскера, дающий еще более подробные характеристики для асимптотического поведения  $X_n$  и его аппроксимации гауссовскими процессами [27]. Там же установлены аналоги закона повторного логарифма. В [28] была дана оценка скорости сходимости начальных моментов масштабированных частичных сумм процесса  $X_n$  к соответствующим моментам гауссовского распределения.

ERW обнаруживают весьма глубокую и интересную связь со многими другими стохастическими моделями и конструкциями. Помимо уже упомянутой связи с урновыми процессами Пойя и перколяционными процессами на рандомизированных деревьях, они тесно связаны с процессами Юла—Саймона [29, п. 2], а также позволяют получить ряд нетривиальных и неизвестных ранее тождеств для гипергеометрических функций [30]. Наконец, упомянем [31], где была предложена схема для оценки параметра  $p$ , управляющего памятью в ERW — насколько можно судить, это первая работа, где процесс исследован с точки зрения прикладной статистики, что весьма важно для практического применения этой конструкции. Отметим еще одну интересную деталь. Одномерный процесс  $X_n$  является марковским, т.е. несмотря на, казалось бы, явную зависимость от предыстории, по прошествии достаточного времени она «забывается», как это свойственно всем марковским процессам. Нестрого, марковское свойство здесь появляется из-за того, что на самом деле динамика  $X_n$  зависит не от всей предыстории полностью, а лишь от того, сколько раз в прошлом выбирались приращения со значениями 1 и -1. Но обобщения процесса на решетки большей размерности всегда являются немарковскими, подробнее см. [24, гл. 1].

Вариаций ERW было предложено так много, что для обзора потребовалась бы отдельная статья. Отметим здесь кратко лишь несколько таких моделей. В [32] базовая модель была дополнена всего одним новым механизмом, позволяющим блужданию оставаться в текущем положении с вероятностью  $r$ . Если случайный лаг был выбран так, что припоминалось значение с  $\sigma_{U_n} = 0$ , то и  $\xi_n = 0$ . Оказалось, что всего одной этой детали было достаточно, чтобы получить новый асимптотический режим для дисперсии, когда она растет как  $t^\gamma$  с  $0 < \gamma < 1$ . Это позволило позиционировать такую конструкцию как единую качественную модель аномальной диффузии, для которой легко доступно аналитическое решение. Двумерное обобщение этой модели было изучено в [33], построения для процессов на  $\mathbb{Z}^d$  с произвольным  $d$  были впервые приведены в [34]. В [35] распределение возможных приращений случайного блуждания,  $\xi_n$ , было существенно расширено до класса  $\alpha$ -устойчивых распределений — развивая анималистическую традицию, эта модель была названа *shark random swim*, впрочем, без всякого объяснения такого выбора. Как и в

случае ERW, здесь также наблюдается фазовый переход между качественно различными асимптотическими режимами, который связывает два основных параметра модели,  $p$  и  $\alpha$ .

По всей видимости, наиболее общая модель такого типа, допускающая произвольное распределение приращений, имеет следующий вид. Пусть задано семейство независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин  $\xi_i, i \geq 0$ . Помимо этого, также задано семейство независимых случайных величин Бернулли  $\epsilon_i, i \geq 1$ , так что  $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = p, 0 < p < 1$ . Наконец, задано семейство случайных величин  $U_n, n \geq 0$ , имеющих равномерные распределения на  $\{0, \dots, n\}$  и тоже независимых в совокупности. Все три семейства заданы на одном и том же вероятностном пространстве и независимы друг от друга. Сам случайный процесс конструируется следующим образом [36]:

$$\sigma_0 = \xi_0, \quad \sigma_n = (1 - \epsilon_n)\xi_n + \epsilon_n X_{U_{n-1}}, \quad X_n = \sum_{k=0}^n \sigma_k. \quad (21)$$

Центральным результатом является функциональная предельная теорема, устанавливающая условия сходимости по распределению к гауссовскому процессу: если  $0 < p < 1/2$  и  $\xi_i$  имеют конечную дисперсию, то

$$\frac{X_{[nt]} - nt\mathbf{E}[\xi_1]}{\sqrt{n\mathbf{D}[\xi_1]}} \Rightarrow \hat{B}_t, \quad \mathbf{E}[\hat{B}_t] = 0, \quad \mathbf{E}[\hat{B}_t \hat{B}_s] = \frac{s}{1 - 2p} \left(\frac{t}{s}\right)^p, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Процесс  $\hat{B}_t$  получил название броуновского движения со случайным подкреплением (*noise reinforced Brownian motion*) и является частным случаем еще более общего класса процессов, который был введен и подробно изучен в [29]. Этот процесс может быть выражен в виде интеграла Ито от обычного броуновского движения  $B_t$ :

$$\hat{B}_t = t^p \int_0^t s^{-p} dB_s.$$

Для критического значения  $p = 1/2$  также известен предельный закон, но масштабирующий множитель там становится более сложным:

$$\frac{X_{[nt]} - n^t \mathbf{E}[\xi_1]}{\sqrt{n^t \ln n \mathbf{D}[\xi_1]}} \Rightarrow B_t.$$

В [29] наряду с (21) был рассмотрен альтернативный вариант, использующий отрицательное подкрепление (в самой работе также был использован термин *contrbalanced random walk*), когда при  $\epsilon_n = 1$  предыдущее значение

выбирается с обратным знаком. Впрочем, это изменение не приводит к качественному изменению самих результатов. Совсем недавно [37] эта модель была расширена переходом к более общему распределению лагов (9), при условии что последовательность  $u_k$  имеет регулярную вариацию (*regularly varying sequence*) с показателем  $\beta \geq 0$ . Основные результаты (закон больших чисел и предельная теорема для масштабированной версии процесса  $X_n$ ) содержат только параметр  $\alpha = \beta + 1$ , от которого зависит в том числе и критическое значение  $p$ .

Описанную выше конструкцию можно усилить в той части, которая касается явной зависимости от предыстории, за счет изменения вероятностей лагов, которые уже были выбраны ранее. Такая модель была введена и изучена в [38]. Формально единственное отличие заключается в элементах последовательности  $u_k$ , которые теперь явно зависят от шага  $n$ :

$$u_k(n) = u_k(n-1) + \mu v, v \geq 0, \quad k: U_{n-1} = k.$$

Теперь вероятность выбора лага, равного  $k$ , возрастает на заданную величину  $v$  всякий раз, когда он выбирается. Было рассмотрено две вариации: в одной увеличение происходит только в том случае, если на  $n$ -м шаге используется предыстория процесса, т.е.  $\mu = \epsilon_{n-1}$ , в другой — всегда, т.е.  $\mu = 1$ . В самой работе [38] был рассмотрен случай, когда  $\xi_n$  имели распределение Радемахера, обобщения на случай произвольных законов пока не публиковались. Как и ранее, основным результатом является предельная теорема, которая в этом случае имеет следующий вид (для краткости приводится результат для первой вариации модели, с поощрением только при припоминании): если  $p < p^*$ , то

$$\frac{X_{[nt]}}{\sqrt{n}} \Rightarrow W_t, \quad \mathbf{E}[W_t W_s] = \frac{s(vp+1)}{(v+1)(1-2(v+2)p)} \left(\frac{t}{s}\right)^\kappa + \frac{pv^2 + (3p-p^2)v^2 + v}{(v+1)(vp+1)^2} s,$$

где  $W_t$  — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и указанной автоковариационной функцией, и  $0 < s < t$ . При критическом значении  $p = p^*$  выполняется

$$\frac{X_{[nt]}}{\sqrt{n^t \ln n}} \Rightarrow \sqrt{\frac{p}{1-p}} B_t,$$

где  $B_t$  — стандартное броуновское движение. Наконец, в суперкритическом режиме, при  $p > p^*$ ,

$$\frac{X_{[nt]}}{n^\kappa} \Rightarrow t^\kappa Y,$$

где  $Y$  — случайная величина, распределение которой не является нормальным (точный закон распределения неизвестен). Здесь были приняты следующие обозначения:  $p^* = 1/(v+2)$  и  $\kappa = p(v+1)/(vp+1)$ . Помимо этого, развивая аналогии с отмеченной в [22] связью между ERW и перколяционными

процессами на случайных деревьях, можно получить описание аналогичных процессов перколяции ребер на деревьях с предпочтительным соединением (*preferential attachment*), которое возникает из-за поощрения ранее выбиравшихся лагов. Пользуясь этой связью, удалось установить целый ряд нетривиальных утверждений о вероятностных характеристиках перколяционных кластеров на таких деревьях.

## Аналитический аппарат

На сегодняшний день теория разностных уравнений с произвольным случайным лагами еще не построена. Наибольшего прогресса удалось достичь в исследовании линейных уравнений. Так, в [39] рассматривается весьма общая конструкция вида

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-r(\theta^n\omega)}. \quad (22)$$

Здесь  $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$  — обратимое измеримое сохраняющее меру отображение,  $r: \Omega \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$  — случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения, а  $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство. Напомним, что в силу введенных определений  $\theta$  должно удовлетворять условиям

$$\forall A \in \mathcal{H} \quad \theta^{-1}A \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{P}(\theta^{-1}A) = \mathbb{P}(A).$$

Поскольку случайное запаздывание  $r$  в общем случае не ограничено, то уравнение (22) должно быть дополнено бесконечной последовательностью  $\mathbf{x} = (\dots x_{-1}, x_0)$ , играющей роль начального условия.

Это уравнение порождает случайную динамическую систему на расширенном фазовом пространстве, которая задается отображением

$$\Phi(n, \omega) = \begin{cases} \text{id} & n = 0 \\ \phi(\theta^{n-1}\omega) \circ \dots \circ \phi(\omega) & n > 0 \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $\text{id}$  — тождественное отображение, а  $\phi(\omega)$  — отображение сдвига на один шаг вдоль траектории:

$$\phi(\omega)\mathbf{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, A(\omega)x_0 + B(\omega)x_{n-r(\omega)}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}_\gamma,$$

где  $\mathbb{X}_\gamma$  — пространство всех бесконечных последовательностей с конечной нормой

$$\|\mathbf{x}\|_\gamma = \sup_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} e^{-\gamma n} |x_{-n}|.$$

Такой выбор нормы гарантирует, что последовательность  $\Phi(n, \omega)\mathbf{x}$  сходится к нулю (по  $n$ ) в  $\mathbb{X}_\gamma$ , если и только если самый первый элемент этой последовательности сходится к нулю в  $\mathbb{R}$  (лемма 3 в [39]) — это позволяет корректно исследовать асимптотическое поведение системы.

Ключевым элементом является необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (23), которое в данном случае сводится лишь к существованию конечного математического ожидания случайного сдвига  $r$ . В этом случае при  $\gamma \geq 0$  для (22) справедлива мультипликативная эргодическая теорема, согласно которой возможна лишь одна из трех альтернатив: либо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\Phi(n, \omega)\|_\gamma}{n} = -\gamma,$$

либо существует конечное количество показателей Ляпунова  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > -\gamma$  и разложение Оселедеца  $\mathbb{X}_\gamma = E_1(\omega) \oplus E_2(\omega) \oplus \dots \oplus E_k(\omega) \oplus F(\omega)$  в прямую сумму линейных подпространств, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \|\Phi(n, \omega)\mathbf{v}\|_\gamma}{n} = \lambda_j \quad \forall \mathbf{v} \in E_j(\omega) \setminus \{0\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

либо существует бесконечно много показателей Ляпунова  $\lambda_j > -\gamma$  с аналогичным разложением в прямую сумму.

Позже этот результат был обобщен на значительно более широкий класс  $d$ -мерных моделей типа (22), в которых  $A$  и  $B$  уже рассматривались как случайные вещественные матрицы на том же самом общем вероятностном пространстве [40]. В предположении о независимости запаздывания  $r$  от матричных коэффициентов  $A$  и  $B$  там было получено более общее условие интегрируемости, при котором становится справедлива мультипликативная эргодическая теорема. Весьма интересно, что тут наличие бесконечного количества показателей Ляпунова уже становится невозможным.

Однако здесь необходимо отметить, что сама форма динамической системы (22), которая восходит к еще более общей формулировке из [5], несмотря на свою общность, не допускает изучение даже простейших и вполне естественно возникающих прикладных моделей со случайным лагом, которые были рассмотрены ранее. Известно (см., например, [41, гл. V]), что если  $r_1$  — произвольная случайная величина, а  $\theta$  — сохраняющее меру преобразование, то последовательность случайных величин  $\{r_k\}$ , где  $r_k = r(\theta^k \omega)$ , является стационарной в узком смысле. С другой стороны, пусть  $U_n$  имеют равномерное на  $\{0, \dots, n\}$  распределение и независимы в совокупности. Понятно, что последовательность  $\{U_n\}$  не может быть стационарной в узком смысле хотя бы потому, что носители распределений разные.

Еще один прием для изучения процессов со случайными лагами был представлен в [42]. Он сводится к переходу к непрерывному времени за счет подчинения процессу Пуассона. Например, для сумматора Улама—Каца непрерывная пуассоновская модель строится следующим образом. Пусть  $T_0 = 0$ , а  $T_k$ ,  $k \geq 1$  — времена последовательных приращений однородного пуассоновского процесса  $N_t$  с интенсивностью  $\lambda$ . Пусть также  $U_k$ ,  $k \geq 1$  — семейство

независимых в совокупности случайных величин, где  $U_k$  имеет равномерное на  $(0, T_k)$  распределение. Тогда составной процесс принимает вид

$$X_0 = 1, \quad X_t = \begin{cases} X_{T_{k-1}} & T_{k-1} \leq t < T_k, \\ X_{T_{k-1}} + X_{U_k} & t = T_k. \end{cases}$$

Согласно [42], такой переход позволяет получить уравнения для моментов, которые проще исследовать, чем в исходной дискретной модели. Было продемонстрировано, что при  $\lambda = 1$  ведущие члены в асимптотических представлениях для моментов первых двух порядков имеют тот же самый вид, что и в исходной модели. Тем не менее не приведено никаких строгих утверждений о том, как соотносятся между собой исходный дискретный и субординированный непрерывный процессы, в частности, существует ли какая-то связь между их функциями распределения.

Еще одна группа аналитических методов, которые применяются для дискретных систем со случайными лагами, опирается на непосредственно получаемые из определения рекуррентные соотношения для моментов или вероятностей. В некоторых случаях эти разностные уравнения могут быть решены в явном виде, как, например, для сумматора Улама—Каца. В тех же случаях, когда явное решение недоступно, часто используется переход от разностного уравнения к дифференциальному с последующим использованием богатого арсенала методов исследования качественного поведения последних. Здесь, однако, стоит заметить, что, как хорошо известно в численном анализе, разностное и дифференциальное уравнения не всегда можно рассматривать как аналоги друг друга — соответствующий пример был дан еще в [12]. О том, что переход к дифференциальным уравнениям иногда выполняется весьма небрежно и безо всяких дополнительных пояснений, мы уже упоминали ранее.

Переход к дифференциальным уравнениям обычно используется для уточнения асимптотического поведения моментов. При этом асимптотическая теория разностных уравнений уже построена — остается неясным, почему авторы [15, 17] не использовали эти результаты напрямую. Классический результат по асимптотике линейных разностных уравнений известен как теорема Пуанкаре—Перрона (см., например, [43, гл. 8]), однако для его применимости уравнение должно удовлетворять весьма сильным дополнительным ограничениям на форму коэффициентов. Эти условия можно несколько ослабить (см. теорему 8.11 в [43]), однако даже в этом виде теорема не дает собственно асимптотических решений, а лишь указывает пределы, к которым решения исходного уравнения стремятся, и общий характер этой сходимости.

Более подробное описание асимптотических представлений в виде степенных рядов по  $n$  доступно для линейных уравнений второго порядка. Хорошее

изложение текущего положения дел в этой области исследований можно найти в [44], а также в более поздней работе [16], где систематизированы полученные ранее результаты, в том числе для случая уравнений с параметром. Интересно, что основы асимптотической теории для таких уравнений были заложены Адамсом и Биркгофом еще в начале 30-х годов прошлого столетия. Однако эти работы были столь сложны и требовали столь высокого уровня подготовки, что долгое время оставались неизвестны широкому кругу специалистов.

## Заключительные замечания

Из приведенного обзора видно, что даже линейные динамические модели со случайными лагами, такие как, например, (11), не всегда допускают аналитическое описание. О конечномерных распределениях, автоковариационных функциях таких процессов и временах первого достижения для них все еще ничего не известно. Арсенал методов, которые можно использовать для их изучения, пока весьма скуден. Еще более трудным представляется изучение нелинейных моделей такого рода. Рассмотрим для примера квадратичную модель

$$X_{n+1} = X_n + X_{U_n}^2.$$

Уравнение для начальных моментов первого порядка здесь примет вид

$$m_{n+1,1} = m_{n,1} + \frac{1}{n+1} [m_{n,2} + n(m_{n,1} - m_{n-1,1})].$$

Для его решения необходимо как-то получить уравнение для  $m_{n,2}$ . Возведение определения в квадрат в этом смысле мало чем поможет, поскольку в нем появится зависимость от  $m_{n,4}$ . Использование комбинаторных аргументов пока также кажется затруднительным.

Открытым остается также вопрос о возможных приложениях таких моделей. С одной стороны, использование процессов с сильной зависимостью от предыстории кажется оправданным для изучения многих биологических процессов, где случайное запаздывание возникает естественным образом. Наиболее очевидными примерами представляются популяционные модели, учитывающие случайные вариации времени достижения репродуктивного возраста, а также эпидемиологические модели, в которых продромальный период считается случайным. Тем не менее, не удалось найти публикаций, в которых указанные (или какие-либо другие) биологические процессы изучались бы с позиций уравнений со случайными запаздываниями. Еще одним возможным применением таких моделей являются задачи управления для систем, где нельзя гарантировать постоянное запаздывание сигналов (как, например, в современных телекоммуникационных сетях).

Наконец, отметим здесь приложения к теории алгоритмов. Многие рекурсивные алгоритмы, использующие стратегию разделения задачи на более маленькие экземпляры той же задачи, могут быть формально описаны уравнением вида

$$T(x) = a(x) + T(h(x)),$$

где  $a$  — некоторая детерминированная неотрицательная функция (количество вычислительного времени, необходимого для разбиения), а  $h$  — некоторая случайная величина, распределение которой может зависеть от  $x$ , такая что  $0 \leq h(x) \leq x$ . Здесь  $x$  означает размер задачи, а  $T(x)$  — вычислительное время для решения задачи размером  $x$ . Строго говоря, рекурсия здесь идет «задом наперед», от больших  $x$  к  $x = 0$  или  $x = 1$ . Однако с точки зрения моделирования это не имеет решающего значения. Если считать, что размер задачи описывается целыми неотрицательными числами (а обычно это именно так для алгоритмов, связанных с массивами, списками и графами), то получим рандомизированную рекурсию типа

$$T_n = a_n + T_{U_n}.$$

В [45] дано несколько конкретных примеров того, какие алгоритмические задачи приводят к подобного рода рандомизированной рекурсии. Среди прочего это поиск максимального независимого множества для графа, сортировка Хоара, подсчет количества случайных перестановок. Там же рассматривается более общая схема, когда

$$T(x) = a(x) + \sum_{i=1}^k T(h_i(x)),$$

причем случайные величины  $h_i$  необязательно должны быть независимыми, но должны удовлетворять условию  $\mathbf{E}[T(x)] \geq \sum_i \mathbf{E}[T(y_i)]$  для любой реализации  $(y_1, \dots, y_k)$  случайного вектора  $(h_1(x), \dots, h_k(x))$  при любом  $x$  (в алгоритмических терминах ожидаемое время работы над всеми частичными задачами не может быть больше, чем ожидаемое время работы над задачей целиком). Там же дана нетривиальная верхняя вероятностная оценка для величин  $T(x)$ , которая не требует даже точного знания закона распределения  $h(x)$ .

Наконец, отметим, что достаточно хорошо изучена более слабая постановка задачи, в которой равенства с дискретными случайно отклоняющимися аргументами понимаются по распределению. Подобные конструкции, объединенные под общим названием *distributional recursion*, можно рассматривать как стохастический аналог абстрактной задачи о неподвижной точке в произвольном банаховом пространстве. Они естественным образом возникают при изучении случайных процессов фрагментации и агрегации (см. монографию [46]), а также составляют основу аналитического аппарата теории

коалесценции (*coalescence theory*), которая сейчас активно используется для исследований в области популяционной генетики (доступное введение можно найти в [47]). Впрочем, нужно понимать, что несмотря на всю схожесть этих моделей с уравнениями вида (11), равенства по распределению оказались заметно легче для изучения — здесь уже получено достаточно много общих результатов [48], — и пока никак не могут быть использованы для работы с динамическими системами со случайными запаздываниями.

\* \* \*

Направлений для дальнейшей работы в этой области достаточно много. Например, было бы желательно углубить наше понимание поведения полностью линейных моделей произвольного порядка с постоянными коэффициентами, как это было сделано для процессов авторегрессии—скользящего среднего (ARMA), которые фактически представляют собой разностные уравнения со случайным слагаемым в правой части. Интересно было бы изучить поведение хорошо известных нелинейных дискретных систем (например, кусочно-линейного отображения тент или квадратичного логистического отображения) при введении в них случайных лагов. Наконец, отметим, что в этом тексте мы всюду говорили именно о запаздываниях, трактуя дискретное переменное  $n$  исключительно как время. Однако нет никаких причин считать, что это единственный допустимый подход — можно рассматривать подобные модели в контексте процессов со случайными дислокациями.

## Список литературы

- [1] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
- [2] Samorodnitsky G. Stochastic processes and long range dependence. Springer International, 2016. 415 p.
- [3] Madras N., Slade G. The self-avoiding walk. Springer Science & Business Media, 2013. 427 p.
- [4] Pemantle R. A survey of random processes with reinforcement // Probability surveys, 2007. Vol. 4. P. 1–79.
- [5] Arnold L. Random dynamical systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 586 p.
- [6] Ben-Naim E., Krapivsky P. L. Random geometric series // Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004. Vol. 37, no. 23. P. 5949.

- [7] Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 1. Основные алгоритмы. М.: ИД Вильямс, 2018. 720 с.
- [8] Clifford P., Stirzaker D. Reverting processes. 2019. arXiv: 1911.07269
- [9] Bonner G. W. S. Random Entanglement and History-Dependent Random Sequences. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, 2022.
- [10] Hwang H.-K. On convergence rates in the central limit theorems for combinatorial structures // European Journal of Combinatorics, 1998. Vol. 19, no. 3. P. 329–343.
- [11] Справчник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [12] Beyer W. A., Schrandt R. G., Ulam S. M. Computer studies of some history-dependent random processes. Technical report, Los Alamos National Lab, 1969.
- [13] Кас М. A history-dependent random sequence defined by Ulam. Technical report, Los Alamos National Lab, 1969.
- [14] Guy R. Unsolved problems in number theory. Springer Science & Business Media, 2004. 438 p.
- [15] Austin K., Rodgers G. J. Growth of random sequences // The logistic map and the route to chaos / ed. by M. Ausloos, M. Dirickx. Springer Berlin Heidelberg, 2006. P. 99–113.
- [16] Wong R. Asymptotics of linear recurrences // Analysis and Applications, 2014. Vol. 12, no. 04. P. 463–484.
- [17] Krasikov I., Rodgers G. J., Tripp C. E. Growing random sequences // Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004. Vol. 37, no. 6. P. 2365.
- [18] Clifford P., Stirzaker D. Ulam’s history-dependent random adding process. 2019. arXiv: 1911.07529.
- [19] Schütz G. M., Trimper S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk // Physical Review E, 2004. Vol. 70, no. 4. P. 045101.
- [20] Kim H.-J. Anomalous diffusion induced by enhancement of memory // Physical Review E, 2014. Vol. 90, no. 1. P. 012103.

- [21] Kürsten R. Comment on «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». 2015. arXiv: 1503.03302.
- [22] Kürsten R. Random recursive trees and the elephant random walk // *Physical Review E*, 2016. Vol. 93, no. 3. P. 032111.
- [23] Metzler R., Jeon J.-H., Cherstvy A. G., Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking // *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2014. Vol. 16, no. 44. P. 24128–24164.
- [24] Laulin L. About the elephant random walk. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2022.
- [25] Baur E., Bertoin J. Elephant random walks and their connection to Pólya-type urns // *Physical review E*, 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052134.
- [26] Bercu B. A martingale approach for the elephant random walk // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017. Vol. 51, no. 1. P. 015201.
- [27] Coletti C. F., Gava R., Schütz G. M. A strong invariance principle for the elephant random walk // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017. Vol. 2017, no. 12. P. 123207.
- [28] Hayashi M., Oshiro S., Takei M. Rate of moment convergence in the central limit theorem for the elephant random walk // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2023. Vol. 2023, no. 2. P. 023202.
- [29] Bertoin J. Noise reinforcement for Lévy processes // *Annales de l’Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques*. 2020. Vol. 56, no. 3. P. 2236–2252.
- [30] Bercu B., Chabanol M.-L., Ruch J.-J. Hypergeometric identities arising from the elephant random walk // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019. Vol. 480, no. 1. P. 123360.
- [31] Bercu B., Laulin L. How to estimate the memory of the elephant random walk // *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 2024. Vol. 53, no. 7. P. 2578–2598.
- [32] Kumar N., Harbola U., Lindenberg K. Memory-induced anomalous dynamics: Emergence of diffusion, subdiffusion, and superdiffusion from a single random walk model // *Physical Review E*, 2010. Vol. 82, no. 2. P. 021101.

- [33] Cressoni J. C., Viswanathan G. M., Da Silva M. A. A. Exact solution of an anisotropic 2D random walk model with strong memory correlations // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013. Vol. 46, no. 50. P. 505002.
- [34] Bercu B., Laulin L. On the multi-dimensional elephant random walk // *Journal of Statistical Physics*, 2019. Vol. 175. P. 1146–1163.
- [35] Businger S. The shark random swim: Lévy flight with memory // *Journal of Statistical Physics*, 2018. Vol. 172. P. 701–717.
- [36] Bertenghi M., Rosales-Ortiz A. Joint invariance principles for random walks with positively and negatively reinforced steps // *Journal of Statistical Physics*, 2022. Vol. 189, no. 3. P. 35.
- [37] Bertenghi M., Laulin L. A universal scaling limit for diffusive amnesic step-reinforced random walks. 2024. arXiv: 2402.09202.
- [38] Baur E. On a class of random walks with reinforced memory // *Journal of Statistical Physics*, 202. Vol. 181, no. 3. P. 772–802.
- [39] Crauel H., Doan T. S., Siegmund S. Difference equations with random delay // *Journal of Difference Equations and Applications*, 2009. Vol. 15, no. 7. P. 627–647.
- [40] Cong N. D., Doan T. S., Siegmund S. On Lyapunov exponents of difference equations with random delay // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 2015. Vol. 20, no. 3. P. 861–874.
- [41] Ширяев А. Н. Вероятность. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2004. 408 с.
- [42] Clifford P., Stirzaker D. History-dependent random processes // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008. Vol. 464, no. 2093. P. 1105–1124.
- [43] Elaydi S. An introduction to difference equations. Springer New York, 2005. 562 p.
- [44] Wimp J., Zeilberger D. Resurrecting the asymptotics of linear recurrences // *Journal of mathematical analysis and applications*, 1985. Vol. 111, no. 1. P. 162–176.
- [45] Karp R. M. Probabilistic recurrence relations // *Journal of the ACM*, 1994. Vol. 41, no. 6. P. 1136–1150.

- [46] Bertoin J. Random fragmentation and coagulation processes. Cambridge University Press, 2006. 290 p.
- [47] Wakeley J. Coalescent theory: An introduction. W. H. Freeman and Company, 2008. 352 p.
- [48] Alsmeyer G. Random recursive equations and their distributional fixed points. Universität Münster, 2012.