



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 72 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.С. Пономарев, Е.В. Зипунова,**  
**Е.Б. Савенков**

Численное исследование  
обобщения модели развития  
канала электрического  
пробоя типа «диффузной  
границы»

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Пономарев А.С., Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Численное исследование обобщения модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 72. 23 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-72>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-72>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова, Е. Б. Савенков

**Численное исследование обобщения  
модели развития канала электрического пробоя  
типа «диффузной границы»**

Москва, 2024

*А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова, Е. Б. Савенков*, Численное исследование обобщения модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

### **Аннотация**

В настоящей работе проводится численное исследование ранее предложенного обобщения модели типа диффузной границы, описывающей развитие канала электрического пробоя в твердом диэлектрике. Для этого ищется стационарное распределение фазового поля в нескольких характеристических случаях задачи. При построении разностной схемы применена модификация метода конечных объемов, так что схема позволяет задать граничные условия на множествах высшей координатности в трехмерном пространстве, притом что у решения задачи в точках этих множеств допускается особенность.

**Ключевые слова:** модель типа диффузной границы, фазовое поле, метод конечных объемов, электрический пробой

*A. S. Ponomarev, E. V. Zipunova, E. B. Savenkov*, Numerical analysis of a generalized diffuse interface model for the electrical breakdown process

### **Abstract**

The subject of the present work is a previously suggested generalization of a diffuse interface model describing the development of an electrical breakdown channel in a solid dielectric. Numerical analysis for the model is performed. In the analysis, the stationary distribution of the phase field is found in several characteristic cases of the problem. A modification of the finite volume method is applied so that the numerical scheme is available for determining the boundary conditions at sets of higher codimension in three-dimensional space. At that the solution function is expected to have a singularity at the points of these sets.

**Key words and phrases:** diffuse interface model, phase field, finite volume method, electrical breakdown

# 1 Введение

Электрический пробой – это явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше некоторого критического значения. Механизм разрушения диэлектрика под действием электрического поля сложен и многообразен: оно может иметь различные причины, характер развития, сопутствующие физические процессы [1].

Среди многообразия математических моделей, созданных для описания развития канала электрического пробоя, выделим предложенную в работе [2] модель типа диффузной границы.

В настоящее время модели типа диффузной границы составляют целый класс подходов для решения задач в различных областях науки и техники. В частности, описанная в работе [2] модель построена как формальное обобщение ранее известных моделей типа диффузной границы, применяемых в теории трещин.

Исследование и дальнейшее развитие упомянутой модели можно найти в работах [3–6]. Основные положения метода диффузной границы в применении к моделированию развития канала электрического пробоя перечислены в работе [6].

Модели типа диффузной границы используются для описания систем, в которых вещество может находиться в нескольких различных состояниях – фазах, – причем вещество в одной и той же фазе образует некоторые однородные области. В моделях типа диффузной границы распределение фаз вещества задается гладкой функцией  $\phi$  – фазовым полем, – которая в каждой области однородности близка к постоянной. Характерная толщина разделяющего слоя («диффузной границы») и, соответственно, скорость изменения  $\phi$  при переходе от одной фазы к другой определяется параметрами модели.

В работе [3] проводится исследование свойства упомянутой модели развития канала электрического пробоя, которое можно назвать коразмерностью «включений». Для задач теории трещин естественным будет двумерное включение (плоская трещина) в трехмерной среде вещества – в таком случае говорят, что коразмерность объекта равна 1. Обратим внимание, что, хотя исследуемая модель, как было сказано, получена на основе моделей из теории трещин, для нее характерным будет одномерное включение (канал пробоя), то есть имеющее коразмерность 2. В работе [3] указано, что это может привести к нетривиальным последствиям, и предложено определенное обобщение исходной модели, которое предположительно делает ее более адекватной.

Суть обобщения состоит в формальном добавлении в уравнения модели двух слагаемых высших порядков с некоторыми коэффициентами. Целью настоящей работы является численная проверка поведения модели при различных значениях коэффициентов. Для этого ищется стационарное распре-

деление фазового поля  $\phi$  в нескольких характеристических случаях. Построение разностной схемы для задачи несет определенные сложности, связанные с необходимостью задать граничные условия на множествах коразмерности 2 и 3 в трехмерном пространстве. Предполагается, что в точках этих множеств функция фазового поля  $\phi$  имеет особенность.

Авторами применена модификация метода конечных объемов. Для части конфигураций обобщенной модели она позволила составить разностную схему. Создана компьютерная программа, реализующая схему; проделаны расчеты, их результаты приведены в виде графиков. Для остальных конфигураций модели в процессе применения метода возникли фундаментальные проблемы, что позволяет выдвинуть гипотезу о некорректной постановке дифференциальной задачи в этих случаях.

## 2 Постановка задачи и модель

Приведем краткое описание математической модели, предложенной в работе [2]. Подробное описание модели и физического смысла ее уравнений и параметров можно найти в работе [6].

Рассматривается ограниченная область пространства  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Распределение фаз вещества в ней задается гладкой функцией  $\phi : \Omega \times [0, +\infty)_t \rightarrow [0, 1]$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  – фазовым полем; вещество может находиться в одной из двух фаз:  $\phi \approx 1$  – «неповрежденное»,  $\phi \approx 0$  – «полностью разрушенное» (то есть относящееся к каналу пробоя), – а также в промежуточных состояниях в зоне диффузной границы.

Диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$  предлагается описать следующей формулой:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon[\phi] = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}.$$

Здесь  $\epsilon_0(\mathbf{x})$  – диэлектрическая проницаемость неповрежденной среды,  $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$  – интерполирующая функция,  $0 < \delta \ll 1$  – регуляризирующий параметр.

Помимо фазового поля  $\phi$ , состояние системы описывает также функция  $\Phi : \Omega \times [0, +\infty)_t \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  – потенциал электрического поля.

Постулируется следующее выражение для свободной энергии системы  $\Pi$ :

$$\Pi = \int_{\Omega} \pi d\mathbf{x},$$

$$\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi] (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{\Gamma}{4} (\nabla\phi, \nabla\phi).$$

Здесь  $\Gamma > 0$ ,  $l > 0$  – числовые параметры модели, константы.

Постулируются два уравнения, определяющие динамику системы:

$$\begin{cases} \frac{\delta\Pi}{\delta\Phi} = 0; \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\delta\Pi}{\delta\phi}. \end{cases}$$

Здесь константа  $m > 0$  – числовой параметр модели, называемый подвижностью. Говоря нестрого, согласно первому уравнению электрический потенциал  $\Phi$  распределяется так, чтобы свободная энергия была минимальной; согласно второму – фазовое поле  $\phi$  с определенной скоростью стремится к тому, чтобы свободная энергия была минимальной.

Отыскав явно вариационные производные в двух уравнениях выше, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0; & (1) \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\phi. & (2) \end{cases}$$

Здесь  $(\cdot)' \equiv (\cdot)'_{\phi}$ . Система состоит из двух уравнений: на  $\phi$  и  $\Phi$  соответственно; система связная, второе уравнение нелинейное, является уравнением типа Аллена–Кана.

## 3 Обобщение модели

### 3.1 Суть проблемы

Как говорилось ранее, исследуемая модель канала электрического пробоя, предложенная в работе [2], создана на основе подобных моделей из теории трещин. Учитывая это, ознакомимся с анализом системы уравнений (1), (2) в следующем характеристическом случае.

Пусть  $\Phi \equiv 0$ , что соответствует нулевому электрическому напряжению в системе; тогда уравнение (1) выполнено тождественно. В уравнении (2) первое слагаемое тождественно равно нулю, так как  $\nabla\Phi \equiv 0$ . В дальнейшем будем искать стационарное во времени распределение фазового поля, так что  $\phi'_t \equiv 0$ . В таком случае задача сводится к следующему уравнению на фазовое поле  $\phi$ :

$$\frac{2}{l^2}f'(\phi) + \Delta\phi = 0. \quad (3)$$

Пусть задача решается в замкнутой области  $\bar{\Omega} = [0, +\infty)_x \times I_y \times J_z$ , где  $I$  и  $J$  – некоторые отрезки. Пусть  $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ , то есть диэлектриче-

ская проницаемость неповрежденной среды зависит только от  $x$ . Будем искать стационарное решение следующей краевой задачи:  $\phi|_{x=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ , а также  $\partial\phi/\partial\mathbf{n} = 0$  на «гранях» области  $\bar{\Omega}$ , перпендикулярных осям  $y$  и  $z$ . Второе условие интуитивно означает «однородность» системы по  $y$  и  $z$ ; символом  $\partial/\partial\mathbf{n}$  обозначена производная по вектору нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\bar{\Omega}$ . Учитывая описанные краевые условия, будем искать решение уравнения (3), имеющее  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x)$ , то есть полагая, что  $\phi$  зависит только от пространственной переменной  $x$ .

С учетом описанных допущений уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{2}{l^2}f'(\phi).$$

Домножим обе части уравнения на  $\phi'_x$ . Учитывая, что  $f'_\phi\phi'_x = f'_x$  и  $2\phi'_x\phi''_{xx} = [(\phi'_x)^2]'_x$ , проинтегрируем уравнение. При  $x \rightarrow +\infty$  согласно граничному условию  $\phi \rightarrow 1$ ; естественно также считать, что при этом  $\phi'_x \rightarrow 0$ . С учетом этого получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2}{l}\sqrt{1-f(\phi)}. \quad (4)$$

Итак, мы перешли к обыкновенной задаче Коши с уравнением (4) и условием  $\phi(0) = 0$ , решение которой существует и единственно.

Рассмотренный случай системы имеет следующий смысл: найдено распределение фазового поля в полупространстве сбоку от проводящей пластины (состоящей из полностью разрушенного вещества). Этот случай был ранее назван характеристическим, так как показывает влияние на систему параметра  $l$ : видно, что  $l$  в уравнении (4) есть коэффициент «растяжения» решения вдоль оси  $x$ . Можно показать [3], что при  $x > l$  решение рассматриваемой задачи Коши  $\phi \approx 1$ . Другими словами, ее решение есть распределение фазового поля, локализованное на отрезке  $[0, l]$ .

Подобный анализ вполне подходит для задачи из теории трещин (вместо проводящей пластины была бы плоская трещина). Однако характерный канал пробоя – объект не двумерный, а одномерный. Проверим, можно ли провести аналогичное рассуждение не для пластины, а для тонкого прямого проводника.

Как и ранее, электрическое напряжение нулевое:  $\Phi \equiv 0$ . Рассмотрим уравнение (3) в области  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times J_z$ , где  $J$  – некоторый отрезок. Аналогично будем искать решение следующей краевой задачи:  $\phi|_{x,y=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$ , а также  $\partial\phi/\partial\mathbf{n} = 0$  на «гранях» области  $\bar{\Omega}$ , перпендикулярных оси  $z$ .

Удобно перейти в цилиндрическую систему координат:  $x, y, z \mapsto r, \theta, z$ . Граничные условия однородны по  $\theta$  и  $z$ , поэтому естественно искать решение,

зависящее только от  $r$ . Так как  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$ , выражение для лапласиана  $\phi$  в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}.$$

С учетом этого уравнение (3) преобразуется в

$$\frac{2}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0. \quad (5)$$

Подобное рассуждение проделано в работе [3]; за ним следует анализ уравнения (5). На основании теоретических результатов из работы [7] заключается, что поставленная краевая задача некорректна и решения не имеет. Даже на уровне интуиции постановка задачи выглядит необычно: условие  $\phi|_{x,y=0} = 0$  задано не на двумерной, а на одномерной «внутренней» границе области  $\Omega$ .

Возникает желание формально изменить модель так, чтобы описанная краевая задача имела решение. При моделировании канала пробоя невозможно явно представить сегментом линии, за исключением тривиальных случаев, – однако естественно считать его «нитевидной» областью соответствующей формы, радиус которой может стремиться к нулю. Распределение фазового поля вблизи канала пробоя в таком случае должно приближаться к решению рассмотренной краевой задачи.

### 3.2 Предложенное обобщение

В ответ на описанную в предыдущем подразделе проблему в работе [3] на основании теоретических результатов работ [8–11] предлагается следующая обобщенная модель, для которой постановка условий на границах размерности 1 (соответственно, координатности 2) является математически корректной:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \pi d\mathbf{x}, \\ \pi &= -\frac{1}{2}\epsilon[\phi] (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{\Gamma}{4} (\nabla\phi, \nabla\phi) + \\ &\quad + \alpha \frac{\Gamma l^2}{8} (\Delta\phi)^2 + \beta \frac{1}{p} \Gamma l^{p-2} \|\nabla\phi\|_2^p; \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0; & (6) \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\phi - & (7) \\ \quad - \alpha \frac{\Gamma l^2}{4} \Delta^2\phi + \beta \Gamma l^{p-2} \operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi). \end{cases}$$

Здесь  $\alpha, \beta \geq 0$  – некоторые константы,  $p$  – четное натуральное число, не меньшее 4. Дифференциальный оператор  $\operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$  принято называть *p-лапласианом*,  $\Delta^2\phi = \Delta(\Delta\phi)$  – *билапласианом*. В дальнейшем для простоты будем считать  $p = 4$ .

## 4 Построение разностной схемы

### 4.1 О методе конечных объемов

Нашей целью будет численно исследовать систему уравнений (6), (7) в трех характеристических случаях: в двух описанных в подразделе 3.1 и третьем, им подобном.

Итак, мы ищем стационарное решение задачи (6), (7) с  $\Phi \equiv 0$  для граничных условий трех различных типов:

- 1)  $\bar{\Omega} = [0, +\infty)_x \times I_y \times J_z$ ,  $\phi|_{x=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  – плоский случай;
- 2)  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times J_z$ ,  $\phi|_{x,y=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$  – цилиндрический случай;
- 3)  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$ ,  $\phi|_{x,y,z=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$  – сферический случай.

Подробно случаи 1 и 2 были описаны в подразделе 3.1. Случай 3 закономерно продолжает ряд: в нем граничное условие задано в точке – объекте коразмерности 3.

Стационарное решение соответствует минимуму свободной энергии  $\Pi$ ; уравнения динамики системы выведены таковыми, что система стремится к минимуму энергии  $\Pi$  в ходе эволюции (подробнее см. в разделе 2). Поэтому будем проводить расчет на достаточно долгое время, тогда установившееся положение равновесия и будет искомым стационарным решением  $\phi$ .

В случаях 2 и 3 естественно перейти в цилиндрические и сферические координаты соответственно и считать решение  $\phi$  зависящим только от радиуса  $r$ . В случае 1 для единообразия пространственную переменную также назовем  $r$ . Итак,  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$ .

Для численного решения задачи воспользуемся методом конечных объемов. Классический метод конечных разностей, встречая ряд проблем, подходит плохо. К примеру, в уравнениях разностной схемы могут возникать

ситуации деления на 0 в узле  $r = 0$  в цилиндрическом и сферическом случае (см. формулу (5)).

При моделировании ограничим область  $\Omega$  некоторым конечным размером – граничные условия превращаются в  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(R) = 1$ , где  $R > 0$  – внешний радиус  $\Omega$ , такой что  $R/l \gg 1$ .

Разобьем область  $\Omega$  на  $n+1$  ячейку (прямоугольную либо в форме цилиндрического или сферического слоя), обозначим их  $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ . Пусть границы ячеек имеют радиусы  $0 = r_{-1/2}, r_{1/2}, \dots, r_{n+1/2} = R$ .

Обозначим  $V(r)$  объем прямоугольника, цилиндра или сферы (в зависимости от случая), который заполняет область  $\Omega$  от радиуса 0 до  $r$ . Пусть  $S(r)$  – площадь внешней (разделяющей область  $\Omega$ ) поверхности подобного прямоугольника, цилиндра или сферы. Тогда объем ячейки  $\Omega_i$  равен  $dV_i = V(r_{i+1/2}) - V(r_{i-1/2})$ , площади внутренней и внешней границ –  $S_{i-1/2} = S(r_{i-1/2})$  и  $S_{i+1/2} = S(r_{i+1/2})$  соответственно.

1. Плоский случай.  $V(r) = r \cdot |I_y| \cdot |J_z|$ ,  $S(r) = |I_y| \cdot |J_z|$ . Сократив, можно считать  $V(r) = r$ ,  $S(r) = 1$ .
2. Цилиндрический случай.  $V(r) = \pi r^2 \cdot |J_z|$ ,  $S(r) = 2\pi r \cdot |J_z|$ . Сократив, можно считать  $V(r) = r^2$ ,  $S(r) = 2r$ .
3. Сферический случай.  $V(r) = (4/3)\pi r^3$ ,  $S(r) = 4\pi r^2$ . Домножив оба выражения на  $3/(4\pi)$ , можно считать  $V(r) = r^3$ ,  $S(r) = 3r^2$ .

Итак, было показано, что можно считать  $V(r) = r^{k+1}$ ,  $S(r) = (k+1)r^k$ , где  $k = 0$  для плоского случая,  $k = 1$  для цилиндрического,  $k = 2$  для сферического.

Проведем преобразование решаемого уравнения (7), обычное для метода конечных объемов. Учтем, что  $\Phi \equiv 0$ . Уравнение можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \Gamma \operatorname{div} \boldsymbol{\rho}, \quad (8)$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2} \nabla \phi - \alpha \frac{l^2}{4} \nabla (\Delta \phi) + \beta l^2 \|\nabla \phi\|_2^2 \nabla \phi. \quad (9)$$

Проинтегрируем уравнение (8) вначале по некоторому промежутку времени  $[t_j, t_{j+1}]$ , затем по ячейке  $\Omega_i$ . Преобразуем левую часть:

$$\int_{\Omega_i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt d\mathbf{x} = \frac{1}{m} \int_{\Omega_i} [\phi(\mathbf{x}, t_{j+1}) - \phi(\mathbf{x}, t_j)] d\mathbf{x} = \frac{dV_i}{m} [\tilde{\phi}_i(t_{j+1}) - \tilde{\phi}_i(t_j)],$$

где  $\tilde{\phi}_i$  – это интегральное среднее функции  $\phi$  по ячейке  $\Omega_i$ . Преобразуем

правую часть, предварительно поменяв порядок интегрирования:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\Omega_i} \left( \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \Gamma \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} \right) d\mathbf{x} dt = \Gamma \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( \frac{1}{l^2} \int_{\Omega_i} f'(\phi) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_i} (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{n}) dS \right) dt.$$

К интегралу слагаемого  $\operatorname{div} \boldsymbol{\rho}$  была применена формула Гаусса–Остроградского. Функция  $\phi$  зависит только от  $r$ , следовательно, вектор  $\boldsymbol{\rho}$  всегда параллелен оси  $r$ . Граница ячейки  $\partial\Omega_i$  складывается из внешней (где вектор нормали  $\mathbf{n}$  и ось  $r$  сонаправлены) и внутренней (где  $\mathbf{n}$  и ось  $r$  противоположно направлены) границ. Обозначим  $F_{i\pm 1/2}(t)$  поток в положительном направлении оси  $r$  через соответствующую границу с радиусом  $r_{i\pm 1/2}$ :

$$F_{i\pm 1/2}(t) = \int_{r=r_{i\pm 1/2}} (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{n}) dS = \int_{r=r_{i\pm 1/2}} \rho_r dS = \rho_r S(r_{i\pm 1/2}) = \rho_{i\pm 1/2}(t) \cdot S_{i\pm 1/2},$$

$$\int_{\partial\Omega_i} (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{n}) dS = F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = \rho_{i+1/2} S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2} S_{i-1/2}.$$

Здесь  $\rho_r$  обозначена  $r$ -координата вектора  $\boldsymbol{\rho}$  (она же единственная ненулевая). Величину  $\rho_{i\pm 1/2}(t) = \rho_r(r_{i\pm 1/2}, t)$  будем называть плотностью потока через соответствующую границу. Таким образом, выведено следующее интегральное соотношение:

$$\frac{dV_i}{m} [\tilde{\phi}_i(t_{j+1}) - \tilde{\phi}_i(t_j)] = \Gamma \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ \frac{1}{l^2} \int_{\Omega_i} f'(\phi) d\mathbf{x} + \rho_{i+1/2} S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2} S_{i-1/2} \right] dt. \quad (10)$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении в правой части равенства (10) приблизим выражением  $l^{-2} \cdot dV_i \cdot f'[\tilde{\phi}_i(t_j)]$ . При построении разностной схемы от интеграла по отрезку  $[t_j, t_{j+1}]$  перейдем к умножению на  $(t_{j+1} - t_j)$  значения подынтегрального выражения в точке  $t_j$ .

Выясним, как вычислить плотность потока  $\rho_{i\pm 1/2}$  в оставшихся двух слагаемых. Если некоторая функция  $\psi(\mathbf{x}) = \psi(r)$ , то

$$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (\nabla\psi)_\theta = (\nabla\psi)_z = 0,$$

где  $\nabla\psi$  также зависит только от  $r$ . Следовательно, из выражения (9) получаем:

$$\rho_r = \frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial r} - \alpha \frac{l^2 \partial(\Delta\phi)}{4 \partial r} + \beta l^2 \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^3. \quad (11)$$

Традиционно в методе конечных объемов принимается, что локальное выполнение решения в ячейке – постоянная функция. В силу того, что рассматриваемая задача требует постановки граничных условий при  $r = 0$ , а решение задачи вблизи этой точки может иметь большие производные, обобщим традиционный подход. А именно: будем считать, что в окрестности нуля решение представляется в виде линейной комбинации двух специально выбранных базисных функций, а его производные, соответственно, приближаются линейной комбинацией производных базисных функций с теми же коэффициентами. Опишем в общем виде поиск коэффициентов разложения.

Построим приближение для некоторой функции  $\psi(r)$  в соседних ячейках  $\Omega_i$  и  $\Omega_{i+1}$  по известным интегральным средним  $\tilde{\psi}_i$  и  $\tilde{\psi}_{i+1}$  в этих ячейках. Пусть

$$g(r) = a \cdot g^{(a)}(r) + b \cdot g^{(b)}(r)$$

есть функция с двумя числовыми параметрами  $a$  и  $b$ ;  $g^{(a)}$  и  $g^{(b)}$  – базисные функции, используемые для локального представления  $\psi$ . Найдем такие  $a$  и  $b$ , что интегральные средние  $g(r)$  по ячейкам  $\Omega_i$  и  $\Omega_{i+1}$  были бы равны  $\tilde{\psi}_i$  и  $\tilde{\psi}_{i+1}$  соответственно. Это эквивалентно системе уравнений

$$\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} [\tilde{\psi}_i - g(r)]S(r)dr = 0; \quad \int_{r_{i+1/2}}^{r_{i+3/2}} [\tilde{\psi}_{i+1} - g(r)]S(r)dr = 0. \quad (12)$$

Пусть

$$\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} g^{(a)}(r)S(r)dr = I_i^{(a)}; \quad \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} g^{(b)}(r)S(r)dr = I_i^{(b)}.$$

Считаем, что интегралы  $I_i^{(a)}$  и  $I_i^{(b)}$  найдены аналитически. Система (12) эквивалентна системе

$$\begin{cases} aI_i^{(a)} + bI_i^{(b)} = (r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1})\tilde{\psi}_i; \\ aI_{i+1}^{(a)} + bI_{i+1}^{(b)} = (r_{i+3/2}^{k+1} - r_{i+1/2}^{k+1})\tilde{\psi}_{i+1}. \end{cases}$$

Получена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными – решим методом Крамера:

$$\Delta = I_i^{(a)}I_{i+1}^{(b)} - I_i^{(b)}I_{i+1}^{(a)}; \quad a = \frac{(r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1})I_{i+1}^{(b)}}{\Delta} \cdot \tilde{\psi}_i + \frac{-(r_{i+3/2}^{k+1} - r_{i+1/2}^{k+1})I_i^{(b)}}{\Delta} \cdot \tilde{\psi}_{i+1}; \quad (13)$$

$$b = \frac{-(r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1})I_{i+1}^{(a)}}{\Delta} \cdot \tilde{\psi}_i + \frac{(r_{i+3/2}^{k+1} - r_{i+1/2}^{k+1})I_i^{(a)}}{\Delta} \cdot \tilde{\psi}_{i+1}. \quad (14)$$

Теперь можно легко вычислять  $a$  и  $b$  при различных значениях  $\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_{i+1}$ , если рассчитать заранее и сохранить четыре коэффициента, стоящие в формулах (13), (14).

Приближим  $\partial\psi/\partial r$  на границе с радиусом  $r_{i+1/2}$  (между ячейками  $\Omega_i$  и  $\Omega_{i+1}$ ) с помощью функции  $g(r)$  с известными числовыми параметрами:

$$\left[ \frac{\partial\psi}{\partial r} \right]_{i+1/2} = g'(r_{i+1/2}) = a \cdot (g^{(a)})'(r_{i+1/2}) + b \cdot (g^{(b)})'(r_{i+1/2}).$$

Производные  $(g^{(a)})'$  и  $(g^{(b)})'$  считаем найденными аналитически.

Отыщем приближение производной  $\partial\phi/\partial r$  на границах с радиусами  $r_{3/2}, \dots, r_{n-1/2}$  (то есть на всех, кроме первых двух внутренних и крайней внешней). Используем описанный выше метод с  $\tilde{\psi} = \tilde{\phi}$  и базисными функциями  $g^{(a)}(r) = r$ ,  $g^{(b)}(r) = 1$ .  $g' \equiv a$ , вывести формулы для  $I^{(a)}$ ,  $I^{(b)}$  также не составляет труда. Таким образом, происходит приближение функции  $\phi$  на парах соседних ячеек линейной функцией.

Задание граничных условий, в том числе приближение  $\partial\phi/\partial r$  на крайних границах  $\Omega$ , будет подробно описано в следующем разделе.

Без ответа остался только вопрос вычисления  $\Delta\phi$  и его производной по  $r$ . Оно требуется лишь в случае ненулевой константы  $\alpha$  (см. уравнение (7)). Проведя рассуждение, аналогичное проделанному для вывода соотношения (10), но без интегрирования по времени, получим следующее выражение для интегрального среднего лапласиана  $\phi$  по ячейке:

$$dV_i \cdot \tilde{\Delta}\phi_i = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r_{i+1/2}) \cdot S_{i+1/2} - \frac{\partial\phi}{\partial r}(r_{i-1/2}) \cdot S_{i-1/2}.$$

По средним  $\tilde{\Delta}\phi_i$  вычислим приближение  $\partial(\Delta\phi)/\partial r$  на границах ячеек с радиусами  $r_{1/2}, \dots, r_{n-1/2}$  (то есть на всех, кроме крайних внутренней и внешней) тем же способом, который ранее использовался для  $\partial\phi/\partial r$ , с  $\tilde{\psi} = \tilde{\Delta}\phi$ ,  $g^{(a)}(r) = r$ ,  $g^{(b)}(r) = 1$ .

## 4.2 Задание граничных условий

Граничные условия, подробно описанные в предыдущем разделе, имеют следующий вид:  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(R) = 1$ , где  $R > 0$  такое, что  $R/l \gg 1$ . Если коэффициент  $\alpha$  в уравнении (7) при слагаемом с билапласианом ненулевой, то этих граничных условий недостаточно в силу повышения порядка уравнения – необходимо добавить условия на производную  $\phi$ . По логике задачи их следует сделать таковыми:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Граничные условия в точке  $r = R$  в разностной схеме задаются легко:  $\tilde{\phi}_n = 1$ ,  $\tilde{\Delta\phi}_n = 0$ . Этого оказывается достаточно ввиду того, что функция  $\phi$  вблизи точки  $R$  меняется очень слабо.

С граничными условиями в точке  $r = 0$  дела обстоят намного сложнее. Для начала, функции перехода в цилиндрическую и сферическую систему координат имеют в этой точке особенность. К тому же ожидается, что  $\phi$  в окрестности  $r = 0$  довольно быстро растёт. Более того, как выяснится позже, в цилиндрическом и сферическом случае функции  $\phi$  и  $\Delta\phi$  в точке 0, вероятно, имеют особенность.

Зададим граничные условия в точке 0 следующим образом. Выберем для приближения  $\phi$  в ячейках  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  такие базисные функции  $g^{(a)}$  и  $g^{(b)}$ , что каждая из них удовлетворяет граничным условиям при  $r = 0$  и, при необходимости, одна из них имеет в точке 0 предположительно тот же вид особенности, что решение  $\phi$ . С помощью функции  $g(r)$  с известными параметрами получим искомые приближения:

$$\left[ \frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{-1/2} = g'(0); \quad \left[ \frac{\partial\phi}{\partial r} \right]_{1/2} = g'(r_{1/2});$$

$$\left[ \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial r} \right]_{-1/2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^k \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^k} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \right] \Big|_{r=0}.$$

В последнем выражении используется общий вид формулы для лапласиана функции, зависящей только от  $r$ , в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах:

$$\Delta g = \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^k \frac{\partial g}{\partial r} \right). \quad (15)$$

Определимся с выбором базисных функций для приближения  $\phi$  в первых двух ячейках в зависимости от случая задачи и значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим плоский случай. Здесь у производной  $\phi$  (и  $\Delta\phi$ , входящей в формулы, только если  $\alpha \neq 0$ ) в точке 0 не ожидается особенностей. Обоснуем это так:  $S(0) = 1 \neq 0$ , поэтому для ненулевого потока  $F_{-1/2}$  через крайнюю внутреннюю границу достаточно ненулевой конечной плотности потока  $\rho_{-1/2}$ . При  $\alpha = 0$  граничное условие  $\phi(0) = 0$  – возьмем  $g^{(a)} = r^2$ ,  $g^{(b)} = r$ . При  $\alpha \neq 0$  добавляется граничное условие  $\partial\phi/\partial r|_{r=0} = 0$  – зададим  $g^{(a)} = r^3$ ,  $g^{(b)} = r^2$ .

Теперь рассмотрим цилиндрический случай. Имеем  $S(0) = 0$ , поэтому, казалось бы, поток  $F_{-1/2}$  всегда нулевой. Однако если допустить у  $\rho_r$  особенность вида  $1/r$ , то получается  $\rho_r(r)S(r) \rightarrow 2$  при  $r \rightarrow +0$  – конечный ненулевой поток! Если  $\rho_r$  по модулю растёт асимптотически медленнее, то поток будет нулевым; если быстрее – то бесконечным (что не имеет смысла).

Пусть  $\alpha = \beta = 0$ . Тогда в выражении (11) для плотности потока встречается лишь  $\partial\phi/\partial r$  в первой степени. Значит, мы ищем  $g^{(a)}$ , такую что  $(g^{(a)})' = C_0/r$ . Проинтегрировав, получим  $g^{(a)} = C_0 \ln r + C_1$ .  $g^{(a)} \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow +0$ , то есть граничное условие  $g^{(a)}(0) = 0$  выполнить невозможно. Это косвенно подтверждает вывод из работы [3], что в этом случае решения дифференциальной задачи не существует.

Пусть  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ . В выражение (11) для плотности потока входит  $\partial\phi/\partial r$  в первой и третьей степени. Следовательно, мы ищем такую  $g^{(a)}$ , что  $(g^{(a)})' = C_0 r^{-1/3}$ . Первая степень производной даст нулевой вклад в поток, третья – конечный ненулевой. Проинтегрировав, получим  $g^{(a)} = C_0 \cdot (3/2) \cdot r^{2/3} + C_1$ . С учетом граничного условия выберем  $g^{(a)} = r^{2/3}$ . Вторую базисную функцию возьмем без особенности в точке 0, например,  $g^{(b)} = r$ .

Пусть  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta$  произвольное. Тогда в выражение (11) для плотности потока входит  $\partial(\Delta\phi)/\partial r$ . Встречается там и  $\partial\phi/\partial r$ , но она, согласно граничному условию, равна 0 при  $r = 0$ . Отыщем такую базисную функцию  $g^{(a)}$ , что  $\partial(\Delta g^{(a)})/\partial r = C_0/r$ . Учтем, что лапласиан функции  $g^{(a)}$ , зависящей только от  $r$ , в цилиндрических координатах вычисляется по формуле (15) с  $k = 1$ . Трижды проинтегрировав уравнение на производную лапласиана, получим  $g^{(a)} = (C_0/4)r^2(\ln r - 1) + C_1 r^2/4 + C_2 \ln r + C_3$ . Требуется  $g^{(a)}(0) = 0$ , следовательно,  $C_2 = C_3 = 0$ . Особенность содержит первое слагаемое, поэтому выберем  $g^{(a)} = r^2 \ln r$ .  $g^{(a)}$  удовлетворяет граничному условию на производную  $(g^{(a)})'(0) = 0$ . Второй базисной функцией сделаем  $g^{(b)} = r^2$ .

Наконец, рассмотрим сферический случай. Аналогично цилиндрическому случаю будем подбирать базисную функцию так, чтобы поток  $F_{-1/2}$  был конечным ненулевым. Для этого  $\rho_r$  должна иметь особенность вида  $1/r^2$ , так как тогда  $\rho_r(r)S(r) \rightarrow 3$  при  $r \rightarrow +0$ .

Пусть  $\alpha = \beta = 0$ . Ищем  $g^{(a)}$ , такую что  $(g^{(a)})' = C_0/r^2$ . Проинтегрировав, получим  $g^{(a)} = -C_0/r + C_1$ .  $g^{(a)} \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow +0$ , то есть граничное условие  $g^{(a)}(0) = 0$  выполнить невозможно.

Пусть  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Аналогично рассмотренному ранее подобному случаю ищем  $g^{(a)}$ , такую что  $(g^{(a)})' = C_0 r^{-2/3}$ . Проинтегрировав, получим  $g^{(a)} = C_0 \cdot 3 \cdot r^{1/3} + C_1$ . С учетом граничного условия выберем  $g^{(a)} = r^{1/3}$ ,  $g^{(b)} = r$ .

Пусть  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta$  произвольное. Ищем  $g^{(a)}$ , такую что  $\partial(\Delta g^{(a)})/\partial r = C_0/r^2$ . Лапласиан функции  $g^{(a)}$ , зависящей только от  $r$ , в сферических координатах вычисляется по формуле (15) с  $k = 2$ . Дважды проинтегрировав уравнение на производную лапласиана, получим  $(g^{(a)})' = -C_0/2 + C_1 r/3 + C_2/r^2$ .  $C_0 \neq 0$ , так как иначе у функции пропадет особенность. Получается, что  $(g^{(a)})'(0) \neq 0$  – невозможно удовлетворить граничному условию на производную!

Примечательно, что выбранный подход не удалось применить в сферическом случае не только при  $\alpha = \beta = 0$ , но и при  $\alpha \neq 0$ . Выдвинем гипотезу, что в обеих этих конфигурациях исследуемая дифференциальная задача по-

ставлена некорректно и не имеет решения.

### 4.3 Разностная схема

Везде в двух предыдущих подразделах допускалось, что радиусы границ ячеек  $0 = r_{-1/2}, r_{1/2}, \dots, r_{n-1/2}, r_{n+1/2} = R$  могут быть произвольной возрастающей последовательностью чисел. В дальнейшем, на практике, мы сделаем их структуру регулярной с шагом  $h$ :  $r_{i-1/2} = ih$ .

При моделировании система будет проходить моменты времени  $t_j = j\tau$ , где  $\tau$  – фиксированный шаг по времени. Функцию времени с аргументом  $t_j$  будем обозначать верхним индексом  $j$ .

В качестве начального условия задаются  $\{\tilde{\phi}_i^0\}_{i=0}^n$ .

Как было принято ранее,  $k = 0$  в плоском случае,  $k = 1$  в цилиндрическом,  $k = 2$  в сферическом.

Подводя итог рассуждениям, проделанным в двух предыдущих подразделах, выпишем построенную методом конечных объемов разностную схему.

$$\frac{1}{m}(\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j) = \tau \frac{\Gamma}{l^2} f'(\tilde{\phi}_i^j) + \frac{\tau}{dV_i} \Gamma (\rho_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}^j S_{i-1/2}) \text{ при } i = \overline{0, n-1};$$

$$\tilde{\phi}_n^j = 1; \quad (16a)$$

$$dV_i = (r_{i+1/2})^{k+1} - (r_{i-1/2})^{k+1}; \quad S_{i\pm 1/2} = (k+1)(r_{i\pm 1/2})^k;$$

$$\rho_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j - \alpha \frac{l^2}{4} \left[ \frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j + \beta l^2 \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j \right)^3; \quad (16b)$$

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j = a_{i+1/2}^j \text{ при } i = \overline{1, n-1}; \quad (16c)$$

$$\{\tilde{\phi}_i^j\}_{i=1}^n \rightsquigarrow \{a_{i+1/2}^j\}_{i=1}^{n-1}, \text{ где } g^{(a)} = r, g^{(b)} = 1;$$

$$\widetilde{\Delta \phi}_i^j = \frac{1}{dV_i} \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j S_{i-1/2} \right) \text{ при } i = \overline{0, n-1};$$

$$\widetilde{\Delta \phi}_n^j = 0; \quad (16d)$$

$$\left[ \frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j = c_{i+1/2}^j \text{ при } i = \overline{0, n-1}; \quad (16e)$$

$$\{\widetilde{\Delta \phi}_i^j\}_{i=0}^n \rightsquigarrow \{c_{i+1/2}^j\}_{i=0}^{n-1}, \text{ где } g^{(c)} = r, g^{(d)} = 1;$$



$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j = a_{1/2}^j (g_{1/2}^{(a)})'(r_{i-1/2}) + b_{1/2}^j (g_{1/2}^{(b)})'(r_{i-1/2}) \text{ при } i = \overline{0, 1}; \quad (16f)$$

$$\left[ \frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{-1/2}^j = a_{1/2}^j \frac{\partial(\Delta g^{(a)})}{\partial r} \Big|_{r=0} + b_{1/2}^j \frac{\partial(\Delta g^{(b)})}{\partial r} \Big|_{r=0}; \quad (16g)$$

$\{\tilde{\phi}_0^j, \tilde{\phi}_1^j\} \rightsquigarrow \{a_{1/2}^j, b_{1/2}^j\}$ , где  $g_{1/2}^{(a)}, g_{1/2}^{(b)}$  определены ниже.

1. Плоский случай при  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} g_{1/2}^{(a)} &= r^2, & (g_{1/2}^{(a)})' &= 2r, & I^{(a)} &= \frac{1}{3} r^3 \Big|_{\dots}^{\dots}; \\ g_{1/2}^{(b)} &= r, & (g_{1/2}^{(b)})' &= 1, & I^{(b)} &= \frac{1}{2} r^2 \Big|_{\dots}^{\dots}. \end{aligned}$$

2. Плоский случай при  $\alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} g_{1/2}^{(a)} &= r^3, & (g_{1/2}^{(a)})' &= 3r^2, & \frac{\partial(\Delta g_{1/2}^{(a)})}{\partial r} &= 6, & I^{(a)} &= \frac{1}{4} r^4 \Big|_{\dots}^{\dots}; \\ g_{1/2}^{(b)} &= r^2, & (g_{1/2}^{(b)})' &= 2r, & \frac{\partial(\Delta g_{1/2}^{(b)})}{\partial r} &= 0, & I^{(b)} &= \frac{1}{3} r^3 \Big|_{\dots}^{\dots}. \end{aligned}$$

3. Цилиндрический случай при  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ :

$$\begin{aligned} g_{1/2}^{(a)} &= r^{2/3}, & (g_{1/2}^{(a)})' &= \frac{2}{3} r^{-1/3}, & I^{(a)} &= \frac{3}{4} r^{8/3} \Big|_{\dots}^{\dots}; \\ g_{1/2}^{(b)} &= r, & (g_{1/2}^{(b)})' &= 1, & I^{(b)} &= \frac{2}{3} r^3 \Big|_{\dots}^{\dots}; \end{aligned}$$

$$\rho_{-1/2}^j S_{-1/2} = \frac{16}{27} (a_{1/2}^j)^3.$$

4. Цилиндрический случай при  $\alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} g_{1/2}^{(a)} &= r^2 \ln r, & (g_{1/2}^{(a)})' &= r(2 \ln r + 1), & \frac{\partial(\Delta g_{1/2}^{(a)})}{\partial r} &= \frac{4}{r}, & I^{(a)} &= \frac{1}{8} r^4 (4 \ln r - 1) \Big|_{\dots}^{\dots}; \\ g_{1/2}^{(b)} &= r^2, & (g_{1/2}^{(b)})' &= 2r, & \frac{\partial(\Delta g_{1/2}^{(b)})}{\partial r} &= 0, & I^{(b)} &= \frac{1}{2} r^4 \Big|_{\dots}^{\dots}; \end{aligned}$$

$$\rho_{-1/2}^j S_{-1/2} = 8 a_{1/2}^j.$$

5. Сферический случай при  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 g_{1/2}^{(a)} &= r^{1/3}, & (g_{1/2}^{(a)})' &= \frac{1}{3}r^{-2/3}, & I^{(a)} &= \frac{9}{10}r^{10/3} \Big|_{\dots}^{\dots}; \\
 g_{1/2}^{(b)} &= r, & (g_{1/2}^{(b)})' &= 1, & I^{(b)} &= \frac{3}{4}r^4 \Big|_{\dots}^{\dots}; \\
 \rho_{-1/2}^j S_{-1/2} &= \frac{1}{9}(a_{1/2}^j)^3.
 \end{aligned}$$

## 5 Вычислительный эксперимент

Была написана программа, реализующая разностную схему (16).

Все предыдущие рассуждения были универсальны для плоского, цилиндрического и сферического случаев, насколько это возможно. Все три случая моделируются одной и той же программой, принимающей  $k = \overline{0, 2}$  как параметр.

Зададим параметры модели:

$$\epsilon_0 = 0.2, \delta = 0.04, l = 1.0, \Gamma = 1.0, m = 0.5.$$

Пусть  $R = 5$ . По виду графиков будет понятно, что для использованного набора параметров такое  $R$  достаточно велико.

Выберем число ячеек  $n = 300$  при  $\alpha = 0$  и  $n = 150$  иначе. Шаг по пространству  $h$ , соответственно, равен  $1/60 \approx 0.0167$  либо  $1/30 \approx 0.0333$ . При этом придется брать шаг по времени  $\tau = 5 \cdot 10^{-7}$ . Если шаг по времени кратно больше, то схема оказывается неустойчива и программа завершается с ошибкой переполнения (в данных возникает значение NaN). Как и ожидалось,  $p$ -лапласиан и билапласиан (особенно) требуют относительно малых шагов по времени.

Выбор начальных условий неважен. Пусть, например, значения 0 и 1 гладко соединяются ветвью синусоиды:  $\tilde{\phi}_i^0 = \sin[(h/2+ih)\pi/2]$ ,  $h/2+ih < 1$ ; далее все значения равны 1.

Будем останавливать расчет, когда вектор «воздействия» на систему достаточно мал, а именно:

$$\max_{i=0}^n \frac{\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j}{m} < 10^{-9}.$$

Все конфигурации модели достигли названного условия не более чем через 7.4 единицы времени.

Результаты вычислений изображены на рис. 1 и 2 (случай 1 из описания разностной схемы), рис. 3 (случай 2), рис. 4 (случай 3), рис. 5 (случай 4),

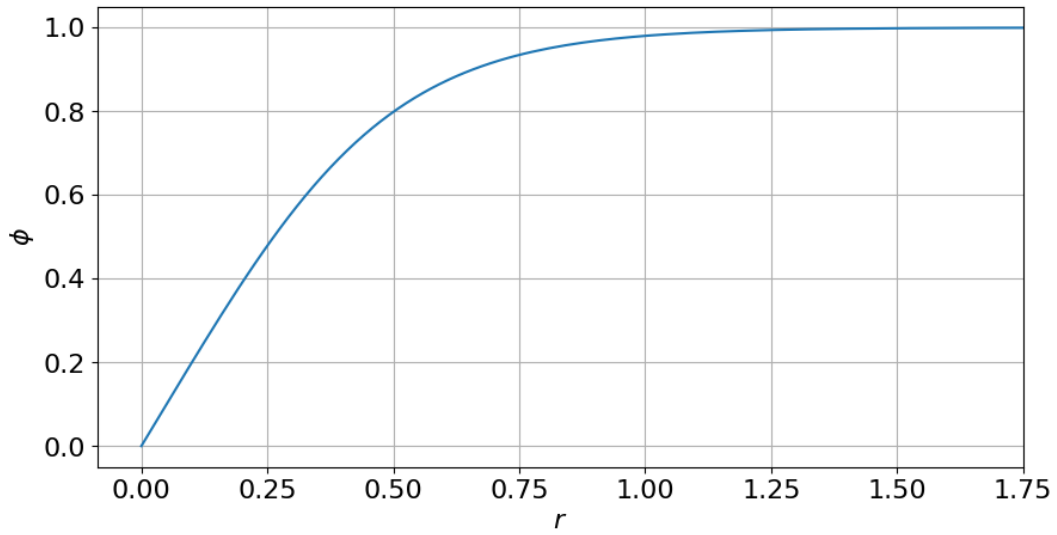


Рис. 1. Решение  $\phi$  в плоском случае при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$

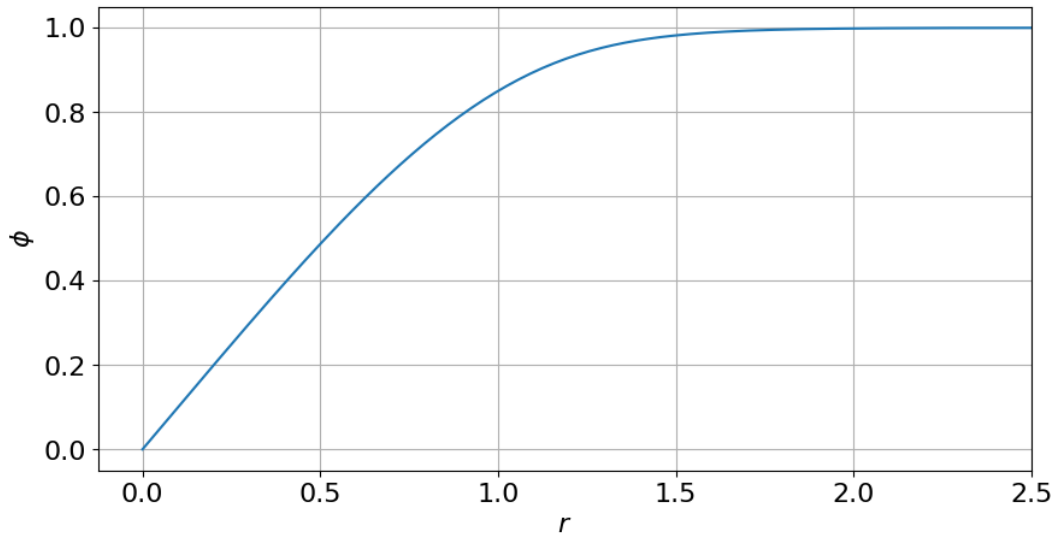


Рис. 2. Решение  $\phi$  в плоском случае при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$

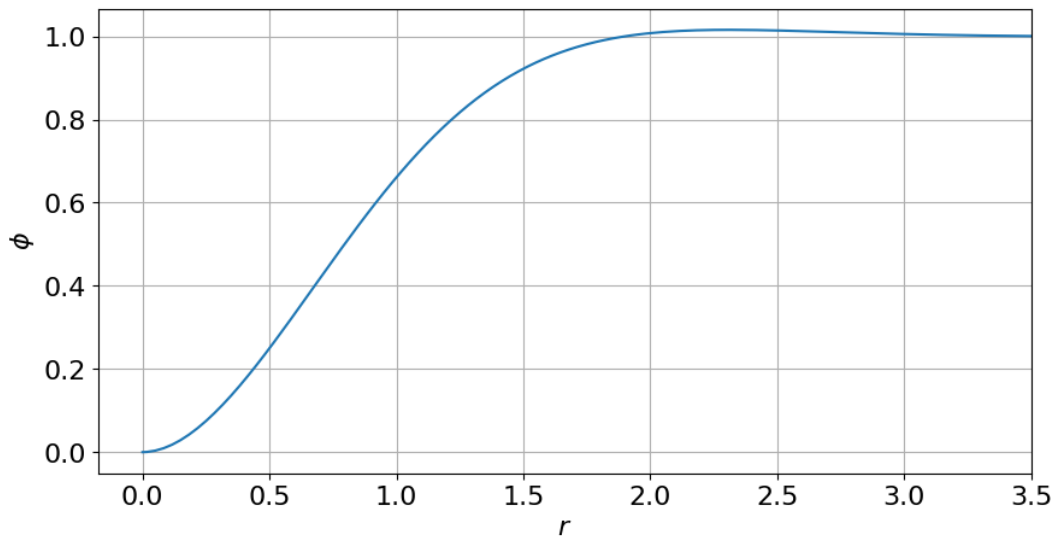


Рис. 3. Решение  $\phi$  в плоском случае при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$

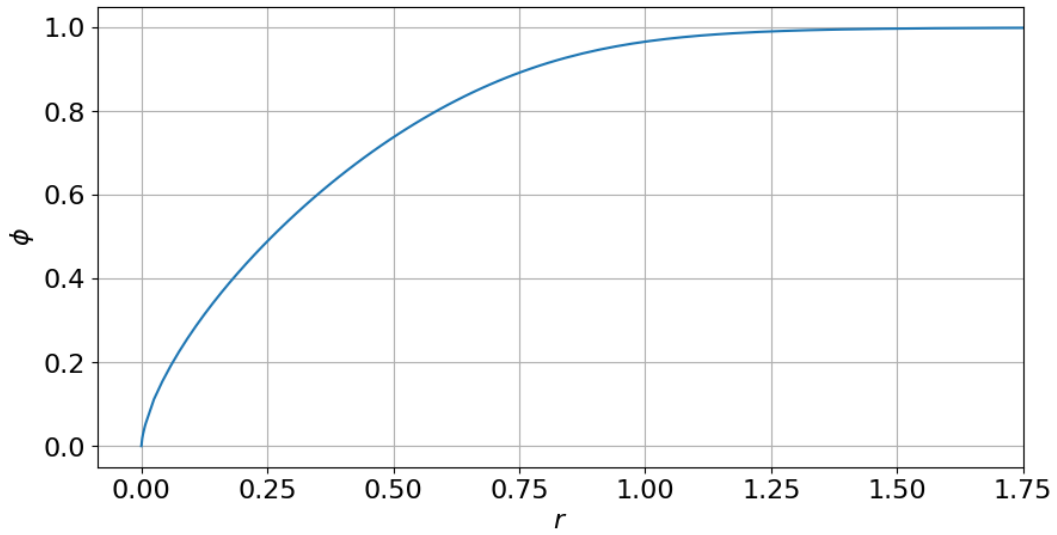


Рис. 4. Решение  $\phi$  в цилиндрическом случае при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$

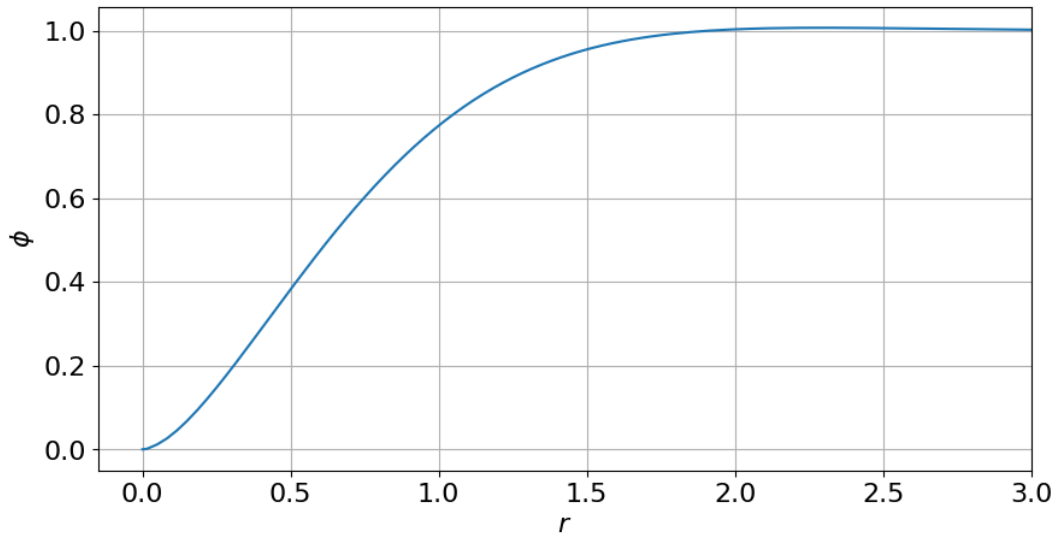


Рис. 5. Решение  $\phi$  в цилиндрическом случае при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$

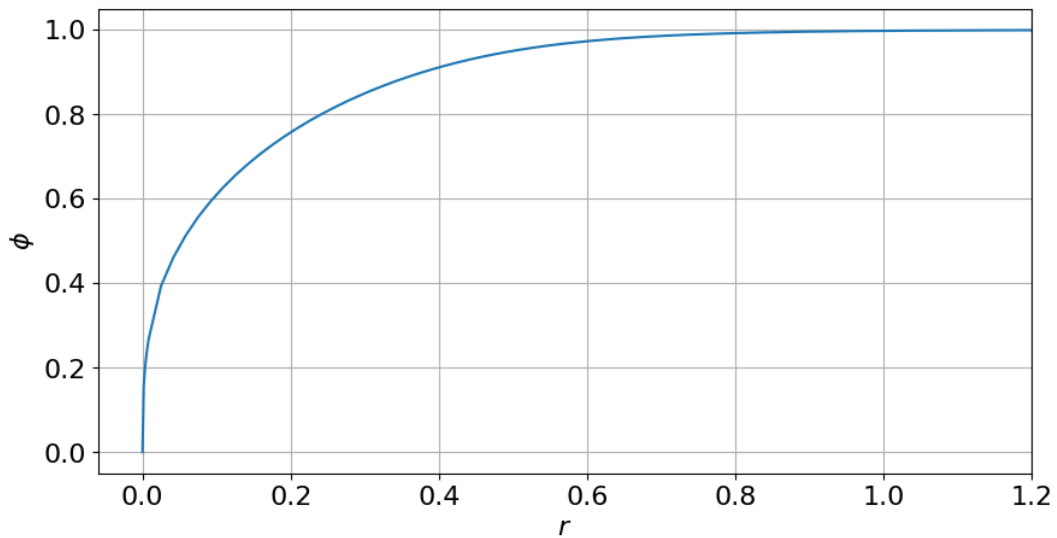


Рис. 6. Решение  $\phi$  в сферическом случае при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$

рис. 6 (случай 5). Графики функций показаны до зримого момента выхода на примерно постоянное значение 1, после чего они в действительности продолжают до  $R = 5$ . Графики состоят из соединенных значений средних  $\tilde{\phi}_i^j$ , размещенных в серединах ячеек; вблизи 0 к ним добавлено несколько значений приближающей функции  $g_{1/2}$ , имеющей особенность в 0, если того требует случай задачи.

Отметим, что если в уравнения входит билапласиан ( $\alpha \neq 0$ ), то функция  $\phi$  может быть немонотонной и в некоторых точках превышать значение 1 (см. рис. 3, 5). В работе [3] это было отмечено и указано, что монотонность  $\phi$  следует ожидать при достаточно малых  $\alpha$ .

Итак, эксперимент подтверждает, что, несмотря на некоторую громоздкость формулировок, предложенная модификация метода конечных объемов позволяет эффективно моделировать решение  $\phi$ , даже если на границе области оно имеет особенность.

## 6 Заключение

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в статье [3]. Как было отмечено ее авторами, исследование это хотя и проводится для конкретной задачи, но, вероятно, затрагивает вопросы, содержащиеся в методе диффузной границы как таковом. Суть этих вопросов в том, позволяют ли уравнения среды с диффузной границей в своей «классической» редакции адекватно описывать включения, по своей природе являющиеся объектами высшей координатности. В качестве возможного ответа авторы работы [3] предлагают определенного вида обобщение исходной модели.

Целью настоящей работы было численно исследовать упомянутое обобщение. В этом достигнуты определенные успехи. С помощью модификации метода конечных объемов преодолены трудности, связанные с необходимостью задавать граничные условия на множествах координатности 2 и 3 в трехмерном пространстве и с наличием у функции-решения особенности в точках этих множеств. Указанный подход существенно не привязан к рассматриваемой модели – в дальнейшем он может быть использован и в других задачах.

В некоторых случаях при построении разностной схемы возникли фундаментальные препятствия: оказалось, что необходимых базисных функций попросту не существует. На основании этого выдвинута гипотеза, что в указанных случаях рассматриваемая дифференциальная задача поставлена некорректно и не имеет решения. Рассуждения вполне согласуются с теоретическими результатами работы [3]. В будущем возможно строгое обоснование представленной гипотезы.

## Список литературы

1. Физика диэлектриков (область сильных полей) / Г. А. Воробьев [и др.]. — Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011.
2. *Pitike K. C., Hong W.* Phase-field model for dielectric breakdown in solids // *Journal of Applied Physics*. — 2014. — Янв. — Т. 115, № 4. — С. 044101. — DOI: 10.1063/1.4862929. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4862929>.
3. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — Москва, 2020. — № 122. — С. 1–34. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-122>.
4. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — Москва, 2021. — № 19. — С. 1–34. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-19>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-19>.
5. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — Москва, 2022. — № 31. — С. 1–36. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-31>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-31>.
6. *Пономарев А. С., Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — Москва, 2024.
7. *Cirstea F., Du Y.* Asymptotic behavior of solutions of semilinear elliptic equations near an isolated singularity // *Journal of Functional Analysis*. — 2007. — Сент. — Т. 250. — С. 317–346. — DOI: 10.1016/j.jfa.2007.05.005.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / под ред. О. А. Олейник. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва, 1988.

9. *Олейник О. А., Шапошникова Т. А.* О задаче Дирихле для бигармонического уравнения в области, перфорированной вдоль многообразий малой размерности // Докл. РАН. — 1996. — Т. 350, № 6. — С. 742—745. — URL: <http://mi.mathnet.ru/dan3973>.
10. *Стернин Б. Ю.* Общие краевые задачи для эллиптических уравнений в области, границей которой служат многообразия различной размерности // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 159, № 5. — С. 992—994. — URL: <http://mi.mathnet.ru/dan30648>.
11. *Lewis J. L., Nyström K.* Quasi-linear PDEs and low-dimensional sets // Journal of the European Mathematical Society. — 2018. — Т. 20. — С. 1689—1746. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59497218>.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи и модель</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Обобщение модели</b>	<b>5</b>
3.1	Суть проблемы . . . . .	5
3.2	Предложенное обобщение . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Построение разностной схемы</b>	<b>8</b>
4.1	О методе конечных объемов . . . . .	8
4.2	Задание граничных условий . . . . .	12
4.3	Разностная схема . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Вычислительный эксперимент</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>20</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>21</b>