



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 74 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Иванов

Компенсация шума
численной схемы при
больших временных шагах за
счет температурных
флуктуаций в
атомистической модели
магнетика

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов А.В. Компенсация шума численной схемы при больших временных шагах за счет температурных флуктуаций в атомистической модели магнетика // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 74. 12 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-74>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-74>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А.В. Иванов

**Компенсация шума численной схемы
при больших временных шагах
за счет температурных флуктуаций
в атомистической модели магнетика**

Москва — 2024

Иванов А.В.

e-mail: aiv.racs@gmail.com

Компенсация шума численной схемы при больших временных шагах за счет температурных флуктуаций в атомистической модели магнетика

Атомистическая модель классического магнетика Гейзенберга представляет собой систему стохастических дифференциальных уравнений Ландау–Лифшица с источником Ланжевена. Сильное локальное обменное взаимодействие приводит к появлению схемного шума, существенно ограничивающего шаг по времени. Схемный шум проявляет себя аналогично температурным флуктуациям, что делает возможной попытку скомпенсировать его за счет уменьшения температуры. Поправка в температуру рассчитывается на основе второго уравнения корреляционной магнитодинамики. Такой подход позволяет поднять шаг интегрирования почти на порядок, сохраняя при этом приемлемый уровень ошибки.

Ключевые слова: Моделирование магнетиков атом-в-атом, уравнения корреляционной магнитодинамики

Anton Valeryevich Ivanov

e-mail: aiv.racs@gmail.com

Compensation of numerical noise at large time steps using temperature fluctuations in an atomistic spin dynamics

The atomistic model of classical Heisenberg magnetic material is a system of stochastic differential equations of Landau–Lifshitz with a Langevin source. Strong local exchange interaction leads to the appearance of numerical noise, which significantly limits the time step. Numerical noise manifests itself similarly to temperature fluctuations, which makes it possible to try to compensate for the noise by reducing the temperature. The temperature correction is calculated based on the second equation of correlation magnetodynamics. This approach allows increasing the integration step by almost an order of magnitude, while maintaining the error level at an acceptable level.

Keywords: Atomistic spin dynamics, correlation magnetodynamics

Содержание

1	Введение	3
2	Основные уравнения	4
3	Численная схема	5
4	Результаты моделирования	7
5	Заключение	11
	Список литературы	11

1. Введение

Модель классического магнетика Гейзенберга «атом-в-атом», или ASD (Atomistic Spin Dynamics), играет большую роль в современной физике [1]. Модель описывает магнетик как совокупность магнитных моментов отдельных атомов. Каждый магнитный момент имеет постоянный модуль, но, в отличие от моделей Изинга и Поттса, может быть ориентирован произвольным образом. Магнитные моменты связаны сильным обменным взаимодействием с ближайшими соседями и находятся под влиянием температурных флуктуаций [2], другие взаимодействия (анизотропия, внешнее поле, магнитостатика и т.д.) вводятся по мере необходимости.

В отличие от моделей сплошной среды [3, 4], ASD позволяет явно учитывать строение кристаллической решетки, корректно описывать дефекты и поверхностные явления. При этом, в отличие от квантовых моделей, ASD имеет приемлемую вычислительную сложность для прямых расчетов в областях размерами до 100 нм, что уже представляет интерес как для статистической физики [5], так и для прикладных задач по проектированию устройств спинтроники и магнитной наноэлектроники [6].

Прямые расчеты в рамках ASD сводятся к решению системы стохастических дифференциальных уравнений Ландау–Лифшица, и по своей идеологии напоминают расчеты молекулярной динамики. Наблюдение за эволюцией магнитных моментов отдельных атомов не имеет смысла, интерес представляют в первую очередь средние величины, средняя намагниченность и энергия системы. Ситуация значительно усложняется за счет сильного локального обменного взаимодействия. Традиционно применяемая модифицированная численная схема Рунге–Кутты четвертого порядка [7] вносит некоторую ошибку, проявляющуюся как дополнительный шум [8], повышающий эффективную температуру системы, что в итоге приводит к сильному ограничению на временной шаг интегрирования. Неоднократные попытки создать специализированную численную схему с низким уровнем шума [9] пока что не позволили значительно увеличить шаг.

В данной работе рассматривается возможность компенсации дополнительного шума со стороны численной схемы за счет уменьшения шума, обусловленного температурными флуктуациями. Величина поправки вычисляется на

основе второго уравнения корреляционной магнитодинамики [5, 10], описывающего эволюцию обменной энергии системы.

2. Основные уравнения

Эволюция магнитных моментов отдельных атомов в модели классического магнетика Гейзенберга описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ландау–Лифшица [1]:

$$\dot{\mathbf{m}}_i = \gamma [\mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_i^{\text{eff}}] - \alpha \gamma [\mathbf{m}_i \times [\mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_i^{\text{eff}}]] + \sqrt{2\alpha\gamma T} [\mathbf{m}_i \times \boldsymbol{\xi}_i(t)]; \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_i^{\text{eff}} = -\nabla_{\mathbf{m}_i} (W^{\text{exch}} + W^{\text{an}} + W^{\text{ext}}) = \mathbf{H}_i^{\text{exch}} + \mathbf{H}_i^{\text{an}} + \mathbf{H}^{\text{ext}};$$

$$W^{\text{exch}} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j), \quad W^{\text{an}} = -K \sum_i (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i)^2, \quad W^{\text{ext}} = -\sum_i \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}};$$

$$\mathbf{H}_i^{\text{exch}} = \sum_j J_{ij} \mathbf{m}_j, \quad \mathbf{H}_i^{\text{an}} = 2K \mathbf{n}_K (\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i),$$

где γ — гиромагнитное соотношение; α — параметр затухания; \mathbf{H}^{eff} — эффективное магнитное поле, W — полная энергия системы; T — температура системы в единицах энергии, $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ — попарно независимые случайные векторы, составленные из δ -коррелированных случайных источников с нормальным распределением, единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием; $\nabla_{\mathbf{m}_i}$ — оператор ∇ по магнитному моменту \mathbf{m}_i ; \mathbf{H}^{exch} — поле обменного взаимодействия, J_{ij} — обменный интеграл (как правило, отличен от нуля только для ближайших соседей); \mathbf{H}^{an} — поле анизотропии типа легкая ось или легкая плоскость, K — параметр анизотропии, \mathbf{n}_K — направление оси анизотропии, $|\mathbf{n}_K| = 1$. Здесь не учитывается диполь–дипольное (магнитостатическое) взаимодействие.

Эволюция среднего уровня парных корреляций $\langle \eta_{ij} \rangle = \langle \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j \rangle$ для ближайших соседей в физически бесконечно малом объеме может быть описана вторым уравнением корреляционной магнитодинамики [5, 10]

$$\frac{\dot{\langle \eta \rangle}}{4\alpha\gamma} = \mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \langle \mathbf{m} \eta \rangle + K\Psi + J\mathcal{Q} - T\langle \eta \rangle, \quad (2)$$

$$\Psi = -\left\langle \mathbf{m}_i \cdot \left[\mathbf{m}_j \times [\mathbf{m}_j \times \mathbf{n}_K] \right] (\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{n}_K) \right\rangle$$

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{2} \left[\langle \eta^2 \rangle - 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_b} \left\langle \mathbf{m}_i \cdot \left[\mathbf{m}_j \times [\mathbf{m}_j \times \mathbf{m}_k] \right] \right\rangle \right], \quad \mathcal{Q} \geq 0,$$

суммирование ведется по всем соседям атома j , кроме атома i . Обменная энергия выражается через $\langle \eta \rangle$ как

$$W^{\text{exch}} = -\frac{n_b J \langle \eta \rangle}{2},$$

где n_b — зависящее от кристаллической решетки число ближайших соседей. Мы будем рассматривать примитивную (SC, $n_b = 6$), объемоцентрированную (VCC, $n_b = 8$) и гранецентрированную (FCC, $n_b = 12$) кубические кристаллические решетки.

3. Численная схема

Система стохастических дифференциальных уравнений Ландау–Лифшица (1) решается модифицированным методом Рунге–Кутты четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{eff}} &:= \mathbf{H}_{i,0}^{\text{exch}} + \mathbf{H}^{\text{ext}} + 2K(\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i^0)\mathbf{n}_K, \\ \dot{\mathbf{m}} &:= -\gamma \left[\mathbf{m}_i^0 \times (\mathbf{H}^{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m}_i^0 \times \mathbf{H}^{\text{eff}}) \right], & \mathbf{m}_i^1 &:= \mathbf{m}_i^0 + \frac{\delta t}{2} \dot{\mathbf{m}}, & \delta \mathbf{m}_i &:= \dot{\mathbf{m}}; \\ \mathbf{H}^{\text{eff}} &:= \mathbf{H}_{i,1}^{\text{exch}} + \mathbf{H}^{\text{ext}} + 2K(\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i^1)\mathbf{n}_K, \\ \dot{\mathbf{m}} &:= -\gamma \left[\mathbf{m}_i^1 \times (\mathbf{H}^{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m}_i^1 \times \mathbf{H}^{\text{eff}}) \right], & \mathbf{m}_i^2 &:= \mathbf{m}_i^0 + \frac{\delta t}{2} \dot{\mathbf{m}}, & \delta \mathbf{m}_i &+= \dot{\mathbf{m}}; \\ \mathbf{H}^{\text{eff}} &:= \mathbf{H}_{i,2}^{\text{exch}} + \mathbf{H}^{\text{ext}} + 2K(\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i^2)\mathbf{n}_K, \\ \dot{\mathbf{m}} &:= -\gamma \left[\mathbf{m}_i^2 \times (\mathbf{H}^{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m}_i^2 \times \mathbf{H}^{\text{eff}}) \right], & \mathbf{m}_i^3 &:= \mathbf{m}_i^0 + \delta t \dot{\mathbf{m}}, & \delta \mathbf{m}_i &+= \dot{\mathbf{m}}; \\ \mathbf{H}^{\text{eff}} &:= \mathbf{H}_{i,1}^{\text{exch}} + \mathbf{H}^{\text{ext}} + 2K(\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{m}_i^1)\mathbf{n}_K, \\ \dot{\mathbf{m}} &:= -\gamma \left[\mathbf{m}_i^1 \times (\mathbf{H}^{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m}_i^1 \times \mathbf{H}^{\text{eff}}) \right], & \mathbf{m}_i^0 &+= \frac{\delta t}{3} \left(\delta \mathbf{m}_i + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}} \right), \\ \mathbf{m}_i^0 &:= \frac{\mathbf{m}_i^0}{|\mathbf{m}_i^0|} \circlearrowleft 2\sqrt{\delta t \alpha \gamma T} \boldsymbol{\xi}_i, \end{aligned} \tag{3}$$

где δt — шаг по времени, \mathbf{H}^{eff} , $\dot{\mathbf{m}}$ — временные переменные, $:=$ — операция присваивания, $\boldsymbol{\xi}_i$ — случайный источник с нормальным распределением, единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием [11, 12], $\mathbf{m} \circlearrowleft \mathbf{b}$ — оператор поворота вектора \mathbf{m} вокруг оси, задаваемой вектором \mathbf{b} на угол $b = |\mathbf{b}|$:

$$\mathbf{m} \circlearrowleft \mathbf{b} \equiv \mathbf{m} \cos b - [\mathbf{m} \times \mathbf{b}] \frac{\sin b}{b} + \mathbf{b}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}) \frac{1 - \cos b}{b^2}.$$

Частота прецессии магнитного момента $\gamma H^{\text{eff}} \approx \gamma J n_b J$. Для рассматриваемых кристаллических решеток безразмерный период прецессии составляет порядка $\frac{1}{2} \div 1$, и можно было бы ожидать, что шага $\delta t \approx 0.05 \div 0.1$ достаточно для получения адекватных результатов. Между тем, как правило, приходится

вести расчеты с шагом $\delta t \leq 10^{-2}$ — при больших шагах шум численной схемы вносит ощутимые искажения.

В рассматриваемой системе при больших шагах по времени не возникает традиционной «разболтки» численной схемы, приводящей в итоге к появлению значений \inf или \sup — этому препятствует перенормировка магнитных моментов в (3). Слишком большие шаги проявляются как разрушение дальнего порядка (средней намагниченности) и переход ферромагнетика в парамагнитную фазу при температурах ниже критической. При не столь больших шагах шум численной схемы приводит к уменьшению средней намагниченности $\langle m \rangle$ и увеличению энергии W системы, то есть шум численной схемы проявляется как некоторая добавка к температуре T .

Хотя шум численной схемы δT и температурные флуктуации, задаваемые термостатом (кристаллической решеткой) температуры T , имеют совершенно различную природу, можно попытаться скомпенсировать влияние шума численной схемы за счет уменьшения интенсивности температурных флуктуаций. Зная мгновенные значения магнитных моментов $\{\mathbf{m}_i\}_l$ системы на временном шаге l , можно экономно рассчитать все входящие в (2) моменты многочастичных функций распределения. Величина $\langle \dot{\eta} \rangle_l$ может быть рассчитана численно как

$$\langle \dot{\eta} \rangle_l \approx \frac{\langle \eta \rangle_l - \langle \eta \rangle_{l-1}}{\delta t}.$$

Таким образом, второе уравнение корреляционной магнитодинамики (2) позволяет оценить, какая температура $T + \delta T_l$ должна быть для получения заданной скорости изменения $\langle \dot{\eta} \rangle_l$:

$$\delta T_l \approx \frac{1}{\langle \eta \rangle_l} \left[\mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \langle \mathbf{m} \eta \rangle_l + K \Psi_l + J Q_l - \frac{\langle \eta \rangle_l - \langle \eta \rangle_{l-1}}{4\alpha\gamma\delta t} \right] - T,$$

откуда скомпенсированная температура T_l^* , подставляемая в (3) вместо T ,

$$T_l^* = T - \delta T_l.$$

Однако такой «наивный» подход к определению T_l^* приводит к потере устойчивости и высокочастотным (с периодом $2\delta t$) колебаниям значения T^* . Одним из путей решения этой проблемы является применение одностороннего линейного фильтра

$$T_l^* = (1 - w)T_{l-1}^* + w(T - \delta T_l), \quad T_0^* = T, \quad (4)$$

где $0 < w \leq \frac{1}{2}$ — параметр, задающий ширину окна фильтрации: чем w меньше, тем шире окно.

4. Результаты моделирования

Мы будем рассматривать фрагмент кристалла размерами $N_m = 32^3$ ячейки с периодическими граничными условиями. Начальные условия: однородная намагниченность вдоль оси z , внешнее поле и анизотропия отсутствуют. Время моделирования в зависимости от температуры подбирается таким образом, чтобы система заведомо успела прийти в состояние равновесия с термостатом. Для увеличения точности после прихода в состояние равновесия производится накопление статистики в течение $N_{\text{steps}} 100$ шагов. В безразмерной системе единиц параметр затухания $\alpha = 0.1$, гиромангнитное отношение $\gamma = 1$, обменный интеграл $J = 1$, шаг по времени $\delta t = 0.005, 0.01, 0.02, \dots, 0.32$, параметр фильтрации скомпенсированной температуры $w = 0.1$. Расчеты проводились при помощи кода StatASD [13] под управлением RACS (Results and Algorithms Control System) [14, 15].

Мы будем рассматривать равновесные зависимости модуля средней намагниченности $\langle m \rangle(T)$ и уровня парных корреляций $\langle \eta \rangle(T)$ при включенной/выключенной поправке (4) к температурному шуму в численной схеме (3) и скомпенсированную температуру T^* . Для сравнения зависимостей $\langle m \rangle(T)$ и $\langle \eta \rangle(T)$ при разных шагах по времени мы будем изучать поведение абсолютной ошибки

$$\varepsilon_m^{\delta t}(T) = \left| \langle m \rangle_{\delta t}(T) - \langle m \rangle_{\text{ref}}(T) \right|, \quad \varepsilon_\eta^{\delta t}(T) = \left| \langle \eta \rangle_{\delta t}(T) - \langle \eta \rangle_{\text{ref}}(T) \right|,$$

за референсные зависимости $\langle m \rangle_{\text{ref}}(T)$, $W_{\text{ref}}(T)$ принимаются решения, полученные при шаге $\delta t = 0.005$. Ошибка в рассматриваемой модели имеет сложную природу: кроме шума численной схемы, вклад в ошибку дает дробовой шум на уровне $1/\sqrt{N_m N_{\text{steps}}} \approx 3 \div 6 \cdot 10^{-4}$.

На рисунках 1, 3, 5 приведены равновесные зависимости $\langle m \rangle(T)$, $\langle \eta \rangle(T)$ при $\delta t = 0.005$ и $(T^*/T)(T)$ при различных δt для SC, VCC и FCC решеток. Видно, что за исключением случаев экстремально большого шага $\delta t = 0.16$ в ферромагнитной фазе для VCC и FCC решеток, когда система находится на грани потери устойчивости, скомпенсированная температура $T^* < T$, причем разница $T - T^*$ монотонно растет с ростом δt за счет увеличения шума численной схемы.

На рисунках 1, 3, 6 приведены зависимости ошибок $\varepsilon_m^{\delta t}(T)$, $\varepsilon_\eta^{\delta t}(T)$ полученные при различных шагах времени δt для SC, VCC, FCC решеток с выключенной (красная линия) и включенной (зеленая линия) поправкой к температуре δT . Видно, что для SC решетки включение поправки практически не влияет на ошибку по намагниченности ε_m и позволяет начиная с шага $\delta t = 0.08$ в среднем по температурному интервалу почти на порядок уменьшить ошибку по энергии ε_η . Для VCC решетки начиная с шага $\delta t = 0.08$ и для FCC начиная с шага $\delta t = 0.04$ включение поправки δT позволяет на полпорядка уменьшить ошибку ε_m и почти на порядок уменьшить ошибку ε_η .

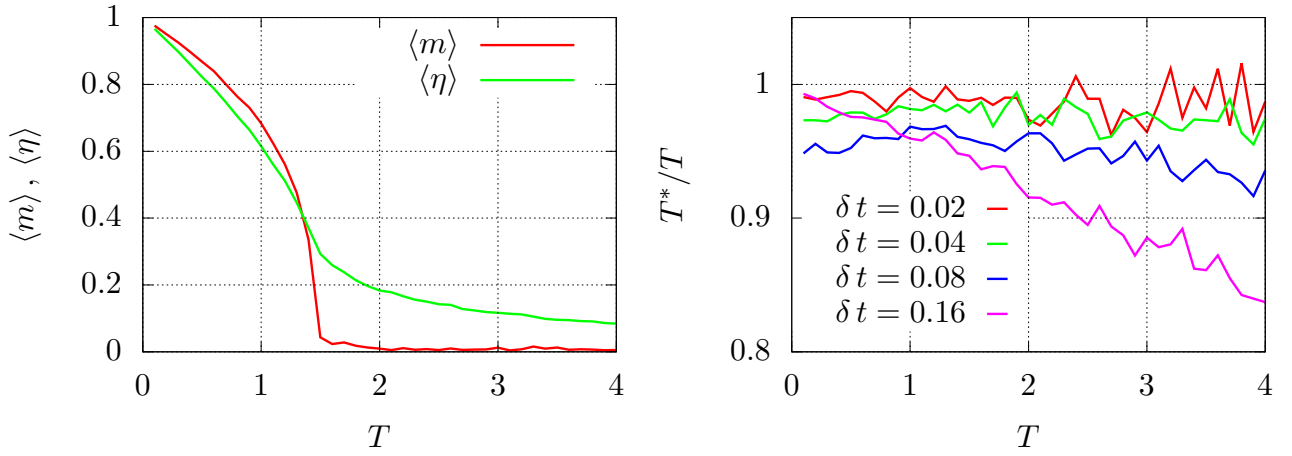


Рис. 1. Равновесные зависимости $\langle m \rangle(T)$, $\langle \eta \rangle(T)$ при $\delta t = 0.005$ и $(T^*/T)(T)$ при различных δt для SC решетки, критическая температура $T_c \approx 1.6$

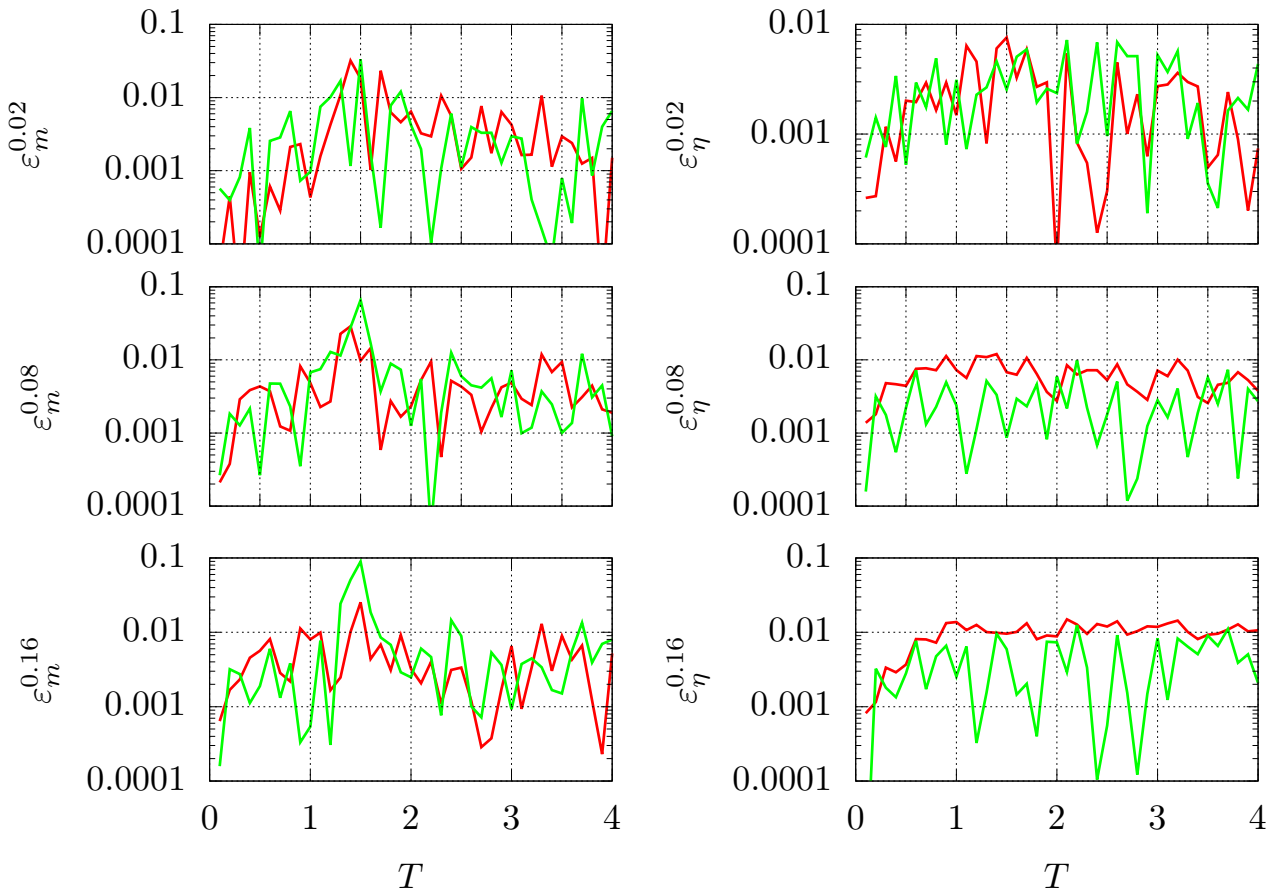


Рис. 2. Зависимости ошибок $\varepsilon_m^{\delta t}(T)$, $\varepsilon_\eta^{\delta t}(T)$ полученные при различных шагах времени δt для SC решетки с выключенной (красная линия) и включенной (зеленая линия) поправкой к температуре δT

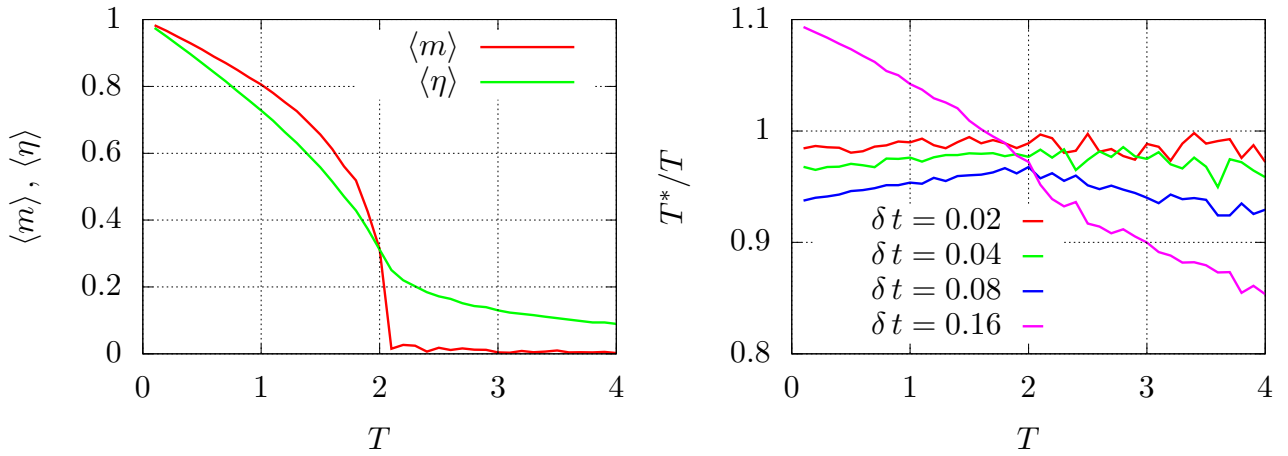


Рис. 3. Равновесные зависимости $\langle m \rangle(T)$, $\langle \eta \rangle(T)$ при $\delta t = 0.005$ и $(T^*/T)(T)$ при различных δt для VCC решетки, критическая температура $T_c \approx 2.05$

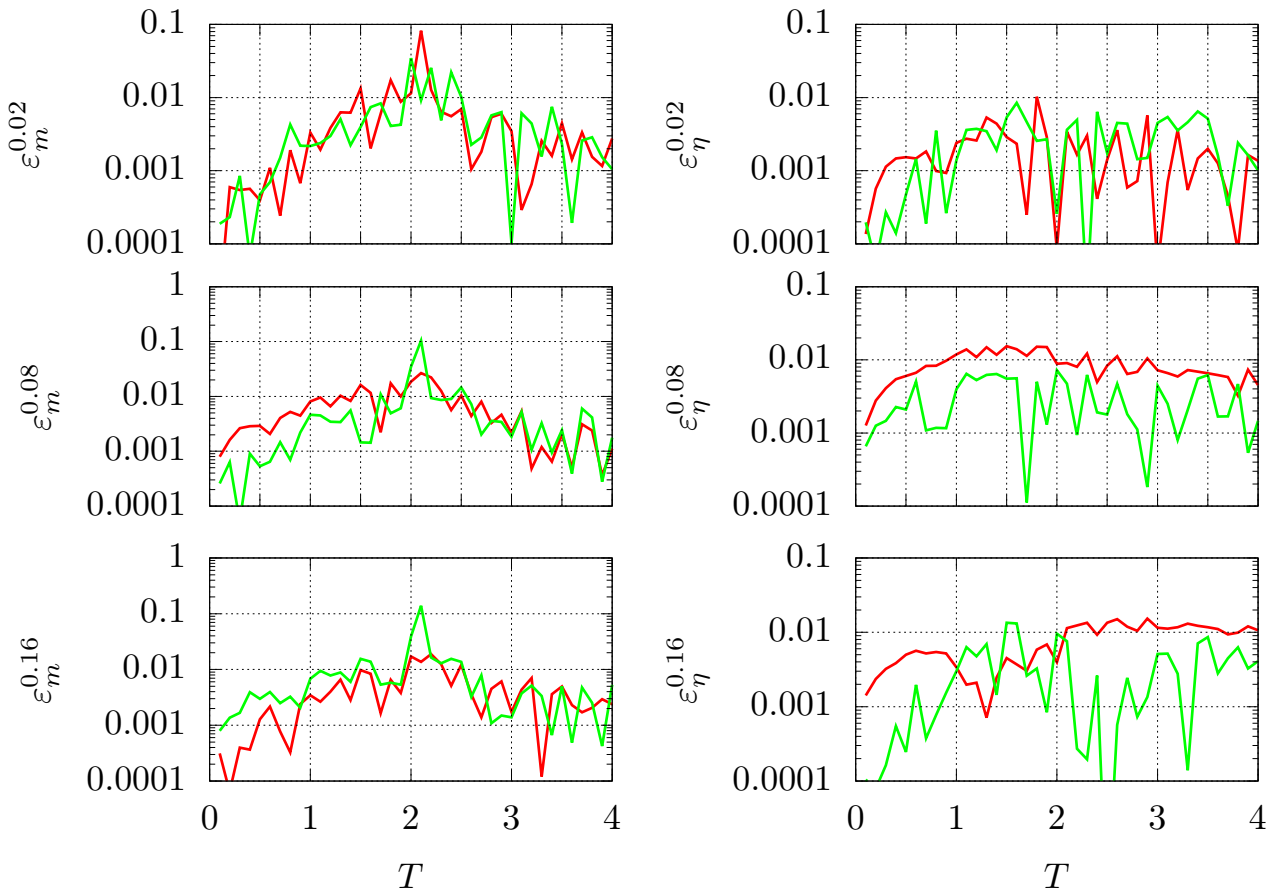


Рис. 4. Зависимости ошибок $\varepsilon_m^{\delta t}(T)$, $\varepsilon_\eta^{\delta t}(T)$ полученные при различных шагах времени δt для VCC решетки с выключенной (красная линия) и включенной (зеленая линия) поправкой к температуре δT

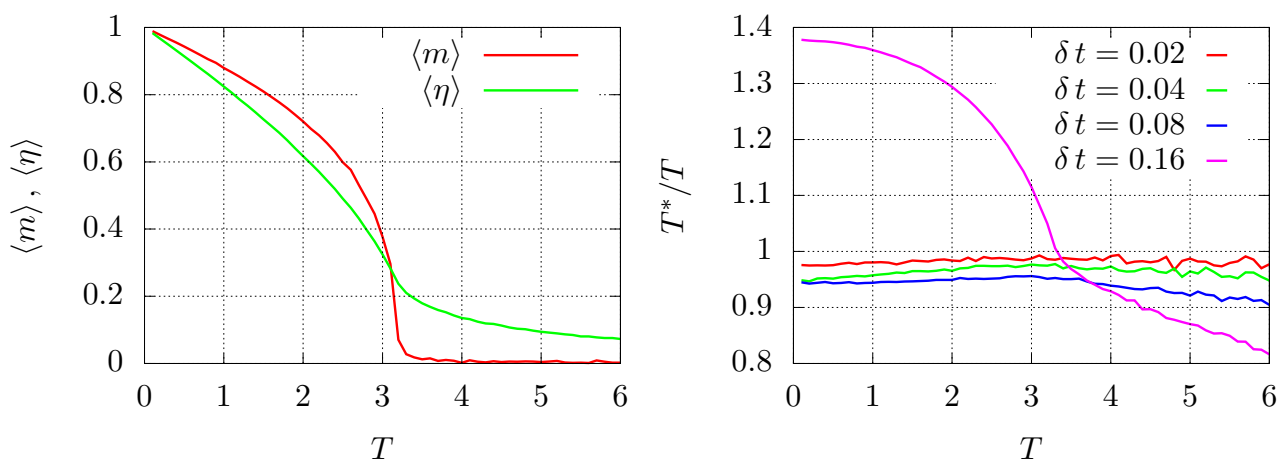


Рис. 5. Равновесные зависимости $\langle m \rangle(T)$, $\langle \eta \rangle(T)$ при $\delta t = 0.005$ и $(T^*/T)(T)$ при различных δt для FCC решетки, критическая температура $T_c \approx 3.1$

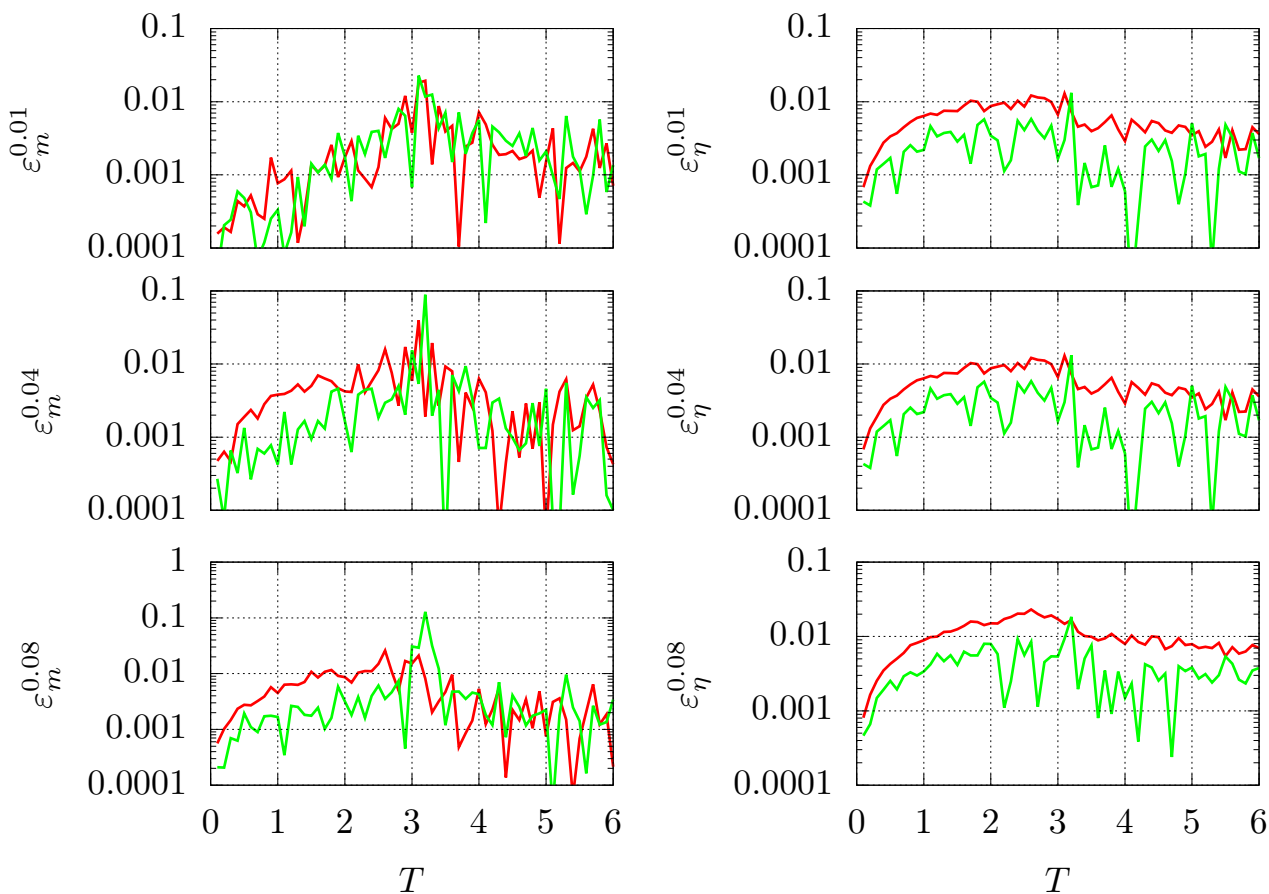


Рис. 6. Зависимости ошибок $\varepsilon_m^{\delta t}(T)$, $\varepsilon_\eta^{\delta t}(T)$ полученные при различных шагах времени δt для FCC решетки с выключенной (красная линия) и включенной (зеленая линия) поправкой к температуре δT

Во всех случаях уровень ошибок на один–два порядка выше, чем ошибка уровня 10^{-4} создаваемая дробовым шумом. Введение поправки δT , как правило, позволяет поднять шаг интегрирования до 0.08 (и даже 0.16 для SC решетки), удерживая при этом ошибки $\varepsilon_m, \varepsilon_\eta$ на уровне порядка $3 \cdot 10^{-3}$.

5. Заключение

Идея компенсации регулярного схемного шума за счет уменьшения уровня температурных флуктуаций в системах с источником Ланжевена является достаточно спорной: эти процессы хотя и проявляют себя схожим образом, все же имеют совершенно различную природу. Ключевым является вопрос о вычислении соответствующих поправок, для классического магнетика Гейзенберга здесь неожиданно полезной оказалась корреляционная магнитодинамика. В данном случае введение поправки в температурные флуктуации позволило повысить шаг по времени почти на порядок, сохраняя при этом приемлемый уровень ошибок, что можно считать хорошим результатом. Тем не менее возможные численные артефакты, вносимые такой поправкой, требуют дополнительного изучения.

Список литературы

- [1] Atomistic spin dynamics: foundations and applications / Olle Eriksson, Anders Bergman, Lars Bergqvist, Johan Hellsvik. — Oxford university press, 2017.
- [2] Brown W.F. Thermal Fluctuation of a Single–Domain Particle // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, no. 5. — P. 1677. — <https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1677>.
- [3] Garanin D. A. Fokker-Planck and Landau-Lifshitz-Bloch equations for classical ferromagnets // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. 3050. — <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9805054v2>.
- [4] Chubykalo-Fesenko O., Nieves P. Landau-Lifshitz-Bloch Approach for Magnetization Dynamics Close to Phase Transition // Handbook of Materials Modeling. — Springer, 2018.
- [5] Иванов А.В., Зипунова Е.В., Хилков С.А. Уравнения корреляционной магнитодинамики для ферромагнетиков // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — Т. 115, № 3. — С. 176–183. — <https://doi.org/10.31857/S1234567822030077>.
- [6] Модель анизотропии на скомпенсированном интерфейсе кубический ферромагнетик–антиферромагнетик со структурой $\text{Cu}_3\text{Au}(\text{L}1_2)$ / А.В. Иванов, Е.В. Зипунова, А.А. Книжник, А.Ф. Попков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 63. — С. 31. — <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-63>.

- [7] Ivanov A.V., Zipunova E.V., Khilkov S.A. Calculation of Integral Coefficients for Correlation Magnetodynamics and Verification of the Theory // In: Voevodin, V., Sobolev, S. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2021. Communications in Computer and Information Science. — 2021. — Vol. 1510. — P. 29–43. — https://doi.org/10.1007/978-3-030-92864-3_3.
- [8] Зипунова Е.В., Иванов А.В. Выбор оптимальной численной схемы для моделирования системы уравнений Ландау–Лифшица с учетом температурных флуктуаций // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 2. — С. 33–49. — <http://www.mathnet.ru/links/f80cd33bca6853dfd290a903780e7565/mm3447.pdf>.
- [9] Зипунова Е.В., Иванов А.В. Две новые численные схемы для моделирования магнетиков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2017. — № 140. — С. 18. — <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-140>.
- [10] Иванов А.В., Лукьянов А. В., Замятин С.В. Простейшая аппроксимация интегральных коэффициентов в уравнениях корреляционной магнетодинамики для ферромагнетиков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2024. — № 47. — С. 22. — <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-47>.
- [11] Змиевская Г.И. Численные стохастические модели неравновесных процессов // Математическое моделирование. — 1996. — Т. 8, № 11. — С. 3–40.
- [12] Иванов А.В. Кинетическое моделирование динамики магнетиков // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 10. — С. 89–104. — <http://www.mathnet.ru/links/82020fa1add2512759e063c1cb0a7ebf/mm1204.pdf>.
- [13] Ivanov A.V. StatASD — Modeling Atomistic Spin Dynamics for Statistical Physics. — 2024. — <https://github.com/aivn/StatASD>.
- [14] Иванов А.В. Использование библиотеки aiwlib на примере численного моделирования стохастического резонанса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 89. — С. 30. — <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-89>.
- [15] Иванов А.В., Хилков С.А. Библиотека aiwlib — инструмент для создания приложений численного моделирования, визуализации и анализа результатов // Научная визуализация. — 2018. — Т. 10, № 1. — С. 110–127. — <https://doi.org/10.26583/sv.10.1.09>.