



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.П. Варин

Локализация подвижных особенностей уравнения Блазиуса

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Варин В.П. Локализация подвижных особенностей уравнения Блазиуса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 83. 23 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-83>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-83>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ
УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА

Москва, 2024

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Локализация подвижных особенностей уравнения Блазиуса. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2024.

Изучаются подвижные особенности уравнения Блазиуса в комплексной плоскости. Предложены численные алгоритмы их локализации с большой точностью. Все эти особенности равноправны и могут быть представлены одной такой особенностью. Получено асимптотическое разложение в ее окрестности в явном виде и посчитаны его коэффициенты. Показано, что это степенно-логарифмическое разложение сходится и дает локальную параметризацию римановой поверхности функции Блазиуса.

Ключевые слова: функция Блазиуса, риманова поверхность решения, подвижные особенности, высокоточные вычисления

V.P. Varin. Localazation of movable singularities of the Blasius equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2024.

We study movable singularities of the Blasius equation in the complex plane. Numerical algorithms of their localization are given that allow to find singularities with high accuracy. All these singularities are equivalent and may be represented by one of them. We obtain an asymptotic expansion in the neighborhood of the singularity in explicit form and compute its coefficients. This power-logarithmic expansion is shown to be convergent and giving a local parametrization of the Riemann surface of the Blasius function.

Key words: Blasius function, Riemann surface of solution, movable singularities, high precision computations

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
Москва, 2024 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые классические задачи механики со временем не теряют свою значимость и популярность. Яркий пример – это задача Кеплера, без которой не обходится ни одно тестирование очередного симплектического интегратора. Другой пример – это классическая задача Блазиуса обтекания пластины – исторически первая и самая простая задача обтекания, поставленная в рамках теории погранслоя Прандтля.

Блазиус предложил эту задачу, проделал ее редукцию к математической формулировке и дал ее решение, которое вполне удовлетворяло всем возможным приложениям (см. [1]).

В то время (начало XX века) авиация имела примерно такую же значимость, как космонавтика в середине 60-х. Поэтому задачи обтекания и их приложения вызывали самый оживленный интерес.

Вслед за Блазиусом эту задачу решили другие исследователи, и более эффективными способами (см., например, [2]), однако в практическом плане к решению Блазиуса трудно было что-либо добавить.

Тем не менее задача Блазиуса по-прежнему является источником большого количества публикаций (которые можно найти в интернете), где предлагается очередной новый метод ее решения, который дает хороший практический результат. При этом авторы игнорируют тот факт, что практическая значимость этой задачи была исчерпана самим Блазиусом.

Между тем задача Блазиуса в ее математической постановке по-прежнему весьма далека от ее полного исследования. Эта задача имеет вид

$$y'''(x) + 2y(x)y''(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = s, \quad x \in [0, \infty), \quad (1)$$

где константу (Блазиуса) s надо определить так, чтобы $y'(x) \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty$. Решение этой краевой задачи, $y(x)$, мы называем *функцией Блазиуса*.

Форма записи (1) уравнения не является единственной. В литературе встречаются многие другие формулировки. Однако все они эквивалентны, так как наряду с функцией Блазиуса $y(x)$ решением будет также любая функция $w(x) = a y(ax), a = \text{const} \in \mathbb{C}$.

Поскольку уравнение (1) неинтегрируемо (что будет очевидно из последующего изложения), то о «полном» исследовании этой задачи, разумеется, не может идти речи. Тем не менее, вопрос о свойствах конкретного решения, т.е. функции Блазиуса, вполне имеет смысл, и ему также посвящено множество работ.

По-видимому, первым, кто обратил внимание на эту задачу как на чисто математическую, был Г. Вейль (см. [3]). Вейль сразу же отметил существенные (по его мнению) недостатки работы Блазиуса [1]: отсутствие доказатель-

ства, что краевая задача (1) вообще имеет нужное решение; использование в вычислениях степенного ряда, радиус сходимости которого неизвестен; а также использование асимптотического ряда в бесконечности, который, по мнению Вейля, «вероятно, расходится».

Хотя критика Вейля статьи Блазиуса дана в весьма корректных формулировках, однако впечатление, которое она производит на современных исследователей, можно выразить словами: «Вейль подверг статью Блазиуса резкой критике» (см. [4]).

Возможно, историкам математики удастся установить, почему Вейль дал столь предвзятую критику статьи Блазиуса и нет ли здесь личных мотивов. Пока что отметим, что критика Вейля полностью несостоятельна.

Во-первых, Блазиус сам вывел эту задачу путем ее редукции из физической постановки, т.е. он знал ее предысторию, из которой следовало существование решения из физических соображений. Задача Блазиуса была лишь вычислить это решение, и с этой задачей Блазиус прекрасно справился. Сам Вейль в [3] дал доказательство существования решения задачи (1) в несколько строк.

Во-вторых, радиус сходимости степенного ряда функции $y(x)$ в нуле Блазиусу был не нужен, так как он применил вариант Паде-аппроксимации как раз с целью продолжить решение за пределы круга сходимости, на что Вейль не обратил внимания. Теперь эта техника является стандартной, в том числе и для задачи (1) (см. [5]).

Наконец, использование в вычислениях (вероятно) расходящегося асимптотического ряда, что по мнению Вейля недопустимо, применяется со времен Эйлера для заведомо расходящихся рядов и также является стандартной практикой (формула Эйлера–Маклорена, приведение к нормальной форме и т.д.).

С легкой руки Вейля асимптотический ряд функции Блазиуса в бесконечности стали называть в литературе расходящимся (см. [5]), но иногда «вероятно, расходящимся» (см. [6]).

Между тем, как показано в [7], асимптотический ряд функции $y(x)$ в бесконечности сходится, причем область его сходимости пересекается с кругом сходимости степенного ряда функции $y(x)$ в нуле. Так что метод Блазиуса решения сингулярных краевых задач путем сращивания различных разложений функции, вычисленных в противоположных концах интервала, работает в этой задаче. Этот метод решения краевых задач также получил название «метод погранслоя».

Расходимость, впрочем, также никуда не делась, так как асимптотические разложения функций – членов асимптотического ряда Блазиуса – расходят-

ся, потому что зависят от функции $\operatorname{erf}()$. Блазиус в [1] вычислил два члена своего ряда. В [7] приведено три члена этого ряда в явном виде и четыре члена в виде асимптотических разложений. В других работах, например, в [4], можно найти только главный член асимптотики функции Блазиуса при $x \rightarrow +\infty$.

Заметим, что Блазиус полагал, что последующие члены его асимптотического ряда могут быть вычислены с помощью тех же функций, что входят в первые два, вычисленные им. Однако это не так. В [7] было показано, что начиная с третьего члена ряда в разложении появляются новые трансценденты, которые не выражаются через известные элементарные и специальные функции.

За исключением единичных работ, которые мы цитируем, интерес исследователей к функции Блазиуса сосредоточился почти исключительно на степенном ряде функции $y(x)$ в нуле и его свойствах. В основном исследователей интересовала возможность аналитического продолжения степенного ряда различными методами вплоть до бесконечности для определения константы s . На этом пути был достигнут ряд успехов. В частности, в [8] константа Блазиуса была вычислена с 30 десятичными знаками.

Вычисление константы Блазиуса s с большим и, главное, контролируемым числом десятичных разрядов является отдельной и весьма нетривиальной задачей (см. [9]). В [10] мы вычислили эту константу со 100 десятичными разрядами с помощью редукции задачи (1) к уравнению Крокко (см. [11]) с применением плоских разложений (см. [7]). Форма уравнения (1) была выбрана нами потому, что для нее плоский асимптотический ряд функции $y(x)$ в бесконечности записывается самым простым образом.

Другая весьма нетривиальная вычислительная задача – это определение точного радиуса сходимости R степенного ряда функции Блазиуса. До сих пор эта константа известна лишь с несколькими десятичными знаками (до 10), причем без какого-либо обоснования.

В этой статье мы предлагаем новый способ вычисления точного радиуса сходимости степенного ряда функции $y(x)$, основанный на комбинации нескольких техник.

Сначала (см. разд. 2) мы конструируем процедуру численного интегрирования уравнения (1) методом тейлоровских разложений (МТР), которая эквивалентна методам Рунге–Кутты неограниченного порядка. В частности, мы проинтегрировали задачу (1) в постановке Топфера до $x = 50$ (за доли секунды при разрядной сетке в 128 десятичных разрядов) и подтвердили значение константы Блазиуса (100 десятичных разрядов), найденное в [10].

Эта процедура МТР аналогична той, которую мы использовали в [10] для

интегрирования уравнения Крокко на римановой поверхности его решения (см. также [12]). В отличие от других методов, МТР позволяет интегрировать уравнение (1) в вещественной и комплексной области без каких-либо замен переменных.

Функция $y(x)$, как известно (и см. ниже), имеет три особые точки на границе круга сходимости ее степенного ряда, расположенные в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в этот круг. Одна из особых точек лежит на вещественной оси, $x_* = -R$. Все особые точки на границе круга равноправны, поэтому мы изучаем x_* .

Отсюда, в частности, следует несостоятельность возражения Вейля против использования степенного ряда для вычисления функции $y(x)$ при $x > R$ на вещественной оси: точка $x = R$ не является особой, и ряд можно продолжить за пределы круга сходимости (что Блазиус и сделал).

Интегрируя уравнение (1) в комплексной области, можно приблизиться достаточно близко к x_* внутри и вне круга сходимости и получить там значения функции $y(x)$ с (в принципе) неограниченной точностью. Эти данные дают возможность определить радиусы сходимости функции $y(x)$ в нескольких точках, близких к x_* .

Радиус сходимости функции $y(x)$ в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{C}$ определяется (приближенно) по признаку Коши с помощью большого (300–400) количества тейлоровских коэффициентов ее разложения в этой точке.

Точка пересечения на границе трех различных кругов в комплексной плоскости определяется однозначно и является нужной особой точкой. Так можно графически локализовать любую особенность аналитической функции (не только в этой задаче, см. [12]).

Однако этот алгоритм дает лишь (иногда весьма хорошее) приближение к нужной особенности. Для ее уточнения необходимо иметь локальную параметризацию римановой поверхности решения в окрестности особой точки.

Как показано в [10] и [12], такую локальную параметризацию дает асимптотическое разложение функции в (вообще говоря, секториальной) окрестности данной подвижной особенности.

Особенности функции Блазиуса $y(x)$ были охарактеризованы в [4] как «полюса с логарифмическими поправками». В работе [4] была найдена одна такая поправка и была также высказана гипотеза, что этот отрезок ряда продолжается неограниченно и что, возможно, для него существует еще и плоская добавка.

В данной статье (см. разд. 3) мы закрываем эту проблему и предъявляем степенно-логарифмический ряд в окрестности точки x_* (а также других таких особенностей) в явном виде. Показана сходимость этих рядов (по край-

ней мере) вблизи особенностей в полном секторе $0 \leq \text{Arg}(x) < 2\pi$. Такого рода ряды называют также *psi-ряды* (см. [13]).

С помощью рекуррентной формулы для коэффициентов psi-ряда мы вычислили 100 членов этого ряда в явном виде. Используя все более длинные отрезки этого ряда, мы находим три произвольных параметра, входящих в разложение вблизи нужной особенности, методом Ньютона, пользуясь значениями функции вблизи особенности, полученными с помощью МТР.

Как оказалось (см. разд. 4), psi-ряд в точке x_* (и в других особенностях) сходится весьма быстро и позволяет вычислить функцию $y(x)$ вне и в значительной части внутри ее круга сходимости. В частности, это дает еще одно подтверждение правильности найденной нами константы Блазиуса.

Далее мы используем описанные техники для локализации (с большой точностью) других 12 особенностей функции Блазиуса, что дает возможность предсказать расположение всех особенностей функции $y(x)$ на основном листе ее римановой поверхности.

2. МТР ДЛЯ ЗАДАЧИ БЛАЗИУСА И РАДИУС СХОДИМОСТИ

Как показано в [12], МТР является незаменимым для интегрирования ОДУ на римановых поверхностях решений ОДУ. Этот (весьма недооцененный) метод позволяет в ряде случаев вычислять решения неинтегрируемых ОДУ с той же точностью, как если бы функции были заданы явно.

Для задачи (1) МТР строится весьма просто. Для этого подставим в (1) решение в виде формального степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

и соберем подобные члены. Тогда $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$, $a_2 = y''(0)/2$, а для последующих коэффициентов решения получаем рекуррентную формулу

$$n(n-1)(n-2)a_n = 2 \sum_{m=2}^{n-1} m(1-m)a_{n-m-1}a_m, \quad n > 2. \quad (3)$$

Переменная $x = 0$ здесь – это, разумеется, текущее «время», так как уравнение (1) автономно.

Насколько нам известно, коэффициенты ряда (2) в этой задаче никогда не вычислялись. Исследователей интересовала лишь спецификация этого ряда для функции Блазиуса в нуле. Этот ряд имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^{k+1} x^{3k}, \quad (4)$$

где $b_0 = 1$ и

$$3n(3n+1)(3n+2)b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (3k+2)(3k+1)b_{n-k-1}b_k, \quad n > 1.$$

Из структуры ряда (4) и значений его коэффициентов сразу следует ряд (хорошо известных) свойств функции Блазиуса.

Поскольку ряд (4) знакопеременный (что легко проверить), то для отрицательных x ряд становится знакостоянным. Поэтому по теореме Прингсхайма (см. [14, р. 133]) точка $x = -R$ является особой для функции $y(x)$, где R – это (пока неизвестный) радиус сходимости ряда (4). А поскольку ряд (4) фактически по переменной x^3 , то отсюда следует существование еще (по крайней мере) двух сингулярностей на границе круга сходимости ряда (4), $x_*^\pm = x_* \exp(\pm 2\pi i/3)$. Эти три особенности образуют равносторонний треугольник, вписанный в круг сходимости.

Других особенностей у функции Блазиуса на границе круга сходимости ряда (4) нет. Но это пока что экспериментальный факт. Также неизвестно, сходится ли ряд (4) в регулярных точках на границе круга сходимости.

Алгоритм построения процедуры МТР подробно описан в [10] для уравнения Крокко (см. также [12]). Он переносится без существенных изменений на задачу (1). Вкратце опишем функционал погрешности (который мы применяли также в [10]) для контроля шага интегрирования.

Зная данные Коши в регулярной точке $x = x_0$ (которую можно считать нулем) функции $y(x)$, вычисляем достаточно большое количество N коэффициентов ряда (2) по формуле (3). Мы брали обычно 60–80 коэффициентов. Далее выбирается шаг переменной x так, что последний член отрезка разложения (2) близок к машинной точности, ε .

Если последний член разложения (2), $a_N x^N$, больше по модулю, чем заданная точность ε , то шаг делится на 2, т.е. $x \rightarrow x/2$. А если $|a_N 2^N x^N| < \varepsilon$, то шаг увеличивается, т.е. $x \rightarrow 2x$.

Здесь, разумеется, термин «точность» понимается в смысле «функционал погрешности». Задание такого функционала дает обратную связь МТР с локальными свойствами решения. В частности, при приближении к особой точке (любой природы) МТР начинает измельчать шаг интегрирования, который (по определению) не может быть меньше заданной величины. Это позволяет локализовать особую точку, т.е. подойти к ней достаточно близко без потери точности решения. Максимальный шаг также не должен превосходить заданной величины (скажем, $1/2$), но это событие не генерирует ошибку в программе.

Приведенные формулы также дают возможность оценить радиус сходимости функции $y(x)$ вблизи (пока неизвестной) особенности с помощью признака Коши. Для этого нужно посчитать больше коэффициентов ряда (2) (300–400).

Пусть $R_n = 1/|a_n|^{1/n}$, где $a_n = [x^n]y(x)$ – это n -й коэффициент ряда (2). Согласно классической формуле Коши–Адамара нижний предел величин R_n , $n \rightarrow \infty$, дает радиус сходимости формального ряда. Здесь, очевидно, величины $a_n = 0$ следует опустить, что актуально для ряда (4).

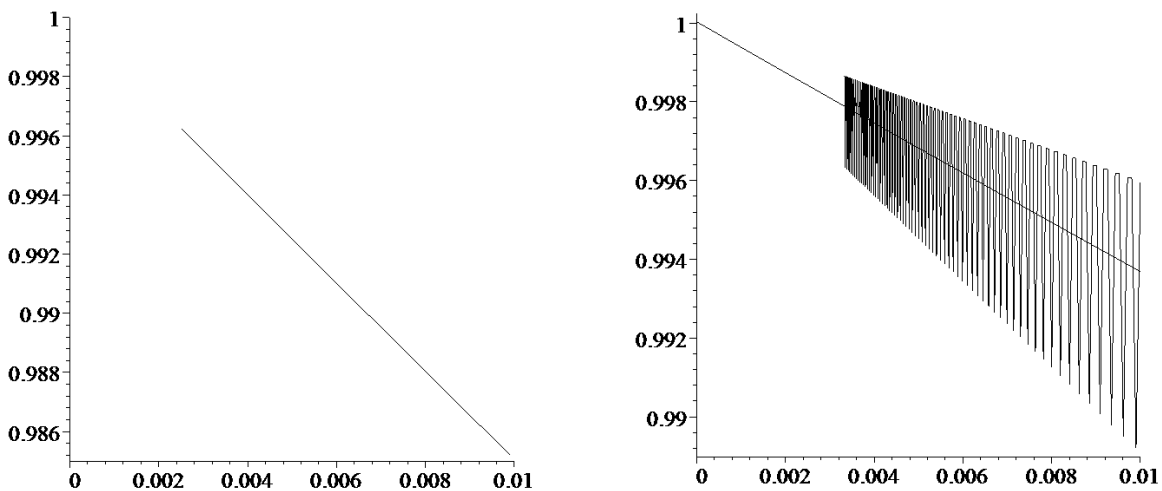
Определение нижнего предела величин R_n вблизи особых точек по ограниченному количеству посчитанных коэффициентов является, вообще говоря, весьма нетривиальной, а иногда и неразрешимой задачей экстраполяции, так как коэффициенты степенных рядов аналитических функций могут вести себя весьма непредсказуемо (а иногда и стохастически). Подчеркнем, что речь идет не о численной неустойчивости при вычислении этих коэффициентов, а о «детерминистском хаосе», который наблюдается и при вычислениях в рациональной арифметике (см. [15]).

В качестве примера возьмем константу s (которую мы заимствуем из разд. 4) так, чтобы радиус сходимости ряда (4) был в точности равен 1,

$$s = 15.29320820375367569356, \quad (5)$$

где мы оставили только 20 десятичных разрядов после точки (без округления).

Экстраполировать функцию к нулю технически проще, чем к бесконечности. На фиг. 1 приведены график функции $R_n(1/n)$, вычисленный в точке $x = 0$ (слева), и такой же график, вычисленный в точке $x = 1$ (справа).



Фиг. 1. Диаграммы роста коэффициентов ряда (2) в точках $x = 0$ и $x = 1$

В точке $x = 0$ полученная таблица позволяет легко экстраполировать функцию $R_n(t)$ к нулю. Слева на фиг. 1 получаем $R \approx 1.00000005054$ по 5 точкам из таблицы с помощью стандартной полиномиальной экстраполяции.

Однако в точке $x = 1$, где радиус сходимости также равен 1, полиномиальная экстраполяция бессмысленна. Но в этом случае также можно оценить радиус сходимости методом наименьших квадратов по достаточно большой выборке.

Справа на фиг. 1 приведен также график параболы, приближающей выборку $\{a_{100}, \dots, a_{400}\}$. Здесь получаем $R \approx 1.00002963$, что также является весьма хорошим результатом, учитывая, что это лишь приближенные значения радиуса сходимости, которые необходимо уточнять другими методами. Этим мы займемся в разд. 4.

К счастью, типичной картиной при локализации особенностей функции Блазиуса является фиг. 1 слева, если приближаться к особенностям с «подходящей стороны».

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФУНКЦИИ БЛАЗИУСА ВБЛИЗИ ОСОБЕННОСТИ

Подставим в уравнение (1) пробную функцию $y(x) = ax^r$. Тогда полученные мономы имеют степени $r - 3$ и $2r - 2$, поэтому, предполагая, что $r - 3 = 2r - 2$, для того чтобы мономы могли сократиться. То есть $r = -1$.

Подставим теперь в уравнение (1) функцию $y(x) = a/x$ и найдем, что $a = 3/2$. Таким образом, уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство решений

$$y(x) = \frac{3}{2(x-h)}, \quad h \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Проделанные манипуляции весьма напоминают вычисление уравнения разветвления в регулярном методе возмущений. Согласно этому методу ищем теперь решения, близкие к решению (6). При этом временно можно положить $h = 0$ в силу инвариантности решений относительно сдвигов по x .

Подставим в уравнение (1) функцию $y(x) = 3/2/x + au(x)$, где a – это теперь малый параметр, и линеаризуем полученное выражение, т.е. разложим его в ряд по a и возьмем линейный член. Получим уравнение Эйлера

$$x^3 u'''(x) + 3x^2 u''(x) + 6u(x) = 0. \quad (7)$$

Оно имеет решение

$$u(x) = Ax \sin(2^{1/2} \ln(x)) + Bx \cos(2^{1/2} \ln(x)) + \frac{C}{x^2}, \quad (8)$$

где A, B, C – это произвольные константы. Но x здесь может быть и $x - h$, т.е. решение (8) содержит один лишний параметр.

Нетрудно догадаться, что в решении (8) следует положить $C = 0$, так как этот член является частью асимптотического разложения решения (6), а у нас пока $h = 0$. Таким образом, получаем «логарифмическую поправку к полюсу», найденную в [4].

Однако решение (8) неудобно, если требуется вычислить много членов разложения. Поэтому, действуя стандартным образом, подставим в уравнение (7) моном $u(x) = x^r$ и получим характеристическое уравнение

$$r^3 - r + 6 = 0,$$

из которого находим $r \in \{-2, 1 \pm 2^{1/2}i\}$, причем $r = -2$ следует опустить.

Таким образом, получаем линейную поправку к полюсу в виде

$$u(x) = (Ax^r + Bx^{-r})x, \quad (9)$$

где $r = \sqrt{-2}$ здесь и далее в этой статье. Так что мы ищем фактически степенное разложение вблизи особенности.

Предложение 1. *Формальное разложение любого решения уравнения Блазиуса в окрестности любой его подвижной особенности имеет вид степенного ряда по переменной x с коэффициентами, которые являются полиномами Лорана от переменной x^r .*

Доказательство. Можно считать, что подвижная особенность находится в нуле, т.е. $h = 0$ в (6). Подставим в уравнение (1) (умноженное на x^3) формальное разложение по малому параметру a :

$$y(x) = \frac{3}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n u_n(x) \quad (10)$$

и соберем подобные члены по параметру a . Тогда функция $u_n(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$x^3 u_n'''(x) + 3x^2 u_n''(x) + 6u_n(x) = -2x^3 \sum_{m=1}^{n-1} u_m(x) u_{n-m}''(x), \quad (11)$$

т.е. мы получаем стандартную задачу регулярной теории возмущений для уравнения Эйлера (7).

Для $n = 1$ получаем в (11) однородное уравнение, решением которого является функция $u_1(x) = u(x)$ в (9). Поэтому правая часть (11) по индукционному предположению является суммой мономов нужного вида. Но

уравнение (11) линейно, поэтому достаточно решить неоднородное уравнение Эйлера (7)

$$x^3 u'''(x) + 3x^2 u''(x) + 6u(x) = x^q, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет частное решение

$$u(x) = \frac{x^q}{q^3 - q + 6},$$

которое нам и нужно, плюс общее решение (9) однородного уравнения (12), которое следует опустить, так как оно уже учтено в функции u_1 .

Показатели q здесь не могут быть критическими (резонансными), т.е. равняться найденным выше корням знаменателя $q^3 - q + 6$, что следует из вида правой части (11). Ч.Т.Д.

Опуская (довольно громоздкие) выкладки, получаем локальную параметризацию функции Блазиуса в окрестности любой ее особенности (здесь она в нуле):

$$y(x) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \sum_{m=0}^n V_{n,m} A^{n-m} B^m x^{r(2m-n)}. \quad (13)$$

Разложение (13) зависит от трех параметров, так как x там заменяется на $x - x_*$ для (уже) известной или (еще) неизвестной особенности x_* . Параметры A и B зависят от конкретной особенности x_* и находятся вместе с ней. Они также служат в качестве формальных малых параметров, т.е. разложение (13) можно подставить в уравнение (1) как формальное решение и определить коэффициенты $V_{n,m}$ так, что ряд Тейлора по переменным $[A, B]$ будет нулем до нужного порядка.

Величины $V_{n,m}$ принадлежат квадратичному полю $\mathbb{Q}(r)$ и находятся только один раз. При этом $V_{1,0} = V_{1,1} = 1$ в силу произвольности параметров A и B . Далее имеем

$$V_{2,0} = -\frac{13}{363} + \frac{5}{726}r, \quad V_{2,1} = \frac{2}{15}, \quad V_{2,2} = -\frac{13}{363} - \frac{5}{726}r, \quad \dots$$

Коэффициент $1/2$ перед суммой в (13) чисто технический, так как величины $V_{n,m}$ первоначально определялись для другой формы уравнения (1).

Для определения констант $V_{n,m}$ заметим, что члены ряда (13) являются однородными функциями параметров A и B степени n . Поэтому, сравнивая это разложение с разложением (10) по малому параметру a , получаем решение уравнения (11):

$$u_n(x) = \frac{1}{2} x^{2n-1} \sum_{m=0}^n V_{n,m} A^{n-m} B^m x^{r(2m-n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставим это решение в уравнение (11) и соберем подобные члены при мономах $A^{n-m} B^m$. Тогда (опуская громоздкие, но очевидные выкладки) получаем

$$V_{n,m} = U_{n,m} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=K_1}^{K_2} J_{j,k} V_{n-j,m-k} V_{j,k}, \quad (14)$$

где $K_1 = \max(0, m + j - n)$, $K_2 = \min(j, m)$, $U_{n,m} = P_{n,m}/Q_{n,m}$ и

$$\begin{aligned} J_{j,k} &= j(6 - 2j - 8k) - 2 + 8k^2 + (4j - 3)(j - 2k)r, \\ P_{n,m} &= 3 - (2n - 1)(n^2 - 12mn + 2n + 12m^2) + \\ &\quad (n - 2m)(5n^2 + 4mn - 6n + 1 - 4m^2)r, \\ Q_{n,m} &= 2(3n^2 - 2n + 3 - 4mn - 4m + 4m^2)(6n^2 + 4n + 1 - 8mn + 8m^2) \\ &\quad (3n^2 - 6n + 3 - 4mn + 4m + 4m^2). \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости разложения (13) достаточно показать, что константы $V_{n,m}$ не могут расти слишком быстро. Из предл. 1 почти очевидно, что они должны убывать, так как каждый моном x^q в правой части (12) делится на $q^3 - q + 6$, а q растет.

Тем не менее формальное доказательство этого факта технически весьма сложно, и мы дадим т.н. *computer assisted proof*.

Предложение 2. *Разложение (13) сходится в окрестности любой подвижной особенности уравнения (1) для достаточно малых $|x|$.*

Доказательство. Покажем, что $|V_{n,m}| < p/n^2$ для некоторой (пока неопределенной) константы p .

Отметим, что более слабые гипотезы, $|V_{n,m}| < p$, $|V_{n,m}| < p/n$, достаточные для сходимости, не удается доказать способом мажорант, а более сильные гипотезы, $|V_{n,m}| < p/n^3$ и т.д., приводят к непреодолимым техническим трудностям.

Заметим сперва, что K_1 и K_2 в формуле (14) можно взять $K_1 = 0$ и $K_2 = j$. Это приведет к тому, что в формуле (14) справа появятся величины $V_{j,k}$ для $k < 0$. Но по этой же формуле они нули.

Покажем, что $|J_{j,k}| < 6j^2$. Возведя в квадрат, получаем неравенство:

$$0 < -4 + 24j - 40k^2 - 62j^2 + 40jk + 72j^3 - 96j^2k + 96jk^2 + 96j^3k - 160j^2k^2 + 128jk^3 - 64k^4, \quad 1 \leq j < n, \quad 0 \leq k \leq j.$$

Подставив в него $j = ak$, получаем:

$$0 < a^3 - \frac{(31 + 48k + 80k^2)a^2}{12k(4k + 3)} + \frac{(3 + 5k + 12k^2 + 16k^3)a}{3k^2(4k + 3)} - \frac{4 + 40k^2 + 64k^4}{24k^3(4k + 3)}.$$

Таким образом, необходимо показать, что правая часть последнего неравенства не может иметь корней $a \geq 1$.

Проверяем, что единственный вещественный корень этого уравнения имеет вид

$$a = 1 - \frac{3}{4k} + \frac{5}{6k^2} - \frac{9}{16k^3} + O(1/k^4),$$

что доказывает нужную оценку.

Таким образом, двойная сумма в формуле (14) оценивается по модулю сверху величиной

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^j \frac{6p^2}{(n-j)^2} = p^2 ((\pi^2 - 6\psi(1, n))(n+1) - 6\psi(n) - 6\gamma), \quad (15)$$

где $\psi()$ – это полигамма функции и γ – это константа Эйлера.

Оценим теперь $|U_{n,m}|$. Подставим сюда $m = an$, где $0 \leq a \leq 1$. Тогда

$$|U_{n,m}| = \frac{2^{1/2}}{4(3 - 4a + 4a^2)^{3/2} n^3} + O(1/n^4),$$

причем можно проверить, что максимальное значение коэффициента здесь достигается при $a = 1/2$. Так что

$$|U_{n,m}| < \frac{1}{8n^3} + O(1/n^4), \quad n \rightarrow \infty.$$

Комбинируя эту асимптотику с асимптотикой правой части (15), получаем оценку

$$|V_{n,m}| < \frac{p^2 \pi^2}{8n^2} + O(1/n^3) < p/n^2,$$

поэтому необходимо

$$p < 8/\pi^2 \approx 0.8105694691.$$

Можно проверить, что для $p = 8/\pi^2$ оценка $|V_{n,m}| < p/n^2$ выполняется для всех $V_{n,m}$ за исключением $V(1, 0) = V(1, 1) = 1$ (чем можно пренебречь). Ч.Т.Д.

Величины $V_{n,m}$ вычисляются один раз. Мы вычислили их до $n = 100$. Они убывают значительно быстрее, чем это следует из полученной нами (грубой) оценки. Например, для $m = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \max(|V_{10,m}| < 1.214 \times 10^{-10}, & \quad \max(|V_{20,m}| < 7.537 \times 10^{-21}, \\ \max(|V_{50,m}| < 2.222 \times 10^{-51}, & \quad \max(|V_{100,m}| < 4.211 \times 10^{-102}. \end{aligned}$$

Поэтому ряд (13) сходится очень быстро в окрестности найденных нами особых точек.

4. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ БЛАЗИУСА

Описанный в разд. 2 способ дает оценку радиуса сходимости ряда (4). Однако задача точного определения радиуса сходимости является частью задачи локализации особенности функции $y(x)$ на границе ее круга сходимости. Эта задача решается с помощью локальной параметризации римановой поверхности в окрестности этой особенности. То есть мы вычисляем положение особенности вместе с параметрами разложения (13) вблизи этой особенности.

Будем исходить из константы Блазиуса, которую мы вычислили в [10] со 100 десятичными разрядами (и проверили с помощью МТР в этой работе):

$$s = 0.66411467243039259787,$$

где мы оставляем 20 десятичных разрядов после точки (без округления).

Применяя способ оценки радиуса сходимости из разд. 2 и используя 400 коэффициентов ряда (4), получаем

$$R \approx 2.8450191,$$

где мы оставляем 7 десятичных разрядов после точки, так как различные способы экстраполяции дают примерно такую погрешность.

Зная данные Коши функции $y(x)$ в нуле, а также зная хорошее приближение $h \approx -R$ для нужной особенности, посчитаем с помощью МТР три точки $y_k(x_k)$, $k = 1, 2, 3$, лежащие достаточно близко к $x = h$ (в верхней полуплоскости, см. ниже), например, $x_1 = h + 0.1 + 0.1i$, $x_2 = h + 0.1i$, $x_3 = h - 0.1 + 0.1i$.

Ограничимся пока одним членом разложения (13). Тогда получим систему трех уравнений для определения трех величин, $x_* = h = -R$, A , B :

$$\frac{3}{2(x_1 - h)} + \frac{1}{2}(A(x_1 - h)^{-r} + B(x_1 - h)^r)(x_1 - h) = y_1,$$

плюс еще два уравнения для x_2 , x_3 .

Поскольку h уже примерно известно, то два этих уравнения дают линейную систему для определения A и B приближенно. Затем все величины уточняются методом Ньютона для полной системы.

Следующая аппроксимация использует уже больше членов ряда, и т.д. Здесь весьма существенно, что начальное приближение для метода Ньютона используется с предыдущего шага. Этот процесс быстро сходится, и мы получаем точные значения x_* , A , B , соответствующие данной особенности.

На самом деле, все три параметра в разложении можно найти по одной точке, близкой к особенности. Но для этого нужны две производные r -ряда (13), а они сходятся не столь быстро.

Проведенные расчеты в плавающей арифметике со 128 десятичными разрядами и с использованием всех найденных нами членов разложения (13) позволяют заключить, что константы R , а также A и B найдены с той же точностью, что и константа Блазиуса s , т.е. с не менее чем 100 десятичными разрядами.

Присвоим этой особенности нулевой номер. Тогда $x_0 = -R$ и

$$\begin{aligned} x_0 &= -2.84501902726131999873954785620739393862040018057565, \\ A_0 &= -0.15710675649601491680343952351761570899267544541699 \\ &\quad -0.21250837978665832496721050689688832248953141146662 i, \\ B_0 &= \bar{A}_0. \end{aligned}$$

При этом величины $|\text{Im}(x_0)|$, $|\text{Im}(A_0 + B_0)|$ и $|\text{Re}(A_0 - B_0)|$ порядка 10^{-115} . Здесь и далее мы используем знак равенства вместо знака \approx , чтобы подчеркнуть, что все приведенные цифры правильны.

Для проверки найденных значений вычислим $y(-2)$ внутри круга сходимости функции Блазиуса двумя способами: с помощью МТР (с точностью 10^{-120}) и с помощью psi-ряда (13). Получаем $y(-2) = 1.692014683425158$, причем погрешность, т.е. разность значений, полученных этими двумя способами, меньше 1.5×10^{-115} . Такая же погрешность получается для $y'(-2)$ и $y''(-2)$.

Применим теперь psi-ряд (13) с найденными параметрами в точке $x = 0$. Получаем $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) = s$ с погрешностью менее 10^{-72} . Наконец, в точке $x = R$, т.е. в правой границе круга сходимости, psi-ряд (13) также сходится и дает значения с погрешностью менее 10^{-10} .

То есть ряд (13) для особенности $x_0 = -R$ сходится в значительной части круга сходимости функции Блазиуса.

Воспользуемся преобразованием

$$y(x) \rightarrow Ry(Rx) \tag{16}$$

и получим другое решение уравнения (1), где радиус сходимости ряда (4) в точности равен единице. Это решение мы также обозначаем $y(x)$ и будем использовать далее.

Новую константу Блазиуса для этого решения можно получить двумя способами. Во-первых, преобразование (16) дает $s \rightarrow R^3 s$, и мы получаем константу (5). Во-вторых, преобразование (16) для ряда (13) дает новые константы для сингулярности номер ноль, $A_0 \rightarrow A_0 R^{2-r}$ и $B_0 \rightarrow B_0 R^{2+r}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \\ A_0 &= -1.82977538343884844627 + 1.10799042143797341408 i, \\ B_0 &= \bar{A}_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Воспользуемся этими константами и посчитаем с помощью psi -ряда (13) (и его производных) данные Коши в точке $y(-0.9)$, а затем продолжим решение с помощью МТР до начала координат. Тогда получим значение $s = y''(0)$, которое отличается от значения (5), полученного перенормировкой, менее чем на 1.7×10^{-113} .

Наконец, еще один тест состоит в интегрировании уравнения (1) с помощью МТР до, скажем, $x = 50$. Асимптота функции Блазиуса, которая ранее определялась величиной $1 \approx y'(50)$, теперь должна определяться величиной $y'(50) \approx R^2 = 8.09413326547$. Сравнение найденных значений дает погрешность менее 2×10^{-100} .

Далее мы применим описанную выше технику для локализации особенностей (нормированной) функции Блазиуса на основном листе ее римановой поверхности.

Насколько нам известно, единственная работа, где изучались эти особенности – это [4]. Однако там использовались менее эффективные техники, чем те, которые мы применяем. Вероятно, поэтому в [4] не приведены координаты особенностей (кроме нулевой), а дана лишь карта, указывающая их примерное расположение.

Здесь мы использовали ранее не определенный термин «основной лист римановой поверхности», который мы не нашли в литературе. Целесообразность введения такого понятия становится очевидной, если учесть, что функция $y(x)$ имеет логарифмическое ветвление в каждой найденной особенности. При этом такие же особенности появляются на каждом новом листе.

Назовем *основным листом римановой поверхности функции $y(x)$* ту ее максимальную часть, содержащую выбранную фиксированную точку, где функция $y(x)$ является однолистной.

Очевидно, основной лист накрывается связной областью комплексной плоскости. При этом область может иметь разрезы, хотя сама риманова поверхность, очевидно, не имеет никаких разрезов.

Для локализации первых трех особенностей мы использовали описанную выше технику, а также информацию об их примерном расположении из работы [4]. Далее, как оказалось, положение очередной особенности, а также параметры A и B разложения (13) в ее окрестности получаются с хорошей точностью экстраполяцией с помощью цепной дроби Тиле (см. [16]). Таким образом, особенности функции Блазиуса «знают» о существовании друг друга. Затем параметры особенности уточняются с помощью МТР и метода Ньютона, как описано выше, и т.д.

Мы посчитали 12 особенностей функции Блазиуса вне круга ее сходимости. Приведем первые пять:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.35821681940048347940 + 0.19657373599841322819 i, \\ A_1 &= -1.48679034199329325530 + 3.25523005646407508446 i, \\ B_1 &= 36.32190354320512543494 - 24.82863034768050658313 i, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -1.63092586348973601179 + 0.31926201278310753935 i, \\ A_2 &= -0.43275851473458043519 + 4.94426781436958856873 i, \\ B_2 &= 87.54543050273010537300 - 28.45943538832630482236 i, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -1.86018084892740113209 + 0.41234917079067864077 i, \\ A_3 &= 0.94494699762147560292 + 6.25616403842760930165 i, \\ B_3 &= 140.75192643914654149356 - 16.91795717755493209310 i, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= -2.06185205360135174051 + 0.48909804426574563158 i, \\ A_4 &= 2.49626837715661274933 + 7.26328301073652287675 i, \\ B_4 &= 192.26574922688193223809 + 5.83101693255901869951 i, \end{aligned} \quad (21)$$

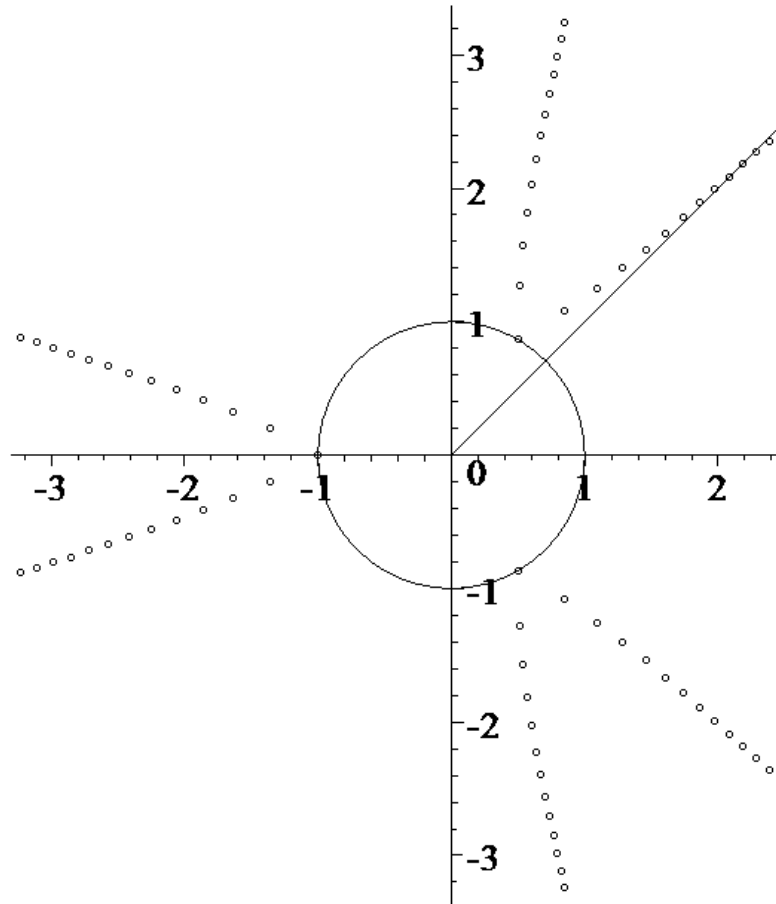
$$\begin{aligned} x_5 &= -2.24400276428369510418 + 0.55534301394899810777 i, \\ A_5 &= 4.14579653054319261168 + 8.01834397426943638115 i, \\ B_5 &= 240.65175317144279958164 + 37.04930639907155855254 i, \end{aligned} \quad (22)$$

Все посчитанные точки x_n , $n = 1, \dots$ лежат в левом верхнем квадранте комплексной плоскости (см. фиг. 2). По принципу симметрии Шварца комплексно сопряженные точки \bar{x}_n также являются особыми и лежат на том же листе римановой поверхности. В силу инвариантности функции Блазиуса относительно вращений на угол $2\pi/3$ в комплексной плоскости имеем еще два комплекта (в остальном идентичных) особых точек.

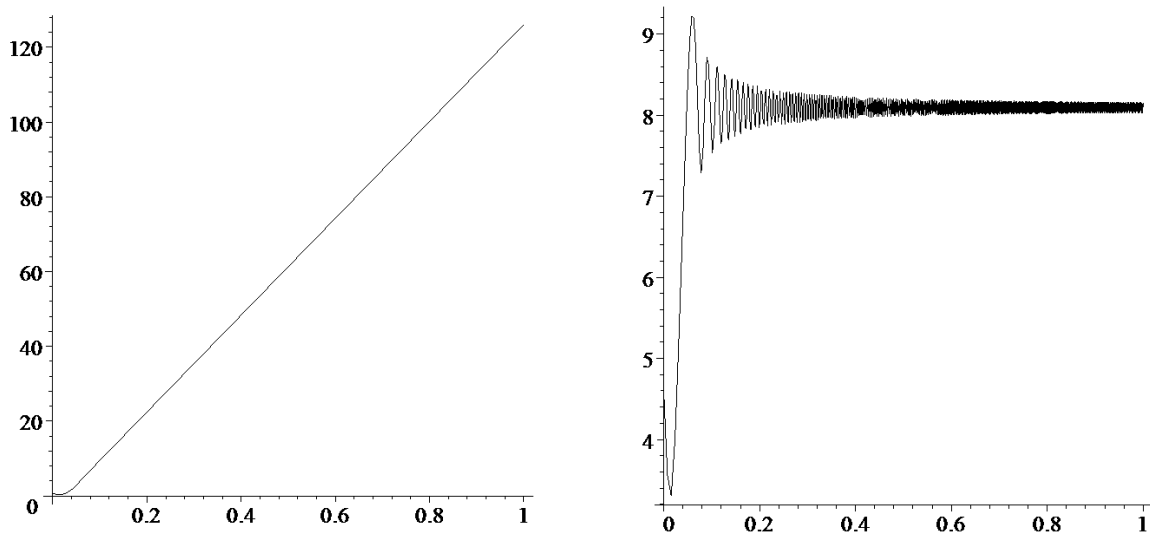
Отметим, что нарисовать контуры основного листа римановой поверхности на фиг. 2 – весьма нетривиальная задача. Ясно только, что необходим разрез $(-\infty, -1]$. Также необходимы разрезы, соединяющие особые точки x_1, x_2, \dots и $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$, но они уже не будут отрезками прямых.

В любом случае, части комплексной плоскости, окаймленные особенностями x_n, \bar{x}_n , $n = 1, \dots$ и их клонами, не могут целиком принадлежать основному листу. Например, невозможно проинтегрировать ОДУ (1) вдоль разреза $(-\infty, -1]$ влево далее чем ≈ -1.7 , так как риманова поверхность осциллирует с неограниченной амплитудой.

Также на фиг. 2 изображен круг сходимости ряда (4) и биссектриса первого квадранта. Фиг. 2 опровергает гипотезу (см. [4]), что эта биссектриса является асимптотой цепочки этих сингулярностей.



Фиг. 2. Особые точки функции Блазиуса

Фиг. 3. Функции $|y(x)|$ (слева) и $|y'(x)|$ (справа) на прямой $x = 16 \exp(i\pi/4)t - 0.3i$

Однако эта гипотеза, по-видимому, становится справедливой, если биссектрису на фиг. 2 опустить вниз на величину bi , где $0.25 < b < 0.3$. На фиг. 3 изображены графики величин $|y(x)|$ (слева) и $|y'(x)|$ (справа), посчитанные на прямой, соединяющей точки $x = -0.3i$ и $x = 16 \exp(i\pi/4)t - 0.3i$.

На левом фиг. 3 невозможно заметить, что функция, на самом деле, осцил-

лирует, причем с увеличивающейся частотой. Это видно из правого фиг. 3. Также на фиг. 2 видно, что расстояние между «полюсами» уменьшается с ростом их номера.

Заметим, что надежность интегрирования МТР такова, что такое поведение функции не влияет на точность результата. Мы проверили этот факт интегрированием до точки $x = 12$ на вещественной оси двумя путями: от полученного значения $x = 16 \exp(i\pi/4) - 0.3i$ и от начала координат. Результаты совпадают в пределах заданной точности ($\approx 10^{-60}$).

По имеющимся особым точкам (13 штук) не удается установить достоверно с помощью экстраполяции, стремится ли расстояние между ними к нулю или к некоторому конечному значению. Наши оценки дают это предельное расстояние порядка 0.015, но не больше 0.025.

В любом случае, аналитическая функция $y(x)$ – функция Блазиуса – устроена весьма сложно. Особенно если учесть, что все особые точки формально равноправны, так что не исключено, что каждая особая точка на фиг. 2 (кроме лежащих на окружности) порождает свой каскад особых точек, аналогичный фиг. 2.

Но даже если это не так, то все равно каждая особая точка на фиг. 2 имеет логарифмическое ветвление, т.е. порождает бесконечное число листов римановой поверхности. Это делает невозможным аппроксимацию функции $y(x)$ каким-либо конечным объектом, что, по нашему мнению, является основной характеристикой неинтегрируемой задачи.

Покажем теперь, что семейства особых точек на фиг. 2 не исчерпывают всех особенностей функции Блазиуса. То есть новые особенности появляются и на других листах римановой поверхности функции $y(x)$, что может делать ее структуру фрактальной (как у уравнения Ван-дер-Поля, см. [12]).

Для этого сперва модифицируем разложение (13) так, чтобы оно было применимо в полном секторе $0 \leq \text{Arg}(x) < 2\pi$. Ранее, как отмечалось, мы применяли разложение (13) только в правой или в верхней полуплоскости. При пересечении разреза $(-\infty, -1)$ у функции x^r происходит скачок, и разложение (13) неприменимо.

Это объясняется тем, что в компьютере нет функции $\text{Arg}(x)$ (которая помнит свою предысторию), а есть только функция $\text{arg}(x)$. Поэтому выше разреза $(-\infty, -1)$ функция x^r вычисляется (по умолчанию) по формуле

$$x^r = \exp(r (\ln |x| + i \arg(x))),$$

а ниже разреза – по формуле

$$x^r = \exp(r (\ln |x| + i (\arg(x) + 2\pi))).$$

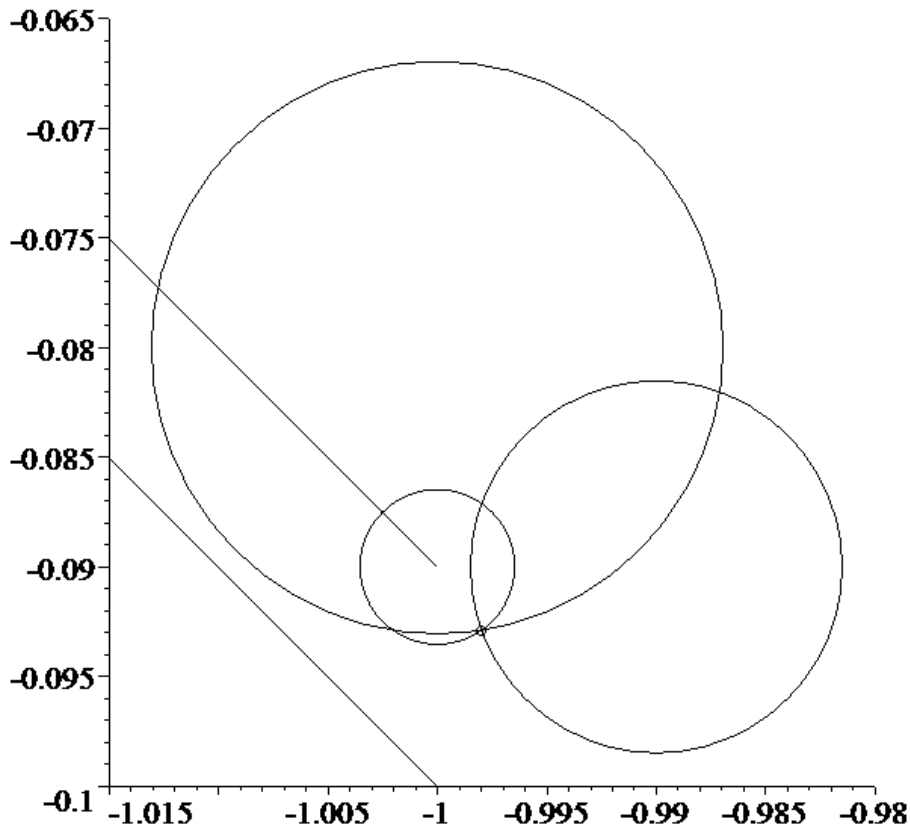
Теперь разложение (13) позволяет продолжить функцию $y(x)$ под разрез $(-\infty, -1)$ вблизи особой точки $x = -1$. Это нам нужно, впрочем, только для дополнительного контроля вычислений, так как МТР продолжает функцию под разрез без проблем.

С учетом сказанного, проинтегрируем уравнение (1) от начала координат до точки $x = -1 + c$, где c – это достаточно малая константа. Затем интегрируем против часовой стрелки по путям, соединяющим точки

$$-1 + c, -1 + ic, -1 - c, -1 - ic, -1 + c,$$

делая, таким образом, полный оборот вокруг особенности номер ноль.

Как оказалось, для $0 < c \leq 0.09$ удается сделать полный оборот вокруг особой точки с помощью МТР. Однако по мере увеличения c точность вычисления функции по разложению (13) падает в точке $-1 - ic$. А для $c = 0.1$ уже МТР дает отказ на отрезке $[-1 - ic, -1 + c]$, что указывает на близость «полюса».



Фиг. 4. Локализация особой точки функции $y(x)$ под разрезом $(-\infty, -1)$

На фиг. 4 показан процесс локализации особенности. Два отрезка на фиг. 4 – это фрагменты путей интегрирования $[-1 - c, -1 - ic]$ для $c = 0.09$ и $c = 0.1$. Три окружности – это круги сходимости функции $y(x)$, посчитанные в трех точках – их центрах. Особая точка находится в месте пересечения этих

окружностей. Графическое приближение оказывается весьма точным. Затем параметры разложения (13) в этой особой точке уточняются, как это описано ранее. В результате получаем:

$$\begin{aligned}x_* &= -0.99797794911737938494 - 0.09289365351459614851 i, \\A &= -1.40323390626127461021 + 3.19459532227363712719 i, \\B &= -14827.84231644442854754660 - 7123.626150343677269897376 i.\end{aligned}$$

Заметим, что полученные параметры разложения (13) в этой особенности также параметризуют риманову поверхность в ее окрестности, как и для особенностей на основном ее листе на фиг. 2.

Данная статья является завершающей в серии статей [9], [7] и [10] посвященных этой проблеме.

Список литературы

- [1] *H. Blasius*. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // *Z. Math. Phys.* **56**, 1-37 (1908); reprint: The boundary layers in fluids with little friction // National Advisory Committee for Aeronautics, Tech. Memo. 1256. (Washington 1950).
- [2] *C. Töpfer*. Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung" // *Z. Math. Phys.* **60**, 397-398 (1912).
- [3] *H. Weyl*. Concerning the differential equations of some boundary-layer problems // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **27**, 578-583 (1941).
- [4] *J. P. Boyd*. The Blasius function in the complex plane // *Experiment. Math.*, **8**, 381-394 (1999).
- [5] *J. P. Boyd*. Padé approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain // *Computers and Physics*. **11**(3). 299-303. (1997).
- [6] *J.P. Boyd*. The Blasius Function: Computations Before Computers, the Value of Tricks, Undergraduate Projects, and Open Research Problems // *SIAM REVIEW* V. 50. No.4, pp. 791-804 (2008).
- [7] *V.P. Varin*. Flat Expansions and Their Applications // *Comp. Math. and Math. Phys.*, V. 55. N^o 5, pp. 797-810. (2015).

- [8] *B.D. Ganapol*. Highly accurate solutions of the Blasius and Falkner-Skan boundary layer equations via convergence acceleration // [arXiv:1006.3888], 2010. (<https://arxiv.org/abs/1006.3888>)
- [9] *V.P. Varin*. A solution of the Blasius problem // *Comp. Math. and Math. Phys.* V. 54. *N*^o 6. pp. 1025–1036. (2014).
- [10] *V.P. Varin*. Asymptotic Expansion of Crocco Solution and the Blasius Constant // *Comp. Math. and Math. Phys.* V. 58. *N*^o 4. pp. 517-528. (2018).
- [11] *L. Crocco*. Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana // *Rend. Math. Appl. Ser. 5*, **21**, 138-152 (1941).
- [12] *V.P. Varin*. Integration of Ordinary Differential Equations on Riemann Surfaces with Unbounded Precision // *Comp. Math. and Math. Phys.* V. 59. *N*^o 7. pp. 1105-1120. (2019).
- [13] *E. Hille*. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. (John Wiley & Sons. New-York, 1976).
- [14] *E. Hille*. Analytic functions theory, Vol. 1. (Chelsea, N.Y., 1959).
- [15] *V.P. Varin*. On Interpolation of Some Recurrent Sequences // *Comp. Math. and Math. Phys.* V. 61. *N*^o 6. pp. 901-913. (2021).
- [16] *V.P. Varin*. Sequence Transformations in Proofs of Irrationality of Some Fundamental Constants // *Comp. Math. and Math. Phys.* V. 62. *N*^o 10. pp. 1559-1585. (2022).