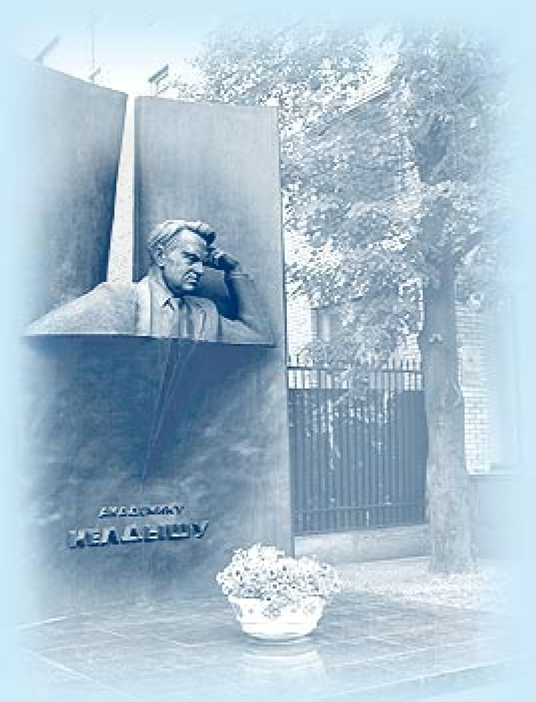
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева,
А.А. Гурченко

Особенности реализации модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аристова Е.Н., Караваева Н.И., Гурченко А.А. Особенности реализации модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 18. 19 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-18
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-18

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева, А.А. Гурченко

Особенности реализации модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения

Москва — 2024

Аристова Е.Н., Караваева Н.И., Гурченко А.А.

Особенности реализации модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения

Сеточно-характеристическая схема, основанная на эрмитовой интерполяции, применена для решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения. Эрмитова интерполяция строится на предыдущем временном слое с использованием сеточных значений самой функции и ее пространственных производных. Для расчета сеточных значений производной по пространству на новом слое по времени используются интегральные средние и формула Эйлера–Маклорена, связывающая узловые значения, интегральное среднее и значения производной в узлах. Проведены тесты на сходимость для функций различной гладкости. Показано, что в точках разрыва коэффициента поглощения наилучшим вариантом является выбор коэффициента поглощения в ячейке, через которую проходит характеристика, выпущенная из узла с неизвестным значением.

Ключевые слова: уравнение переноса, сеточно-характеристический метод, эрмитова интерполяция, CIP метод

Elena Nikolaevna Aristova, Nataliia Igorevna Karavaeva, Alexei Andreevich Gurchenko

Features of the implementation of a modified scheme with Hermitian interpolation for the numerical solving of the transport equation with a variable absorption coefficient

The grid-characteristic scheme based on Hermitian interpolation is used for solving the transport equation with a varying absorption coefficient. Hermitian interpolation is built on the previous time layer using the nodal values of the function itself and its spatial derivatives. To calculate the nodal values of the space derivative on the new time layer the integral averages and the Euler–Maclaurin formula relating nodal values, integral average and derivative values at nodes are used. Convergence tests for various smoothness functions were carried out. It is shown that at the points of the absorption coefficient discontinuity it is most accurate to use the absorption coefficient in the cell where backward characteristic lies.

Key words: transport equation, grid-characteristic method, Hermitian interpolation, CIP method

1. Введение

Численное решение уравнения переноса является неотъемлемой частью решения многих прикладных задач, среди которых задачи переноса излучения или незаряженных частиц, газовой динамики и акустики. Многообразие областей применения и наличие специфических требований к решению, получаемому при помощи численных методов, в каждой из задач обуславливает наличие большого числа методов численного решения уравнения переноса.

Общим требованием к численным методам, которые было бы целесообразно использовать для решения актуальных научно-практических задач, можно считать высокую точность, которую можно было бы достигнуть на не слишком подробных сетках. Стремясь удовлетворить это требование, обычно предлагают два ключевых подхода: расширение шаблона разностной схемы или включение в список неизвестных не только узловых значений искомой величины, но и, например, значений производной в узлах сетки или интегральных средних по ячейке. Каждый из вариантов находит применение в практических задачах. Явные схемы с широким пространственным шаблоном, например, ENO и WENO схемы [1-3], могут использоваться для решения задач газовой динамики, так как уже исходная система уравнений является нелинейной. В задачах переноса излучения большой интерес представляют неявные схемы с компактным шаблоном, что связано с тем, что фотоны движутся со скоростью света, таким образом, применение явных схем привело бы к существенному ограничению на шаг по времени для выполнения условия устойчивости. Примерами таких разностных схем являются бикомпактные схемы Б.В. Рогова [4-10], схема CIP (Cubic Interpolation Polynomial) [11-17]. Бикомпактные схемы Б.В. Рогова строятся методом прямых, и поэтому интегрирование по времени можно осуществить с выбранным порядком аппроксимации. В методе CIP, наоборот, порядки аппроксимации по времени и пространству связаны, так как для построения разностной схемы используется сеточно-характеристический метод (также известный как интерполяционно-характеристический метод). Построение разностной схемы можно разбить на два этапа, первым из которых является построение интерполянта Эрмита по узловым значениям функции и ее первой пространственной производной на нижнем слое по времени. На втором этапе производится интегрирование уравнения переноса вдоль обратной характеристики от точки ее пересечения с границами ячейки до заданной точки нового временного слоя. Для получения значений пространственных производных на новом временном слое может использоваться дифференциальное следствие исходного уравнения переноса, полученное взятием производной по пространственной переменной, однако этот вариант имеет ряд недостатков. В работе [18] был предложен другой вариант, позволяющий получить значения пространственной производной на новом слое по времени, используя интегральные средние и формулу Эйлера–Маклорена. Данная работа продолжает разработку этого варианта.

К достоинствам CIP схемы можно отнести высокий порядок аппроксимации (третий по времени и пространству), малую диссипацию и экстрамалую дисперсию [19]. В [20] предложен способ монотонизации рассматриваемой модификации CIP схемы. Компактность используемого шаблона упрощает ситуацию вблизи границ и при наличии разрывов коэффициентов уравнения. Свойства предложенной в [18] модификации CIP схемы в применении к уравнению переноса с поглощением не были подробно изучены ранее, и в рамках этой работы исследуется способ организации расчета в ячейках, на границу которых попадает разрыв коэффициента поглощения. Исследуются порядки сходимости разностной схемы на аналитических тестах разной гладкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу нахождения численного решения нестационарного уравнения переноса в плоской одномерной геометрии вида

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \kappa(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ является известной функцией. При $\kappa(x,t)=0$ и $f(x,t)=0$ уравнение (1) примет вид

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Дополним уравнение (1) начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le X. \tag{3}$$

Рассмотрим случай положительной скорости переноса a>0. Поставим на левой границе классические граничные условия вида

$$u(0,t) = \varphi(t),\ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

В данной работе будет численно решаться задача (1,3-4) для уравнения переноса с поглощением, а также задача (2-4) для линейного однородного уравнения переноса.

3. Построение разностной схемы

Метод построения используемой разностной схемы подробно изложен в [18], приведем краткое описание схемы. Пусть введена равномерная сетка с шагом h по пространству и шагом τ по времени, ограничимся случаем a>0 и

$\sigma = \frac{a\tau}{h} \le 1$. Выпустим из точки (x_{m+1}, t^{n+1}) характеристику $x - at = const$ назад до пересечения с нижней гранью ячейки (Рис.1). Обозначим координату пересечения обратной характеристики с границей ячейки x^*.

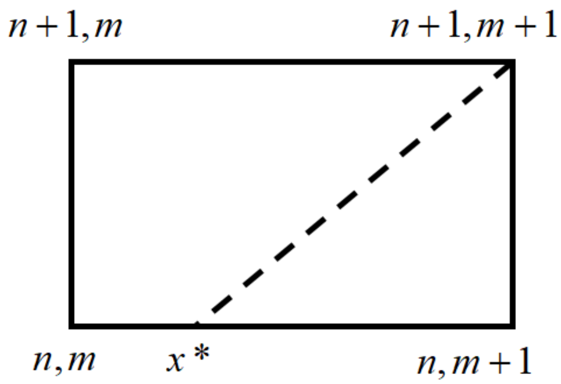


Рис. 1. Расчетная ячейка и характеристика $x - at = const$, выпущенная из (x_{m+1}, t^{n+1}) при $\sigma \le 1$.

Для построения интерполянта Эрмита на отрезке $[x_m, x_{m+1}]$ на нижнем слое по времени используются y_m^n, y_{m+1}^n – сеточные значения искомой функции и d_m^n, d_{m+1}^n – сеточные значения пространственных производных искомой функции, поэтому для построения разностной схемы необходимо указать способ расчета в точке (x_{m+1}, t^{n+1}) значений искомой функции и ее производной по пространству.

Используя характеристическую форму уравнения переноса (1), можно получить в любой точке характеристики

$$u(\eta) = u^* \exp\left(-\frac{\kappa(\eta - \eta^*)}{2a}\right) + \frac{1}{2a}\int_{\eta^*}^{\eta} \exp\left(-\frac{\kappa(\eta - \eta')}{2a}\right) f\left(\frac{\xi + \eta'}{2}, \frac{\eta' - \xi}{2a}\right) d\eta', \qquad (5)$$

где $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Численное значение y^* получается по формулам интерполяции Эрмита, интеграл вдоль характеристики $\xi = const$, входящий в (5), рассчитывается по формуле Симпсона.

Для получения пространственной производной d_{m+1}^{n+1} вычисляется интеграл вдоль правого ребра ячейки на отрезке от (x_{m+1}, t^n) до (x_{m+1}, t^{n+1}) и используется формула Эйлера–Маклорена. Это позволяет найти производную искомой функции по времени g_{m+1}^{n+1}, которая уже может быть пересчитана в пространственную производную $d_{m+1}^{n+1} = \left(f_{m+1}^{n+1} - (\kappa y)_{m+1}^{n+1} - g_{m+1}^{n+1}\right)/\,a$ из уравнения (1).

4. Результаты численного тестирования схемы для однородного уравнения переноса

Приведем результаты тестирования схемы CIP, примененной для решения уравнения (2) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4). Если задано начальное распределение $u_0(x)$, то решением задачи (2-4) будет функция $u(x,t)=u_0(x-at)$, если краевое условие (4) согласовано с начальным условием (3), то есть $\varphi(t)=u_0(-at)$. Пусть a=1, X=1, $\sigma=0.5$. Для исследования сходимости схемы использовался следующий набор тестов:

Тест 1. Бесконечно дифференцируемая функция. Пусть $u_0(x)=\sin(x)$ и используются классические граничные условия (4).

В тестах 2-4 используются периодические граничные условия.

Тест 2. Функция с разрывом второй производной. Начальное условие выбрано в виде

$$u_0(x)=\begin{cases}\cos^2\left(\dfrac{\pi(x-0.5)}{2l}\right), & /x-0.5/\le l, \quad l=1/16,\\ 0, \quad /x-0.5/>l, & \end{cases}$$

Тест 3. Функция с разрывом первой производной. Профиль решения при t=0 задан в виде

$$u_0(x)=\begin{cases}x, & x\le 0.5,\\ 1-x, & x>0.5.\end{cases}$$

Тест 4. Разрывная функция. В качестве начального распределения выбрана функция

$$u_0(x)=\begin{cases}1, & x\le 0.5,\\ 0, & x>0.5.\end{cases}$$

Третий порядок сходимости схемы по времени и пространству в нормах C, L_1, L_2 демонстрируют результаты теста 1 с бесконечно дифференцируемой функцией в качестве начального распределения (см. Табл. I и Рис. 1А). При понижении степени гладкости функции порядок сходимости уменьшается. В тесте 2 с функцией с разрывом второй производной порядок сходимости равен 1.73, 2.44 и 2.1 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно (см. Табл. I и Рис. 1Б). В тесте 3 с функцией с разрывом первой производной порядок сходимости равен 0.74, 1.56 и 1.21 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно (см. Табл. I и Рис. 1В). Для теста 4 с разрывной функцией определение порядка сходимости в норме C не является корректным. В нормах L_1 и L_2 получены порядки сходимости 0.78 и 0.42 соответственно (см. Табл. I и Рис. 1Г).

Таблица I.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству для уравнения (2) при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1.

Тест 1	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L2}$	p
32	$3.82 \cdot 10^{-8}$	3.00	$2.46 \cdot 10^{-8}$	2.98	$2.71 \cdot 10^{-8}$	2.99
64	$4.77 \cdot 10^{-9}$	3.00	$3.11 \cdot 10^{-9}$	2.99	$3.43 \cdot 10^{-9}$	2.99
128	$5.96 \cdot 10^{-10}$	3.00	$3.91 \cdot 10^{-10}$	3.00	$4.30 \cdot 10^{-10}$	3.00
256	$7.45 \cdot 10^{-11}$	3.00	$4.91 \cdot 10^{-11}$	3.00	$5.39 \cdot 10^{-11}$	3.00
512	$9.32 \cdot 10^{-12}$	3.00	$6.14 \cdot 10^{-12}$	3.00	$6.75 \cdot 10^{-12}$	3.00
1024	$1.17 \cdot 10^{-12}$		$7.68 \cdot 10^{-13}$		$8.44 \cdot 10^{-13}$	

Тест 2	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L2}$	p
64	$6.36 \cdot 10^{-2}$	1.87	$6.75 \cdot 10^{-3}$	2.38	$1.73 \cdot 10^{-2}$	2.27
128	$1.74 \cdot 10^{-2}$	1.85	$1.30 \cdot 10^{-3}$	2.52	$3.58 \cdot 10^{-3}$	2.17
256	$4.83 \cdot 10^{-3}$	1.62	$2.27 \cdot 10^{-4}$	2.44	$7.92 \cdot 10^{-4}$	2.00
512	$1.57 \cdot 10^{-3}$	1.58	$4.19 \cdot 10^{-5}$	2.35	$1.98 \cdot 10^{-4}$	1.92
1024	$5.27 \cdot 10^{-4}$		$8.21 \cdot 10^{-6}$		$5.23 \cdot 10^{-5}$	

Тест 3	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L2}$	p
64	$8.88 \cdot 10^{-3}$	0.73	$6.57 \cdot 10^{-4}$	1.69	$1.99 \cdot 10^{-3}$	1.21
128	$5.35 \cdot 10^{-3}$	0.74	$2.04 \cdot 10^{-4}$	1.49	$8.59 \cdot 10^{-4}$	1.21
256	$3.21 \cdot 10^{-3}$	0.74	$7.26 \cdot 10^{-5}$	1.52	$3.72 \cdot 10^{-4}$	1.20
512	$1.92 \cdot 10^{-3}$	0.74	$2.54 \cdot 10^{-5}$	1.56	$1.62 \cdot 10^{-4}$	1.19
1024	$1.15 \cdot 10^{-3}$		$8.63 \cdot 10^{-6}$		$7.13 \cdot 10^{-5}$	

Тест 4	Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L2}$	p
64	$1.46 \cdot 10^{-2}$	0.79	$6.73 \cdot 10^{-2}$	0.34
128	$8.46 \cdot 10^{-3}$	0.78	$5.32 \cdot 10^{-2}$	0.48
256	$4.93 \cdot 10^{-3}$	0.78	$3.82 \cdot 10^{-2}$	0.40
512	$2.87 \cdot 10^{-3}$	0.77	$2.89 \cdot 10^{-2}$	0.40
1024	$1.68 \cdot 10^{-3}$		$2.19 \cdot 10^{-2}$	

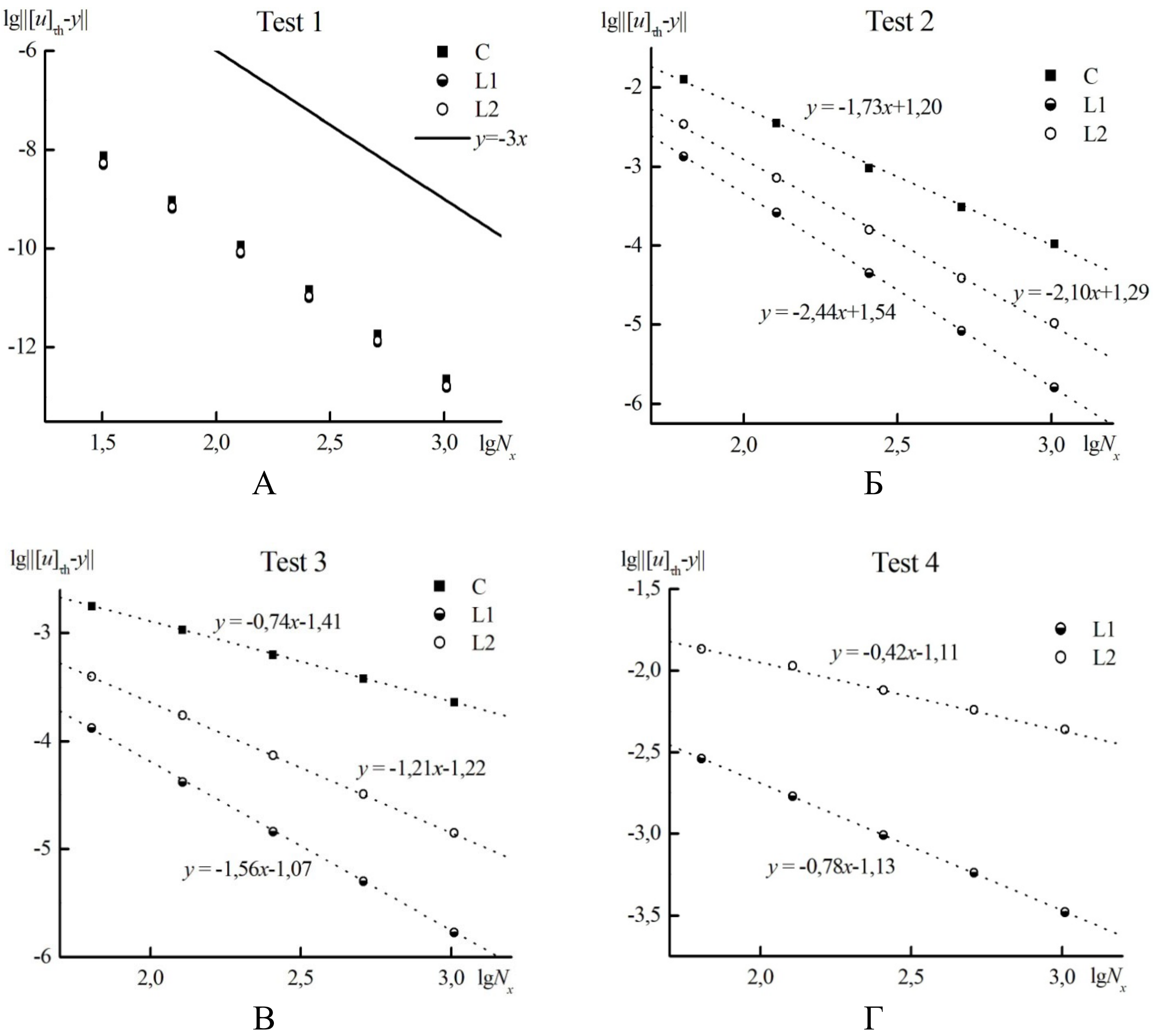


Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от числа узлов по пространству для уравнения (2) при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1: А) тест 1, для сравнения проведена прямая с наклоном –3 (порядка аппроксимации по времени и пространству); Б) тест 2; В) тест 3; Г) тест 4. Пунктирными линиями изображены прямые с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов.

5. Результаты численного тестирования схемы для неоднородного уравнения переноса при постоянном коэффициенте поглощения κ = const

Следующим этапом тестирования схемы CIP является применение схемы для решения неоднородного уравнения переноса с поглощением (1). Пусть коэффициент поглощения не зависит от времени и координаты, то есть $\kappa = const$. Для анализа порядка сходимости использованы функции из тестов 1-4, функция правой части задается в виде $f(x,t) = \kappa \cdot u_0(x - at)$, $\kappa = 1$.

Таблица II.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству для уравнения (1) при фиксированном $\tau/h=0.5$ с $N_t=2N_x$, T=1.

Тест 1	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L2}$	p
32	$2.99\cdot10^{-8}$	2.99	$1.93\cdot10^{-8}$	2.98	$2.13\cdot10^{-8}$	2.98
64	$3.75\cdot10^{-9}$	3.00	$2.45\cdot10^{-9}$	2.99	$2.70\cdot10^{-9}$	2.99
128	$4.70\cdot10^{-10}$	3.00	$3.09\cdot10^{-10}$	2.99	$3.39\cdot10^{-10}$	3.00
256	$5.88\cdot10^{-11}$	3.00	$3.87\cdot10^{-11}$	3.00	$4.26\cdot10^{-11}$	3.00
512	$7.36\cdot10^{-12}$	2.99	$4.85\cdot10^{-12}$	3.02	$5.33\cdot10^{-12}$	3.02
1024	$9.26\cdot10^{-13}$		$5.97\cdot10^{-13}$		$6.56\cdot10^{-13}$	

Тест 2	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L2}$	p
64	$4.43\cdot10^{-2}$	1.86	$4.55\cdot10^{-3}$	2.41	$1.16\cdot10^{-2}$	2.27
128	$1.22\cdot10^{-2}$	1.81	$8.57\cdot10^{-4}$	2.50	$2.41\cdot10^{-3}$	2.15
256	$3.48\cdot10^{-3}$	1.64	$1.51\cdot10^{-4}$	2.43	$5.44\cdot10^{-4}$	1.99
512	$1.12\cdot10^{-3}$	1.53	$2.81\cdot10^{-5}$	2.35	$1.37\cdot10^{-4}$	1.91
1024	$3.87\cdot10^{-4}$		$5.52\cdot10^{-6}$		$3.64\cdot10^{-5}$	

Тест 3	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L2}$	p
64	$7.81\cdot10^{-3}$	0.82	$5.49\cdot10^{-4}$	1.69	$1.64\cdot10^{-3}$	1.22
128	$4.44\cdot10^{-3}$	0.73	$1.70\cdot10^{-4}$	1.65	$7.05\cdot10^{-4}$	1.21
256	$2.67\cdot10^{-3}$	0.74	$5.44\cdot10^{-5}$	1.50	$3.04\cdot10^{-4}$	1.21
512	$1.60\cdot10^{-3}$	0.74	$1.92\cdot10^{-5}$	1.55	$1.32\cdot10^{-4}$	1.20
1024	$9.60\cdot10^{-4}$		$6.58\cdot10^{-6}$		$5.75\cdot10^{-5}$	

Тест 4	Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h}-y\|\|_{L2}$	p
64	$2.93\cdot10^{-2}$	0.81	$9.45\cdot10^{-2}$	0.41
128	$1.68\cdot10^{-2}$	0.77	$7.09\cdot10^{-2}$	0.41
256	$9.83\cdot10^{-3}$	0.80	$5.35\cdot10^{-2}$	0.40
512	$5.66\cdot10^{-3}$	0.77	$4.05\cdot10^{-2}$	0.40
1024	$3.32\cdot10^{-3}$		$3.08\cdot10^{-2}$	

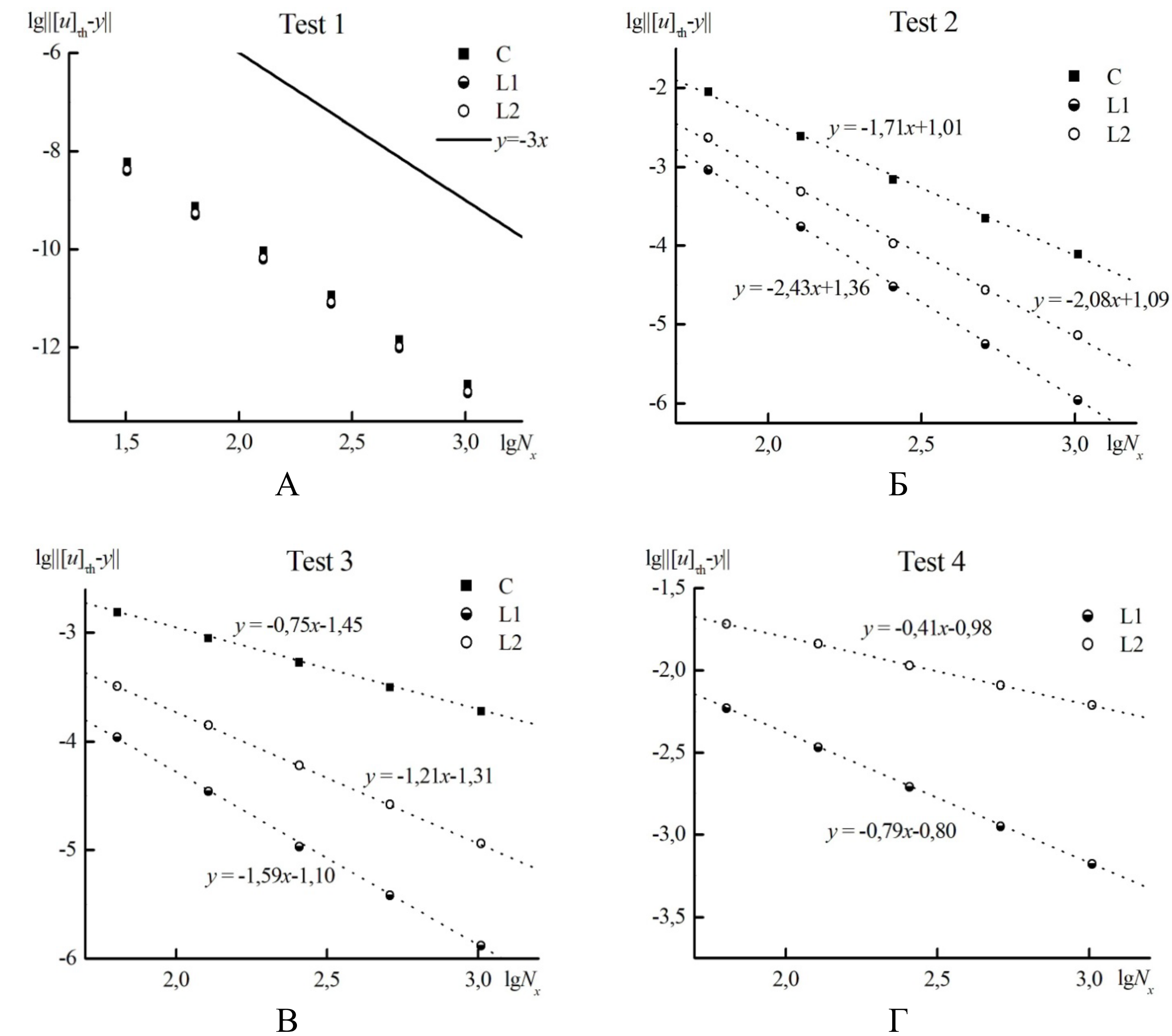


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения от числа узлов по пространству для уравнения (1) при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1: А) тест 1, для сравнения проведена прямая с наклоном –3 (порядка аппроксимации по времени и пространству); Б) тест 2; В) тест 3; Г) тест 4. Пунктирными линиями изображены прямые с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов.

Порядок сходимости схемы CIP по времени и пространству в применении к неоднородному уравнению переноса (1) не отличается существенно от порядка сходимости схемы в применении к однородному уравнению (2) для всех проведенных тестов. Тест 1 демонстрирует третий прядок сходимости по времени и пространству во всех рассматриваемых нормах (см. Табл. II и Рис. 2А), тест 2 демонстрирует порядки сходимости 1.71, 2.43 и 2.08 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно, в тесте 3 получены порядки сходимости 0.75, 1.59 и 1.21 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно (см. Табл. II и Рис. 2Б, В). В тесте 4 порядки сходимости в нормах L_1 и L_2 равны 0.79 и 0.41 соответственно (см. Табл. II и Рис. 2Г).

6. Выбор значения коэффициента поглощения κ в точке разрыва

При построении схемы подразумевалось, что значение κ постоянно в пределах одной ячейки сетки, это допускает использование схемы в случае, когда коэффициент κ имеет разрыв на границе ячейки. Пусть коэффициент поглощения $\kappa(x,t)$ на отрезке $0 \le x \le 1$ является кусочно-постоянной функцией вида

$$\kappa(x,t) = \begin{cases} \kappa_1, & 0 \le x < 0.5, \\ \kappa_2, & 0.5 < x \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

В точке $x = 0.5$ функция (6) терпит разрыв, в ячейке слева от точки разрыва значение коэффициента поглощения равно κ_1, а в ячейке справа – κ_2. Введем обозначение $\kappa(0.5,t) = \kappa_c$. Одним из этапов расчета по модифицированной схеме CIP является расчет интегрального среднего на отрезке от (x_{m+1}, t^n) до (x_{m+1}, t^{n+1}) и пересчет производной по времени в производную по пространству с использованием уравнения (1) при $x = 0.5$. Это вызывает вопрос, какое значение коэффициента поглощения κ_c использовать при $x = 0.5$.

Были рассмотрены различные варианты и проведен численный эксперимент с использованием теста 1 с бесконечно дифференцируемой функцией в качестве начального профиля решения. Функция правой части задавалась в виде $f(x,t) = \kappa(x,t) \cdot u_0(x - at)$, так как коэффициент поглощения выбран в виде разрывной функции, то и функция правой части тоже является разрывной. Расчет проводился при a=1, $\sigma = 0.5$, $N_x = 100$, $N_t = 2N_x$, T=1. Значения коэффициентов κ_1 и κ_2 выбраны величинами одного порядка, чтобы вклад ошибки численного интегрирования по формуле Симпсона в ошибку метода был одинаковым по порядку во всей расчетной области.

Из Табл. III можно видеть, что к наименьшей ошибке в норме C приводит использование при $x = 0.5$ коэффициента поглощения из ячейки слева, то есть $\kappa_c = \kappa_1$, причем на результат не влияет то, какое из значений справа или слева от точки разрыва больше по величине. Исследовалась ошибка вычисления производной в точке разрыва $x = 0.5$, так как ее величина меньше нормы погрешности вычисления производной $\| [u'_x]_{\tau h} - d \|_C$ во всей расчетной области. Отличие вариантов из Табл. III также невозможно обнаружить по погрешности вычисления самой функции $\| [u]_{\tau h} - y \|_C$. Так как в данном тесте было выбрано a>0, то в общем случае оптимальным является выбор κ_c равным коэффициенту поглощения в ячейке, через которую проходит характеристика, выпущенная из узла с неизвестным значением.

Таблица III.

Погрешности вычисления производной решения в точке $x = 0.5$ в тесте 1 для уравнения (1) при наличии точки разрыва коэффициента поглощения при различных вариантах выбора κ_c при $N_x = 100$, $N_t = 2N_x$, T=1.

κ_c	$\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 5$	$\kappa_1 = 5$, $\kappa_2 = 1$
	$\| [u'_x]_{\tau h} - d \|_C$	$\| [u'_x]_{\tau h} - d \|_C$
κ_1	$\mathbf{2.0073 \cdot 10^{-9}}$	$\mathbf{1.2503 \cdot 10^{-9}}$
$\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}$	$2.0115 \cdot 10^{-9}$	$1.2852 \cdot 10^{-9}$
$\sqrt{\kappa_1\kappa_2}$	$2.0151 \cdot 10^{-9}$	$1.2792 \cdot 10^{-9}$
$\sqrt{\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}}$	$2.0237 \cdot 10^{-9}$	$1.2649 \cdot 10^{-9}$
$\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$	$2.0199 \cdot 10^{-9}$	$1.2712 \cdot 10^{-9}$
κ_2	$2.0324 \cdot 10^{-9}$	$1.2921 \cdot 10^{-9}$

7. Результаты численного тестирования схемы для неоднородного уравнения переноса при кусочно-постоянном коэффициенте поглощения κ

Применим схему CIP для решения неоднородного уравнения переноса с поглощением (1), коэффициент поглощения зададим в виде разрывной функции (6). Функцию правой части зададим в виде $f(x,t) = \kappa(x,t) \cdot u_0(x - at)$.

Результаты применения схемы в тестах 1–4 при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$ представлены в Табл. IV и на Рис. 3. Порядок сходимости схемы CIP по времени и пространству в применении к неоднородному уравнению переноса (1) с разрывом коэффициента поглощения также не отличается существенно от порядка сходимости схемы в применении к однородному уравнению (2) для всех проведенных тестов. Тест 1 демонстрирует третий прядок сходимости по времени и пространству во всех рассматриваемых нормах (см. Табл. IV и Рис. 3А), тест 2 демонстрирует порядки сходимости 1.72, 2.43 и 2.09 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно, в тесте 3 получены порядки сходимости 0.76, 1.62 и 1.22 в нормах C, L_1 и L_2 соответственно (см. Табл. IV и Рис. 3Б, В). В тесте 4 порядок сходимости в норме C равен нулю, порядки сходимости в нормах L_1 и L_2 равны 0.79 и 0.41 соответственно (см. Табл. IV и Рис. 3Г).

Таблица IV.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству для уравнения (1) при разрывном коэффициенте поглощения при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$.

Тест 1	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|[u]_{\tau h} - y\|_C$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L1}$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L2}$	p
32	$2.95\cdot10^{-8}$	2.98	$1.81\cdot10^{-8}$	2.98	$2.03\cdot10^{-8}$	2.98
64	$3.73\cdot10^{-9}$	2.99	$2.30\cdot10^{-9}$	2.99	$2.57\cdot10^{-9}$	2.99
128	$4.68\cdot10^{-10}$	3.00	$2.90\cdot10^{-10}$	2.99	$3.23\cdot10^{-10}$	3.00
256	$5.87\cdot10^{-11}$	3.00	$3.64\cdot10^{-11}$	3.00	$4.05\cdot10^{-11}$	3.00
512	$7.35\cdot10^{-12}$	3.00	$4.55\cdot10^{-12}$	3.02	$5.07\cdot10^{-12}$	3.02
1024	$9.17\cdot10^{-13}$		$5.61\cdot10^{-13}$		$6.25\cdot10^{-13}$	

Тест 2	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|[u]_{\tau h} - y\|_C$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L1}$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L2}$	p
64	$4.22\cdot10^{-2}$	1.87	$4.24\cdot10^{-3}$	2.42	$1.08\cdot10^{-2}$	2.28
128	$1.16\cdot10^{-2}$	1.80	$7.90\cdot10^{-4}$	2.50	$2.24\cdot10^{-3}$	2.15
256	$3.33\cdot10^{-3}$	1.65	$1.40\cdot10^{-4}$	2.42	$5.05\cdot10^{-4}$	1.99
512	$1.06\cdot10^{-3}$	1.52	$2.61\cdot10^{-5}$	2.33	$1.27\cdot10^{-4}$	1.91
1024	$3.70\cdot10^{-4}$		$5.22\cdot10^{-6}$		$3.39\cdot10^{-5}$	

Тест 3	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|[u]_{\tau h} - y\|_C$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L1}$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L2}$	p
64	$7.81\cdot10^{-3}$	0.86	$5.22\cdot10^{-4}$	1.69	$1.51\cdot10^{-3}$	1.22
128	$4.31\cdot10^{-3}$	0.73	$1.62\cdot10^{-4}$	1.69	$6.47\cdot10^{-4}$	1.21
256	$2.60\cdot10^{-3}$	0.73	$5.05\cdot10^{-5}$	1.53	$2.79\cdot10^{-4}$	1.21
512	$1.57\cdot10^{-3}$	0.74	$1.75\cdot10^{-5}$	1.54	$1.21\cdot10^{-4}$	1.20
1024	$9.41\cdot10^{-4}$		$5.99\cdot10^{-6}$		$5.26\cdot10^{-5}$	

Тест 4	Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L1}$	p	$\|[u]_{\tau h} - y\|_{L2}$	p
64	$2.79\cdot10^{-2}$	0.82	$9.13\cdot10^{-2}$	0.42
128	$1.58\cdot10^{-2}$	0.78	$6.84\cdot10^{-2}$	0.41
256	$9.20\cdot10^{-3}$	0.79	$5.16\cdot10^{-2}$	0.40
512	$5.32\cdot10^{-3}$	0.78	$3.91\cdot10^{-2}$	0.40
1024	$3.11\cdot10^{-3}$		$2.97\cdot10^{-2}$	

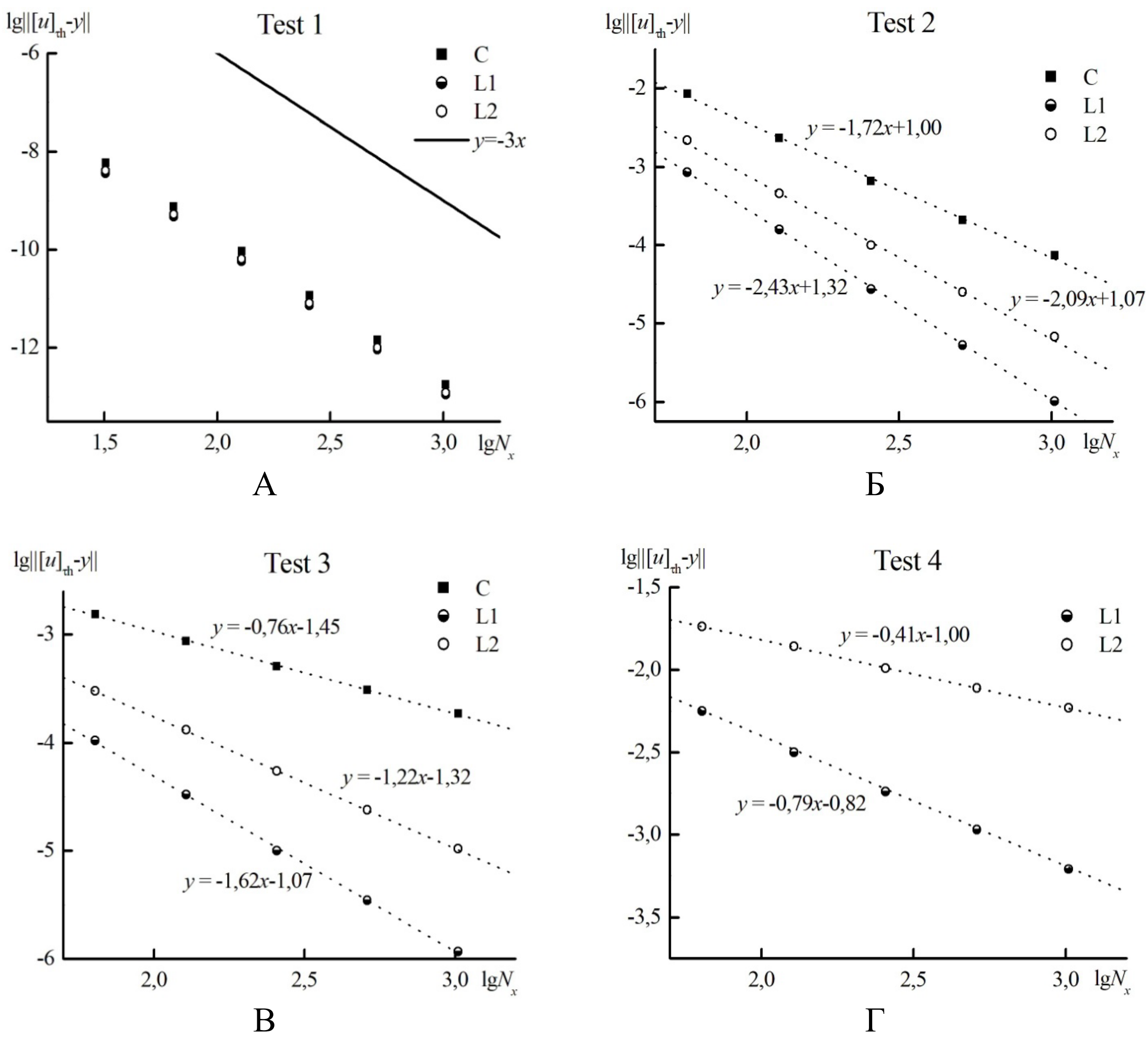


Рис. 3. Зависимость погрешности численного решения от числа узлов по пространству для уравнения (1) при разрывном коэффициенте поглощения при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$: А) тест 1, для сравнения проведена прямая с наклоном –3 (порядка аппроксимации по времени и пространству); Б) тест 2; В) тест 3; Г) тест 4. Пунктирными линиями изображены прямые с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов.

При больших значениях коэффициента поглощения вычисление интеграла, входящего в (5), по формуле Симпсона становится существенно менее точным, погрешность схемы определяется ошибками численного интегрирования. В тесте 1 при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 100$ величина ошибок увеличилась по сравнению с тестом 1 при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$ (см. Табл. IV и Рис. 3А), порядок сходимости равен 4, что соответствует порядку аппроксимации формулы Симпсона численного интегрирования (см. Табл. V, Рис. 4).

Таблица V.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству для уравнения (1) при разрывном коэффициенте поглощения при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 100$.

Тест 1	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_C$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L1}$	p	$\|\|[u]_{\tau h} - y\|\|_{L2}$	p
32	$1.57\cdot10^{-3}$	3.93	$6.35\cdot10^{-4}$	3.95	$9.08\cdot10^{-4}$	3.95
64	$1.03\cdot10^{-4}$	3.98	$4.11\cdot10^{-5}$	4.00	$5.89\cdot10^{-5}$	4.00
128	$6.52\cdot10^{-6}$	4.00	$2.56\cdot10^{-6}$	4.01	$3.68\cdot10^{-6}$	4.00
256	$4.08\cdot10^{-7}$	4.00	$1.59\cdot10^{-7}$	4.01	$2.30\cdot10^{-7}$	4.00
512	$2.55\cdot10^{-8}$	4.00	$9.93\cdot10^{-9}$	4.00	$1.43\cdot10^{-8}$	4.00
1024	$1.60\cdot10^{-9}$		$6.19\cdot10^{-10}$		$8.93\cdot10^{-10}$	

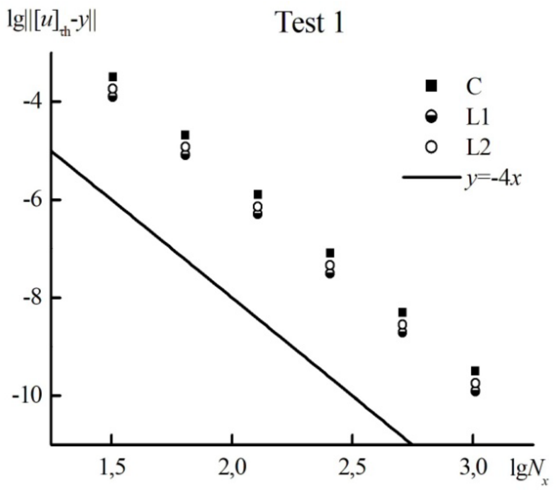


Рис. 4. Зависимость погрешности численного решения от числа узлов по пространству для уравнения (1) при разрывном коэффициенте поглощения для теста 1 при фиксированном $\tau/h = 0.5$ с $N_t = 2N_x$, T=1, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 100$, для сравнения проведена прямая с наклоном –4 (порядка аппроксимации формулы Симпсона).

Предложим еще один тест для исследования предложенной схемы.

Тест 5. Пусть начальное условие (3) принимает вид $u_0(x) = 0$, а краевое условие (4) имеет вид $\varphi(t) = t$, коэффициент поглощения выбран в виде (6), $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 1$, а функция правой части задана в виде

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1, & 0 \le x < 0.5, \\ f_2, & 0.5 < x \le 1, \end{cases}$$

где $f_1 = 3$, $f_2 = 2$. Наличие разрывов коэффициента поглощения и функции правой части в тесте 5 соответствует распространенной ситуации при решении задач переноса нейтронов.

Результаты применения схемы в тесте 5 демонстрирует Табл. VI. Порядок сходимости схемы CIP по времени и пространству равен 0.79 в норме C и примерно равен 1 в нормах L_1 и L_2.

Таблица VI.

Погрешности численного решения и порядок сходимости по времени и пространству в тесте (5) для уравнения (1) при фиксированном отношении $\tau/h = 0.5$, определенный из процесса Эйткена при использовании сеток с $N_x = 100,\ 200,\ 400$, $N_t = N_x/2$, T=1.

Тест 5	Норма C		Норма L_1		Норма L_2	
N_x	$\lVert y_h - y_{h/2} \rVert_C$	p	$\lVert y_h - y_{h/2} \rVert_{L1}$	p	$\lVert y_h - y_{h/2} \rVert_{L2}$	p
100	$1.36 \cdot 10^{-3}$	0.79	$2.18 \cdot 10^{-4}$	1.07	$4.02 \cdot 10^{-4}$	1.01
200	$7.83 \cdot 10^{-4}$		$1.04 \cdot 10^{-4}$		$2.00 \cdot 10^{-4}$	

8. Заключение

Для решения задач переноса излучения большой интерес представляют схемы, построенные в рамках одной ячейки. Одним из примеров таких схем является сеточно-характеристическая схема CIP третьего порядка по времени и пространству. Высокий порядок аппроксимации достигается за счет включения в список неизвестных узловых значений производной. В данной работе исследован порядок сходимости модифицированной схемы CIP в тестах различной гладкости, погрешность решения рассчитывалась в нормах C, L_1 и L_2. Схема применена для численного решения однородного уравнения переноса, уравнения переноса с поглощением при постоянном коэффициенте поглощения и кусочно-постоянном коэффициенте поглощения. Продемонстрирован третий порядок сходимости разностной схемы по времени и пространству на гладком тесте в случае небольших оптических толщин. В случае больших оптических толщин основную погрешность вносит вычисление интеграла методом Симпсона от быстро затухающей экспоненты, это приводит к увеличению ошибки и к четвертому порядку сходимости в соответствии с порядком сходимости метода Симпсона.

При понижении степени гладкости функции, задающей начальный профиль решения, порядок сходимости также понижается. В точках разрыва коэффициента поглощения предложен способ выбора значения коэффициента поглощения, минимизирующий норму разности численного и аналитического решений. Показано, что наилучшим вариантом является выбор коэффициента поглощения в ячейке, через которую проходит характеристика, выпущенная из узла с неизвестным значением. В дальнейшем схема может быть применена для решения задач переноса нейтронов.

Литература

1. *A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy.* // Uniformly high order essentially nonoscillatory schemes III // Journal of Computational Physics, 1987, vol. 71, p. 231–303.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-60543-7_12
2. *A. Harten*. ENO Schemes with subcell resolution // Journal of Computational Physics, 1989, vol. 83, issue 1, p. 148–184.
https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90226-X
3. *X.D. Liu, S. Osher, T. Chan.* // Weighted essentially non-oscillatory schemes // Journal of Computational Physics, 1994, vol. 115, issue 1, p. 200–212.
https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187
4. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН, 2010, т. 430, №4, с. 470–474.
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. Fourth-Order Accurate Bicompact Schemes for Hyperbolic Equations // Doklady Mathematics. 2010. v. 81, No. 1. p. 146–150.
https://doi.org/10.1134/S1064562410010400
5. *E.N. Aristova, B.V. Rogov.* Bicompact scheme for the multidimensional stationary linear transport equation // Applied Numerical Mathematics, July 2015, v. 93, p. 3–14.
https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.04.009
6. *B.V. Rogov.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, v. 139, p. 136–155. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.01.008
7. *A.V. Chikitkin, B.V. Rogov.* Family of central bicompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, v.142, p.151–170.
https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.03.007
8. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // ДАН, 2011, т. 436, №5, с. 600–605.
B.V. Rogov, M.N. Mikhailovskaya. Monotone Bicompact Schemes for a Linear Advection Equation // Doklady Mathematics. 2011. v. 83, No. 1. p.121–125.
https://doi.org/10.1134/S1064562411010273
9. *Е. Н. Аристова.* Бикомпактные схемы для неоднородного линейного уравнения переноса в случае больших оптических толщин // Матем. моделирование, 2013, т. 25, №10, с. 3–18.

E. N. Aristova. Bicompact scheme for linear inhomogeneous transport equation in a case of a big optical width // Mathematical models and computer simulations, 2014, v. 6, №3, p. 227–238.
https://doi.org/10.1134/S2070048214030028

10. *М. Д. Брагин, Б. В. Рогов.* Консервативная монотонизация бикомпактных схем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019, № 8, 26 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2019-8
11. *T. Yabe, F. Xiao, T. Utsumi.* The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis // Journal of Computational Physics, 2001, v.169, Issue 2, p. 556–593.
https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6625
12. *T. Yabe, T. Aoki, G. Sakaguchi et al.* The Compact CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-Particle) Method as a General Hyperbolic Solver // Computers&Fluids, 1991, v.19, №3/4, p. 421–431.
https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90067-R
13. *T.-L. Tsai, S.-W. Chiang, and J.-G. Yang.* Characteristics Method with Cubic-Spline Interpolation for Open Channel Flow Computation // Intern. J. for Numerical Methods in Fluids, 2004, v.46, p. 663–683.
https://doi.org/10.1002/fld.764
14. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2016, т. 28, №2, с. 123–132.
V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation // Mathematical models and computer simulations, 2016, v.8, №5, p. 577–584.
https://doi.org/10.1134/S2070048216050082
15. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров.* Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом // Матем. моделирование, 2018, т.30, №3, с. 37–51.
A.V. Favorskaya, I.B. Petrov. Numerical modeling of wave processes in Rocks by GridCharacteristic method // Mathematical models and computer simulations, 2018, v.10, №5, p. 639–647.
https://doi.org/10.1134/S207004821805006X
16. *И.Б. Петров, А.В. Фаворская, Н.И. Хохлов.* Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017, т. 57, №11, с. 1804–1811.
I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, N.I. Khokhlov. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, v. 57, №11, p. 1771–1777.
https://doi.org/10.1134/S0965542517110112
17. *И.Б. Петров, М.В. Муратов.* Применение сеточно-характеристического метода в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов (обзорная статья) // Матем. моделирование, 2019, т. 31, №4, с. 33–56.
I.B. Petrov, M.V. Muratov. Application of the grid-characteristic method in solving direct problems of seismic exploration of fractured formations (review

article) // Mathematical models and computer simulations, 2019, v.11, №6, p. 924–939.
https://doi.org/10.1134/S2070048219060164

18. *Е. Н. Аристова, Г. И. Овчаров.* Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование, 2020, т. 32, №3, с. 3–18.
E.N. Aristova, G.I. Ovcharov. Hermitian Characteristic Scheme for a Linear Inhomogeneous Transfer Equation // Mathematical models and computer simulations, 2020, v. 12, p. 845–855.
https://doi.org/10.1134/S2070048220060022
19. *Е.Н.Аристова, Г.О.Астафуров.* О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020, №107, 23 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2020-117
20. *Е.Н.Аристова, Н.И. Караваева*. Консервативная монотонизация варианта CIP схемы для решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2020, № 121. 16 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2020-121

Оглавление