



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2024 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева,  
И.Р. Ивашкин

Монотонизация  
модифицированной схемы с  
эрмитовой интерполяцией  
для численного решения  
неоднородного уравнения  
переноса с поглощением

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аристова Е.Н., Караваева Н.И., Ивашкин И.Р. Монотонизация модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения неоднородного уравнения переноса с поглощением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 65. 40 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-65>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-65>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева, И.Р. Ивашкин**

**Монотонизация модифицированной  
схемы с эрмитовой интерполяцией  
для численного решения неоднородного  
уравнения переноса с поглощением**

**Москва — 2024**

*Аристова Е.Н., Караваева Н.И., Ивашкин И.Р.*

**Монотонизация модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения неоднородного уравнения переноса с поглощением**

Для численного решения уравнения переноса реализована гибридная схема на основе модифицированной схемы CIP (Cubic Interpolation Polynomial) с эрмитовой интерполяцией. Третий порядок аппроксимации схемы CIP достигается за счёт включения в список неизвестных не только узловых значений функции, но и узловых значений её производных, которые в рассматриваемой модификации рассчитываются с помощью формулы Эйлера–Маклорена. Рассмотрены варианты локальной, послойной и глобальной монотонизации, в которых гибридизация с решением по характеристической схеме первого порядка выполняется после расчёта каждой ячейки, каждого временного слоя и всех временных слоёв соответственно. Показано, что наилучшие результаты даёт схема с локальной монотонизацией. Порядки сходимости гибридной схемы на тестах с решениями различной гладкости не отличаются существенно от порядков сходимости схемы CIP. В случае больших оптических толщин предложено вычислять интеграл вдоль характеристики по формуле Симпсона для интеграла в форме Стилтjesа и показано, что это позволяет значительно уменьшить погрешности численного решения.

**Ключевые слова:** уравнение переноса, интерполяционно-характеристический метод, эрмитова интерполяция, схема CIP, гибридная схема, монотонизация, интеграл Стилтjesа.

*Elena Nikolaevna Aristova, Nataliia Igorevna Karavaeva,  
Ivan Romanovich Ivashkin*

**Monotonization of a modified scheme with Hermitian interpolation for the numerical solving of an inhomogeneous transport equation with absorption term**

A hybrid scheme for the numerical solving of a transport equation is implemented. The high order scheme is a modified CIP (Cubic Interpolation Polynomial) scheme with Hermitian interpolation. The third order of approximation of the CIP scheme is achieved by including in the list of unknowns not only the nodal values of the function, but also the nodal values of its derivatives. In the modification under consideration the Euler–Maclaurin formula is used to calculate derivatives. The low order scheme is the characteristic scheme of the first order of approximation. Local, layerwise and global monotonization are considered, the hybridization is performed, respectively, after a cell, a time layer or the whole grid processing. It is shown that the best results are obtained by a scheme with local monotonization. The convergence orders of the hybrid scheme on tests of different smoothness of exact solution do not differ significantly from the convergence orders of the CIP scheme. It is proposed to calculate an integral along a characteristic using the Simpson formula for the Stieltjes integral in the case of the large optical thickness; it provides a significant reduction in the numerical solution errors.

**Key words:** transport equation, interpolation-characteristic method, Hermitian interpolation, CIP scheme, hybrid scheme, monotonization, Stieltjes integral.

## Введение

Различные задачи науки и техники приводят к необходимости численно решать линейное уравнение переноса. В их числе задачи нейтронной физики [1, 2], в которых уравнение переноса незаряженных частиц позволяет описать процессы поглощения и рассеяния нейтронов, а также задачи высокотемпературной радиационной газовой динамики, одним из блоков решения которых является совместное решение уравнения переноса излучения и уравнения энергии [3]. Решение уравнений этого блока позволяет учесть взаимодействие излучения со средой.

Разнообразие областей знаний, для развития которых требуется решение уравнения переноса, приводит к ещё большему многообразию способов численного решения уравнения переноса. Предлагаемые разностные схемы различны по своим свойствам, так как требования, которым должны удовлетворять схемы, могут сильно отличаться для разных классов задач.

Общей идеей, определяющей развитие разностных схем в настоящий момент, является стремление построить высокоточные схемы, позволяющие получать правильное решение даже на неподробных сетках. Дополнительным требованием при решении задач переноса излучения является возможность расчёта с крупным шагом по времени, поэтому предпочтение отдаётся неявным безусловно устойчивым схемам. Использование схем с компактным шаблоном упрощает построение решения вблизи границ расчётной области и в окрестностях точек разрыва коэффициентов уравнения.

Развитие схем с порядком аппроксимации выше первого повлекло за собой развитие способов монотонизации получаемого решения, так как немонотонные схемы не обладают свойством положительности, а искомое решение с физической точки зрения представляет собой функцию распределения частиц (плотность в фазовом пространстве), которая положительна по определению. Нефизичное численное решение с отрицательными значениями искомой функции на некотором наборе узлов создаёт целый ряд сложностей. Например, встаёт вопрос о корректном вычислении величин, получаемых осреднением по угловой переменной.

Для построения монотонных схем высокого порядка аппроксимации могут использоваться различные подходы. Созданы различные схемы с ограничителями потоков (TVD схемы – Total Variation Diminishing [4]), схемы с переключениями шаблонов (ENO схемы – Essentially Non-Oscillatory, WENO схемы – Weighted Essentially Non-Oscillatory [5-7]), гибридные схемы, в которых решение представляет собой среднее взвешенное решений по схемам высокого и низкого порядков [8]. Гибридные схемы, сохраняющие интегральные средние по ячейке, были разработаны в [9].

В данной работе рассматривается одна из модификаций схемы с эрмитовой интерполяцией – схема CIP (Cubic Interpolation Polynomial), которая впервые была предложена в [10-16]. Это интерполяционно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации по времени и пространству. Интерполянт

Эрмита строится по узловым значениям функции и её производных, поэтому при построении схемы указывается способ пересчёта узловых значений, которые переносятся вдоль характеристики, выпущенной назад, а также способ пересчёта производных. Рассматриваемые модификации схемы СР отличаются способом пересчёта производных. В работах [10-16] для пересчёта производных схема применяется не только для самого уравнения переноса, но и для его дифференциального следствия. Мы будем рассматривать модификацию схемы, в которой производные вычисляются через интегральные средние и формулу Эйлера–Маклорена [17, 18]. Также используется проекционный способ замыкания схемы СР [19].

Модифицированная схема СР была исследована авторами в применении к решению неоднородного уравнения переноса с постоянным и кусочно-постоянным коэффициентом поглощения [20]. В одной из предыдущих работ была предложена консервативная монотонизация модифицированной схемы СР [21]. В настоящей работе рассматривается другой способ монотонизации, конструируется гибридная схема, в которой расчёт решения производится по схеме СР и по характеристической схеме первого порядка, после чего строится гибрид.

В работе [20] для вычисления интеграла вдоль характеристики применяется формула Симпсона четвёртого порядка аппроксимации для интеграла Римана, что в случае больших оптических толщин приводит к значительной ошибке численного интегрирования. В данной работе формула Симпсона применяется к интегралу вдоль характеристики, которому придаётся вид интеграла Стилтеса.

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе дана математическая формулировка рассматриваемой дифференциальной задачи. Второй раздел содержит краткое описание модифицированной схемы СР и вычислительные формулы. В третьем разделе изложена процедура гибридизации схемы СР; при этом рассмотрены три варианта монотонизации: локальная, послойная и глобальная. Далее проведено тестирование гибридных схем при различных числах Куранта. В четвёртом разделе приведены результаты тестов для уравнения адвекции, а в пятом – для неоднородного уравнения переноса с поглощением. Шестой раздел содержит описание нового варианта интегрирования вдоль характеристики, использующего интеграл Стилтеса, для уменьшения ошибки численного интегрирования в случае больших оптических толщин. Результаты тестирования этого варианта интегрирования приведены в седьмом разделе.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \kappa(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in [0, X] \times [0, T], \quad (1)$$

в котором  $u = u(x, t)$  – искомая функция, зависящая от единственной пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ . Правую часть  $f = f(x, t)$  и коэффициент поглощения  $\kappa = \kappa(x, t)$  будем считать известными функциями. Кроме того, ограничимся случаем положительной скорости переноса  $a > 0$ .

Для постановки начально-краевой задачи дополним уравнение (1) начальными условиями Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, X] \quad (2)$$

и классическими граничными условиями при  $x = 0$ :

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

В дальнейшем наряду с граничными условиями (3) мы будем использовать также периодические граничные условия вида

$$u(0, t) = u(X, t), \quad u'_x(0, t) = u'_x(X, t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

При использовании граничных условий (4) можно наблюдать эволюцию решения по разностной схеме в течение произвольного числа периодов.

Воспользуемся характеристическими свойствами уравнения (1) и выполним замену переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Тогда при  $\xi = x - at = \text{const}$  уравнение (1) сведётся к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2a \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \kappa(\xi, \eta) u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta). \quad (5)$$

Будем считать коэффициент поглощения постоянным:  $\kappa(x, t) = \kappa_0 = \text{const}$ . В этом случае решение уравнения (5) есть функция

$$u(\eta) = u^* \exp\left[-\frac{\kappa_0(\eta - \eta^*)}{2a}\right] + \frac{1}{2a} \int_{\eta^*}^{\eta} d\eta' \exp\left[-\frac{\kappa_0(\eta - \eta')}{2a}\right] f(\xi, \eta'). \quad (6)$$

Здесь  $u^* = u(\eta^*)$ , где  $\eta^* = x^* + at^*$ ; точка  $(x^*, t^*)$  принадлежит характеристике.

В частном случае  $\kappa_0 = 0$ ,  $f \equiv 0$  уравнение переноса (1) принимает вид уравнения адвекции

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

для которого, согласно (6),

$$u(x, t) = u^*, \quad (8)$$

то есть величина  $u$  переносится вдоль характеристики без изменений.

## 2. Построение разностной схемы

Для численного решения начально-краевой задачи (1-3) или (1, 2, 4) будем использовать модифицированную схему СР. Принцип её построения подробно изложен в работе [17]. Ограничимся кратким описанием схемы с указанием основной идеи построения и вычислительных формул.

Введём равномерную сетку с шагами  $h$  по пространству и  $\tau$  по времени (рис. 1). Пусть число Куранта  $\sigma = a\tau/h \leq 1$ . Из точки  $A$  выпустим характеристику  $x - at = \text{const}$ , которая пересечёт нижнюю границу ячейки в точке  $E = (x^*, t^n)$ .

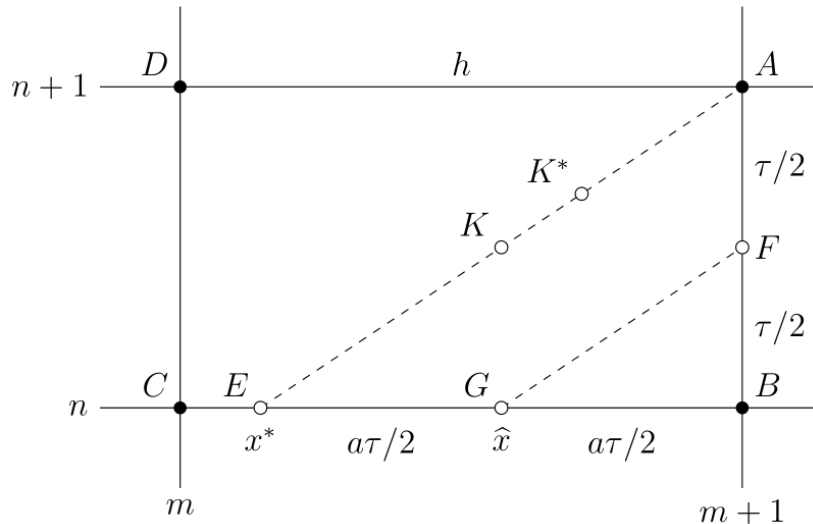


Рис. 1. Расчётная ячейка схемы СР при  $\sigma \leq 1$ . Пунктирными линиями обозначены отрезки характеристик, выпущенных из точек  $A$  и  $F$ .

Точка  $K$  – середина отрезка  $EA$ .

На отрезке  $CB$  введём барицентрические координаты

$$p = \frac{x - x_m}{h}, \quad q = \frac{x_{m+1} - x}{h} \quad (p + q = 1)$$

и рассмотрим базисные функции Эрмита:

$$\begin{aligned} H_R(p, q) &= p(p + 2qp), & G_R(p, q) &= -qp^2, \\ H_L(p, q) &= q(q + 2qp), & G_L(p, q) &= q^2p. \end{aligned}$$

Кубический интерполянт запишем в виде

$$P_3(x) \equiv P_3(p, q) = H_R y_{m+1}^n + H_L y_m^n + G_R d_{m+1}^n h + G_L d_m^n h, \quad (9)$$

где  $y_m^n$  и  $d_m^n$  – сеточные значения искомого решения и его пространственной производной соответственно.

Из формулы (9) можно найти  $y^*$  – значение сеточной функции в точке  $E$ . Для уравнения адвекции (7), в силу равенства (8),

$$y_{m+1}^{n+1} = y^* = P_3(x^*). \quad (10)$$

При решении неоднородного уравнения (1) для нахождения  $y_{m+1}^{n+1}$  необходимо кроме  $y^*$  вычислить интеграл из формулы (6) вдоль отрезка характеристики  $EA$ . Поскольку функция  $f$  произвольна, будем использовать квадратурную формулу Симпсона для нахождения интеграла из (6), что при умеренных оптических толщинах ячейки не снижает точности расчёта [20].

Поскольку в (9) входят сеточные значения производной  $d_m^n$ , для замыкания алгоритма схемы СРП необходимо указать способ их вычисления при переходе к новому слою по времени. С этой целью определим интегральное среднее по отрезку  $BA$ :

$$\bar{y}_{m+1} \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t^n}^{t^{n+1}} d\xi u(x_{m+1}, \xi). \quad (11)$$

Воспользуемся формулой Эйлера–Маклорена

$$\bar{y}_{m+1} = \frac{y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1}}{2} - \tau \frac{g_{m+1}^{n+1} - g_{m+1}^n}{12}, \quad (12)$$

в которой  $g_{m+1}^{n+1}$  и  $g_{m+1}^n$  – сеточные значения производной по времени, связанные с сеточными значениями пространственной производной равенствами

$$g_{m+1}^{n+1} = -ad_{m+1}^{n+1}, \quad g_{m+1}^n = -ad_{m+1}^n. \quad (13)$$

Из характеристического свойства (8) уравнения адвекции (7) следует, что интегральное среднее (11) совпадает со средним по отрезку  $EB$ :

$$\bar{y}_{m+1} = \frac{1}{a\tau} \int_{x^*}^{x_{m+1}} d\xi P_3(\xi). \quad (14)$$

Интеграл (14) может быть вычислен аналитически или приближённо по формуле Симпсона. В более общем случае уравнения (1) интегральные средние

по отрезкам  $BA$  и  $EB$  не совпадают, поэтому  $\bar{y}_{m+1}$  из (11) вычисляется также по формуле Симпсона:

$$\bar{y}_{m+1} = \frac{1}{6} \left( y_{m+1}^n + 4y_{m+1}^{n+1/2} + y_{m+1}^{n+1} \right). \quad (15)$$

Величину  $y_{m+1}^{n+1/2}$  можно найти по формуле (6), записанной для отрезка характеристики  $GF$ .

Отметим, что для неоднородного уравнения (1) связь пространственных и временных производных принимает вид

$$g_{m+1}^{n+1} = f_{m+1}^{n+1} - ad_{m+1}^{n+1} - (\kappa y)_{m+1}^{n+1}, \quad g_{m+1}^n = f_{m+1}^n - ad_{m+1}^n - (\kappa y)_{m+1}^n. \quad (16)$$

Итак, в случае уравнения адвекции (7) после расчёта величины  $y_{m+1}^{n+1}$  из соотношения (10) с помощью формул (9) и (14) вычисляется интегральное среднее  $\bar{y}_{m+1}$ . Далее из формулы (12) выражается производная по времени  $g_{m+1}^{n+1}$ , которая пересчитывается в производную по пространству согласно (13). В случае неоднородного уравнения (1) сначала из формулы (9) находится  $\hat{y}$  – значение сеточной функции в точке  $G$ . Затем по  $\hat{y}$  с помощью формулы (6) для отрезка характеристики  $GF$  рассчитывается  $y_{m+1}^{n+1/2}$ . Далее используется (15) и вычисляется  $\bar{y}_{m+1}$ . Сеточное значение производной  $g_{m+1}^{n+1}$  находится из (12), что позволяет вычислить  $d_{m+1}^{n+1}$  с помощью (16).

Приведём окончательный вид вычислительных формул модифицированной схемы СІР при  $\sigma \leq 1$ . Для уравнения адвекции (7) имеем:

$$y_{m+1}^{n+1} = \left( 2\sigma^3 - 3\sigma^2 + 1 \right) y_{m+1}^n + \left( -2\sigma^3 + 3\sigma^2 \right) y_m^n + \left( -\sigma^3 + 2\sigma^2 - \sigma \right) \tilde{d}_{m+1}^n + \left( -\sigma^3 + \sigma^2 \right) \tilde{d}_m^n,$$

$$\bar{y}_{m+1} = \left( \frac{\sigma^3}{2} - \sigma^2 + 1 \right) y_{m+1}^n + \left( -\frac{\sigma^3}{2} + \sigma^2 \right) y_m^n + \left( -\frac{\sigma^3}{4} + \frac{2\sigma^2}{3} - \frac{\sigma}{2} \right) \tilde{d}_{m+1}^n + \left( -\frac{\sigma^3}{4} + \frac{\sigma^2}{3} \right) \tilde{d}_m^n,$$

$$\tilde{d}_{m+1}^{n+1} = \tilde{d}_{m+1}^n + \frac{12}{\sigma} \bar{y}_{m+1} - \frac{6}{\sigma} \left( y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n \right), \quad (17)$$

$$\tilde{d}_m^n \equiv hd_m^n, \quad m=0,1,\dots,M, \quad n=0,1,\dots,N, \quad hM = X, \quad \tau N = T;$$

для неоднородного уравнения (1) формулы принимают вид

$$\begin{aligned}
y^* &= (2\sigma^3 - 3\sigma^2 + 1)y_{m+1}^n + (-2\sigma^3 + 3\sigma^2)y_m^n + (-\sigma^3 + 2\sigma^2 - \sigma)\tilde{d}_{m+1}^n + (-\sigma^3 + \sigma^2)\tilde{d}_m^n, \\
y_{m+1}^{n+1} &= y^* e^{-\kappa_0 \tau} + \frac{\tau}{6} \left[ e^{-\kappa_0 \tau} f\left(x_{m+1} - a\tau, t^n\right) + 4e^{-\kappa_0 \tau/2} f\left(x_{m+1} - \frac{a\tau}{2}, t^{n+1/2}\right) + f\left(x_{m+1}, t^{n+1}\right) \right], \\
\hat{y} &= \left(\frac{\sigma^3}{4} - \frac{3\sigma^2}{4} + 1\right)y_{m+1}^n + \left(-\frac{\sigma^3}{4} + \frac{3\sigma^2}{4}\right)y_m^n + \left(-\frac{\sigma^3}{8} + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{2}\right)\tilde{d}_{m+1}^n + \left(-\frac{\sigma^3}{8} + \frac{\sigma^2}{4}\right)\tilde{d}_m^n, \\
y_{m+1}^{n+1/2} &= \hat{y} e^{-\kappa_0 \tau/2} + \frac{\tau}{12} \left[ e^{-\kappa_0 \tau/2} f\left(x_{m+1} - \frac{a\tau}{2}, t^n\right) + 4e^{-\kappa_0 \tau/4} f\left(x_{m+1} - \frac{a\tau}{4}, t^{n+1/4}\right) + f\left(x_{m+1}, t^{n+1/2}\right) \right], \\
\bar{y}_{m+1} &= \frac{1}{6} \left( y_{m+1}^n + 4y_{m+1}^{n+1/2} + y_{m+1}^{n+1} \right), \\
\tilde{d}_{m+1}^{n+1} &= \tilde{d}_{m+1}^n + \frac{12}{\sigma} \bar{y}_{m+1} - \frac{6}{\sigma} \left( y_{m+1}^{n+1} + y_{m+1}^n \right) + \frac{h}{a} \left( f_{m+1}^{n+1} - f_{m+1}^n \right) - \frac{h\kappa_0}{a} \left( y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n \right),
\end{aligned}$$

$$\tilde{d}_m^n \equiv hd_m^n, \quad m=0,1,\dots,M, \quad n=0,1,\dots,N, \quad hM=X, \quad \tau N=T.$$

При  $\sigma > 1$  модифицированная схема СІР строится аналогично. В этом случае характеристика  $EA$  пересекает левую границу ячейки, а не нижнюю (рис. 2), и поэтому эрмитова интерполяция применяется на отрезке  $CD$ , причём используются производные по времени, а не по пространству. Формула Эйлера–Маклорена записывается в виде

$$\bar{y}^{n+1} = \frac{y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{2} - h \frac{d_{m+1}^{n+1} - d_m^{n+1}}{12}.$$

Вычислительные формулы схемы СІР для случая  $\sigma > 1$  можно получить из представленных выше формул для случая  $\sigma \leq 1$ , если заменить  $\sigma$  на  $\sigma^{-1}$ ,  $m$  – на  $n$ ,  $n$  – на  $m$ , а сеточную функцию  $\tilde{d}_m^n$  заменить функцией  $\tilde{g}_m^n \equiv \tau g_m^n$ . Аргументы функции  $f$  видоизменяются так, чтобы соответствовать новым точкам пересечения характеристик с границами ячейки (рис. 2).

Ранее модифицированная схема СІР была применена для решения уравнения адвекции (7) и неоднородного уравнения (1) при  $\sigma \leq 1$ . Был продемонстрирован третий порядок сходимости по времени и пространству на гладких тестах [17]. Подробные результаты тестирования схемы содержатся в работе [20].

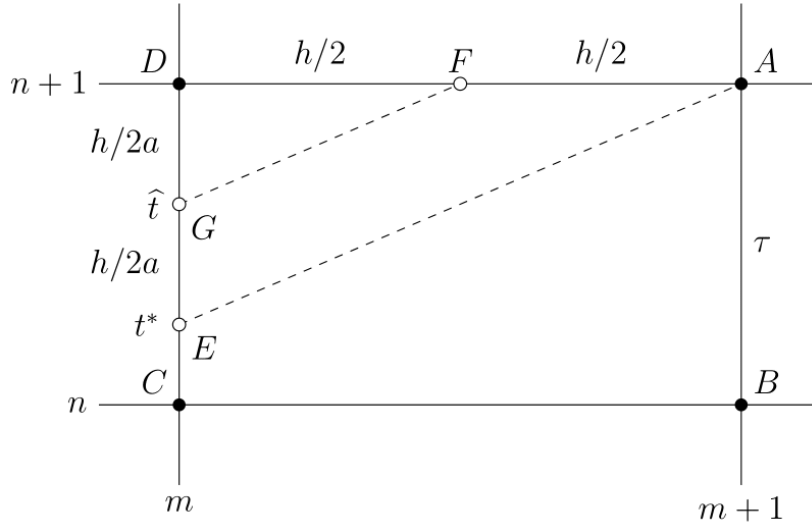


Рис. 2. Расчётная ячейка схемы CIP при  $\sigma > 1$ . Пунктирными линиями обозначены отрезки характеристик, выпущенных из точек A и F.

### 3. Монотонизация модифицированной схемы CIP

При численном решении уравнения переноса обычно отдают предпочтение монотонным схемам, поскольку они позволяют избежать нефизичных решений, а для немонотонных схем высокого порядка аппроксимации предлагают способы монотонизации. Ранее была предложена консервативная монотонизация схемы CIP [21], позволяющая получить монотонный профиль решения при выполнении ряда условий на сеточные значения производных. Мы рассматриваем другой вариант монотонизации, который основан на использовании гибридных схем и не требует выполнения дополнительных условий.

Построим гибридную схему, следуя работе [8]. Пусть  $y^{(\text{CIP})}$  – решение разностной задачи для уравнения адвекции (7) или неоднородного уравнения (1), полученное с помощью схемы CIP, а  $y^{(1)}$  – решение той же разностной задачи по характеристической схеме низкого порядка, построенной на шаблоне явного (при  $\sigma \leq 1$ ) или неявного (при  $\sigma > 1$ ) противопоточного уголка. Тогда гибридное решение вычисляется по формуле

$$y^{(\text{hyb})} = \chi y^{(1)} + (1 - \chi) y^{(\text{CIP})}, \quad (18)$$

в которой

$$\chi = \frac{w^m}{1 + w^m}, \quad w = \frac{C_1 |y^{(1)} - y^{(\text{CIP})}|}{|y^{(1)}| + \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = 10^{-10}.$$

Натуральный параметр  $m$  из формулы для весового коэффициента  $\chi$  должен удовлетворять условию  $m \geq m_0 - 1$ , где  $m_0 = 3$  – порядок аппроксимации схемы СІР по времени. Таким образом,  $m \geq 2$ . Положительная константа  $C_1$  зависит от решаемой задачи и в каждом конкретном случае подбирается так, чтобы обеспечить наилучший результат монотонизации.

В формулу для расчёта производной (17) входит величина  $y_{m+1}^{n+1}$ , в качестве которой можно использовать значение  $\left[ y^{(\text{CIP})} \right]_{m+1}^{n+1}$ , рассчитанное по схеме СІР до гибридизации, или значение  $\left[ y^{(\text{hyb})} \right]_{m+1}^{n+1}$ , полученное в ходе гибридизации. Первый способ приводит к меньшим погрешностям численного решения, что будет обосновано в следующем разделе.

Гибридизацию можно проводить на разных этапах расчёта. В первом варианте гибридное решение вычисляется по формуле (18) сразу после вычисления  $y^{(\text{CIP})}$  и  $y^{(1)}$  для текущей ячейки. Второй вариант сводится к вычислению  $y^{(\text{CIP})}$  и  $y^{(1)}$  для целого временного слоя с последующей гибридизацией. Наконец, в третьем варианте гибридизация проводится после предварительного расчёта  $y^{(\text{CIP})}$  и  $y^{(1)}$  для всех слоёв по времени. Перечисленные варианты будем называть локальной, послойной и глобальной монотонизацией соответственно.

При  $\sigma \leq 1$  локальная и послойная монотонизации эквивалентны, а при  $\sigma > 1$  все три варианта различны. Таким образом, при  $\sigma \leq 1$  будем рассматривать локальную и глобальную монотонизацию, а при  $\sigma > 1$  – локальную, послойную и глобальную.

#### 4. Тестирование гибридных схем для уравнения адвекции

Проведём тестирование гибридных схем для уравнения адвекции (7), дополненного начальными условиями (2) и граничными условиями (3), выбранными так, что

$$\varphi(t) = u_0(-at).$$

В этом случае точное решение задаётся функцией

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (19)$$

Поскольку список неизвестных в схеме СІР включает сеточные значения производных, для них также зададим начальные и граничные условия. При  $\sigma \leq 1$  имеем:

$$\tilde{d}_m^0 = hu'_0(x_m), \quad \tilde{d}_0^n = hu'_0(-at^n); \quad (20)$$

аналогично при  $\sigma > 1$

$$\tilde{g}_m^0 = -\tau au'_0(x_m), \quad \tilde{g}_0^n = -\tau au'_0(-at^n). \quad (21)$$

Для исследования порядков сходимости гибридных схем предложим набор из четырёх тестов.

*Тест 1.* Начальный профиль решения

$$u_0(x) = \sin x$$

является бесконечно дифференцируемой функцией. Граничные условия задаются формулами (3, 20, 21).

В тестах 2-4 вместо классических граничных условий (3) используются периодические граничные условия (4). При этом точное решение также имеет вид (19).

*Тест 2.* Начальный профиль решения имеет вид:

$$u_0(x) = \begin{cases} \cos^2 \left[ \frac{\pi(x-0,5)}{2l} \right], & |x-0,5| \leq l, \quad l = \frac{1}{16}, \\ 0, & |x-0,5| > l. \end{cases}$$

Вторая производная этой функции разрывна в точках  $x = 0,5 \pm l$ .

*Тест 3.* Начальный профиль решения имеет вид:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-0,5|}{l}, & |x-0,5| \leq l, \quad l = \frac{1}{16}, \\ 0, & |x-0,5| > l. \end{cases}$$

Первая производная этой функции разрывна в точках  $x = 0,5 \pm l$ .

*Тест 4.* Начальный профиль решения имеет вид:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,5, \\ 1, & x > 0,5. \end{cases}$$

Эта функция разрывна в точке  $x = 0,5$ .

Сравним результаты численного решения уравнения (7) при использовании двух способов расчёта производной, описанных в предыдущем разделе. В одном варианте расчёта используется гибридное решение, а в другом – нет. Начнём с варианта, в котором  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y^{(\text{CIP})} \right]_{m+1}^{n+1}$ .

Положим  $a=1$ ,  $\sigma=0,5$ ,  $X=1$ ,  $T=1$ . Тогда  $N=2M$ . Погрешности численного решения  $\varepsilon = \|[u]_{\tau h} - y\|$  и порядки сходимости  $p$  схемы СР с локальной монотонизацией на различных сетках приведены в табл. 1. При вычислениях используется одна из трёх норм:  $C$ ,  $L_1$  или  $L_2$ . Для теста 4 с разрывной функцией определение порядка сходимости в норме  $C$  не является корректным, и поэтому для данного теста использованы только нормы  $L_1$  и  $L_2$ .

Во всех тестах мы положили  $m=4$ , что удовлетворяет условию  $m \geq 2$  из предыдущего раздела. Константа  $C_1$  подбиралась так, чтобы профиль численного решения был близок к монотонному при возможно более высоком порядке сходимости.

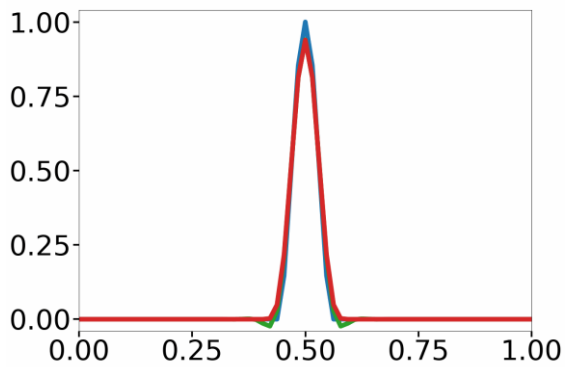
Было установлено, что наилучшая монотонизация достигается при  $C_1=0,70$  для тестов 2-4. В случае теста 1 в силу гладкости начального профиля  $u_0(x)$  численное решение по схеме СР не имело немонотонностей, так что при  $C_1 \in (0,100]$  величины ошибок и порядки сходимости существенно не изменялись; поэтому для теста 1 мы выбрали  $C_1=1,00$ .

Профили численных решений для разных тестов показаны на рис. 3. Для тестов 2 и 3 получены монотонные профили решений (рис. 3а-3б, 3в-3г). В тесте 4 гибридизация не позволила устранить все немонотонности (рис. 3ж): немонотонность профиля в полуокрестностях точек разрыва аналитического решения, где решение было отлично от нуля, сохранялась при любых значениях параметров  $m$  и  $C_1$ .

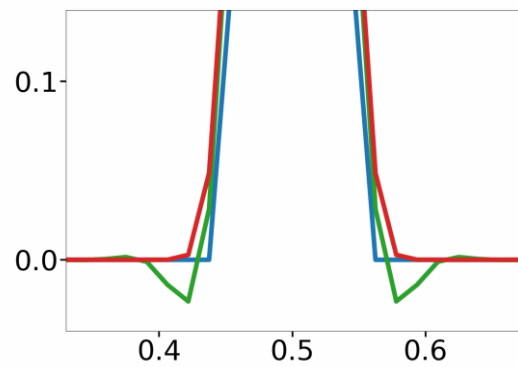
По данным табл. 1 построены графики зависимостей  $\varepsilon = \varepsilon(M)$  в логарифмических координатах (рис. 5). Пунктиром на этих графиках изображены прямые с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов (МНК). На рис. 5а для наглядности проведена прямая с угловым коэффициентом  $k=-3$ . Порядки сходимости численного решения по гибридной схеме, найденные по МНК, приведены в табл. 2. На гладком тесте продемонстрирован третий порядок сходимости во всех нормах (табл. 1, рис. 5а). При снижении гладкости функции в тестах 2-4 порядок сходимости оказывается меньше порядка аппроксимации (табл. 1, рис. 5б-5г), как и ожидалось [20]. Приведённые в работе [20] порядки сходимости схемы СР без монотонизации не отличаются от результатов из табл. 2.

Тест 1 с гладкой функцией был проведён также для схемы СР с глобальной монотонизацией. Полученные погрешности и порядки сходимости представлены в табл. 3, которая демонстрирует, что порядок сходимости гибридной схемы равен 2 в норме  $C$  и 2,47 в норме  $L_2$  уже на гладком решении. Этот вывод оказывается справедливым при любых  $m$  и  $C_1$ . В то же время схема с локальной монотонизацией на гладком тесте демонстрирует третий порядок сходимости во всех нормах (табл. 2).

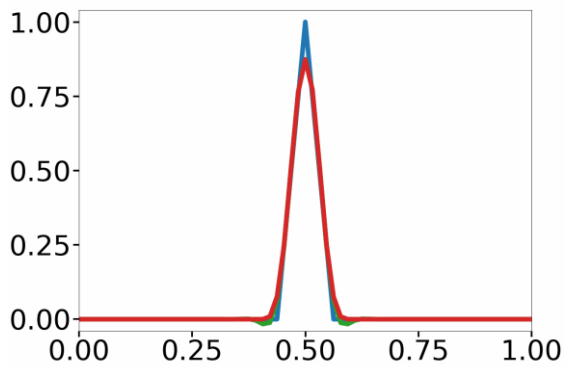
На рис. бв-бг представлен профиль решения по схеме с глобальной монотонизацией для теста 2. Из рисунка видно, что пиковое значение решения существенно уменьшается уже за один период. Также в гибридной схеме проявляется значительная диссипация слева и справа от пика. Из сказанного следует, что локальная монотонизация более эффективна по сравнению с глобальной. Аналогичный вывод справедлив для тестов 3-4.



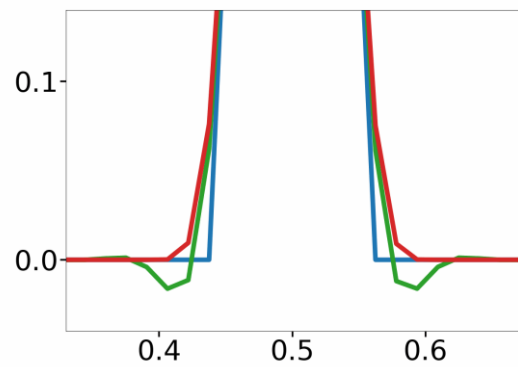
(a)



(б)



(в)



(г)

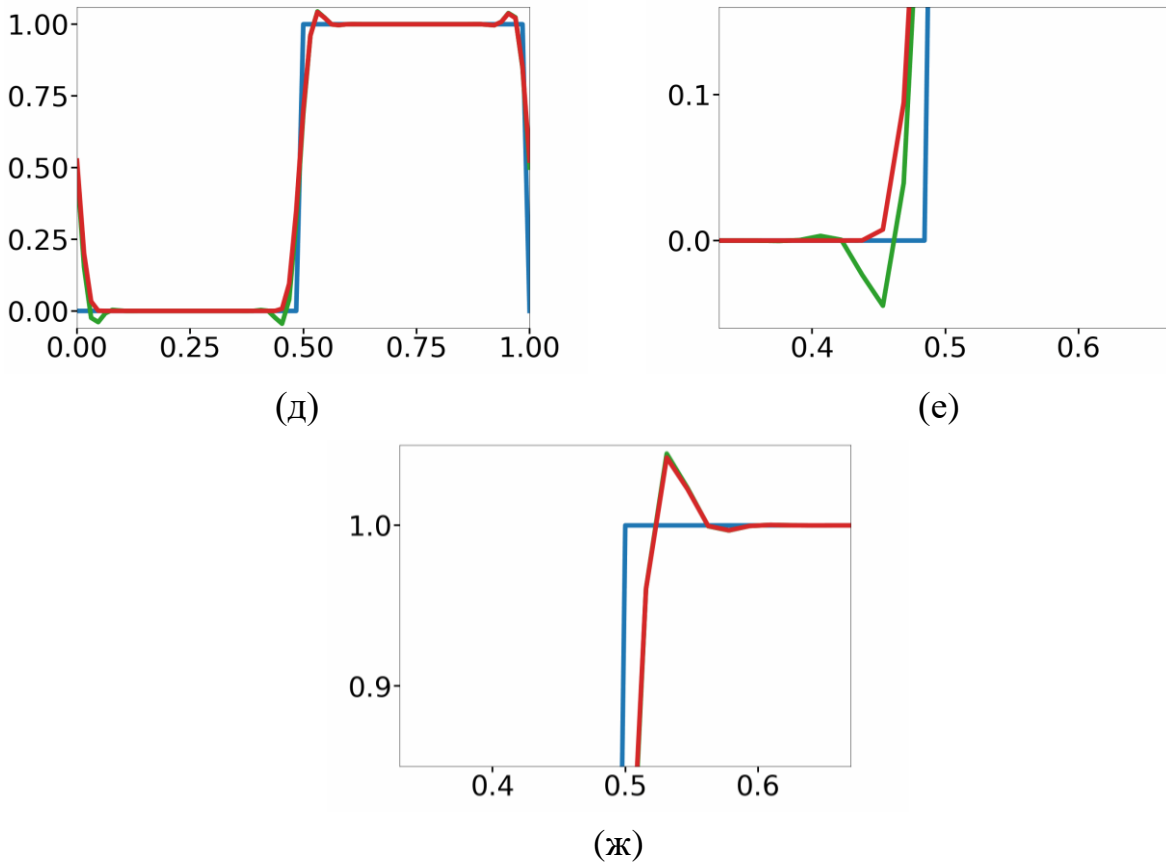


Рис. 3. Профили численного решения уравнения адвекции (7) при  $\sigma=0,5$ ,  $T=1$ ,  $M=64$ : (а, б) – для теста 2, (в, г) – для теста 3, (д, е, ж) – для теста 4. Зелёная линия – решение по схеме CIP, красная линия – решение по гибридной схеме с локальной монотонизацией, синяя линия – точное решение.

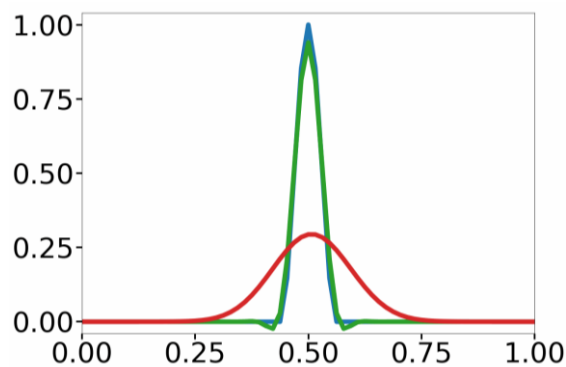
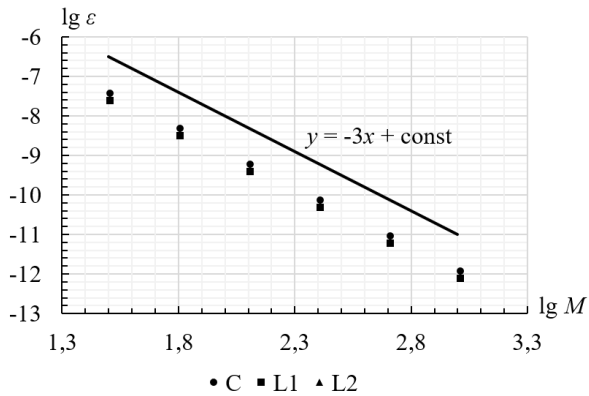


Рис. 4. Профиль численного решения уравнения адвекции (7) для теста 2 по гибридной схеме с локальной монотонизацией и  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y_{m+1}^{(\text{hyb})} \right]^{n+1}$  при  $\sigma=0,5$ ,  $T=1$ ,  $M=64$ ,  $m=4$ ,  $C_1=0,70$ . Зелёная линия – решение по схеме CIP, красная линия – решение по гибридной схеме с локальной монотонизацией и  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y_{m+1}^{(\text{hyb})} \right]^{n+1}$ , синяя линия – точное решение.

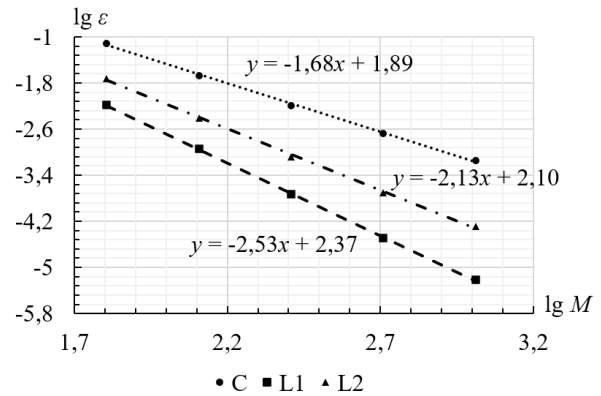
Таблица 1

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ )

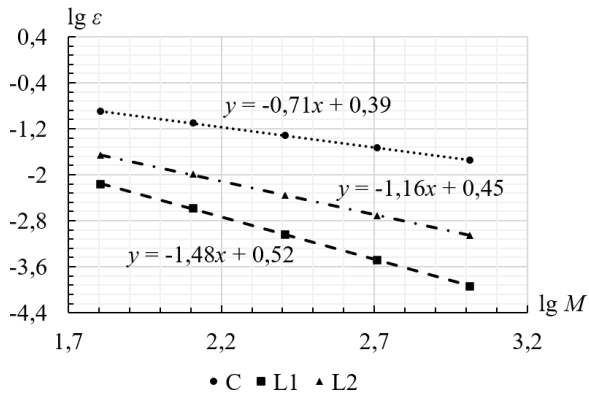
$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 1,00</math></i>						
32	$3,82 \cdot 10^{-8}$	3,00	$2,46 \cdot 10^{-8}$	2,98	$2,71 \cdot 10^{-8}$	2,99
64	$4,77 \cdot 10^{-9}$	3,00	$3,11 \cdot 10^{-9}$	2,99	$3,43 \cdot 10^{-9}$	2,99
128	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3,00	$3,91 \cdot 10^{-10}$	3,00	$4,30 \cdot 10^{-10}$	3,00
256	$7,45 \cdot 10^{-11}$	3,00	$4,91 \cdot 10^{-11}$	3,00	$5,39 \cdot 10^{-11}$	3,00
512	$9,32 \cdot 10^{-12}$	3,00	$6,14 \cdot 10^{-12}$	3,00	$6,75 \cdot 10^{-12}$	3,00
1024	$1,17 \cdot 10^{-12}$	–	$7,68 \cdot 10^{-13}$	–	$8,44 \cdot 10^{-13}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$7,61 \cdot 10^{-2}$	1,83	$6,54 \cdot 10^{-3}$	2,51	$1,90 \cdot 10^{-2}$	2,29
128	$2,15 \cdot 10^{-2}$	1,73	$1,15 \cdot 10^{-3}$	2,65	$3,89 \cdot 10^{-3}$	2,22
256	$6,49 \cdot 10^{-3}$	1,62	$1,84 \cdot 10^{-4}$	2,51	$8,33 \cdot 10^{-4}$	2,06
512	$2,11 \cdot 10^{-3}$	1,57	$3,23 \cdot 10^{-5}$	2,40	$2,00 \cdot 10^{-4}$	1,96
1024	$7,11 \cdot 10^{-4}$	–	$6,13 \cdot 10^{-6}$	–	$5,15 \cdot 10^{-5}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,26 \cdot 10^{-1}$	0,66	$6,93 \cdot 10^{-3}$	1,43	$2,18 \cdot 10^{-2}$	1,09
128	$8,02 \cdot 10^{-2}$	0,71	$2,57 \cdot 10^{-3}$	1,48	$1,02 \cdot 10^{-2}$	1,20
256	$4,90 \cdot 10^{-2}$	0,72	$9,24 \cdot 10^{-4}$	1,48	$4,44 \cdot 10^{-3}$	1,17
512	$2,97 \cdot 10^{-2}$	0,73	$3,31 \cdot 10^{-4}$	1,53	$1,97 \cdot 10^{-3}$	1,16
1024	$1,79 \cdot 10^{-2}$	–	$1,15 \cdot 10^{-4}$	–	$8,78 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$3,69 \cdot 10^{-2}$	0,80	$1,15 \cdot 10^{-1}$	0,42
128			$2,12 \cdot 10^{-2}$	0,80	$8,57 \cdot 10^{-2}$	0,41
256			$1,22 \cdot 10^{-2}$	0,79	$6,43 \cdot 10^{-2}$	0,41
512			$7,06 \cdot 10^{-3}$	0,78	$4,84 \cdot 10^{-2}$	0,41
1024			$4,10 \cdot 10^{-3}$	–	$3,65 \cdot 10^{-2}$	–



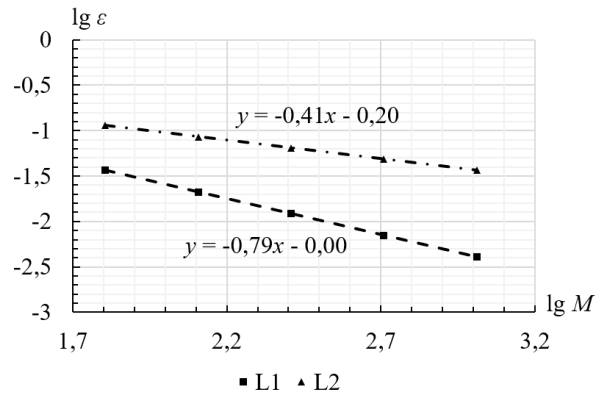
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 5 Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией от числа пространственных шагов сетки  $M$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 2

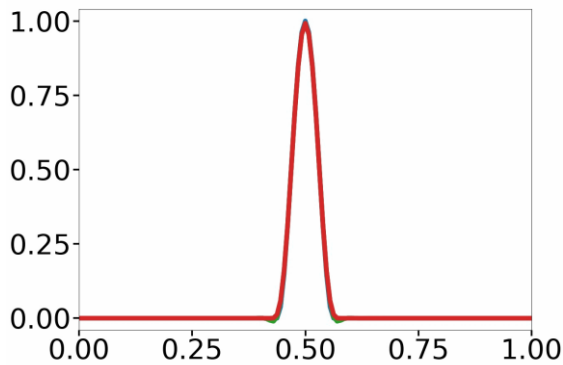
Порядки сходимости численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	3,00	3,00	3,00
2	1,68	2,53	2,13
3	0,71	1,48	1,16
4	–	0,79	0,41

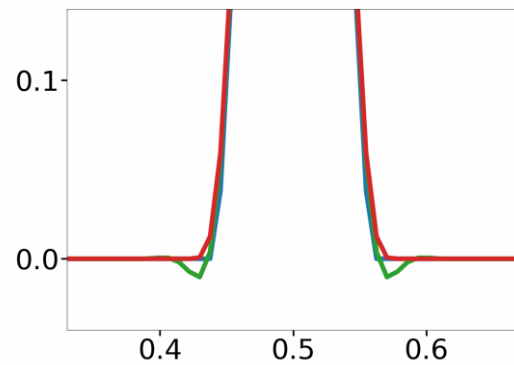
Таблица 3

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с глобальной монотонизацией на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству (тест 1,  $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ )

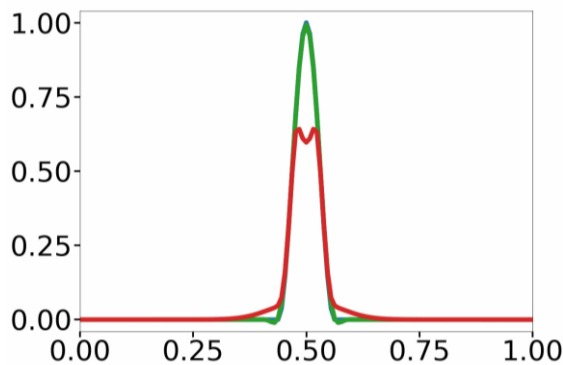
$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
32	$2,73 \cdot 10^{-5}$	1,95	$8,78 \cdot 10^{-7}$	2,95	$4,83 \cdot 10^{-6}$	2,45
64	$7,07 \cdot 10^{-6}$	1,97	$1,14 \cdot 10^{-7}$	2,97	$8,84 \cdot 10^{-7}$	2,47
128	$1,81 \cdot 10^{-6}$	1,98	$1,45 \cdot 10^{-8}$	2,98	$1,60 \cdot 10^{-7}$	2,48
256	$4,60 \cdot 10^{-7}$	1,98	$1,84 \cdot 10^{-9}$	2,99	$2,87 \cdot 10^{-8}$	2,48
512	$1,16 \cdot 10^{-7}$	1,99	$2,33 \cdot 10^{-10}$	2,99	$5,13 \cdot 10^{-9}$	2,49
1024	$2,92 \cdot 10^{-8}$	–	$2,93 \cdot 10^{-11}$	–	$9,12 \cdot 10^{-10}$	–



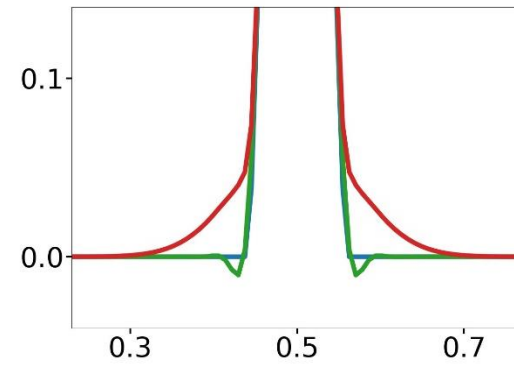
(a)



(б)



(в)



(г)

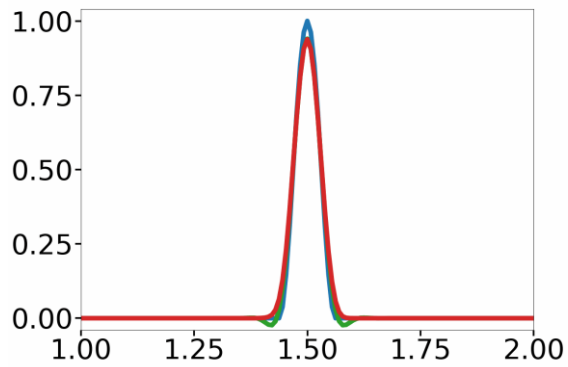
Рис. 6. Профили численного решения уравнения адвекции (7) для теста 2 при локальной (а, б) и глобальной (в, г) монотонизации при  $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $M = 128$ ,  $m = 4$ ,  $C_1 = 0,70$ . Зелёная линия – решение по схеме СР, красная линия – решение по гибридной схеме, синяя линия – точное решение.

Рассмотрим теперь вариант расчёта производных с использованием гибридного решения, положим  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y^{(\text{hyb})} \right]_{m+1}^{n+1}$  в формуле (17). В тесте 1 порядок сходимости равен 3, погрешности численного решения не отличаются существенно от погрешностей, приведённых в табл. 1. На рис. 4 представлен профиль численного решения для теста 2. Наблюдается значительное размытие профиля: пиковое значение решения уменьшается примерно на 70% за один период, размытие профиля оказывается даже более сильным, чем при глобальной монотонизации с  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y^{(\text{CIP})} \right]_{m+1}^{n+1}$  (рис. 6в). Кроме того, в широкой области изменения параметров сетки и гибридизации сходимость отсутствует. Это обосновывает выбор в пользу расчёта производных по значению  $\left[ y^{(\text{CIP})} \right]_{m+1}^{n+1}$ . Все дальнейшие тесты будут выполняться при  $y_{m+1}^{n+1} = \left[ y^{(\text{CIP})} \right]_{m+1}^{n+1}$  в формуле (17).

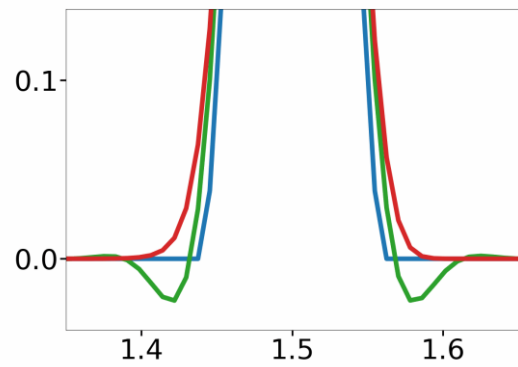
Перейдём теперь к тестированию гибридных схем при  $\sigma > 1$ . Воспользуемся теми же тестами 1-4, отказавшись от периодических граничных условий; таким образом, во всех четырёх случаях будем использовать классические граничные условия (3), согласованные с начальными условиями (2). Пусть  $a = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ . Отрезок по координате выберем вдвое бóльшим по сравнению с тем же отрезком при  $\sigma \leq 1$ :  $X = 2$ , – чтобы распространение нетривиальной части профиля численного решения можно было наблюдать на единичном отрезке: от  $x = 0,5$  до  $x = 1,5$ . При выбранных значениях параметров  $M = 4N$ . Результаты тестирования схемы CIP с локальной монотонизацией приведены в табл. 4, 5 и на рис. 8. Порядки сходимости гибридной схемы существенно не отличаются от представленных в табл. 1 для случая  $\sigma \leq 1$ .

Повторим те же тесты с послойной монотонизацией вместо локальной. Результаты приведены в табл. 6, 7 и на рис. 9. Сравнение с табл. 4, 5 показывает, что изменение способа гибридизации слабо влияет на величины ошибок и порядки сходимости схемы. В тесте 2 профиль решения по схеме с послойной монотонизацией является монотонным, но оказывается асимметричным. Наблюдается более сильное размытие профиля справа от пика (см. рис. 7в-7г). Отсюда следует, что предпочтение следует отдавать локальной монотонизации, при которой профиль численного решения монотонен и симметричен. Аналогичный результат наблюдается в тесте 3.

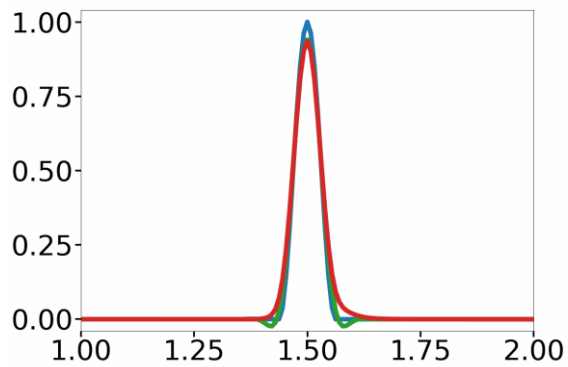
Как и в случае  $\sigma \leq 1$ , переход к гибридным схемам не устраняет всех немонотонностей на тесте 4. Кроме того, в тесте 1 при  $\sigma > 1$  решения по схеме CIP и схеме низкого порядка на каждом шаге по времени отличаются более значительно, чем при  $\sigma \leq 1$ , поэтому наблюдается более сильная зависимость порядка сходимости гибридной схемы от параметров гибридизации; третий порядок сходимости достигается только при небольших значениях  $C_1$ .



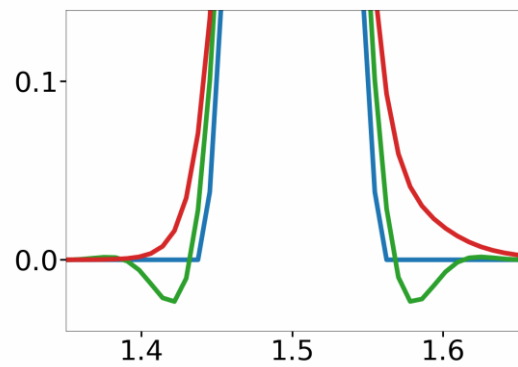
(a)



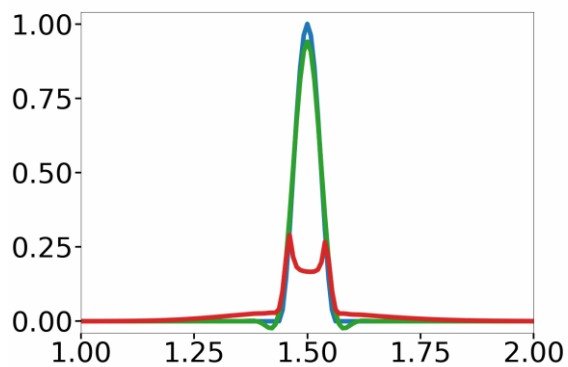
(б)



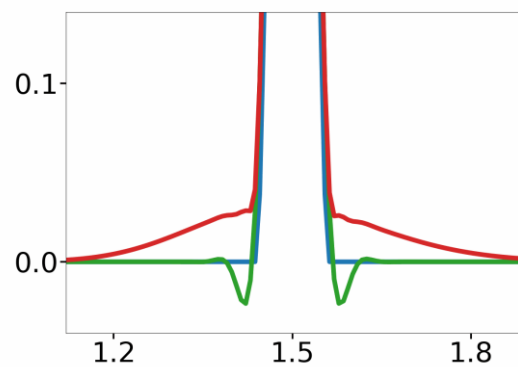
(в)



(г)



(д)



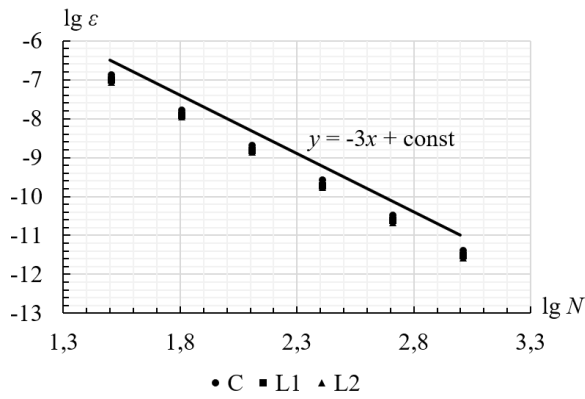
(е)

Рис. 7. Профили численного решения уравнения адвекции (7) для теста 2 при локальной (а, б), послойной (в, г) и глобальной (д, е) монотонизации при  $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ,  $N = 64$ ,  $m = 4$ ,  $C_1 = 0,70$ . Зелёная линия – решение по схеме CIP, красная линия – решение по гибридной схеме, синяя линия – точное решение.

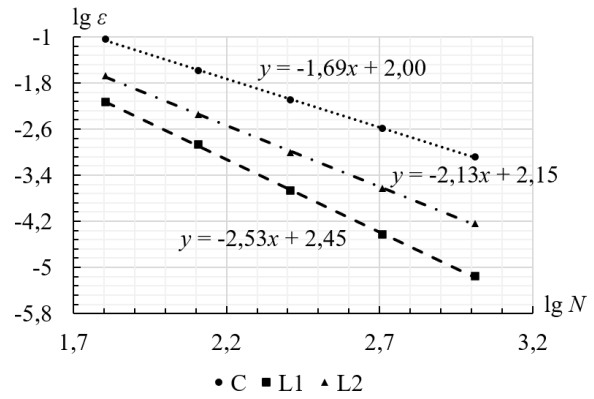
Таблица 4

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $N$  шагами по времени ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ )

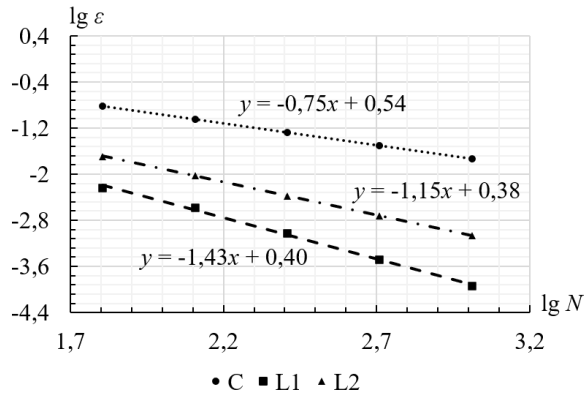
$N$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,05</math></i>						
32	$1,33 \cdot 10^{-7}$	2,99	$9,87 \cdot 10^{-8}$	3,00	$8,76 \cdot 10^{-8}$	3,00
64	$1,67 \cdot 10^{-8}$	3,00	$1,23 \cdot 10^{-8}$	3,00	$1,09 \cdot 10^{-8}$	3,00
128	$2,09 \cdot 10^{-9}$	3,00	$1,54 \cdot 10^{-9}$	3,00	$1,37 \cdot 10^{-9}$	3,00
256	$2,61 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,92 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,71 \cdot 10^{-10}$	3,00
512	$3,26 \cdot 10^{-11}$	3,00	$2,40 \cdot 10^{-11}$	3,00	$2,14 \cdot 10^{-11}$	3,00
1024	$4,08 \cdot 10^{-12}$	–	$3,00 \cdot 10^{-12}$	–	$2,67 \cdot 10^{-12}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$9,09 \cdot 10^{-2}$	1,79	$7,51 \cdot 10^{-3}$	2,48	$2,11 \cdot 10^{-2}$	2,22
128	$2,63 \cdot 10^{-2}$	1,71	$1,35 \cdot 10^{-3}$	2,65	$4,54 \cdot 10^{-3}$	2,20
256	$8,03 \cdot 10^{-3}$	1,66	$2,15 \cdot 10^{-4}$	2,52	$9,90 \cdot 10^{-4}$	2,08
512	$2,55 \cdot 10^{-3}$	1,63	$3,76 \cdot 10^{-5}$	2,43	$2,34 \cdot 10^{-4}$	2,00
1024	$8,26 \cdot 10^{-4}$	–	$6,98 \cdot 10^{-6}$	–	$5,86 \cdot 10^{-5}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,51 \cdot 10^{-1}$	0,74	$5,79 \cdot 10^{-3}$	1,13	$2,02 \cdot 10^{-2}$	1,08
128	$8,99 \cdot 10^{-2}$	0,76	$2,64 \cdot 10^{-3}$	1,50	$9,52 \cdot 10^{-3}$	1,18
256	$5,31 \cdot 10^{-2}$	0,76	$9,38 \cdot 10^{-4}$	1,53	$4,21 \cdot 10^{-3}$	1,16
512	$3,14 \cdot 10^{-2}$	0,75	$3,25 \cdot 10^{-4}$	1,51	$1,89 \cdot 10^{-3}$	1,15
1024	$1,86 \cdot 10^{-2}$	–	$1,14 \cdot 10^{-4}$	–	$8,53 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$1,56 \cdot 10^{-2}$	0,77	$7,03 \cdot 10^{-2}$	0,40
128			$9,12 \cdot 10^{-3}$	0,77	$5,34 \cdot 10^{-2}$	0,39
256			$5,35 \cdot 10^{-3}$	0,76	$4,07 \cdot 10^{-2}$	0,39
512			$3,15 \cdot 10^{-3}$	0,76	$3,10 \cdot 10^{-2}$	0,39
1024			$1,85 \cdot 10^{-3}$	–	$2,37 \cdot 10^{-2}$	–



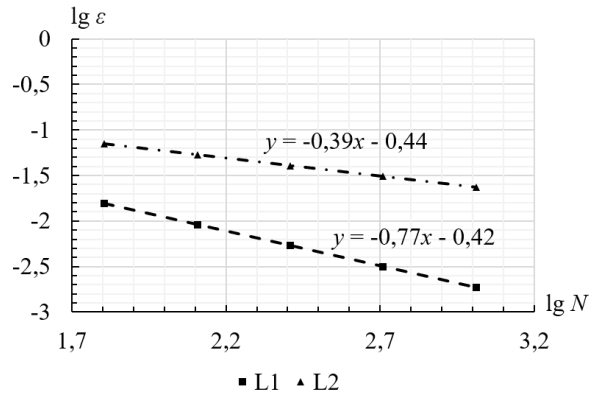
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 8. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СИР с локальной монотонизацией от числа временных шагов сетки  $N$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 5

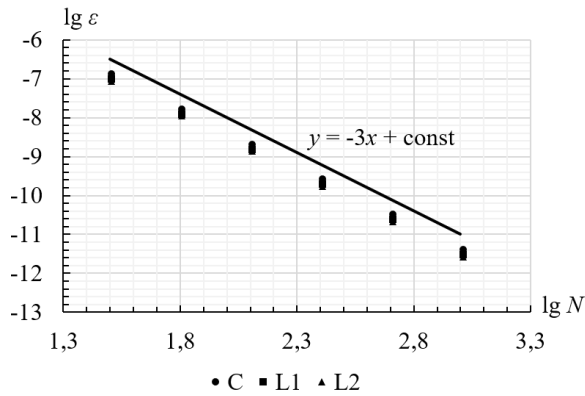
Порядки сходимости численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СИР с локальной монотонизацией ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	3,00	3,00	3,00
2	1,69	2,53	2,13
3	0,75	1,43	1,15
4	–	0,77	0,39

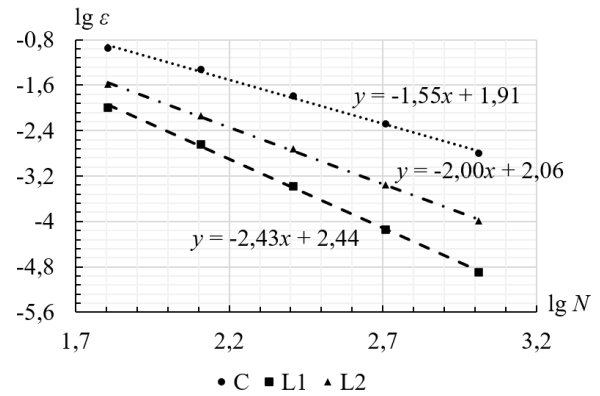
Таблица 6

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с послойной монотонизацией на равномерных сетках с  $N$  шагами по времени ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ )

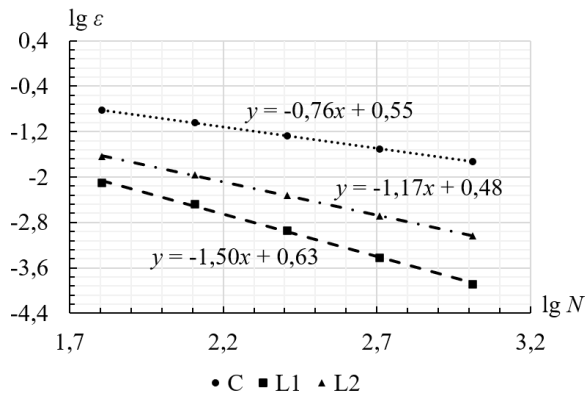
$N$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,05</math></i>						
32	$1,33 \cdot 10^{-7}$	2,99	$9,87 \cdot 10^{-8}$	3,00	$8,76 \cdot 10^{-8}$	3,00
64	$1,67 \cdot 10^{-8}$	3,00	$1,23 \cdot 10^{-8}$	3,00	$1,09 \cdot 10^{-8}$	3,00
128	$2,09 \cdot 10^{-9}$	3,00	$1,54 \cdot 10^{-9}$	3,00	$1,37 \cdot 10^{-9}$	3,00
256	$2,61 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,92 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,71 \cdot 10^{-10}$	3,00
512	$3,26 \cdot 10^{-11}$	3,00	$2,40 \cdot 10^{-11}$	3,00	$2,14 \cdot 10^{-11}$	3,00
1024	$4,08 \cdot 10^{-12}$	–	$3,00 \cdot 10^{-12}$	–	$2,67 \cdot 10^{-12}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,14 \cdot 10^{-1}$	1,27	$1,02 \cdot 10^{-2}$	2,16	$2,58 \cdot 10^{-2}$	1,81
128	$4,71 \cdot 10^{-2}$	1,53	$2,28 \cdot 10^{-3}$	2,46	$7,37 \cdot 10^{-3}$	1,97
256	$1,63 \cdot 10^{-2}$	1,65	$4,14 \cdot 10^{-4}$	2,51	$1,88 \cdot 10^{-3}$	2,09
512	$5,17 \cdot 10^{-3}$	1,72	$7,27 \cdot 10^{-5}$	2,53	$4,43 \cdot 10^{-4}$	2,11
1024	$1,57 \cdot 10^{-3}$	–	$1,26 \cdot 10^{-5}$	–	$1,03 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,52 \cdot 10^{-1}$	0,76	$7,91 \cdot 10^{-3}$	1,26	$2,32 \cdot 10^{-2}$	1,11
128	$8,99 \cdot 10^{-2}$	0,76	$3,29 \cdot 10^{-3}$	1,54	$1,08 \cdot 10^{-2}$	1,19
256	$5,31 \cdot 10^{-2}$	0,76	$1,13 \cdot 10^{-3}$	1,57	$4,73 \cdot 10^{-3}$	1,18
512	$3,14 \cdot 10^{-2}$	0,75	$3,81 \cdot 10^{-4}$	1,55	$2,09 \cdot 10^{-3}$	1,17
1024	$1,86 \cdot 10^{-2}$	–	$1,30 \cdot 10^{-4}$	–	$9,27 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$1,57 \cdot 10^{-2}$	0,76	$6,96 \cdot 10^{-2}$	0,39
128			$9,27 \cdot 10^{-3}$	0,77	$5,33 \cdot 10^{-2}$	0,39
256			$5,45 \cdot 10^{-3}$	0,76	$4,08 \cdot 10^{-2}$	0,39
512			$3,21 \cdot 10^{-3}$	0,76	$3,12 \cdot 10^{-2}$	0,39
1024			$1,89 \cdot 10^{-3}$	–	$2,39 \cdot 10^{-2}$	–



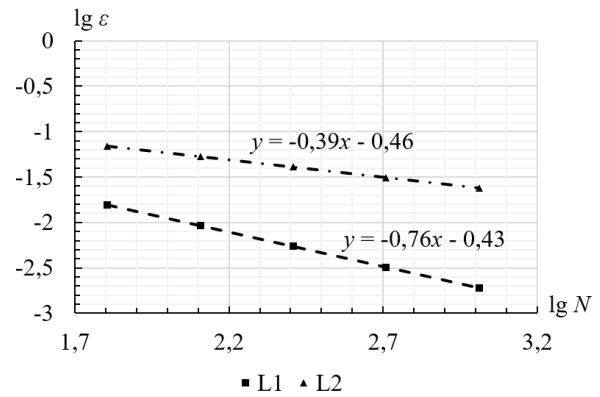
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 9. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СІР с послойной монотонизацией от числа временных шагов сетки  $N$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 7

Порядки сходимости численного решения уравнения адвекции (7) по модифицированной схеме СІР с послойной монотонизацией ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	3,00	3,00	3,00
2	1,55	2,43	2,00
3	0,76	1,50	1,17
4	–	0,76	0,39

## 5. Тестирование гибридных схем для неоднородного уравнения переноса

Перейдём к тестированию гибридных схем для неоднородного уравнения переноса (1). Будем использовать тот же набор тестов, что и в предыдущем разделе. Функцию правой части выберем в виде

$$f = \kappa_0 u_0(x - at). \quad (22)$$

Тогда точное решение, как и в случае уравнения адвекции (7), задаётся формулой (19).

Начальные и граничные условия на производную, использующиеся при численном решении неоднородного уравнения по схеме СІР, вообще говоря, отличаются от условий на производную (20) и (21) для уравнения адвекции. В случае  $\sigma \leq 1$  вместо (20) имеем условия

$$\tilde{d}_m^0 = hu'_0(x_m), \quad \tilde{d}_0^n = hu'_0(-at^n) + \frac{h}{a} f_0^n - \frac{h\kappa_0}{a} y_0^n,$$

а в случае  $\sigma > 1$  вместо (21) – условия

$$\tilde{g}_m^0 = -\tau au'_0(x_m) + \tau f_m^0 - \tau \kappa_0 y_m^0, \quad \tilde{g}_0^n = -\tau au'_0(-at^n).$$

Изменения связаны с тем, что при выводе начальных и граничных условий на функции  $\tilde{d}_m^n$  и  $\tilde{g}_m^n$  используется связь пространственных и временных производных, которая задаётся решаемым уравнением. Однако при выборе правой части в виде (22) указанное различие пропадает, так что в наших тестах начальные и граничные условия к уравнению адвекции (7) и неоднородному уравнению переноса (1) оказываются одинаковыми.

Как показано в предыдущем разделе, при решении уравнения адвекции наилучшие результаты даёт схема с локальной монотонизацией, поэтому, переходя к решению неоднородного уравнения, мы ограничиваемся этим вариантом гибридной схемы. В качестве схемы низкого порядка при вычислении гибридного решения будем использовать сеточно-характеристическую схему с линейной интерполяцией, в которой для расчёта интеграла из (6) применяется формула прямоугольников. Таким образом, схема низкого порядка (при  $\sigma \leq 1$ ) имеет вид:

$$y_{m+1}^{n+1} = e^{-\kappa_0 \tau} \left[ \sigma y_m^n + (1 - \sigma) y_{m+1}^n + \tau f(x_{m+1} - a\tau, t^n) \right].$$

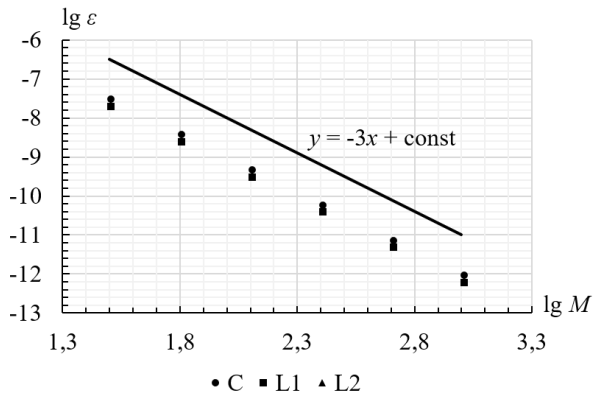
Аналогичная формула справедлива и в случае  $\sigma > 1$ :

$$y_{m+1}^{n+1} = e^{-\kappa_0 h/a} \left[ \frac{y_m^n}{\sigma} + \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) y_m^{n+1} + \frac{h}{a} f \left( x_m, t^{n+1} - \frac{h}{a} \right) \right].$$

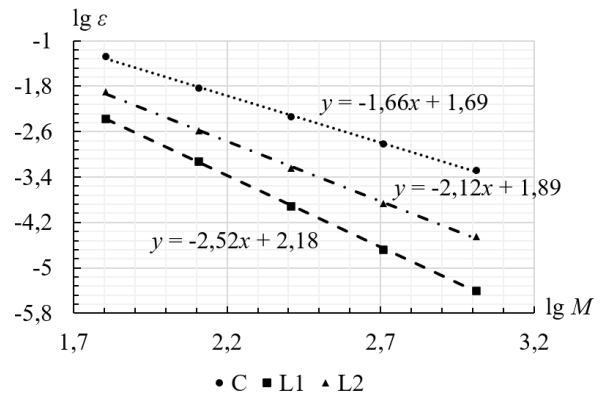
Таблица 8

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 1$ )

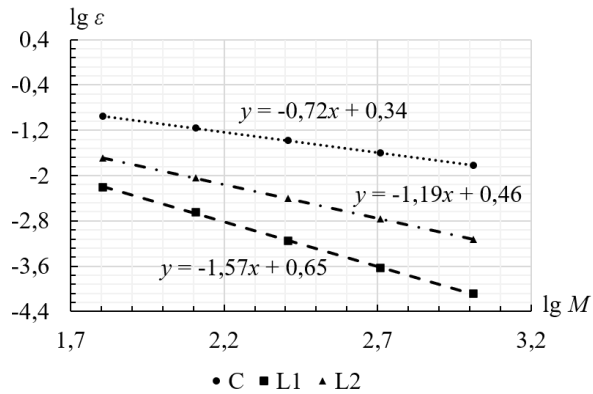
$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 1,00</math></i>						
32	$2,99 \cdot 10^{-8}$	2,99	$1,93 \cdot 10^{-8}$	2,98	$2,13 \cdot 10^{-8}$	2,98
64	$3,75 \cdot 10^{-9}$	3,00	$2,45 \cdot 10^{-9}$	2,99	$2,70 \cdot 10^{-9}$	2,99
128	$4,70 \cdot 10^{-10}$	3,00	$3,09 \cdot 10^{-10}$	2,99	$3,39 \cdot 10^{-10}$	3,00
256	$5,88 \cdot 10^{-11}$	3,00	$3,87 \cdot 10^{-11}$	3,00	$4,26 \cdot 10^{-11}$	3,00
512	$7,36 \cdot 10^{-12}$	3,00	$4,85 \cdot 10^{-12}$	3,02	$5,33 \cdot 10^{-12}$	3,02
1024	$9,22 \cdot 10^{-13}$	–	$5,97 \cdot 10^{-13}$	–	$6,56 \cdot 10^{-13}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$5,25 \cdot 10^{-2}$	1,85	$4,23 \cdot 10^{-3}$	2,52	$1,25 \cdot 10^{-2}$	2,28
128	$1,45 \cdot 10^{-2}$	1,68	$7,36 \cdot 10^{-4}$	2,63	$2,58 \cdot 10^{-3}$	2,20
256	$4,54 \cdot 10^{-3}$	1,59	$1,19 \cdot 10^{-4}$	2,51	$5,62 \cdot 10^{-4}$	2,04
512	$1,51 \cdot 10^{-3}$	1,55	$2,09 \cdot 10^{-5}$	2,39	$1,36 \cdot 10^{-4}$	1,95
1024	$5,15 \cdot 10^{-4}$	–	$3,98 \cdot 10^{-6}$	–	$3,53 \cdot 10^{-5}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,10 \cdot 10^{-1}$	0,68	$6,27 \cdot 10^{-3}$	1,49	$2,02 \cdot 10^{-2}$	1,15
128	$6,88 \cdot 10^{-2}$	0,72	$2,23 \cdot 10^{-3}$	1,67	$9,07 \cdot 10^{-3}$	1,20
256	$4,18 \cdot 10^{-2}$	0,73	$7,03 \cdot 10^{-4}$	1,58	$3,94 \cdot 10^{-3}$	1,20
512	$2,53 \cdot 10^{-2}$	0,73	$2,35 \cdot 10^{-4}$	1,51	$1,71 \cdot 10^{-3}$	1,20
1024	$1,52 \cdot 10^{-2}$	–	$8,25 \cdot 10^{-5}$	–	$7,47 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$3,09 \cdot 10^{-2}$	0,82	$9,98 \cdot 10^{-2}$	0,42
128			$1,75 \cdot 10^{-2}$	0,81	$7,45 \cdot 10^{-2}$	0,41
256			$9,97 \cdot 10^{-3}$	0,80	$5,59 \cdot 10^{-2}$	0,41
512			$5,73 \cdot 10^{-3}$	0,79	$4,21 \cdot 10^{-2}$	0,40
1024			$3,30 \cdot 10^{-3}$	–	$3,18 \cdot 10^{-2}$	–



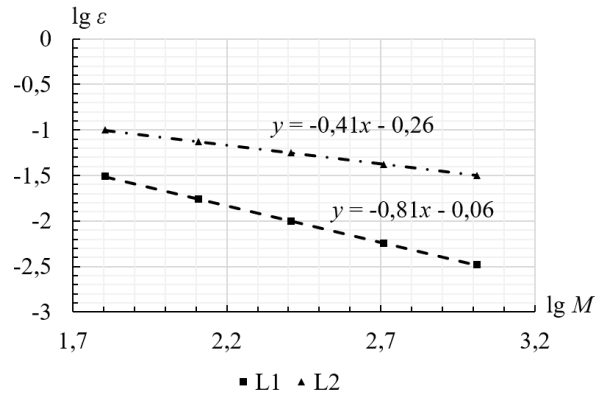
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 10. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией от числа пространственных шагов сетки  $M$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 1$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 9

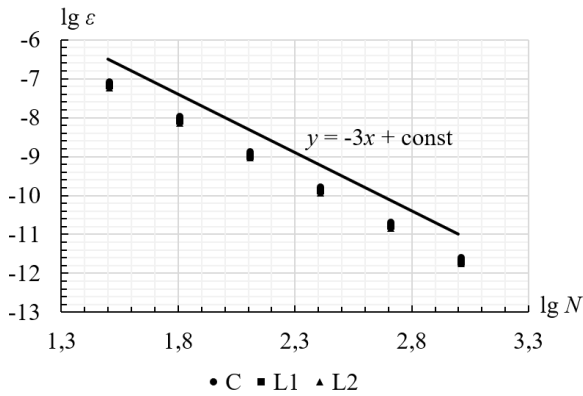
Порядки сходимости численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 1$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	3,00	3,00	3,00
2	1,66	2,52	2,12
3	0,72	1,57	1,19
4	–	0,81	0,41

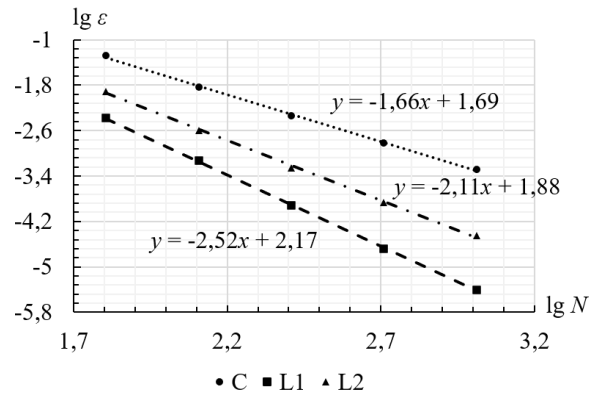
Таблица 10

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  модифицированной схемы СР с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $N$  шагами по времени ( $\sigma = 2, T = 1, \kappa_0 = 1$ )

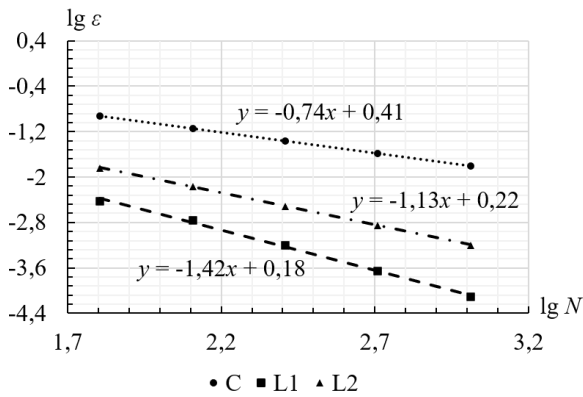
$N$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4, C_1 = 1,00</math></i>						
32	$8,35 \cdot 10^{-8}$	2,99	$6,64 \cdot 10^{-8}$	3,00	$5,86 \cdot 10^{-8}$	2,99
64	$1,05 \cdot 10^{-8}$	3,00	$8,32 \cdot 10^{-9}$	3,00	$7,35 \cdot 10^{-9}$	3,00
128	$1,32 \cdot 10^{-9}$	3,00	$1,04 \cdot 10^{-9}$	3,00	$9,21 \cdot 10^{-10}$	3,00
256	$1,65 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,30 \cdot 10^{-10}$	3,00	$1,15 \cdot 10^{-10}$	3,00
512	$2,07 \cdot 10^{-11}$	3,00	$1,63 \cdot 10^{-11}$	3,02	$1,44 \cdot 10^{-11}$	3,02
1024	$2,58 \cdot 10^{-12}$	–	$2,00 \cdot 10^{-12}$	–	$1,77 \cdot 10^{-12}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4, C_1 = 0,70</math></i>						
64	$5,26 \cdot 10^{-2}$	1,85	$4,20 \cdot 10^{-3}$	2,51	$1,23 \cdot 10^{-2}$	2,27
128	$1,45 \cdot 10^{-2}$	1,68	$7,35 \cdot 10^{-4}$	2,62	$2,55 \cdot 10^{-3}$	2,19
256	$4,54 \cdot 10^{-3}$	1,59	$1,19 \cdot 10^{-4}$	2,51	$5,57 \cdot 10^{-4}$	2,04
512	$1,51 \cdot 10^{-3}$	1,55	$2,09 \cdot 10^{-5}$	2,40	$1,36 \cdot 10^{-4}$	1,95
1024	$5,15 \cdot 10^{-4}$	–	$3,97 \cdot 10^{-6}$	–	$3,52 \cdot 10^{-5}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4, C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,19 \cdot 10^{-1}$	0,72	$3,74 \cdot 10^{-3}$	1,10	$1,44 \cdot 10^{-2}$	1,07
128	$7,24 \cdot 10^{-2}$	0,74	$1,75 \cdot 10^{-3}$	1,50	$6,88 \cdot 10^{-3}$	1,16
256	$4,33 \cdot 10^{-2}$	0,74	$6,18 \cdot 10^{-4}$	1,49	$3,08 \cdot 10^{-3}$	1,15
512	$2,59 \cdot 10^{-2}$	0,74	$2,20 \cdot 10^{-4}$	1,51	$1,39 \cdot 10^{-3}$	1,14
1024	$1,55 \cdot 10^{-2}$	–	$7,71 \cdot 10^{-5}$	–	$6,32 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4, C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,79	$8,84 \cdot 10^{-2}$	0,50
128			$7,32 \cdot 10^{-3}$	0,79	$6,25 \cdot 10^{-2}$	0,50
256			$4,23 \cdot 10^{-3}$	0,78	$4,42 \cdot 10^{-2}$	0,50
512			$2,47 \cdot 10^{-3}$	0,77	$3,13 \cdot 10^{-2}$	0,50
1024			$1,45 \cdot 10^{-3}$	–	$2,21 \cdot 10^{-2}$	–



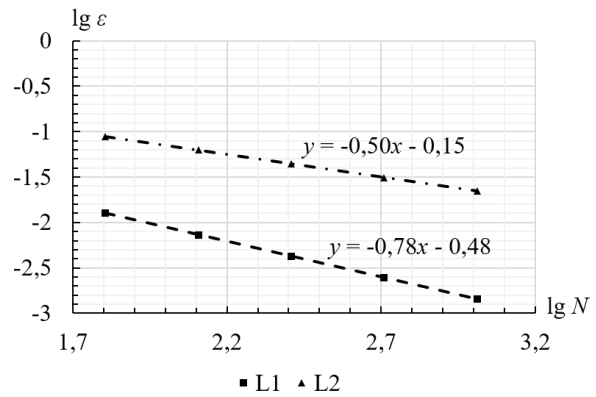
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 11. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией от числа временных шагов сетки  $N$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 2, T = 1, \kappa_0 = 1$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 11

Порядки сходимости численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по модифицированной схеме СІР с локальной монотонизацией ( $\sigma = 2, T = 1, \kappa_0 = 1$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	3,00	3,00	3,00
2	1,66	2,52	2,11
3	0,74	1,42	1,13
4	–	0,78	0,50

Результаты тестов для случая  $\sigma \leq 1$  при периодических граничных условиях приведены в табл. 8, 9 и на рис. 10. В этих тестах  $a=1$ ,  $\kappa_0=1$ ,  $\sigma=0,5$ ,  $X=1$ ,  $T=1$ , а  $N=2M$ . Погрешности численного решения и порядки сходимости не отличаются существенно от представленных в табл. 1, 2.

В случае  $\sigma > 1$  полагаем  $a=1$ ,  $\kappa_0=1$ ,  $\sigma=2$ ,  $X=2$ ,  $T=1$ , при этом  $M=4N$  и вместо периодических граничных условий (4) используются классические условия (3). Результаты тестов приведены в табл. 10, 11 и на рис. 11. Существенных отличий от результатов из табл. 4, 5 также не наблюдается.

## 6. Схема СІР для случая больших оптических толщин

При численном решении неоднородного уравнения переноса по схеме СІР, как и при решении по любой другой интерполяционно-характеристической схеме, необходимо вычислять интеграл из (6). Для этого в схеме СІР используется формула Симпсона четвертого порядка аппроксимации. При этом важным параметром является безразмерная комбинация  $l = \kappa s/a$  ( $s$  – характерный размер задачи), называемая оптической толщиной. До сих пор мы рассматривали случай умеренных оптических толщин, когда ошибки численного интегрирования по формуле Симпсона не превосходят ошибок интерполяции. Однако при больших оптических толщинах основной вклад в погрешность численного решения вносят ошибки численного интегрирования [20, 22].

Предложим использовать в схеме СІР новый вариант интегрирования вдоль характеристики, который позволит уменьшить ошибки численного решения в случае больших оптических толщин. Основная идея этого варианта заключается в том, что выполняется переход от интеграла Римана к интегралу Стильтьеса, в результате которого формула (6) принимает вид:

$$u = u^* \gamma^* + \frac{1}{\kappa_0} \int_{\gamma^*}^1 d\gamma' f \left( x_{m+1} + \frac{a}{\kappa_0} \ln \gamma', t^{n+1} + \frac{1}{\kappa_0} \ln \gamma' \right). \quad (23)$$

Здесь  $\gamma'(\eta') = \exp[-\kappa_0(\eta - \eta')/2a]$  – интегрирующая функция,  $\gamma^* = \gamma(\eta^*) = e^{-\kappa_0 \tau}$ . В данном случае  $s = \eta - \eta^*$ , что соответствует длине отрезка интегрирования вдоль характеристики  $EA$  (рис. 1).

После перехода к интегрированию по Стильтьесу изменяются только формулы для  $y_{m+1}^{n+1}$  и  $y_{m+1}^{n+1/2}$ , в которые входит интеграл вдоль характеристики. При  $\sigma \leq 1$  эти формулы имеют вид

$$y_{m+1}^{n+1} = y^* \gamma^* + \frac{1 - \gamma^*}{6\kappa_0} \left[ f(x_{m+1} - a\tau, t^n) + 4f \left( x_{m+1} + \frac{a \ln \gamma_1}{\kappa_0}, t^{n+1} + \frac{\ln \gamma_1}{\kappa_0} \right) + f(x_{m+1}, t^{n+1}) \right],$$

$$y_{m+1}^{n+1/2} = \hat{y}\hat{\gamma} + \frac{1-\hat{\gamma}}{6\kappa_0} \left[ f\left(x_{m+1} - \frac{a\tau}{2}, t^n\right) + 4f\left(x_{m+1} + \frac{a \ln \gamma_{II}}{\kappa_0}, t^{n+1/2} + \frac{\ln \gamma_{II}}{\kappa_0}\right) + f\left(x_{m+1}, t^{n+1/2}\right) \right],$$

где  $\gamma^* = e^{-\kappa_0\tau}$ ,  $\hat{\gamma} = e^{-\kappa_0\tau/2}$ ,  $\gamma_I = (1 + \gamma^*)/2$ ,  $\gamma_{II} = (1 + \hat{\gamma})/2$ .

Исследуем приведённые формулы схемы СР в пределе  $l \gg 1$ , когда  $\gamma^* \approx 0$ ,  $\hat{\gamma} \approx 0$ . Применение формулы Симпсона к интегралу из (23) даёт

$$\frac{1}{6\kappa_0} \left[ f\left(x_{m+1} - a\tau, t^n\right) + 4f\left(x_{m+1} - \frac{a\tau}{2} + \Delta x, t^{n+1/2} + \Delta t\right) + f\left(x_{m+1}, t^{n+1}\right) \right],$$

$$\Delta x = \frac{a\tau}{2} - L \cdot a\tau, \quad \Delta t = \frac{\tau}{2} - L \cdot \tau, \quad L = \frac{2(\ln 2 - e^{-l/2})}{l}.$$

В отличие от формулы Симпсона для интеграла Римана второе слагаемое вычисляется не в середине  $K$  отрезка характеристики  $EA$  (рис. 1), а в точке  $K^*$ , смещённой от  $K$  на  $\Delta x$  по координате и  $\Delta t$  по времени. С увеличением оптической толщины ячейки  $l$  точка  $K^*$  сдвигается вдоль характеристики к точке  $A$  (поскольку  $\lim_{l \rightarrow \infty} L = 0$ ). В пределе  $l \rightarrow \infty$  обе точки ( $K^*$  и  $A$ ) совпадают.

Аналогичным образом можно перейти к интегралу Стильеса и в случае  $\sigma > 1$ .

Далее для краткости будем использовать следующие обозначения: СР\_R – схема СР, в которой формула Симпсона применяется к интегралу Римана, СР\_S – схема СР с интегралом Стильеса.

Схемой низкого порядка, как и раньше, является сеточно-характеристическая схема первого порядка на шаблоне уголка, в которой формула прямоугольников теперь применяется к интегралу Стильеса. Таким образом, при  $\sigma \leq 1$  схема низкого порядка имеет вид:

$$y_{m+1}^{n+1} = e^{-\kappa_0\tau} \left[ \sigma y_m^n + (1 - \sigma) y_{m+1}^n \right] + \frac{1 - e^{-\kappa_0\tau}}{\kappa_0} f\left(x_{m+1} - a\tau, t^n\right). \quad (24)$$

Аналогичную формулу можно получить и для случая  $\sigma > 1$ .

## 7. Тестирование схемы СР в случае больших оптических толщин

Начнём с тестирования схемы СР\_S для неоднородного уравнения переноса (1) в случае  $\sigma \leq 1$ . Пусть  $a = 1$ ,  $\sigma = 0,5$ ,  $X = 1$ ,  $T = 1$ .

Табл. 12 демонстрирует третий порядок сходимости схемы СР\_S на гладком тесте при  $\kappa_0 = 1$ , причём величины ошибок не отличаются существенно от представленных в табл. 8 для схемы СР\_R.

Таблица 12

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  схемы CIP\_S без монотонизации на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству (тест 1,  $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 1$ )

$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
32	$2,99 \cdot 10^{-8}$	2,99	$1,93 \cdot 10^{-8}$	2,98	$2,13 \cdot 10^{-8}$	2,98
64	$3,75 \cdot 10^{-9}$	3,00	$2,45 \cdot 10^{-9}$	2,99	$2,70 \cdot 10^{-9}$	2,99
128	$4,70 \cdot 10^{-10}$	3,00	$3,09 \cdot 10^{-10}$	2,99	$3,39 \cdot 10^{-10}$	3,00
256	$5,88 \cdot 10^{-11}$	3,00	$3,87 \cdot 10^{-11}$	3,00	$4,26 \cdot 10^{-11}$	3,00
512	$7,37 \cdot 10^{-12}$	2,97	$4,85 \cdot 10^{-12}$	3,00	$5,33 \cdot 10^{-12}$	3,00
1024	$9,42 \cdot 10^{-13}$	–	$6,07 \cdot 10^{-13}$	–	$6,67 \cdot 10^{-13}$	–

Таблица 13

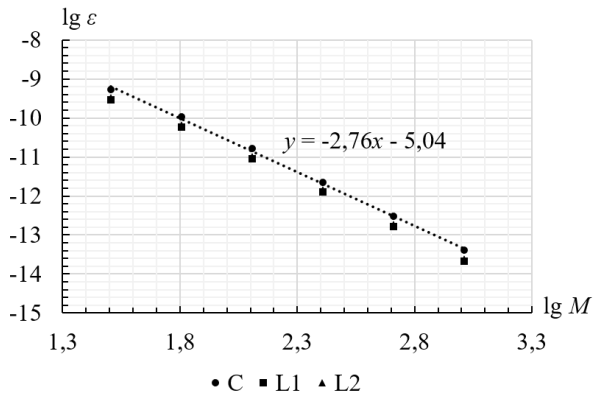
Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  схем CIP\_R и CIP\_S без монотонизации на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству (тест 1,  $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ )

$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Схема CIP_R</i>						
32	$1,90 \cdot 10^{-3}$	4,12	$8,55 \cdot 10^{-4}$	3,91	$9,93 \cdot 10^{-4}$	3,93
64	$1,09 \cdot 10^{-4}$	4,06	$5,69 \cdot 10^{-5}$	3,97	$6,52 \cdot 10^{-5}$	3,98
128	$6,52 \cdot 10^{-6}$	4,00	$3,62 \cdot 10^{-6}$	3,99	$4,12 \cdot 10^{-6}$	4,00
256	$4,08 \cdot 10^{-7}$	4,00	$2,27 \cdot 10^{-7}$	4,00	$2,58 \cdot 10^{-7}$	4,00
512	$2,55 \cdot 10^{-8}$	4,00	$1,42 \cdot 10^{-8}$	4,00	$1,62 \cdot 10^{-8}$	4,00
1024	$1,60 \cdot 10^{-9}$	–	$8,90 \cdot 10^{-10}$	–	$1,01 \cdot 10^{-9}$	–
<i>Схема CIP_S</i>						
32	$5,31 \cdot 10^{-10}$	2,33	$2,92 \cdot 10^{-10}$	2,31	$3,32 \cdot 10^{-10}$	2,32
64	$1,06 \cdot 10^{-10}$	2,69	$5,87 \cdot 10^{-11}$	2,68	$6,67 \cdot 10^{-11}$	2,69
128	$1,64 \cdot 10^{-11}$	2,85	$9,13 \cdot 10^{-12}$	2,85	$1,04 \cdot 10^{-11}$	2,85
256	$2,27 \cdot 10^{-12}$	2,92	$1,27 \cdot 10^{-12}$	2,93	$1,44 \cdot 10^{-12}$	2,93
512	$2,99 \cdot 10^{-13}$	2,86	$1,67 \cdot 10^{-13}$	2,96	$1,89 \cdot 10^{-13}$	2,96
1024	$4,12 \cdot 10^{-14}$	–	$2,14 \cdot 10^{-14}$	–	$2,43 \cdot 10^{-14}$	–

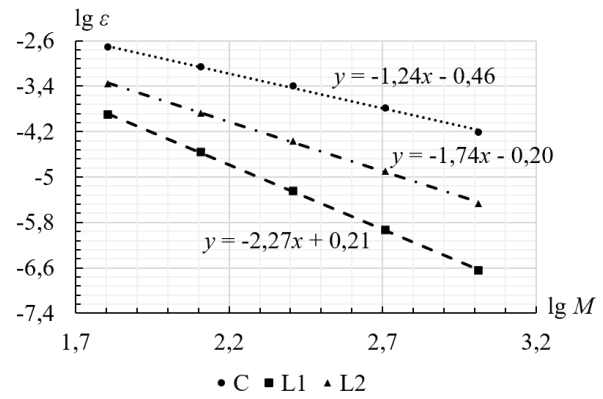
Таблица 14

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  схемы SIP\_S с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $M$  шагами по пространству ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ )

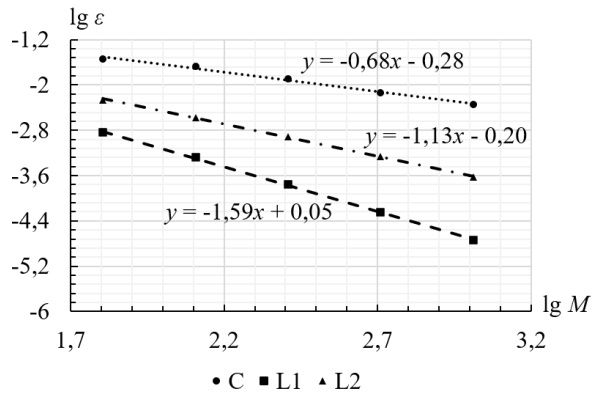
$M$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 1,00</math></i>						
32	$5,31 \cdot 10^{-10}$	2,33	$2,92 \cdot 10^{-10}$	2,31	$3,32 \cdot 10^{-10}$	2,32
64	$1,06 \cdot 10^{-10}$	2,69	$5,87 \cdot 10^{-11}$	2,68	$6,67 \cdot 10^{-11}$	2,69
128	$1,64 \cdot 10^{-11}$	2,85	$9,13 \cdot 10^{-12}$	2,85	$1,04 \cdot 10^{-11}$	2,85
256	$2,27 \cdot 10^{-12}$	2,92	$1,27 \cdot 10^{-12}$	2,93	$1,44 \cdot 10^{-12}$	2,93
512	$2,99 \cdot 10^{-13}$	2,86	$1,67 \cdot 10^{-13}$	2,96	$1,89 \cdot 10^{-13}$	2,96
1024	$4,12 \cdot 10^{-14}$	–	$2,14 \cdot 10^{-14}$	–	$2,43 \cdot 10^{-14}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,94 \cdot 10^{-3}$	1,15	$1,24 \cdot 10^{-4}$	2,19	$4,35 \cdot 10^{-4}$	1,69
128	$8,73 \cdot 10^{-4}$	1,13	$2,72 \cdot 10^{-5}$	2,27	$1,34 \cdot 10^{-4}$	1,63
256	$4,00 \cdot 10^{-4}$	1,29	$5,66 \cdot 10^{-6}$	2,29	$4,34 \cdot 10^{-5}$	1,79
512	$1,63 \cdot 10^{-4}$	1,40	$1,16 \cdot 10^{-6}$	2,34	$1,26 \cdot 10^{-5}$	1,88
1024	$6,20 \cdot 10^{-5}$	–	$2,29 \cdot 10^{-7}$	–	$3,41 \cdot 10^{-6}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$2,86 \cdot 10^{-2}$	0,44	$1,46 \cdot 10^{-3}$	1,48	$5,45 \cdot 10^{-3}$	1,02
128	$2,11 \cdot 10^{-2}$	0,72	$5,23 \cdot 10^{-4}$	1,59	$2,69 \cdot 10^{-3}$	1,13
256	$1,29 \cdot 10^{-2}$	0,81	$1,74 \cdot 10^{-4}$	1,61	$1,23 \cdot 10^{-3}$	1,17
512	$7,35 \cdot 10^{-3}$	0,68	$5,67 \cdot 10^{-5}$	1,64	$5,46 \cdot 10^{-4}$	1,19
1024	$4,57 \cdot 10^{-3}$	–	$1,82 \cdot 10^{-5}$	–	$2,40 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,80</math></i>						
64	–	–	$1,58 \cdot 10^{-2}$	0,69	$6,24 \cdot 10^{-2}$	0,23
128			$9,82 \cdot 10^{-3}$	0,89	$5,31 \cdot 10^{-2}$	0,39
256			$5,30 \cdot 10^{-3}$	0,60	$4,04 \cdot 10^{-2}$	0,01
512			$3,50 \cdot 10^{-3}$	1,22	$4,01 \cdot 10^{-2}$	0,87
1024			$1,51 \cdot 10^{-3}$	–	$2,19 \cdot 10^{-2}$	–



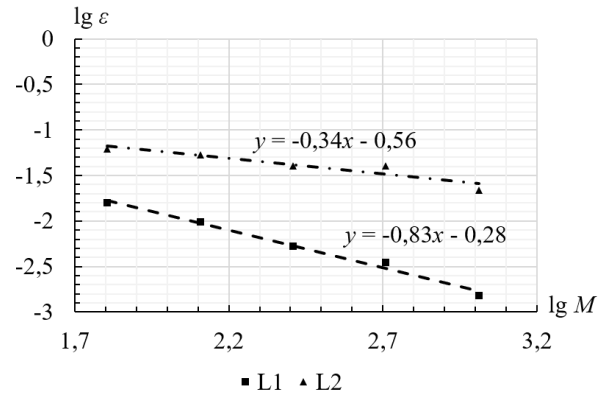
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 12. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по схеме CIP\_S с локальной монотонизацией от числа пространственных шагов сетки  $M$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 15

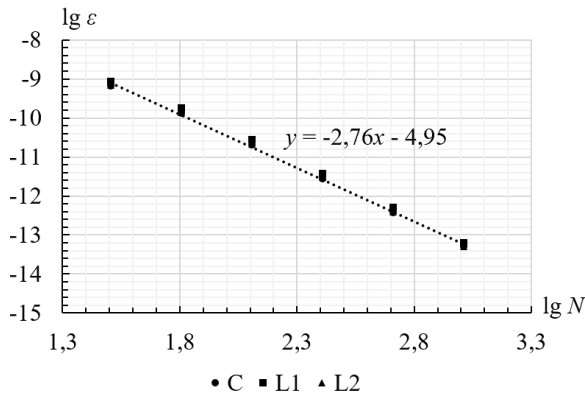
Порядки сходимости численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по схеме CIP\_S с локальной монотонизацией ( $\sigma = 0,5$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	2,76	2,76	2,76
2	1,24	2,27	1,74
3	0,68	1,59	1,13
4	–	0,83	0,34

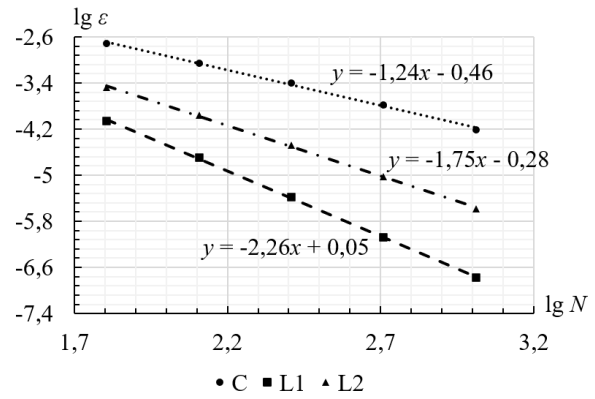
Таблица 16

Погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) и порядки сходимости  $p$  схемы SIP\_S с локальной монотонизацией на равномерных сетках с  $N$  шагами по времени ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ )

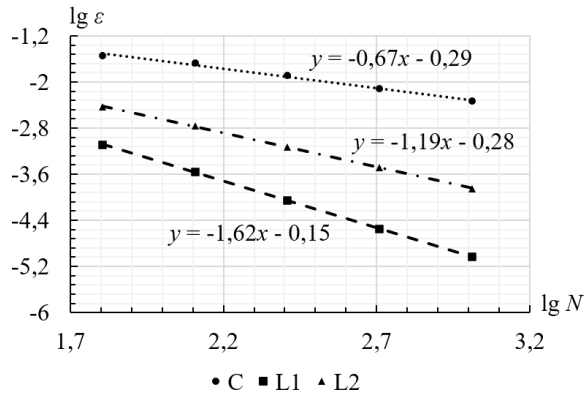
$N$	Норма $C$		Норма $L_1$		Норма $L_2$	
	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$	$\varepsilon$	$p$
<i>Тест 1: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 1,00</math></i>						
32	$6,59 \cdot 10^{-10}$	2,33	$8,81 \cdot 10^{-10}$	2,31	$6,93 \cdot 10^{-10}$	2,32
64	$1,31 \cdot 10^{-10}$	2,69	$1,78 \cdot 10^{-10}$	2,69	$1,39 \cdot 10^{-10}$	2,69
128	$2,03 \cdot 10^{-11}$	2,85	$2,76 \cdot 10^{-11}$	2,85	$2,16 \cdot 10^{-11}$	2,85
256	$2,81 \cdot 10^{-12}$	2,92	$3,83 \cdot 10^{-12}$	2,93	$2,99 \cdot 10^{-12}$	2,93
512	$3,72 \cdot 10^{-13}$	2,85	$5,03 \cdot 10^{-13}$	2,96	$3,93 \cdot 10^{-13}$	2,96
1024	$5,14 \cdot 10^{-14}$	–	$6,45 \cdot 10^{-14}$	–	$5,05 \cdot 10^{-14}$	–
<i>Тест 2: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$1,94 \cdot 10^{-3}$	1,15	$8,67 \cdot 10^{-5}$	2,12	$3,32 \cdot 10^{-4}$	1,60
128	$8,73 \cdot 10^{-4}$	1,13	$2,00 \cdot 10^{-5}$	2,27	$1,10 \cdot 10^{-4}$	1,73
256	$4,00 \cdot 10^{-4}$	1,29	$4,14 \cdot 10^{-6}$	2,32	$3,31 \cdot 10^{-5}$	1,81
512	$1,63 \cdot 10^{-4}$	1,40	$8,32 \cdot 10^{-7}$	2,31	$9,46 \cdot 10^{-6}$	1,86
1024	$6,20 \cdot 10^{-5}$	–	$1,68 \cdot 10^{-7}$	–	$2,60 \cdot 10^{-6}$	–
<i>Тест 3: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	$2,86 \cdot 10^{-2}$	0,44	$8,10 \cdot 10^{-4}$	1,56	$3,66 \cdot 10^{-3}$	1,06
128	$2,11 \cdot 10^{-2}$	0,72	$2,75 \cdot 10^{-4}$	1,65	$1,75 \cdot 10^{-3}$	1,22
256	$1,29 \cdot 10^{-2}$	0,76	$8,75 \cdot 10^{-5}$	1,65	$7,49 \cdot 10^{-4}$	1,22
512	$7,59 \cdot 10^{-3}$	0,72	$2,79 \cdot 10^{-5}$	1,61	$3,23 \cdot 10^{-4}$	1,20
1024	$4,61 \cdot 10^{-3}$	–	$9,13 \cdot 10^{-6}$	–	$1,40 \cdot 10^{-4}$	–
<i>Тест 4: <math>m = 4</math>, <math>C_1 = 0,70</math></i>						
64	–	–	$8,48 \cdot 10^{-3}$	0,95	$8,84 \cdot 10^{-2}$	0,50
128			$4,38 \cdot 10^{-3}$	0,94	$6,25 \cdot 10^{-2}$	0,50
256			$2,29 \cdot 10^{-3}$	0,92	$4,42 \cdot 10^{-2}$	0,50
512			$1,21 \cdot 10^{-3}$	0,89	$3,13 \cdot 10^{-2}$	0,50
1024			$6,53 \cdot 10^{-4}$	–	$2,21 \cdot 10^{-2}$	–



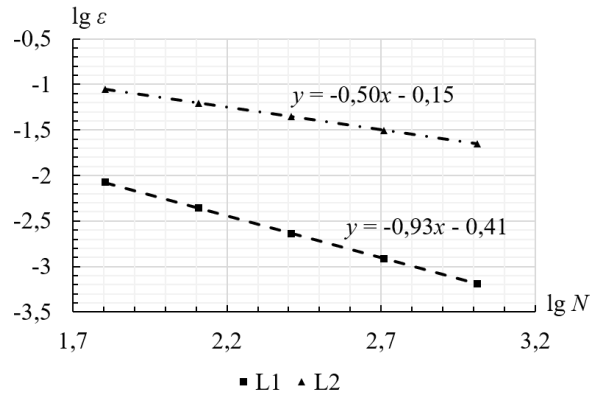
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 13. Графики зависимостей погрешности  $\varepsilon$  численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по схеме CIP\_S с локальной монотонизацией от числа временных шагов сетки  $N$  в логарифмических координатах ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ ): (а) – для теста 1, (б) – для теста 2, (в) – для теста 3, (г) – для теста 4.

Таблица 17

Порядки сходимости численного решения неоднородного уравнения переноса (1) по схеме CIP\_S с локальной монотонизацией ( $\sigma = 2$ ,  $T = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ )

Тест	Норма $C$	Норма $L_1$	Норма $L_2$
1	2,76	2,76	2,76
2	1,24	2,26	1,75
3	0,67	1,62	1,19
4	–	0,93	0,50

Аналогичный результат получается в тестах 2-4. Таким образом, в случае умеренных оптических толщин решения по схемам CIP\_S и CIP\_R отличаются на величину порядка ошибок округления.

Результаты тестирования схем CIP\_R и CIP\_S на гладком тесте при  $\kappa_0 = 100$  приведены в табл. 13, из которой видно, что применение формулы Симпсона к интегралу Стилтеса позволяет уменьшить ошибки численного решения в случае больших оптических толщин на 5–7 порядков. При этом до изменения способа интегрирования схема CIP имела четвёртый порядок сходимости за счёт большой константы ошибки интегрирования и превалирования этой ошибки над ошибкой интерполяции. После перехода к интегралу Стилтеса порядок сходимости оказался равным трём, то есть совпал с априорным порядком аппроксимации схемы.

Приведём результаты тестирования гибридной схемы, в которой схемой высокого порядка является схема CIP\_S, а схемой низкого порядка – характеристическая схема (24). Как и ранее, ограничимся случаем локальной монотонизации.

Результаты тестов при  $a = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ ,  $\sigma = 0,5$ ,  $X = 1$ ,  $T = 1$  с периодическими граничными условиями приведены в табл. 14, 15 и на рис. 12. Сравнение с табл. 8, 9 показывает, что на тестах 2-4 порядки сходимости схемы CIP\_S при  $\kappa_0 = 100$  отличаются от порядков сходимости схемы CIP\_R при  $\kappa_0 = 1$  незначительно. Порядок сходимости схемы CIP\_S на неподробных сетках меньше трёх, на подробных сетках порядок сходимости стремится к трём.

Повторим те же тесты в случае  $\sigma > 1$ , когда  $a = 1$ ,  $\kappa_0 = 100$ ,  $\sigma = 2$ ,  $X = 2$ ,  $T = 1$  и используются классические граничные условия. Результаты тестов приведены в табл. 16, 17 и на рис. 13. Они согласуются с результатами, полученными при  $\sigma \leq 1$  (табл. 14, 15).

## Заключение

В работе построены гибридные схемы для численного решения уравнения адвекции и неоднородного уравнения переноса с поглощением. Схемой высокого порядка является модифицированная схема CIP с эрмитовой интерполяцией, в которой пересчёт производных осуществляется с помощью формулы Эйлера–Маклорена. Схема обладает третьим порядком аппроксимации по времени и пространству. Монотонной схемой низкого порядка является характеристическая схема первого порядка аппроксимации.

В схеме CIP искомыми величинами являются сеточные значения функции и её производной, а в схеме низкого порядка – только сеточные значения функции. Полученные по схеме CIP значения производных следует оставлять без изменений, так как было показано, что расчёт производных с использованием узловых значений функции после гибридизации приводит к большой диссипативной ошибке или даже отсутствию сходимости схемы.

В работе исследованы варианты локальной монотонизации, при которой гибридное решение строится после расчёта каждой ячейки, послойной монотонизации, при которой гибридное решение строится после расчёта каждого слоя по времени, и глобальной монотонизации, при которой гибридное

решение строится после расчёта всех сеточных значений искомой функции. Показано, что наилучший результат достигается при локальной монотонизации, так как в этом случае и при  $\sigma \leq 1$ , и при  $\sigma > 1$  не нарушается симметричность профиля и не возникает дополнительных искажений, являющихся следствием гибридизации. На гладких тестах гибридная схема с локальной монотонизацией демонстрирует третий порядок сходимости, а на тестах с разрывами функции или её производных порядок сходимости уменьшается, но отличается незначительно от порядков сходимости схемы СІР без монотонизации в тех же тестах.

Рассматриваемая модификация схемы СІР применялась ранее для численного решения неоднородного уравнения переноса с поглощением в случае умеренных оптических толщин. При этом интеграл вдоль характеристики рассматривался как интеграл Римана и рассчитывался по формуле Симпсона. Такой способ вычисления интеграла в случае больших оптических толщин приводил к большим ошибкам численного интегрирования. В настоящей работе предложено интеграл вдоль характеристики рассматривать как интеграл Стильбеса и к нему применять формулу Симпсона. На гладком тесте при большой оптической толщине расчётной ячейки порядок сходимости схемы с интегралом Стильбеса равен трём, а ошибки численного решения на 5-7 порядков меньше по сравнению с ошибками в схеме СІР, использующей формулу Симпсона для интеграла Римана.

В дальнейшем схема СІР и предложенный вариант её гибридизации могут быть применены для решения задач переноса нейтронов с разрывным коэффициентом поглощения, изменяющимся на несколько порядков в пределах расчётной области.

## Литература

1. Д. Белл, С. Глестон. Теория ядерных реакторов. Перев. с англ. Под ред. В.Н. Артамкина. – М.: Атомиздат, 1974. – 496 с.  
[https://elib.biblioatom.ru/text/bell\\_teoriya-yadernyh-reaktorov\\_1974](https://elib.biblioatom.ru/text/bell_teoriya-yadernyh-reaktorov_1974)
2. Г.И. Марчук, В.И. Лебедев. Численные методы в теории переноса нейтронов. – 2-изд., перераб. и доп. – М.: Атомиздат, 1981. – 456 с.
3. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 687 с.
4. A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. – 1983. – Vol. 49. – Iss. 3. – P. 357–393.  
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
5. A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III // Journal of Computational Physics. – 1987. – Vol. 71. – P. 231–303.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7_12)
6. A. Harten. ENO schemes with subcell resolution // Journal of Computational Physics. – 1989. – Vol. 83. – Iss. 1. – P. 148–184.  
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90226-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90226-X)
7. X.D. Liu, S. Osher, T. Chan. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 115. – Iss. 1. – P. 200–212.  
<https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
8. Е.Н. Аристова, Б.В. Рогов, А.В. Чикиткин. Оптимальная монотонизация высокоточной бикompактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56. – № 6. – С. 973–988.  
<https://doi.org/10.7868/S004446691606003X>

- E.N. Aristova, B.V. Rogov, A.V. Chikitkin.* Optimal monotoneization of a high-order accurate bicomcompact scheme for the nonstationary multidimensional transport equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2016. – Vol. 56. – P. 962–976.  
<https://doi.org/10.1134/S0965542516060038>
9. *М.Д. Брагин, Б.В. Рогов.* Консервативная монотонизация бикомпактных схем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.* – 2019. – № 8. – 26 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2019-8>  
*M.D. Bragin, B.V. Rogov.* A conservative limiting method for bicomcompact schemes // *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS.* – 2019. – № 8. – 26 p.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2019-8-e>
10. *T. Yabe, F. Xiao, T. Utsumi.* The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis // *Journal of Computational Physics.* – 2001. – Vol. 169. – Iss. 2. – P. 556–593.  
<https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6625>
11. *T. Yabe, T. Aoki, G. Sakaguchi et al.* The compact CIP (cubic-interpolated pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver // *Computers & Fluids.* – 1991. – Vol. 19. – № 3–4. – P. 421–431.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90067-R](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90067-R)
12. *T.-L. Tsai, S.-W. Chiang, J.-G. Yang.* Characteristics method with cubic-spline interpolation for open channel flow computation // *Intern. J. for Numerical Methods in Fluids.* – 2004. – Vol. 46. – P. 663–683.  
<https://doi.org/10.1002/fld.764>
13. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // *Математическое моделирование.* – 2016. – Т. 28. – № 2. – С. 123–132.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm3704>  
*V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov.* Compact grid-characteristic schemes of higher orders of accuracy for a 3D linear transport equation // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2016. – Vol. 8. – № 5. – P. 577–584.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048216050082>
14. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров.* Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом // *Матем. моделирование.* – 2018. – Т. 30. – № 3. – С. 37–51.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm3947>  
*A.V. Favorskaya, I.B. Petrov.* Numerical Modeling of Wave Processes in Rocks by the Grid-Characteristic Method // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2018. – Vol. 10. – № 5. – P. 639–647.  
<https://doi.org/10.1134/S207004821805006X>
15. *И.Б. Петров, А.В. Фаворская, Н.И. Хохлов.* Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2017. – Т. 57. – № 11. – С. 1804–1811.  
<https://doi.org/10.7868/S0044466917110126>  
*I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, N.I. Khokhlov.* Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2017. – Vol. 57. – № 11. – P. 1771–1777.  
<https://doi.org/10.1134/S0965542517110112>
16. *И.Б. Петров, М.В. Муратов.* Применение сеточно-характеристического метода в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов (обзорная статья) // *Матем. моделирование.* – 2019. – Т. 31. – № 4. – С. 33–56.  
<https://doi.org/10.1134/S0234087919040038>  
*I.B. Petrov, M.V. Muratov.* Application of the Grid-Characteristic Method to the Solution of Direct Problems in the Seismic Exploration of Fractured Formations (Review) // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2019. – Vol. 11. – № 6. – P. 924–939.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048219060164>

17. *Е.Н. Аристова, Г.И. Овчаров.* Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. – 2020. – Т. 32. – № 3. – С. 3–18.  
<https://doi.org/10.20948/mm-2020-03-01>  
*E.N. Aristova, G.I. Ovcharov.* Hermitian Characteristic Scheme for a Linear Inhomogeneous Transfer Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2020. – Vol. 12. – P. 845–855.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048220060022>
18. *Е.Н. Аристова, Г.О. Астафуров.* О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2020. – № 107. – 23 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-117>
19. *Е.Н. Аристова, Г.О. Астафуров.* Проекционно-характеристический метод третьего порядка для решения уравнения переноса на неструктурированных сетках // Матем. Моделирование. – 2023. – Т. 35, № 11. – С. 79–93.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm4506>  
*E. N. Aristova, G. O. Astafurov.* A Third-Order Projection-Characteristic Method for Solving the Transport Equation on Unstructured Grids // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2024. – Vol. 16, No. 2. – P. 208–216.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048224020066>
20. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева, А.А. Гурченко.* Особенности реализации модифицированной схемы с эрмитовой интерполяцией для численного решения уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2024. – № 18. – 19 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-18>
21. *Е.Н. Аристова, Н.И. Караваева.* Консервативная монотонизация варианта СР схемы для решения уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2020. – № 121. – 16 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-121>
22. *Е.Н. Аристова.* Бикомпактные схемы для неоднородного линейного уравнения переноса в случае больших оптических толщин // Матем. моделирование. – 2013. – Т. 25, № 10. – С. 3–18.  
<https://www.mathnet.ru/rus/mm3386>  
*E.N. Aristova.* Bicomcompact schemes for an inhomogeneous linear transport equation in the case of a large optical depth // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2014. – Vol. 6. – P. 227–238.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048214030028>

## Оглавление

Введение .....	3
1. Постановка задачи .....	4
2. Построение разностной схемы .....	6
3. Монотонизация модифицированной схемы СР .....	10
4. Тестирование гибридных схем для уравнения адвекции .....	11
5. Тестирование гибридных схем для неоднородного уравнения переноса.....	25
6. Схема СР для случая больших оптических толщин .....	30
7. Тестирование схемы СР в случае больших оптических толщин .....	31
Заключение.....	37
Литература .....	38