



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.Е. Ильин

Оптимизация перелёта
космического аппарата с
использованием
комбинированного
функционала

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин А.Е. Оптимизация перелёта космического аппарата с использованием комбинированного функционала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 10. 36 с. EDN: [KWXCII](https://doi.org/10.26907/2071-2898.2025.10.36)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-10>

Ордена Ленина

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.Е. Ильин

**Оптимизация перелёта космического
аппарата с использованием
комбинированного функционала**

Москва — 2025

Ильин А.Е.

Оптимизация перелёта космического аппарата с использованием комбинированного функционала

Разработан метод оптимизации траекторий межпланетных перелётов космических аппаратов с двигателями ограниченной тяги. Критерием оптимизации служит предложенный К.Г. Григорьевым комбинированный функционал, совмещающий затраты топлива и время перелёта. Применён метод перебора неизвестных начальных условий краевой задачи с использованием последовательностей И.М. Соболя. Решена задача «быстрого» перелёта с круговой орбиты искусственного спутника Земли на круговую орбиту искусственного спутника Луны.

Ключевые слова: принцип максимума, комбинированный функционал, последовательности Соболя

Ilin A.E.

Optimization of spacecraft flight using combined functional

The optimization method of interplanetary flights of spacecraft with limited-thrust engine is developed. The optimization criterion is the combined functional proposed by K.G. Grigoriev, which combines fuel costs and flight time. The method of sorting unknown initial conditions of the boundary value problem using I.M. Sobol sequences is applied. The problem of "fast" flight from the circular orbit of an artificial satellite of the Earth to the circular orbit of an artificial satellite of the Moon is solved.

Key words: maximum principle, combined functional, Sobol sequences

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Применение принципа максимума Понтрягина	7
3. Поиск начального приближения	10
4. Поиск и уточнение функции управления	13
5. Результаты моделирования	33
Библиографический список.....	35

Введение

При проектировании траекторий полётов космических пилотируемых кораблей к Луне актуальной является задача обеспечения безопасности экипажа [1]. Поэтому траектории, обеспечивающие перелёт за минимальное время и экономные в смысле расхода топлива, представляют значительный интерес. В препринте предлагается методика расчёта траекторий перелёта для КА с двигателями большой ограниченной тяги. Эта методика описывает процесс построения реальных траекторий перелёта более достоверно по сравнению с методикой импульсного управления, поэтому представляет большой интерес. Работа посвящена решению задачи о нахождении «быстрой» и экономной траектории перелёта с круговой орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) на круговую орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ). Аналогичный перелёт исследуется в ряде публикаций (см., напр., [2–5, 7, 8, 10, 11, 19]). Представленный в данном препринте алгоритм оптимизации траекторий основан на идее метода К.Г. Григорьева [7, 8].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача построения и оптимизации управления движением КА, обеспечивающего перелёт с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ в рамках ограниченной круговой плоской задачи трёх тел. Величина тяги двигателя ограничена. Задача разбивается на следующие этапы:

- переход с круговой орбиты ИСЗ на траекторию перелёта;
- пассивный полёт по траектории перелёта;
- переход с траектории перелёта на круговую орбиту ИСЛ.

Движение описывается в неинерциальной системе координат (СК) $Oxу$. Земля и Луна рассматриваются как материальные точки. Точка O совпадает с центром масс Земли. Ось Ox направлена от Земли к Луне. Ось Oy лежит в плоскости перелёта КА и направлена так, что базовый вектор оси Ox , базовый

вектор оси Oy и вектор угловой скорости вращения Луны относительно барицентра системы Земля–Луна образуют правую тройку векторов. На рис. 1 показано, каким образом КА покидает орбиту Земли. Там же изображены фрагменты траектории перелёта КА с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ в СК Oxy . На протяжении всего перелёта учитываются только гравитационные поля Земли и Луны.

В начале перелёта КА находится на круговой орбите ИСЗ. Когда угол между направлением на КА и осью Ox становится равным заданному значению σ_0 , включается двигатель. Соответствующий момент времени обозначен как t_0^3 . Двигатель работает в течение некоторого времени T_3 . В момент выключения двигателя t_1^3 после участка управляемого перелёта длительностью T_3 КА попадает на траекторию перелёта к Луне. Траектория перелёта выбирается таким образом, что при дальнейшем пассивном полёте она коснётся заданной орбиты ИСЛ в некоторой точке. КА движется по траектории перелёта с выключенным двигателем до достижения заданного расстояния до поверхности Луны. Время нахождения КА на пассивной траектории обозначим как $T_{3-Л}$. В момент $t_0^Л$ включается двигатель и начинается участок траектории длительностью $T_Л$. На нём осуществляется управляемый перелёт на круговую орбиту ИСЛ. Двигатель работает до момента перехода $t_1^Л$ на круговую орбиту ИСЛ. В результате КА переходит с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ за суммарное время $T = T_3 + T_{3-Л} + T_Л$.

Для активных участков и пассивной траектории выполняются следующие равенства:

$$T_3 = t_1^3 - t_0^3, T_{3-Л} = t_0^Л - t_1^3, T_Л = t_1^Л - t_0^Л. \quad (1)$$

Траектория перелёта на круговую орбиту ИСЛ предполагается такой, что при подлёте к Луне минимальное расстояние до её поверхности составляет заданную величину $h_Л$, а радиальная скорость при достижении этого

расстояния равна нулю. Эти условия означают дальнейшее движение КА по круговой орбите ИСЛ на высоте h_L над поверхностью Луны.

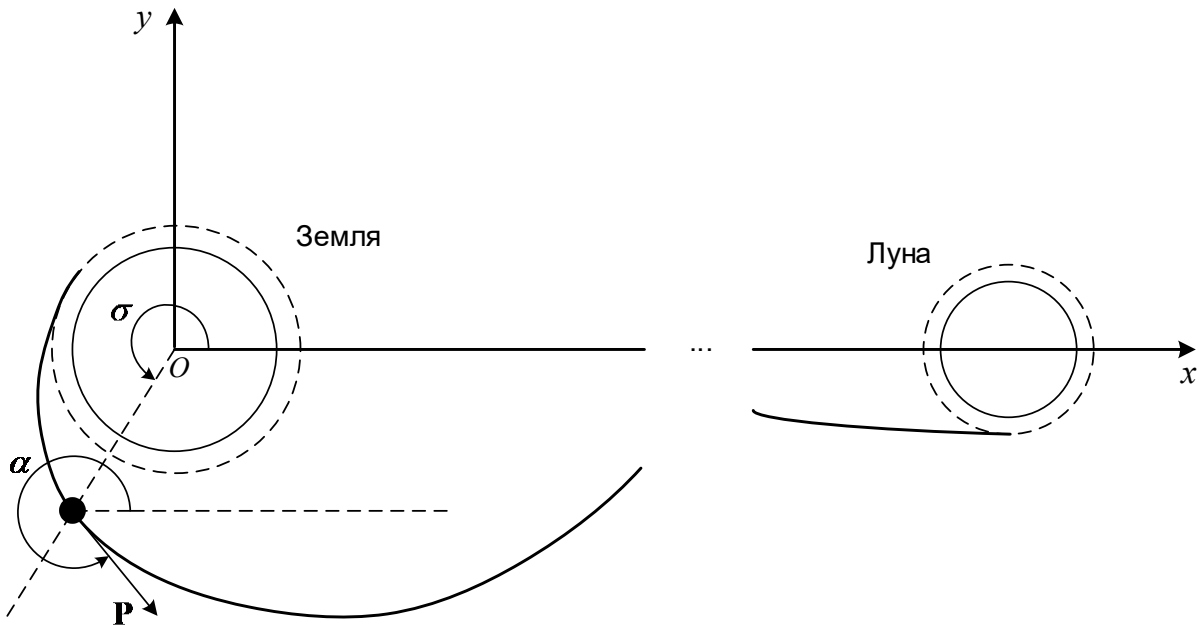


Рис.1. Схема траектории перелёта с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ

Введём обозначения: $\mathbf{r} = (x, y)^T$ и $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ – положение и скорость КА в СК Oxy ; M_0 , $M = M(t)$ и $m = M/M_0$ – начальная, текущая и безразмерная массы КА; ω – угловая скорость вращения выбранной системы координат, она же является угловой скоростью вращения Луны вокруг Земли, $\omega = |\omega|$; \mathbf{u} – единичный вектор тяги двигателя, или направление тяги $\mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$, $|\mathbf{u}| = u = 1$; \mathbf{U} – множество допустимых направлений, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$; \mathbf{P} – вектор тяги двигателя; P – величина тяги, при этом $\mathbf{P} = \delta P \mathbf{u}$, где δ – функция переключения тяги: $\delta = 1$ при включённом двигателе, $\delta = 0$ при выключенном двигателе, величина тяги P постоянна и выражается формулой $P = |\dot{m}|c$, где c – скорость истечения реактивной струи; α – угол, задающий направление

вектора тяги в СК Oxy ; $r_{Л-КА}$ – расстояние от центра Луны до КА; $\mathbf{r}_Л = (x_Л, y_Л)^T$ – положение Луны в СК Oxy , $\mu_З, \mu_Л$ – гравитационные параметры Земли и Луны; $\mathbf{r}_Б = (x_Б, 0)^T$ – положение барицентра системы Земля–Луна.

Уравнения движения КА с постоянной тягой в неинерциальной СК Oxy в рамках ограниченной круговой плоской задачи трёх тел имеют следующий вид [6, с. 216; 7, с. 51]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \delta \frac{P}{m} \mathbf{u} - \frac{\mu_З}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_Л}{r_{Л-КА}^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Л) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Б)) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}), \\ \dot{m} = -\delta \frac{P}{c}. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что в рамках рассматриваемой задачи мы пренебрегаем вращением Земли вокруг Солнца.

В проекциях на оси СК Oxy уравнения (2) записываются в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = \delta \frac{P}{m} \cos \alpha - \frac{\mu_З x}{r^3} - \frac{\mu_Л (x - x_Л)}{r_{Л-КА}^3} + \omega^2 (x - x_Б) + 2\omega v_y, \\ \dot{v}_y = \delta \frac{P}{m} \sin \alpha - \frac{\mu_З y}{r^3} - \frac{\mu_Л y}{r_{Л-КА}^3} + \omega^2 y - 2\omega v_x, \\ \dot{m} = -\delta \frac{P}{c}. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) описывает движение КА в СК Oxy на орбитах искусственных спутников Луны и Земли, а также на траектории перелёта. Управление движением КА определяется моментами включения и выключения двигателя, а также направлением вектора тяги двигателя на активных участках траектории (углом α).

Граничные условия на левом конце в момент включения двигателей t_0^3 для разгона у Земли имеют вид

$$\mathbf{r}(t_0^3) = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)^T, \quad \mathbf{v}(t_0^3) = \mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})^T. \quad (4)$$

Граничные условия в моменты времени t_1^3 и $t_0^{\text{Л}}$ соответствуют положениям КА на перелётной траектории. Граничные условия на правом конце в конечный момент времени торможения у Луны $t_1^{\text{Л}}$ с учётом принятых обозначений переписываются в виде

$$\begin{aligned} (x(t_1^{\text{Л}}) - x_{\text{Л}})^2 + (y(t_1^{\text{Л}}) - y_{\text{Л}})^2 &= R_{\text{end}}^2, \\ v_x(t_1^{\text{Л}})(x(t_1^{\text{Л}}) - x_{\text{Л}}) + v_y(t_1^{\text{Л}})(y(t_1^{\text{Л}}) - y_{\text{Л}}) &= 0, \\ v_x^2(t_1^{\text{Л}}) + v_y^2(t_1^{\text{Л}}) &= v_{\text{end}}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_{\text{end}} = R_{\text{Л}} + h_{\text{Л}}$, R_{end} – радиус целевой орбиты, $R_{\text{Л}}$ – радиус Луны, $h_{\text{Л}}$ – высота целевой орбиты, v_{end} – скорость КА, находящегося на целевой круговой орбите ИСЛ. Величины R_{end} , $R_{\text{Л}}$, $h_{\text{Л}}$ и v_{end} считаются известными.

2. Применение принципа максимума Понтрягина

Один из численных методов решения поставленной задачи был предложен в работах [7, 8], где, в частности, исследуется перелёт между орбитой ИСЗ и Луной, а в качестве критерия используется комбинированный функционал

$$I = k_I(t_1 - t_0) + m(t_0) - m(t_1) \rightarrow \min, \quad (6)$$

представляющий собой взвешенную сумму времени полёта и расход рабочего тела. Здесь $k_I > 0$; t_0, t_1 – время начала и окончания полёта; $m(t_0), m(t_1)$ – начальная и конечная массы КА. При малых k_I функционал I соответствует задаче о максимальной конечной массе, а при больших k_I – задаче о быстродействии.

Для нахождения направления тяги $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ используется принцип максимума Л.С. Понтрягина [9, 20]. Решается задача с нефиксированным временем. Краевые условия на положение и скорость КА на левом конце при

$t = t_0^3$ считаются известными. На правом конце часть краевых условий определяется из условий (5).

Функция Гамильтона задачи оптимального перелёта в смысле функционала (6) для системы уравнений движения (2) и граничных условий (4), (5) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\frac{P\delta}{c} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_r \rangle - \frac{P\delta}{c} p_m + \left\langle \left(\frac{P\delta}{m} \mathbf{u} - \frac{\mu_3 x}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_L (x - x_L)}{r_{\text{ЛКА}}^3} \mathbf{r} \right), \mathbf{p}_v \right\rangle, \quad (7)$$

где $\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, p_m$ – сопряжённые переменные к положению, скорости и массе соответственно, $\mathbf{p}_r = (p_x, p_y)^\top$, $\mathbf{p}_v = (p_{vx}, p_{vy})^\top$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ – скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление, если оно существует, удовлетворяет условию максимальности соответствующей функции Гамильтона [9, 10]:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{\text{opt}}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Сопряжённая система уравнений к системе (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}, \\ \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial m}, \end{cases} \quad (8)$$

или, с учётом принятых обозначений в СК Oxy ,

$$\begin{cases}
\dot{p}_x = -p_{vx} \left[\mu_3 \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \mu_{\text{Л}} \left(\frac{3(x-x_{\text{Л}})^2}{r_{\text{Л-КА}}^5} - \frac{1}{r_{\text{Л-КА}}^3} \right) + \omega^2 \right] - \\
\quad - 3p_{vy} y \left(\mu_3 \frac{x}{r^5} + \mu_{\text{Л}} \frac{x-x_{\text{Л}}}{r_{\text{Л-КА}}^5} \right), \\
\dot{p}_y = -3p_{vx} y \left(\mu_3 \frac{x}{r^5} + \mu_{\text{Л}} \frac{x-x_{\text{Л}}}{r_{\text{Л-КА}}^5} \right) - \\
\quad - p_{vy} \left[\mu_3 \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \mu_{\text{Л}} \left(\frac{3y^2}{r_{\text{Л-КА}}^5} - \frac{1}{r_{\text{Л-КА}}^3} \right) + \omega^2 \right], \\
\dot{p}_{vx} = -p_x + 2p_{vy} \omega, \\
\dot{p}_{vy} = -p_y - 2p_{vx} \omega, \\
\dot{p}_m = \frac{P}{m^2} (p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \sin \alpha).
\end{cases} \quad (9)$$

Здесь используется соотношение $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \mathbf{E}_2 - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T$, где \mathbf{E}_2 – единичная матрица второго порядка, а \mathbf{r} – вектор-столбец.

Угол оптимального направления α_{opt} вычисляется через текущие значения переменных, сопряжённых к компонентам скорости:

$$p_v = |\mathbf{p}_v| = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2}, \quad \cos \alpha_{\text{opt}} = \frac{p_{vx}}{p_v}, \quad \sin \alpha_{\text{opt}} = \frac{p_{vy}}{p_v}. \quad (10)$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что для оптимальных траекторий управление $\mathbf{u}(t)$ должно быть таким, чтобы функция Гамильтона (7) достигала максимума, поэтому $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}$. Функция Гамильтона принимает вид

$$H = P \delta \left(\frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{c} \right) - \left(\frac{\mu_3 x}{r^3} + \frac{\mu_{\text{Л}} (x - x_{\text{Л}})}{r_{\text{Л-КА}}^3} \right) \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_v \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_r \rangle. \quad (11)$$

Введём обозначение: $\psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{c}$ – функция, служащая критерием переключения двигателя. Для максимизации функции Гамильтона функция переключения тяги двигателя δ выбирается следующим образом:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi > 0 \\ 0 & \text{при } \psi < 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Случай особого управления, когда $\psi = 0$, в этой работе не рассматривается.

Краевая задача принципа максимума (3), (9) решается с помощью метода множественной пристрелки, как и в работах [11–12]. На каждом наборе начальных условий численно решается задача Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Подбор начальных условий краевой задачи осуществляется методом И.М. Соболя. Наряду с начальным углом тяги α_0 параметрами метода являются ограничение на длительность участка T_3 и значение угла σ_0 , при котором происходит первое включение двигателя на орбите ИСЗ. Начальные условия (4) связаны с параметром σ_0 следующими соотношениями:

$$\sin(\sigma_0), v_{x0} = -v_{\text{start}} \sin(\sigma_0), v_{y0} = v_{\text{start}} \cos(\sigma_0),$$

где v_{start} – скорость КА на начальной круговой орбите ИСЗ. Радиус орбиты и v_{start} считаются известными и соответствуют положению КА на круговой орбите ИСЗ в начальный момент времени t_0^3 .

3. Поиск начального приближения

Начальное приближение для сопряжённых переменных можно получить из импульсной постановки [13].

Пусть $\mathbf{e}_v = (e_{vx}, e_{vy})^T$ – вектор направления скорости в перигеуме пролётной гиперболы. Тогда импульсное торможение $\Delta \mathbf{v}$ может быть представлено в виде

$$\Delta \mathbf{v} = -\Delta v (e_{vx}, e_{vy})^T. \quad (13)$$

Из принципа максимума Понтрягина для задачи в импульсной постановке следует, что функция Гамильтона на оптимальной траектории принимает

максимально возможное значение. Поэтому вектор \mathbf{p}_v на момент приложения импульса может быть представлен в виде

$$\mathbf{p}_v = (p_{vx}, p_{vy})^T = -p_v (e_{vx}, e_{vy})^T. \quad (14)$$

Далее нижними индексами «-» и «+» обозначаются величины до и после подачи импульса соответственно. На момент приложения импульса функция переключения должна быть положительной:

$$\frac{p_v}{m_0} - \frac{p_{m-} + 1}{c} = \psi_- > 0. \quad (15)$$

Поэтому гамильтониан на момент приложения импульса t_- принимает вид

$$H_- = P\psi_- - \left(\frac{\mu_3 x}{r^3} + \frac{\mu_L (x - x_L)}{r_{Л-КА}^3} \right) \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_v \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_r \rangle. \quad (16)$$

Функция переключения после приложения импульса в момент t_+ должна быть отрицательной, а гамильтониан после приложения импульса имеет вид

$$H_+ = \langle \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{p}_r \rangle - \left(\frac{\mu_3 x}{r^3} + \frac{\mu_L (x - x_L)}{r_{Л-КА}^3} \right) \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_v \rangle. \quad (17)$$

Система автономна, поэтому гамильтониан сохраняет постоянное значение:

$$H_- = H_+. \quad (18)$$

Отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{p}_r, \Delta \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (19)$$

Получается соотношение для сопряжённых элементов

$$p_x e_{vx} + p_y e_{vy} = 0, \quad (20)$$

$$p_y = -\frac{e_{vx}}{e_{vy}} p_x. \quad (21)$$

Преобразуем условие трансверсальности на правом конце краевой задачи для задачи перехода на круговую орбиту ИСЛ [14] с использованием полученного соотношения между сопряжёнными переменными p_x и p_y :

$$p_x \left(1 + \frac{x e_{vx}}{y e_{vy}} \right) - p_v \left(\frac{x v_{\text{end}}}{y R_{\text{end}}} e_{vx} + \frac{v_{\text{end}}}{R_{\text{end}}} e_{vy} \right) = 0. \quad (22)$$

Из условия трансверсальности следует, что переменная, сопряжённая массе, после приложения импульса должна быть равна нулю. Отсюда получается уравнение для p_v :

$$\frac{p_v}{m_e} - \frac{1}{c} = \psi_+. \quad (23)$$

Здесь и далее m_e – масса КА после приложения импульса.

Из выражения (23) получаем

$$p_v = m_e \left(\psi_+ + \frac{1}{c} \right), \text{ где } \psi_+ < 0. \quad (24)$$

Получим значение p_{m-} до приложения импульса, используя формулу (15)

и найденное выражение для p_v :

$$\frac{m_e}{m_0} \left(\psi_+ + \frac{1}{c} \right) - \frac{p_{m-} + 1}{c} = \psi_-, \quad (25)$$

$$\frac{m_e}{m_0} (\psi_+ c + 1) - 1 = p_{m-} + \psi_- c, \quad (26)$$

$$p_{m-} = \frac{m_e}{m_0} - 1 + c \left(\frac{m_e}{m_0} \psi_+ - \psi_- \right). \quad (27)$$

Поскольку $\frac{m_e}{m_0} - 1 < 0$ и $c \left(\frac{m_e}{m_0} \psi_+ - \psi_- \right) < 0$, то $p_{m-} < 0$.

Найдём теперь p_x из (22) и (24):

$$p_x = - \frac{m_e \left(\psi_+ + \frac{1}{c} \right) v_{\text{end}}}{1 + \frac{x e_{vx}}{y e_{vy}}} \frac{1}{R_{\text{end}}} \left(\frac{x}{y} e_{vx} + e_{vy} \right) = - m_e \left(\psi_+ + \frac{1}{c} \right) \frac{v_{\text{end}}}{R_{\text{end}}} e_{vy}. \quad (28)$$

Аналогично находится p_y :

$$p_y = - p_v \frac{v_{\text{end}}}{R_{\text{end}}} e_{vx}, \quad (29)$$

$$p_y = - m_e \left(\psi_+ + \frac{1}{c} \right) \frac{v_{\text{end}}}{R_{\text{end}}} e_{vx}. \quad (30)$$

4. Поиск и уточнение функции управления

Для нахождения траектории перелёта КА необходимо решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 10-го порядка (3), (9). Краевая задача решается численно. Наибольшую трудность вызывает нахождение приемлемых значений недостающих параметров этой краевой задачи, в том числе подбор значений сопряжённых переменных на левом конце краевой задачи принципа максимума. Для поиска начального приближения используется метод И.М. Соболя [15–18].

Метод Соболя позволяет осуществлять эффективный перебор в пространстве неизвестных параметров. В качестве пробных точек используются точки ЛП_ε-последовательностей (последовательностей Соболя), которые обеспечивают равномерный просмотр области в пространстве параметров (точные определения см. в [15–18]). При увеличении количества точек плотность заполнения увеличивается, а равномерность сохраняется. Метод позволяет определить, какие из варьируемых параметров оказывают существенное влияние на критерий качества.

В процессе решения краевой задачи проводится уточнение – дополнительно минимизируется функционал, отвечающий за условия по положению и радиальной составляющей скорости:

$$\Theta = \sqrt{(|\mathbf{q}_L| - R_L - h_L)^2 + k_\Theta v_r^2}, \quad (31)$$

где $\mathbf{q}_L = (x - x_L, y)^T$, $v_r = \frac{\langle \mathbf{q}_L, (v_x, v_y)^T \rangle}{|\mathbf{q}_L|}$. Здесь функционал Θ выступает в

качестве критерия отбора значений соответствующих перебираемых параметров.

Остановимся на подборе управляющих параметров, осуществляемом на этапе перехода КА с круговой орбиты ИСЗ на траекторию пассивного перелёта. Задача является многоэкстремальной. Чтобы получить оптимальное решение, а

не локальный минимум, нужно осуществить прямой перебор в пространстве параметров, а полученное в результате решение уточнить каким-либо методом оптимизации.

Пусть длительность перелёта T принимает значения 104630.5 с, 191030 с, 363830 с, 450230 с, что приблизительно равно 1.2 сут, 2.2 сут, 4.2 сут, 5.2 сут соответственно. Для четырёх значений величины T осуществлялся перебор по трём параметрам σ , α , T_3 ; $\sigma \in [\sigma_\ell, \sigma_r]$, $\alpha \in [\alpha_\ell, \alpha_r]$, $T_3 \in [T_{3,\ell}, T_{3,r}]$ (ℓ – left (левый), r – right (правый)). Начальные значения параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1

Начальные диапазоны перебираемых параметров

$\sigma_{\ell(0)}$, рад	$\sigma_{r(0)}$, рад	$\alpha_{\ell(0)}$, рад	$\alpha_{r(0)}$, рад	$T_{3,\ell(0)}$, с	$T_{3,r(0)}$, с
2.0	3.0	4.5	6.5	650	720

Затем запускается итерационный процесс. На k -й итерации перебором на последовательностях Соболя для набора параметров (σ, α, T_3) вычисляются значения функции Θ . Эти значения упорядочиваются. Из них выбираются минимальное значение $\Theta^{(0)}$ и следующее за ним по величине значение $\Theta^{(1)}$. Им соответствуют наборы параметров $(\sigma^{(0)}, \alpha^{(0)}, T_3^{(0)})$ и $(\sigma^{(1)}, \alpha^{(1)}, T_3^{(1)})$. Далее определяются новые значения $[\sigma_{\ell(k)}, \sigma_{r(k)}]$, $[\alpha_{\ell(k)}, \alpha_{r(k)}]$, $[T_{3,\ell(k)}, T_{3,r(k)}]$. Опишем эту процедуру на примере параметра σ . Определение новых границ перебора для параметра σ осуществляется следующим образом:

$$\sigma_{\ell(k)} = \min(\sigma^{(1)}, \sigma^{(0)}(1 - s_k)), \quad \sigma_{r(k)} = \max(\sigma^{(1)}, \sigma^{(0)}(1 + s_k)), \quad \text{где } s_k = 2^{-k/2}. \quad (32)$$

Для параметров α_k и $T_{3,k}$ выбор их границ происходит аналогично. После этого выполняется $(k + 1)$ -я итерация.

За счёт выбора двух наборов $(\sigma^{(0)}, \alpha^{(0)}, T_3^{(0)})$ и $(\sigma^{(1)}, \alpha^{(1)}, T_3^{(1)})$, а не одного $(\sigma^{(0)}, \alpha^{(0)}, T_3^{(0)})$, достигаются более широкие границы параметров для очередной итерации, что уменьшает возможность потери оптимального значения.

Функция $2^{-k/2}$ в (32) выбрана эмпирически. Испытывалась также функция 2^{-k} . Длина интервала поиска уменьшалась быстрее, и оптимальное решение было потеряно.

Численная процедура проводилась последовательно 28 раз, при этом для каждого из параметров σ , α , T_3 уточнялось полученное значение. Для 27 итераций было взято 20 000 точек, для 28-й – 50 000 точек. После 28-й итерации получены значения перебираемых параметров, которым соответствует приемлемое значение функционала Θ . В результате было получено хорошее начальное приближение для его минимизации. Поиск минимума проводился методом сопряжённых градиентов [19]. На рис. 2–25 показан процесс сходимости для параметров. Значению $T = 104630.5$ с отвечают графики 2–7; $T = 191030$ с – графики 8–13; $T = 363830$ с – графики 14–19; $T = 450230$ с – графики 20–25. В каждой серии шести графиков для фиксированного значения T первые два графика отображают эволюцию поиска для параметра σ , вторые два – α , последние два – T_3 . Два графика для каждого параметра предназначены для отображения эволюции процесса поиска при резком изменении масштаба по оси ординат, начиная с 14-го шага.

Для удобства разместим эти сведения в таблице 2.

Информация о графиках 2–25

Параметр	Длительность перелёта T			
	104630.5 с	191030 с	363830 с	450230 с
σ	рис. 2, 3	рис. 8, 9	рис. 14, 15	рис. 20, 21
α	рис. 4, 5	рис. 10, 11	рис. 16, 17	рис. 22, 23
T_3	рис. 6, 7	рис. 12, 13	рис. 18, 19	рис. 24, 25

Заметим, что на рисунках использованы иные обозначения: σ – sigma, α – alpha, T_3 – Tthr, $\sigma_{\ell(k)}$ – sigma left, $\sigma_{r(k)}$ – sigma right и т.д.

Результаты расчёта приведены в таблице 3.

Этап перехода с траектории пассивного перелёта на круговую орбиту ИСЛ рассмотрен в работе [14].

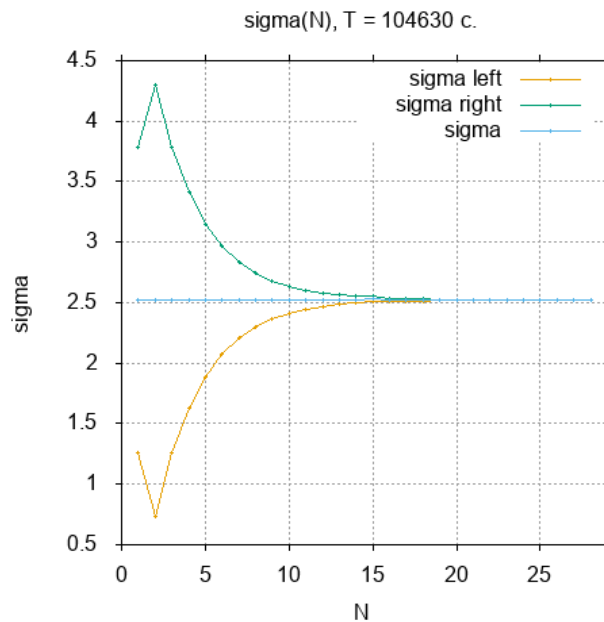
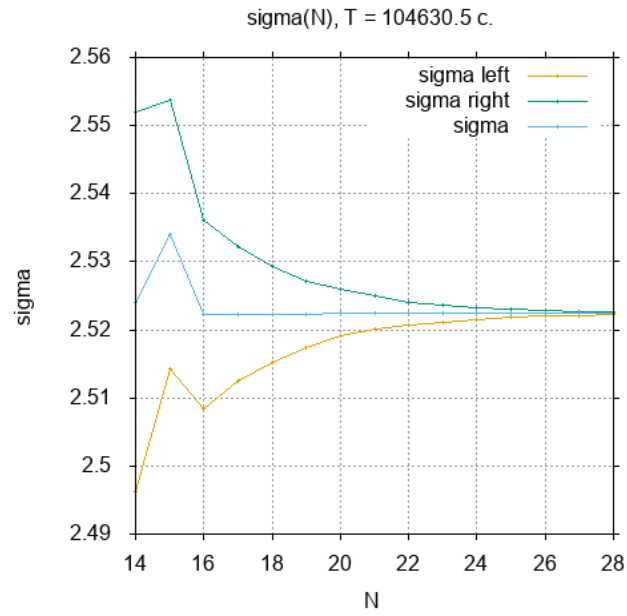
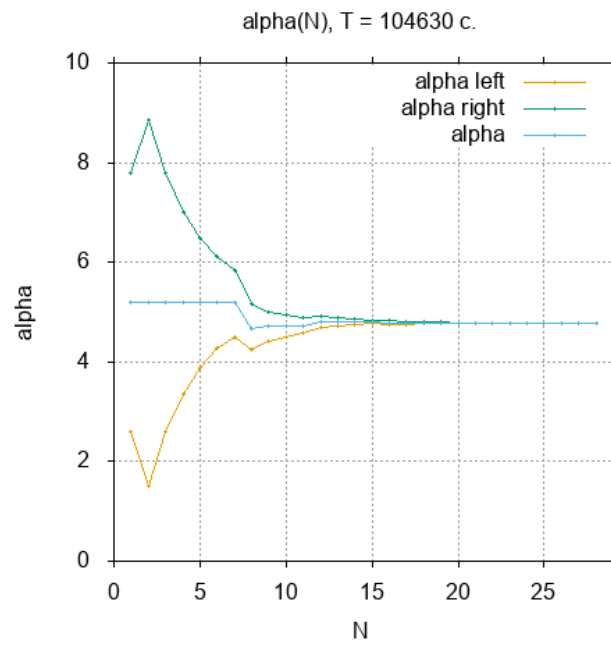
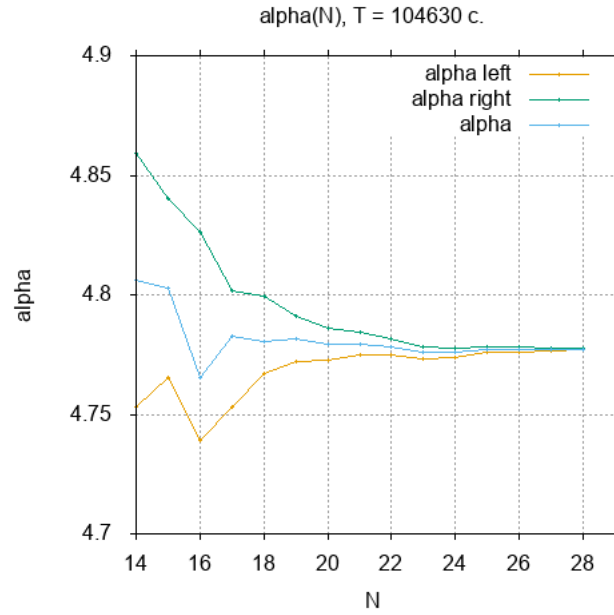
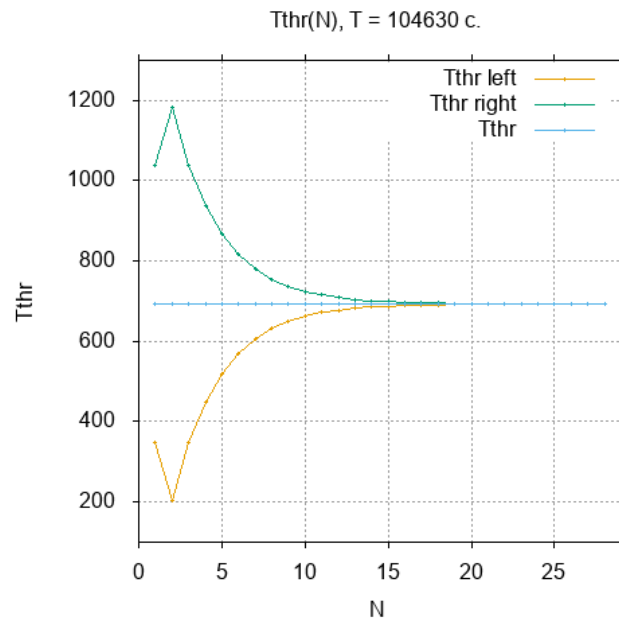


Рис. 2

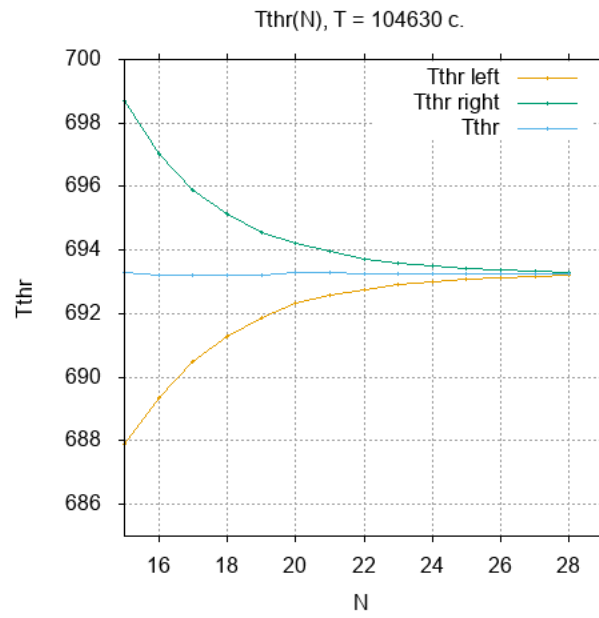
*Puc. 3**Puc. 4*



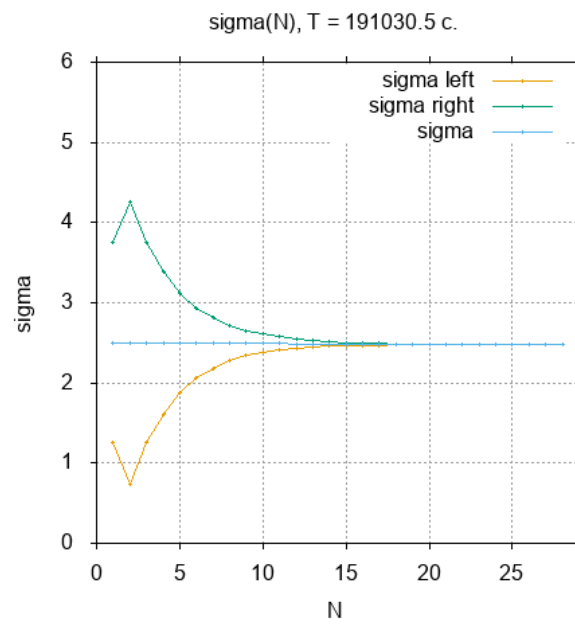
Puc. 5



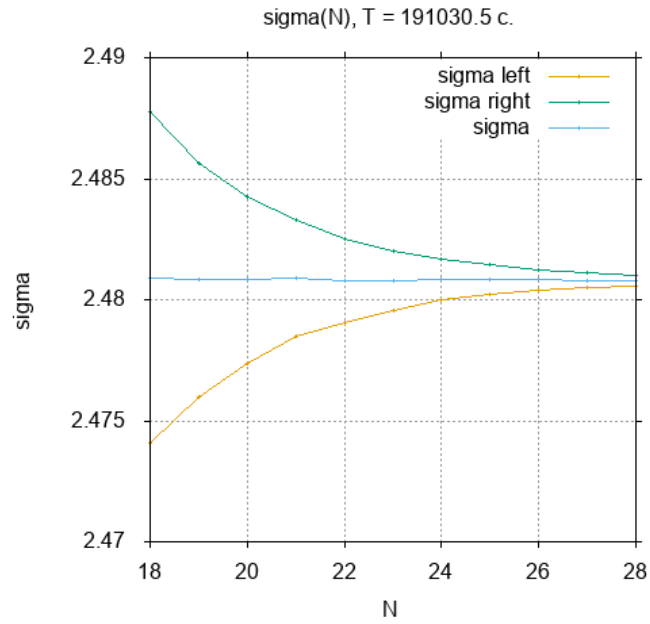
Puc. 6



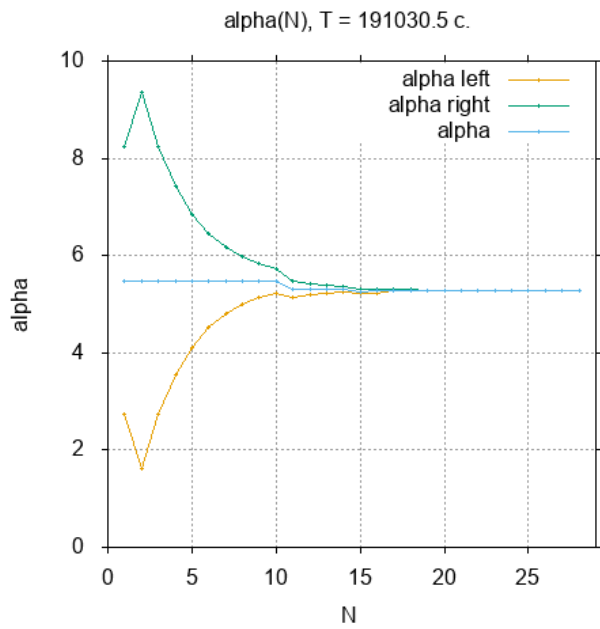
Puc. 7



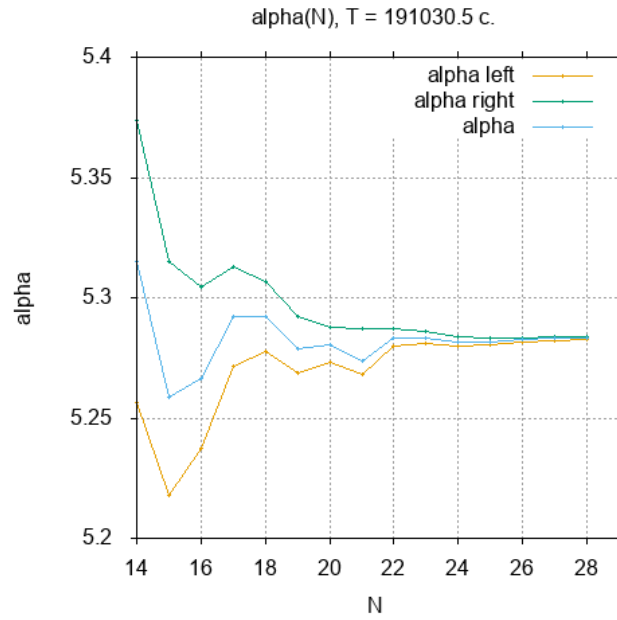
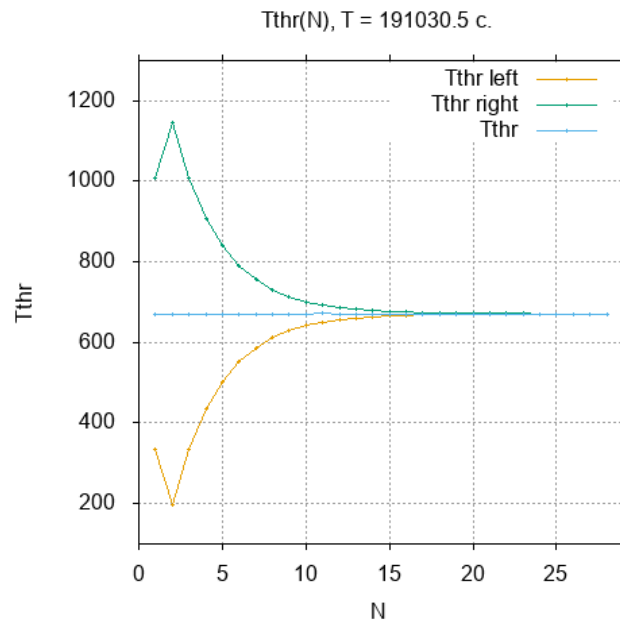
Puc. 8

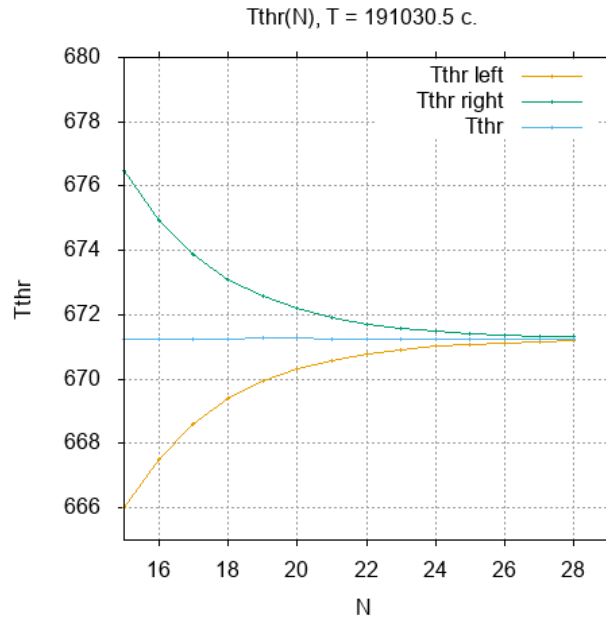


Puc. 9

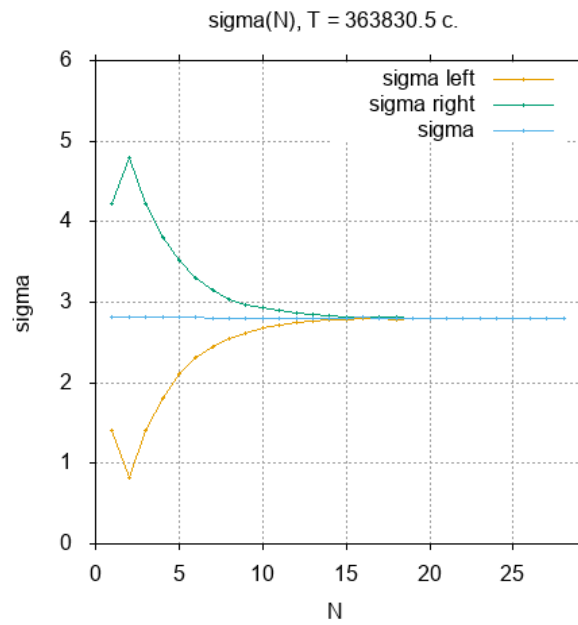


Puc. 10

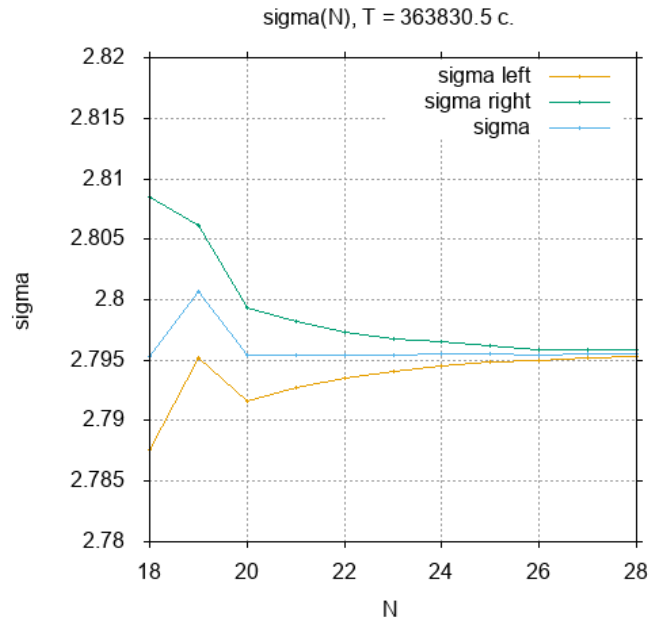
*Puc. 11**Puc. 12*



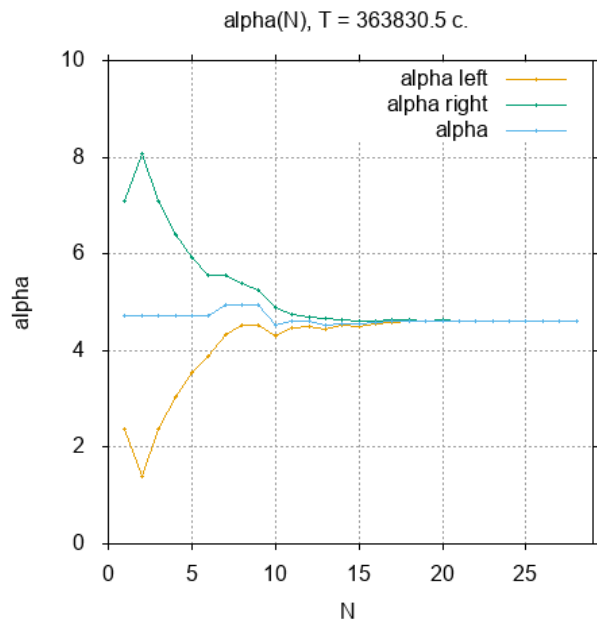
Puc. 13



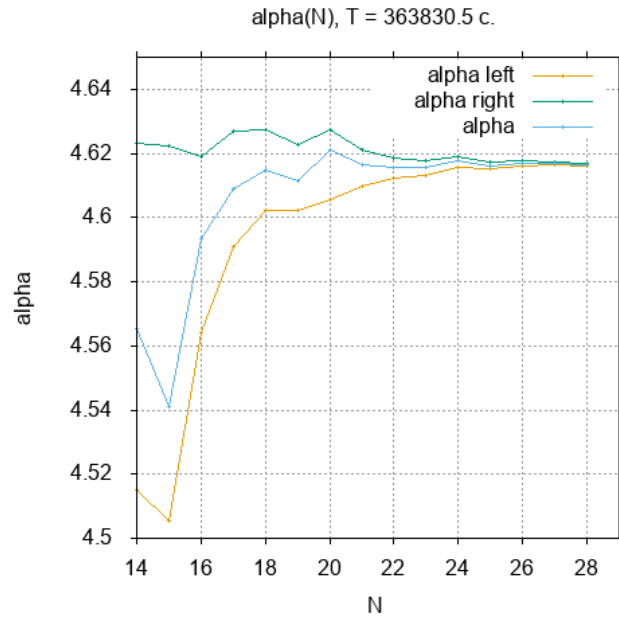
Puc. 14



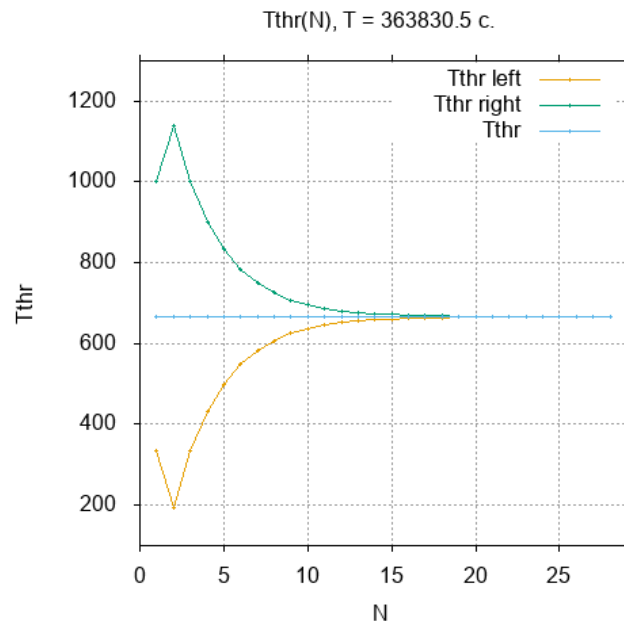
Puc. 15



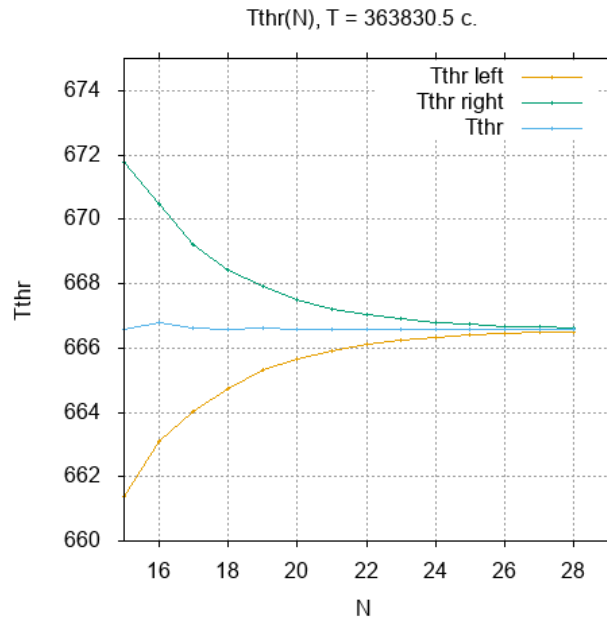
Puc. 16



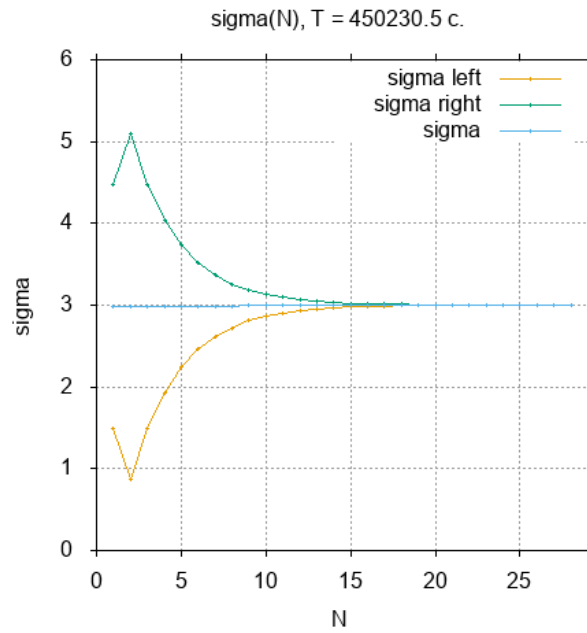
Puc. 17



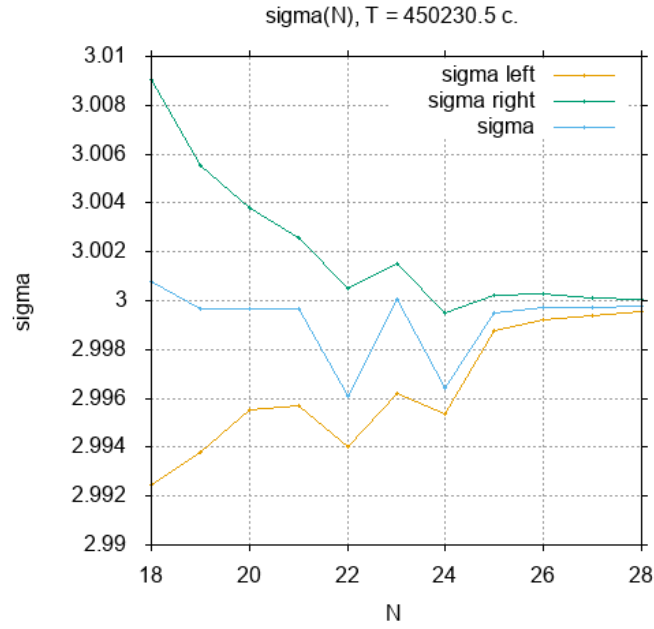
Puc. 18



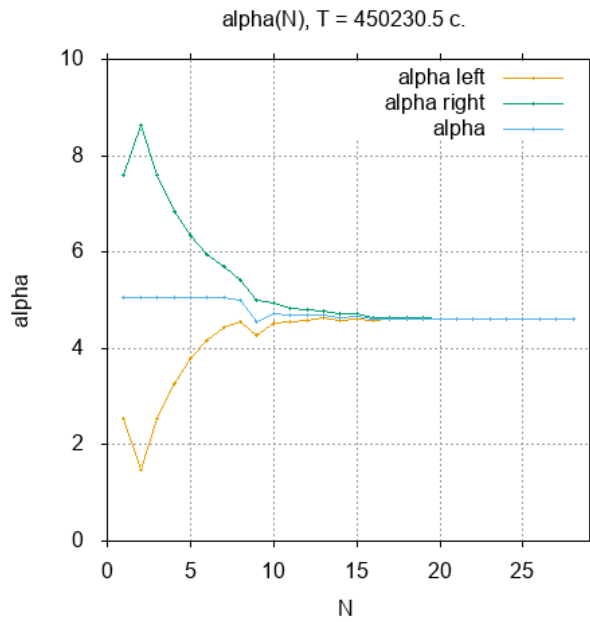
Puc. 19



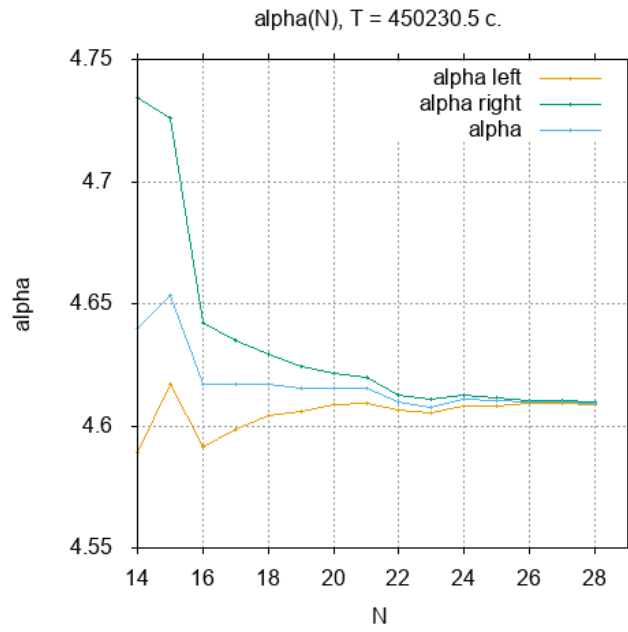
Puc. 20



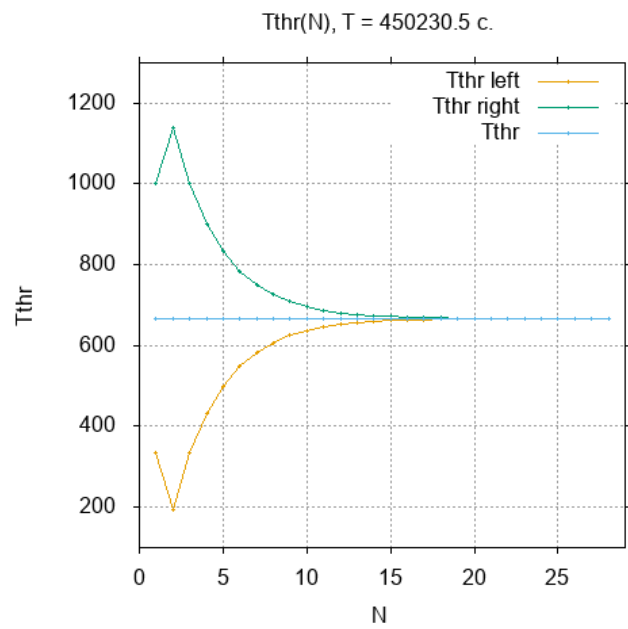
Puc. 21



Puc. 22



Puc. 23



Puc. 24

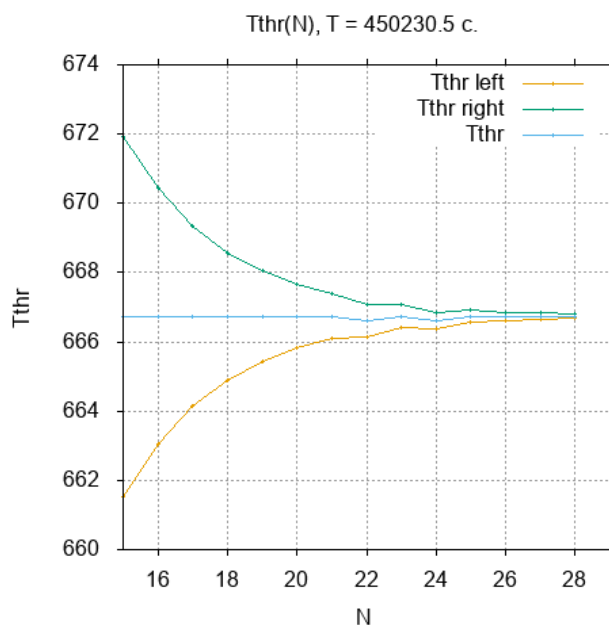


Рис. 25

Таблица 3

Результаты расчёта

Длительность перелёта T , сутки	σ_0	α_0	T_3 , с	r_p , м	v_r , м/с	m
1.2110012	2.522407°	4.777298°	693.2521	1838032	4.000	0.2077119
2.2110012	2.480790°	5.283396°	671.2510	1837907	-2.670	0.2328561
4.2110012	2.795576°	4.616652°	666.5670	1838029	-13.230	0.2382092
5.2110012	2.999794°	4.609221°	666.7432	1838075	9.5114	0.2380077

Здесь r_p – расстояние от Луны до КА, v_r – радиальная составляющая скорости КА у Луны. В этой таблице представлены оптимальные начальные условия для параметров σ, α, T_3 , полученные при соответствующих величинах времени перелёта. В последних трёх столбцах указаны вычисленные значения величин r_p, v_r, m .

Функция $\psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{c}$ на участке перелёта с круговой орбиты ИСЗ на

перелётную траекторию всегда принимает положительные значения. В силу условия (12) выполняется равенство $\delta = 1$, поэтому двигатель на рассматриваемом участке всегда включён. График зависимости $\psi(t)$ представлен на рис. 26.

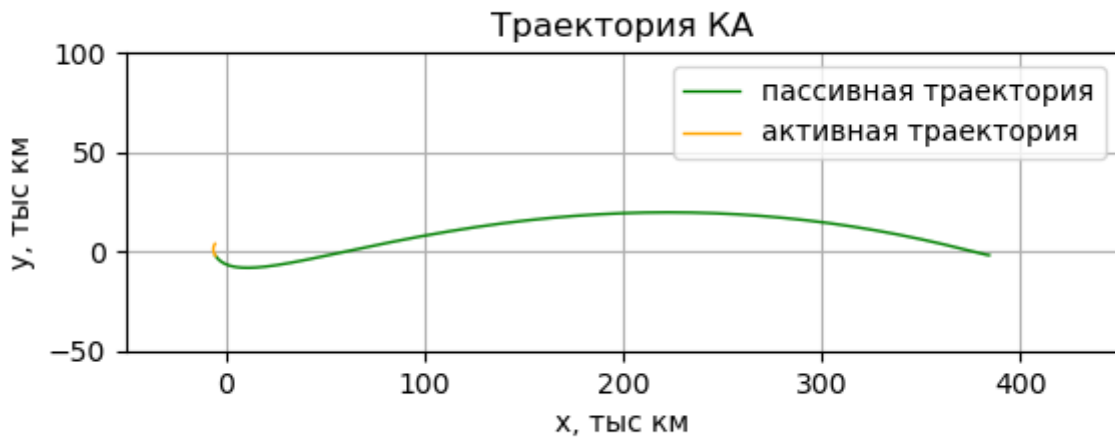


Рис. 26. Траектория перелёта КА с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ при $T = 1.2110012$ сут

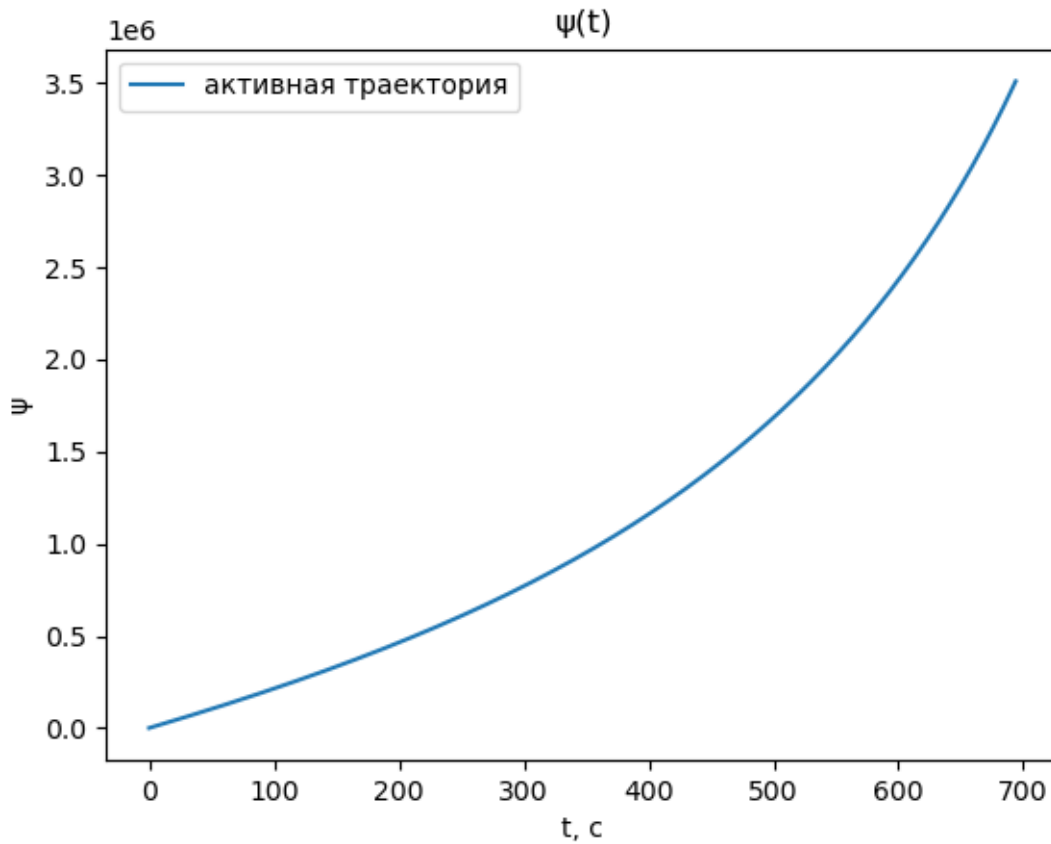


Рис. 27. Функция переключения двигателя во время перелёта с круговой орбиты ИСЗ на пассивную траекторию перелёта при $T = 1.2110012$ сут

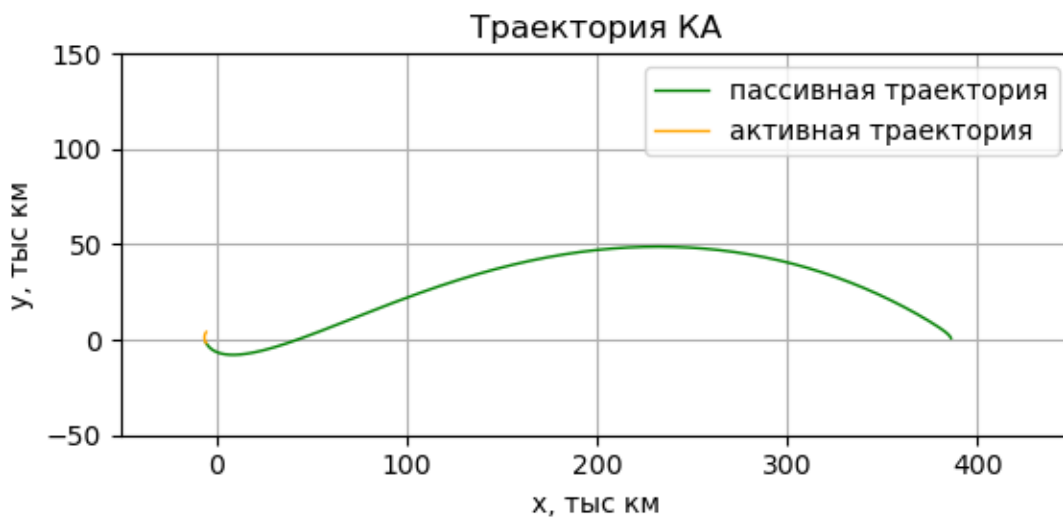


Рис. 28. Траектория перелёта КА с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ при $T = 2.2110012$ сут

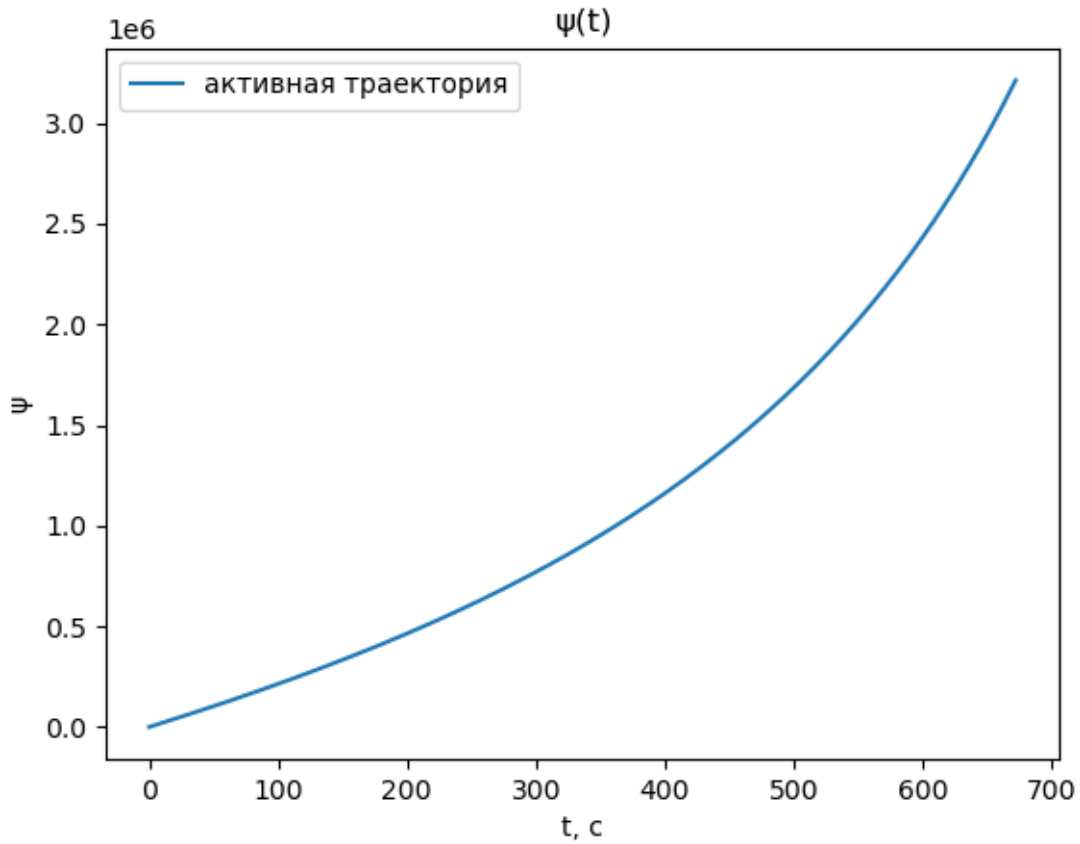


Рис. 29. Функция переключения двигателя во время перелёта с круговой орбиты ИСЗ на пассивную траекторию перелёта при $T = 2.2110012$ сут

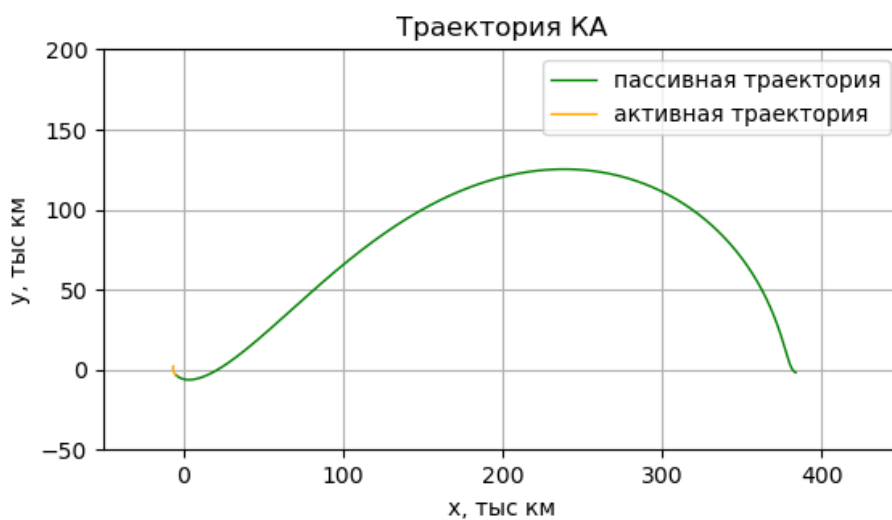


Рис. 30. Траектория перелёта КА с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ при $T = 4.2110012$ сут

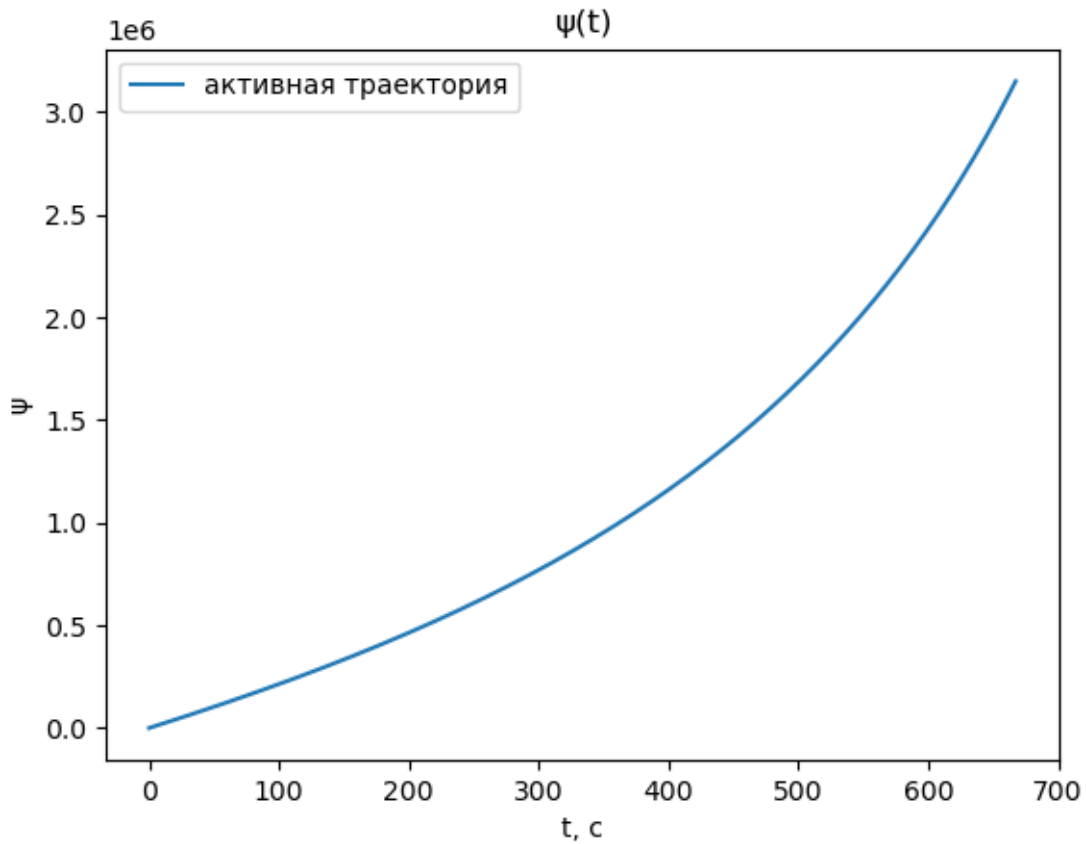


Рис. 31. Функция переключения двигателя во время перелёта с круговой орбиты ИСЗ на пассивную траекторию перелёта при $T = 4.2110012$ сут

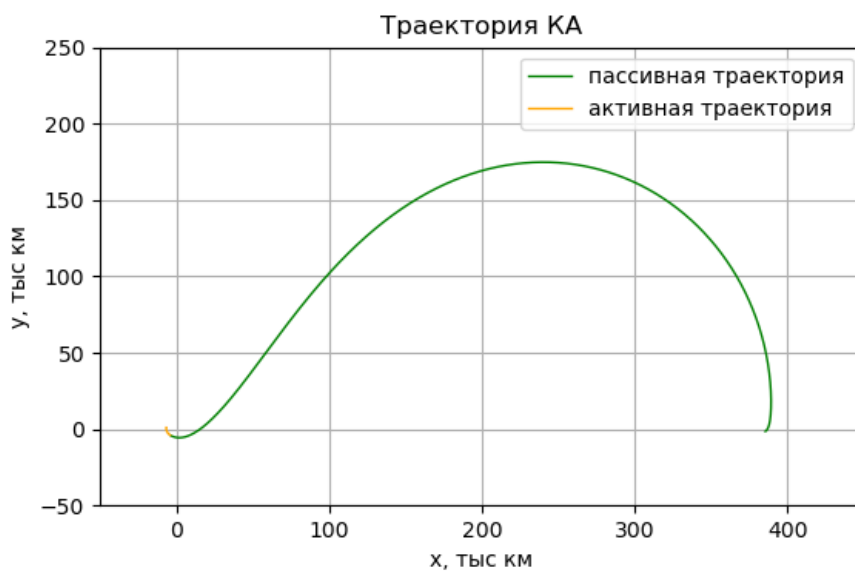


Рис. 32. Траектория перелёта КА с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ при $T = 5.2110012$ сут

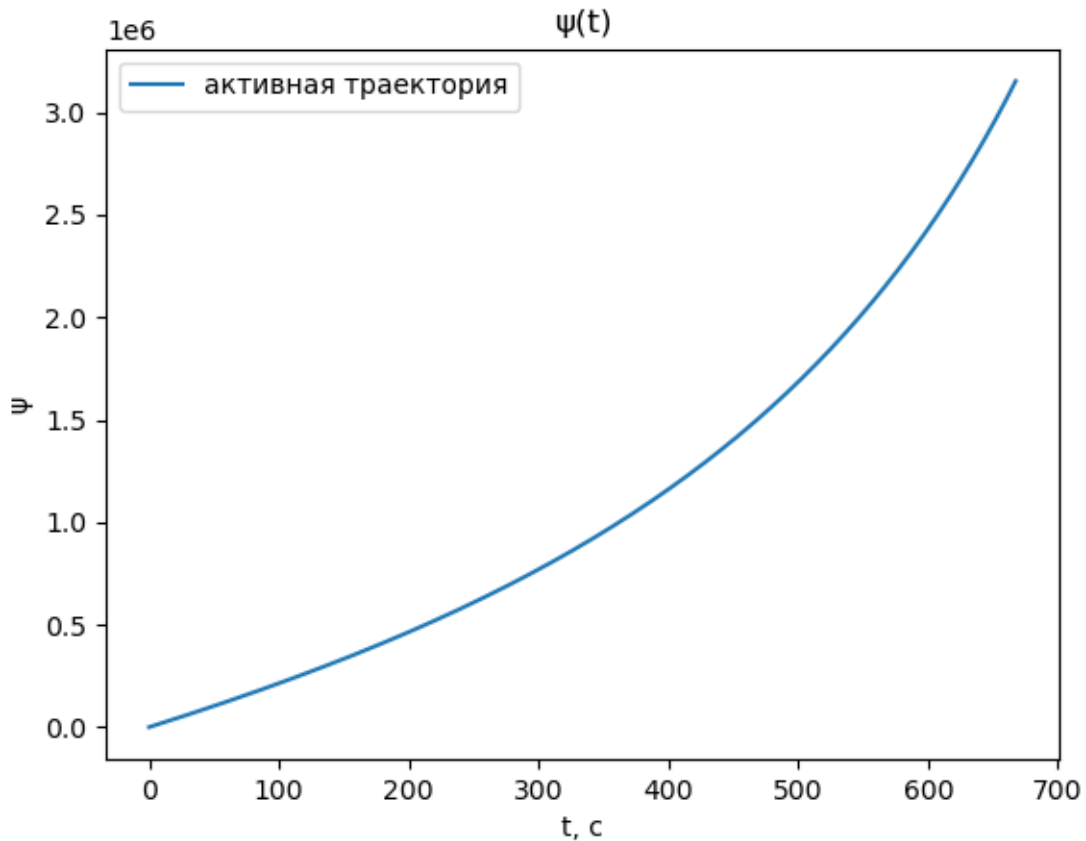


Рис. 33. Функция переключения двигателя во время перелёта с круговой орбиты ИСЗ на пассивную траекторию перелёта при $T = 5.2110012$ сут

5. Результаты моделирования

Оптимальная траектория движения КА выглядит, как показано на рис. 34. Разгон у Земли и торможение у Луны по отдельности показаны на рис. 35 и 36. Синим цветом изображены пассивные участки, красным – активные (с включённым двигателем).

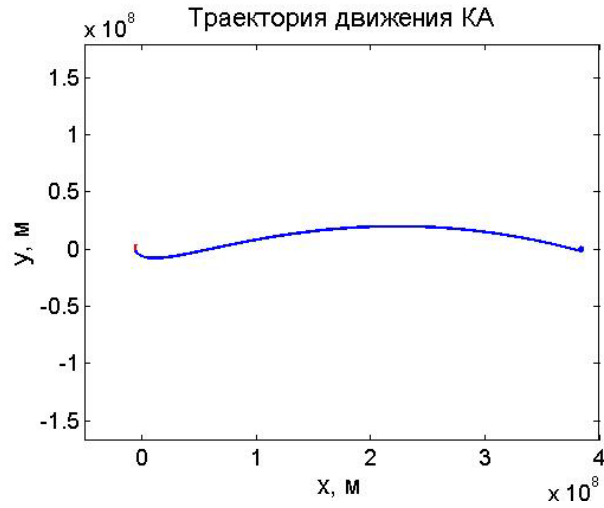


Рис. 34. Траектория движения КА во время «быстрого» перелёта с круговой орбиты ИСЗ на круговую орбиту ИСЛ

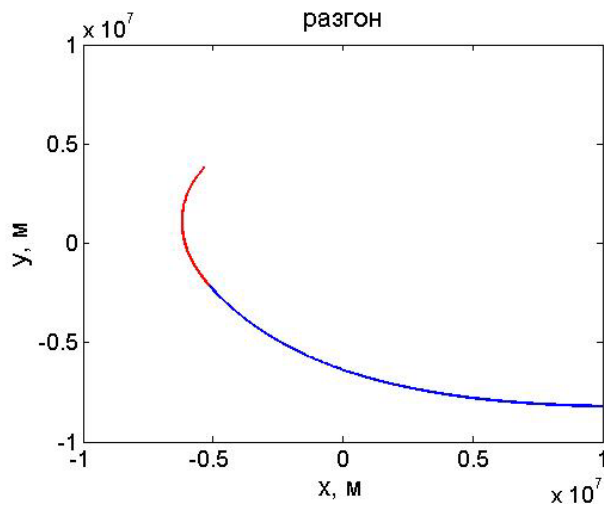


Рис. 35. Участок траектории перелёта КА, соответствующий разгону у Земли

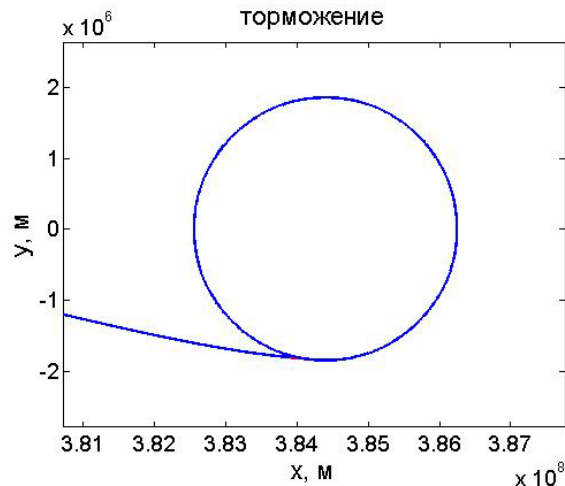


Рис. 36. Участок траектории перелёта КА, соответствующий торможению у Луны

При решении оптимизационной задачи полезно решать краевую задачу для переменных, имеющих наглядную физическую интерпретацию. Для использования численных методов оптимизации нужно иметь хорошее начальное приближение для искомых параметров. Его можно эффективно найти, используя метод И.М. Соболя.

Библиографический список

- [1] Платонов А.К., Тучин А.Г., Сихарулидзе Ю.Г., Заславский Г.С., Тучин Д.А. Построение и анализ траекторий срочного возвращения к Земле при пилотируемых полётах к Луне // Механика, управление и информатика. 2015. Т. 7, № 1. С. 78–104.
- [2] Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы. – Химки: Издатель АО «НПО Лавочкина», 2018. – 336 с.
- [3] Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землёй и Луной. – М.: Наука, 1980. – 544 с.
- [4] Ивашкин В.В. Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля-Луна-Солнце // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. 2001. № 85. – 33 с.
- [5] Parker J.S., Anderson R.L. Low-energy Lunar Trajectory Design. –

- Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2014. – xxii, 397 p.
- [6] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
- [7] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени // Космические исследования. 1994. Т. 32, № 2. С. 45–60.
- [8] Григорьев К.Г., Григорьев И.С. Оптимальные траектории перелетов космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной тяги между орбитой искусственного спутника Земли и Луной // Космические исследования. 1994. Т. 32, № 6. С. 108–129.
- [9] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
- [10] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
- [11] Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 3. С. 224–237.
- [12] Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т.50, № 3. С. 258–270.
- [13] Хэнделсмен М. Оптимальные траектории полета в безвоздушном пространстве с постоянной тягой при использовании импульсных траекторий в качестве начальных приближений // Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т.4, №6. С. 151–158.
- [14] Ильин А.Е. Оптимальный переход с пролётной траектории на орбиту искусственного спутника Луны // Сборник статей VI научно-технической конференции молодых учёных и специалистов Центра управления полётами. 2016. С. 145–153.
- [15] Соболев И.М. О распределении точек в кубе и сетках интегрирования // Успехи математических наук. 1966. Т. 21, № 5. С. 271–272.
- [16] Соболев И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985. – 32 с.
- [17] Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах с многими критериями. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
- [18] Белов А.А., Калиткин Н.Н., Тинтул М.А. Многомерные кубатуры на последовательностях Соболя // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 8. – 24 с.
- [19] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
- [20] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Кн. 1. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. – М.: МЦНМО, 2011. – 620 с.