ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Ф. Голубев

Трансформация орбиты космического аппарата по методу качелей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Трансформация орбиты космического аппарата по методу качелей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 11. 32 с.
EDN: NTZKDR
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-11

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.Ф. Голубев

Трансформация орбиты космического аппарата по методу качелей

Москва – 2025

УДК 531.38

Голубев Ю.Ф. Трансформация орбиты космического аппарата по методу качелей

Представлен метод оптимального управления орбитой КА в центральном поле тяготения, основанный на принципе циклической подкачки энергии КА в механическую систему, находящуюся в окрестности минимума потенциальной энергии. Построен соответствующий алгоритм для двигателей с непрерывной тягой, импульсных двигателей, а также при использовании солнечного паруса. Аналитически продемонстрирована работоспособность алгоритма.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, управление, оптимизация

Yury Filippovich Golubev. Transformation of the spacecraft's orbit using the swing method

A method for optimal control of the spacecraft's orbit in the central gravitational field is presented, based on the principle of cyclic pumping of spacecraft energy into a mechanical system located in the vicinity of the minimum potential energy. An appropriate algorithm has been built for continuous thrust engines, pulse engines, as well as when using a solar sail. The efficiency of the algorithm has been analytically demonstrated.

Key words: space vehicle, orbit, control, optimization

Содержание

Введение

Необходимость изменить уже существующую орбиту КА возникает, например, когда космический аппарат выводится сначала на промежуточную орбиту спутника планеты прежде, чем направить его в дальний космос, либо когда требуется корректировка орбиты долгоживущего спутника, потерявшей свои полезные свойства из-за действия возмущений. Применяющиеся для этой цели методы с применением регулярной двигательной установки многократно и убедительно продемонстрировали свою эффективность во многих успешно выполненных космических программах [1,2]. Вместе с тем всегда существующая потребность в удешевлении реализации новых проектов по исследованию и освоению космоса приводит к неизбежности поиска альтернативных подходов, в бо́льшей мере опирающихся на использование естественных сил для получения требуемого результата [3–6].

Замкнутые орбиты в центральном поле тяготения обладают свойством периодичности. Это даёт основание полагать, что с помощью небольших циклических воздействий можно постепенно целенаправленно преобразовывать орбиту, придавая ей нужную форму или превращая её в параболическую или гиперболическую с требуемыми свойствами [7]. В работах [8, 9] предложен общий метод управления амплитудой колебаний механических систем с дефицитом управления по одной степени свободы, находящихся в потенциальной яме. Оказывается, что и небесные тела при определённых условиях попадают в указанную категорию систем.

В данной работе решается задача об изменении траектории тела в центральном поле тяготения за счет циклических воздействий, обеспечивающих постепенную подкачку энергии в систему или постепенное её торможение с помощью техники, которая обычно используется при раскачивании качелей [8]. Она для своей реализации не требует прецизионного управления, но предполагает наличие достаточно большого времени для достижения требуемого конечного результата. Рассмотрены варианты управления посредством реактивного двигателя с непрерывной либо импульсной тягой, а также с помощью солнечного паруса.

1. Влияние непрерывного управления на орбиту КА

В инерциальной системе отсчёта уравнение управляемого движения КА в центральном поле тяготения имеет вид [10]:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + w\boldsymbol{\nu}, \tag{1.1}$$

где t – время, μ – гравитационная постоянная, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс КА с началом в притягивающем центре, r – модуль вектора $\mathbf{r}$, $w = -a\dot{m}/m$ – модуль управляющего реактивного ускорения, a – величина относительной скорости истечения реактивной струи, m – масса КА, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор направления управляющего реактивного ускорения.

Если $w = 0$, то величина $u = 1/r$ подчиняется следующему варианту уравнения Клеро-Лапласа для невозмущенного движения в центральном поле тяготения [11]

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}, \tag{1.2}$$

где c – постоянная площадей, равная удвоенной секторной скорости, а φ – полярный угол, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления в плоскости движения: $\dot{\varphi} = c/r^2$. Это уравнение представляет собой уравнение гармонического осциллятора, решение которого при эксцентриситете $e = \sqrt{1 + 2ph/\mu} < 1$, где $p = c^2/\mu$ – параметр орбиты, $h = (v^2/2 - \mu/r)$ – постоянная энергии, меняется в ограниченных пределах: $u_\alpha \le u \le u_\pi$. Здесь $u_\alpha = 1/r_\alpha$ соответствует апоцентру, а $u_\pi = 1/r_\pi$ – перицентру орбиты в центральном гравитационном поле, так что

$$u_\alpha = \frac{1-e}{p}, \quad u_\pi = \frac{1+e}{p}. \tag{1.3}$$

Направление колебаний задаётся вектором Лапласа $\mathcal{L}$, определяющим положение линии апсид в пространстве при $w = 0$:

$$\mathcal{L} = \mathbf{v} \times \mathbf{c} - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}, \quad |\mathcal{L}| = \mu e, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ – постоянная векторного интеграла площадей. Для круговой орбиты, когда $u_\alpha = u_\pi$, имеем $\mathcal{L} = 0$, т.е. направление линии апсид не определено.

Если $w \ne 0$, то $\mathbf{c}$, h и $\mathcal{L}$ станут переменными, а уравнение (1.2) перестанет быть справедливым. В этом случае

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = w(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}). \tag{1.5}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = w[\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu})] = w[2\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})]. \tag{1.6}$$

Пусть $\mathcal{L} \ne 0$. Представим векторы $d\mathbf{c}/dt$ и $d\mathcal{L}/dt$ в виде

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\mathbf{c}}{c}\left(\frac{\mathbf{c}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right) + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{c}, \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|} \cdot \frac{d\mathcal{L}}{dt}\right) + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L},$$

где $\boldsymbol{\Omega}_c \perp \mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} \perp \mathcal{L}$ – угловые скорости векторов $\mathbf{c}$ и $\mathcal{L}$ соответственно. Тогда

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{c} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right), \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{|\mathcal{L}|^2}\left(\mathcal{L} \times \frac{d\mathcal{L}}{dt}\right). \tag{1.7}$$

Теорема 1.1. *Модули векторов* $\mathbf{c}$ *и* $\mathcal{L}$ *подчиняются уравнениям*

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \frac{w}{c}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}r^2]\cdot\boldsymbol{\nu} = \frac{w}{c}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ \frac{d|\mathcal{L}|}{dt} &= \frac{w(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{|\mathcal{L}|}[\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{r}v^2]\cdot\boldsymbol{\nu} = \frac{w(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{|\mathcal{L}|}(\mathbf{c}\times\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Доказательство. С помощью формулы (1.5) найдём

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\mathbf{c}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{w}{c}\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu}) = \frac{w}{c}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

Получилась первая формула (1.8).

Далее из формул (1.4) и (1.6) следует

$$\frac{d|\mathcal{L}|}{dt} = \frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|}\cdot\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{w}{|\mathcal{L}|}[\mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathcal{L}) - \mathcal{L}\times\mathbf{c}]\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

Но

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathcal{L}) = \mathbf{r}\times\left\{\mathbf{v}\times\left[(\mathbf{v}\times\mathbf{c}) - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right]\right\} = \mathbf{r}\times\left[\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{c}) - \frac{\mu}{r}(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\right] = \\ = \mathbf{r}\times\left[\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}v^2 - \frac{\mu}{r}(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\right] = \left(\frac{\mu}{r} - v^2\right)[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})] = \\ = \left(\frac{\mu}{r} - v^2\right)[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}r^2]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\times\mathbf{c} = \left[(\mathbf{v}\times\mathbf{c}) - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right]\times\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{c}) - \frac{\mu}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{c}) = \\ = -\mathbf{v}c^2 - \frac{\mu}{r}[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})] = -\mathbf{v}c^2 - \frac{\mu}{r}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}r^2]. \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения, убеждаемся в справедливости второй формулы (1.8).$\Diamond$

Следствие 1.1. *Наибольшее влияние на величину секторной скорости оказывает управление, при котором вектор* $\boldsymbol{\nu}$ *компланарен плоскости орбиты и перпендикулярен радиус-вектору КА.*

Следствие 1.2. *Из правой части второго уравнения (1.8) видно, что при любом векторе* $\boldsymbol{\nu}$ *модуль вектора Лапласа достигает экстремальных значений в моменты пересечения космическим аппаратом линии апсид оскулирующей орбиты, т.е. когда* $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Следствие 1.3. *При $w \neq 0$ модуль вектора Лапласа не меняется, если в любой момент времени вектор $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярен вектору $(\mathbf{c} \times \mathbf{v})$. Модуль вектора площадей не меняется, если в любой момент времени вектор $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярен вектору $(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$. Поскольку $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \neq 0$, все векторы, обеспечивающие одновременное постоянство указанных модулей, должны быть коллинеарны вектору $\mathbf{c}$. Следовательно, выполнение равенства $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{c}/c$ в любой момент времени есть необходимое и достаточное условие того, что модуль вектора площадей и модуль вектора Лапласа одновременно остаются постоянными.*

Теорема 1.2. *Справедливы формулы*

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{w(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu})}{c^2}\mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = -\frac{w}{|\mathcal{L}|^2}\left\{\mathbf{c}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L}) + \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})\right](\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\right\}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для доказательства первой формулы (1.9) воспользуемся формулами (1.5) и (1.7):

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{c} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}\right) = \frac{w}{c^2}[\mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu})] = \frac{w}{c^2}[\mathbf{r}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c})],$$

но $\mathbf{r} \perp \mathbf{c}$, что и приводит к доказываемой формуле.

Перейдём к доказательству второй формулы (1.9). С помощью формул (1.4) и (1.6) найдём

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathcal{L}}{dt} \times \mathcal{L}\right) &= [2\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})] \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{c} - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right) = \\
&= -2\mathbf{c}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{c}v^2(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{c}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) + \\
&\quad + \frac{\mu}{r}(\mathbf{v} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) + \frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = \\
&= \mathbf{c}\left[-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}) + v^2(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})\right] + \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})\right](\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = \\
&= \mathbf{c}\left\{\boldsymbol{\nu} \cdot \left[v^2\mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right]\right\} + \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})\right](\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = \\
&= \mathbf{c}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L}) + \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})\right](\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}).
\end{aligned}$$

В итоге получается вторая формула (1.9).$\Diamond$

Следствие 1.4. *Угловая скорость вектора $\mathbf{c}$ при любом управлении всегда направлена вдоль радиус-вектора КА. Управление w наиболее эффективно для поворота вектора $\mathbf{c}$, когда оно прикладывается в районе апоцентра орбиты КА.*

Следствие 1.5. *Если $w\mathcal{L} \neq 0$, то угловая скорость вектора Лапласа в инерциальном пространстве равна нулю тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L}) + \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c})\right](\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = 0. \tag{1.10}$$

Следствие 1.6. *При $w \neq 0$ и $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \neq 0$ равенство нулю угловой скорости вектора Лапласа возможно лишь тогда, когда выполнено $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L} = 0$.*

Доказательство. Действительно,

$$\mathbf{c} \times \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu})\right] = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \times \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu}) = (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu})\mathcal{L} \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{c}$ и $[\mu(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r})/r - \mathbf{v}(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu})]$ неколлинеарны. Поэтому равенство (1.10) возможно лишь при $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L} = 0$.$\Diamond$

Геометрический смысл следствия 1.6 состоит в том, что если единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ не компланарен плоскости орбиты, то равенство нулю угловой скорости вектора Лапласа возможно, лишь когда центр масс КА расположен на линии апсид оскулирующей орбиты, причём $\boldsymbol{\nu} \perp \mathcal{L}$.

Теорема 1.3. *Пусть $w \neq 0$, но $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} = 0$. Тогда угловая скорость вектора Лапласа выражается формулой*

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = -\mathbf{c}\frac{w}{|\mathcal{L}|^2}\{\boldsymbol{\nu} \cdot [\mathcal{L} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}]\}, \quad \text{где} \quad \mathbf{P} = \frac{\mu}{rc^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c} \times \mathcal{L}}{c^2} - \mathbf{v}. \tag{1.11}$$

Доказательство. При $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} = 0$ формула (1.9) принимает вид

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = -\frac{w}{|\mathcal{L}|^2}\left[\mathbf{c}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{L}) + \frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\right]. \tag{1.12}$$

Вектор $(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r})$ коллинеарен вектору $\mathbf{c}$. Поэтому его можно представить в виде

$$(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{c}}{c}\left[\frac{\mathbf{c}}{c} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r})\right] = \frac{\mathbf{c}}{c^2}[\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{c})].$$

Подставив полученное выражение в формулу (1.12), получаем с учётом того, что $\mathbf{c} \neq 0$, равенство (1.11), в котором

$$\mathbf{P} = \frac{\mu}{rc^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{c}),$$

но

$$\frac{\mu}{r}\mathbf{r} = (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) - \mathcal{L}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2}[(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) - \mathcal{L}] \times \mathbf{c} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{c} \times \mathcal{L} - \mathbf{c} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{c})],$$

откуда и следует вторая формула для $\mathbf{P}$ в (1.11).$\Diamond$

Следствие 1.7. *Если $w \neq 0$, а вектор $\boldsymbol{\nu}$ компланарен плоскости орбиты, то плоскость орбиты постоянна в инерциальном пространстве, а вектор Лапласа вращается в этой плоскости с угловой скоростью*

$$\Omega_{\mathcal{L}} = -\frac{cw}{|\mathcal{L}|^2}\{\boldsymbol{\nu} \cdot [\mathcal{L} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}]\} \tag{1.13}$$

вокруг вектора $\mathbf{c}$.

Следствие 1.8. *Пусть $w \neq 0$ и $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} = 0$. Тогда если вектор $\boldsymbol{\nu}$ в любой момент времени удовлетворяет условию*

$$\boldsymbol{\nu} \cdot [\mathcal{L} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}] = 0, \tag{1.14}$$

то вектор Лапласа сохраняет направление в инерциальном пространстве.

Следствие 1.8 говорит о том, что за счёт выбора направления управляющего ускорения, расположенного в плоскости орбиты, всегда в соответствии с формулой (1.14) можно сохранять постоянным направление вектора Лапласа в инерциальном пространстве.

Теорема 1.4. *Если $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{c}/c$, то фигура, образованная векторами $\mathbf{c}$ и $\mathcal{L}$, вращается как твёрдое тело с мгновенной угловой скоростью*

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{w}{c}\mathbf{r}. \tag{1.15}$$

Доказательство. В соответствии со следствием 1.3 при выборе $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{c}/c$ модули векторов $\mathbf{c}$ и $\mathcal{L}$ не меняются. Формулы (1.9) принимают вид

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \frac{w}{c}\mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = -\frac{w}{|\mathcal{L}|^2 c}(\mathcal{L} \times \mathbf{c})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}). \tag{1.16}$$

Векторы $\mathbf{r}$, $\mathcal{L}$ и $(\mathcal{L} \times \mathbf{c})$ лежат в плоскости орбиты, причём $\mathcal{L} \perp (\mathcal{L} \times \mathbf{c})$. Представим вектор $\mathbf{r}$ следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|} \cdot \mathbf{r}\right) + \frac{(\mathcal{L} \times \mathbf{c})}{|\mathcal{L}|c}\left[\frac{(\mathcal{L} \times \mathbf{c})}{|\mathcal{L}|c} \cdot \mathbf{r}\right].$$

но

$$\left[\frac{(\mathcal{L} \times \mathbf{c})}{|\mathcal{L}|c} \cdot \mathbf{r}\right] = \left[\frac{(\mathbf{r} \times \mathcal{L})}{|\mathcal{L}|c} \cdot \mathbf{c}\right] = -\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})c}{|\mathcal{L}|}.$$

Следовательно,

$$-\frac{(\mathcal{L} \times \mathbf{c})}{|\mathcal{L}|^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} - \frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{\mathcal{L}}{|\mathcal{L}|} \cdot \mathbf{r}\right).$$

Последнее слагаемое в правой части полученной формулы параллельно вектору $\mathcal{L}$, поэтому его можно не учитывать при вычислении линейной скорости конца вектора $\mathcal{L}$, положив $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\Omega}_c = \boldsymbol{\Omega}$.$\Diamond$

2. Влияние импульсного управления

Рассмотрим влияние на векторные характеристики орбиты КА импульсного управления, когда в некоторый момент времени движения скорость КА скачком меняется как по величине, так и по направлению:

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + I\boldsymbol{\nu}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}^-$ – скорость КА до приложения импульса, $\mathbf{v}^+$ – скорость КА после приложения импульса, I – одиночный удельный импульс, развиваемый двигателем в указанный момент времени, $\boldsymbol{\nu}$ – как и прежде, задаёт направление импульса. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ аппарата при этом не меняется. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}^+ = \mathbf{c}^- + \Delta\mathbf{c}, \quad \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^- + \Delta\mathcal{L}, \\ &\Delta\mathbf{c} = I(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu}), \quad \Delta\mathcal{L} = I[\boldsymbol{\nu}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v}^-) + \mathbf{v}^-\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})] + I^2[\boldsymbol{\nu}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Пусть*

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad I = -\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-}{r}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}^+ = \frac{\mathbf{r}}{r^2}[(c^-)^2 - \mu r], \quad \mathbf{c}^+ = \mathbf{c}^- \tag{2.3}$$

то есть $\mathcal{L}^+ \parallel \mathbf{r}$, *а полученный в результате такого импульса вектор Лапласа проходит через точку, в которой был приложен импульс.*

Доказательство. В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{c} &= \frac{I}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) = 0, \\ \mathcal{L}^+ &= \mathcal{L}^- + \frac{I}{r}[\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v}^-)] = \mathbf{r}(v^-)^2 - \mathbf{v}^-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-) - \frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \\ &+\frac{I}{r}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-) - \mathbf{v}^- r^2] = \mathbf{r}\left[(v^-)^2 - \frac{\mu}{r} + \frac{I}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-)\right] - \mathbf{v}^-[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-) + Ir]. \end{aligned}$$

Если принять I таким, как в условии леммы, то получим

$$\mathcal{L}^+ = \mathbf{r}\left[(v^-)^2 - \frac{\mu}{r} - \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-)^2}{r^2}\right] = \frac{\mathbf{r}}{r^2}[r^2(v^-)^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-)^2 - \mu r] = \frac{\mathbf{r}}{r^2}[(c^-)^2 - \mu r],$$

что и требовалось доказать.$\Diamond$

Представим векторы $\Delta\mathbf{c}$ и $\Delta\mathcal{L}$ в виде

$$\Delta\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}^-}{c^-}\left(\frac{\mathbf{c}^-}{c^-}\cdot\Delta\mathbf{c}\right) + \boldsymbol{\Phi}_c\times\mathbf{c}^-, \quad \Delta\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}^-}{|\mathcal{L}^-|}\left(\frac{\mathcal{L}^-}{|\mathcal{L}^-|}\cdot\Delta\mathcal{L}\right) + \boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}}\times\mathcal{L}^-, \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\Phi}_c$ и $\boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}}$ характеризуют поперечные смещения концов соответствующих векторов. Тогда по аналогии с формулами (1.8) получим теорему

Теорема 2.1. *Проекции Δc и $\Delta|\mathcal{L}|$ приращений $\Delta\mathbf{c}$ и $\Delta\mathcal{L}$ на направления векторов $\mathbf{c}^-$ и $\mathcal{L}^-$, которые были до приложения импульса, имеют вид соответственно*

$$\begin{aligned}
&\Delta c = \frac{\mathbf{c}^-}{c^-}\cdot\Delta\mathbf{c} = \frac{I}{c^-}(\mathbf{c}^-\times\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu},\\
&\Delta|\mathcal{L}| = \frac{I(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}^-)}{|\mathcal{L}^-|}(\mathbf{c}^-\times\mathbf{v}^-)\cdot\boldsymbol{\nu} + \frac{I^2}{|\mathcal{L}^-|}\{[(c^-)^2-\mu r]-(\mathcal{L}^-\cdot\boldsymbol{\nu})(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu})\}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Доказательство. Выражения для линейных по I членов вполне аналогичны выражениям для линейных по w членов в формулах (1.8). Коэффициент при I^2 получается посредством преобразования:

$$\mathcal{L}^-\cdot[\boldsymbol{\nu}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})] = \mathcal{L}^-\cdot[\mathbf{r}-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})] = [(c^-)^2-\mu r]-(\mathcal{L}^-\cdot\boldsymbol{\nu})(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nu}),$$

что и требовалось доказать.$\diamondsuit$

Следствие 2.1. *Приложение одиночного импульса ($I\neq 0$) с направляющим вектором $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{c}/c$ обеспечивает постоянство модуля вектора Лапласа только при $\mathbf{r}\perp\mathcal{L}^-$, в то время как постоянство модуля вектора площадей обеспечивается при любом положении КА на орбите.*

По аналогии с теоремой 1.2 получим теорему

Теорема 2.2. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}_c = \frac{I(\mathbf{c}^-\cdot\boldsymbol{\nu})}{(c^-)^2}\mathbf{r},\\
&\boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}} = -\frac{I}{|\mathcal{L}^-|^2}\left\{\mathbf{c}^-(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathcal{L}^-)+\left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{r})-\mathbf{v}^-(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{c}^-)\right](\mathbf{v}^-\cdot\mathbf{r})\right\}+\\
&\qquad\qquad + \frac{I^2}{|\mathcal{L}^-|^2}[\mathbf{c}^-(\mathbf{v}^-\cdot\mathbf{r})-(\mathcal{L}^-\times\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})].
\end{aligned}\tag{2.6}$$

Доказательство. Линейные по I части формул (2.6) аналогичны линейным по w частям формул (1.9). Коэффициент при I^2 получается с помощью формулы (2.2) следующим образом:

$$\mathcal{L}^-\times[\boldsymbol{\nu}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})] = \mathcal{L}^-\times[\mathbf{r}-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})] = (\mathbf{v}^-\times\mathbf{c}^-)\times\mathbf{r}-(\mathcal{L}^-\times\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}),$$

откуда и следует доказываемая формула.$\diamondsuit$

Следствие 2.2. *Если $I\neq 0$ и $(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{c}^-)\neq 0$, то равенство $\boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{L}}=0$ может быть достигнуто тогда и только тогда, когда $[(\mathbf{v}^- - I\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{r}]=0$.*

Доказательство. Учтём доказательство следствия 1.6 и рассмотрим векторное произведение

$$\mathbf{c}^- \times \left\{ \left[\frac{\mu}{r}(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}^-(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c}^-)\right](\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r}) + I[\mathbf{c}^-(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r}) - (\mathcal{L}^- \times \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})]\right\} =$$
$$= (\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c}^- \cdot \boldsymbol{\nu})\mathcal{L}^- - I\mathbf{c}^- \times (\mathcal{L}^- \times \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{c}^- \cdot \boldsymbol{\nu})[(\mathbf{v}^- - I\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{r}]\mathcal{L}^-.$$

Пусть $[(\mathbf{v}^- - I\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{r}] \neq 0$. Это, согласно условиям следствия, означает, что векторы $\mathbf{\Phi}_\mathcal{L}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны и не обращаются в ноль.

С другой стороны, если справедливо равенство $[(\mathbf{v}^- - I\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{r}] = 0$, то $\mathbf{\Phi}_\mathcal{L} = 0$ получается, например, когда КА находится на линии апсид, при условии, что $(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}) = 0$.$\Diamond$

Теорема 2.3. *Пусть $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{c}^-/c^-$. Тогда можно принять*

$$\mathbf{\Phi}_c = \mathbf{\Phi}_\mathcal{L} = \mathbf{\Phi} = \frac{I}{c}\mathbf{r} + \frac{I^2(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})}{|\mathcal{L}^-|^2}\mathbf{c}^-. \tag{2.7}$$

Доказательство. При $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{c}/c$ формулы (2.6) принимают вид

$$\mathbf{\Phi}_c = \frac{I}{c^-}\mathbf{r}, \quad \mathbf{\Phi}_\mathcal{L} = -\frac{I}{|\mathcal{L}|^2 c^-}(\mathcal{L}^- \times \mathbf{c}^-)(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r}) + \frac{I^2}{|\mathcal{L}^-|^2}[\mathbf{c}^-(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})]. \tag{2.8}$$

Преобразуем коэффициент при I во второй формуле (2.8) так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.4:

$$\mathbf{\Phi}_\mathcal{L} = \frac{I}{c^-}\mathbf{r} + \frac{I^2}{|\mathcal{L}^-|^2}[\mathbf{c}^-(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})].$$

Теперь, поскольку коэффициент при I^2 в выражении для $\mathbf{\Phi}_\mathcal{L}$ параллелен вектору $\mathbf{c}^-$, можно положить

$$\mathbf{\Phi}_c = \frac{I}{c^-}\mathbf{r} + \frac{I^2}{|\mathcal{L}^-|^2}[\mathbf{c}^-(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})],$$

что и доказывает данную теорему.$\Diamond$

Теорема 2.4. *Пусть $I \neq 0$, но $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} = 0$. Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}_\mathcal{L} = -\mathbf{c}^- \frac{I}{|\mathcal{L}^-|^2}\left\{\boldsymbol{\nu} \cdot \left[\mathcal{L}^- + (\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}^- - \frac{I}{(c^-)^2}(\mathbf{c}^- \times \mathcal{L}^-)(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})\right] - I(\mathbf{v}^- \cdot \mathbf{r})\right\}, \\ &\mathbf{P}^- = \frac{\mu}{r(c^-)^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{c}^-) = \frac{\mathbf{c}^- \times \mathcal{L}^-}{(c^-)^2} - \mathbf{v}^-. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Линейная по I часть формулы (2.6) преобразуется аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1.3. Кроме того, учтём, что векторы $\boldsymbol{\mathcal{L}}^-$ и $\boldsymbol{\nu}$ принадлежат плоскости движения. Тогда

$$(\boldsymbol{\mathcal{L}}^- \times \boldsymbol{\nu}) = \frac{\mathbf{c}^-}{(c^-)^2}[\mathbf{c}^- \cdot (\boldsymbol{\mathcal{L}}^- \times \boldsymbol{\nu})] = \frac{\mathbf{c}^-}{(c^-)^2}[\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{c}^- \times \boldsymbol{\mathcal{L}}^-)],$$

откуда и следует доказываемая формула.$\Diamond$

Следствие 2.3. *Если КА расположен на линии апсид, а направление импульса параллельно плоскости орбиты и перпендикулярно радиус-вектору КА, то вектор Лапласа не изменяет своего направления. Если же импульс прикладывается в других произвольных точках орбиты, то направление вектора Лапласа не меняется, когда вектор* $\boldsymbol{\nu}$ *и величина импульса* I *связаны уравнением*

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}^- + (\mathbf{v}^-\cdot\mathbf{r})\mathbf{P}^- - \frac{I}{(c^-)^2}(\mathbf{c}^- \times \boldsymbol{\mathcal{L}}^-)(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})\right] - I(\mathbf{v}^-\cdot\mathbf{r}) = 0. \qquad (2.10)$$

Видим, что требование существования решения уравнения (2.10) в общем положении КА на орбите ограничивает допустимую величину импульса I, что не всегда приемлемо.

3. Регулярные уравнения управляемого движения КА

Найдем аналог уравнению (1.2) при $w \neq 0$. Пусть τ − регуляризирующая [12] независимая переменная, определённая равенством $r^2 d\tau = c_0 dt$. Постоянная c_0 может быть выбрана произвольно. В частности, она может совпадать с начальным значением переменной c при $t = \tau = 0$. Тогда

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2}{c_0}\frac{du}{dt} = -\frac{u}{c_0}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}). \qquad (3.1)$$

Далее

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{du}{d\tau}\right) = \frac{u}{c_0^2}\left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2 - r^2\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\right] = \frac{u}{c_0^2}\left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2 - r^2v^2 - r^2(\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}})\right].$$

Заметим, что $r^2v^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2 = c^2$ есть квадрат текущей удвоенной секторной скорости, в данном случае переменной. Подставив сюда правую часть уравнения (1.1), найдём

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{c^2}{c_0^2}u = \frac{\mu}{c_0^2} - \frac{w}{c_0^2 u}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}. \qquad (3.2)$$

Как следует из формул (1.9) и (2.6), плоскость орбиты остаётся неподвижной в пространстве, если $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{c}=0$. Допустим, что это условие выполнено, т.е. вектор $\boldsymbol{\nu}$ компланарен плоскости орбиты. Зададим вектор $\boldsymbol{\nu}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{\mathbf{r}}{r}\cos\theta+\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{cr}\sin\theta, \tag{3.3}$$

где угол θ отсчитывается от вектора $\mathbf{r}$ к вектору $\boldsymbol{\nu}$ в кратчайшем направлении. Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}}=w(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})=\frac{\mathbf{c}}{c}wr\sin\theta\to\frac{dc}{dt}=wr\sin\theta. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Угловая скорость вектора Лапласа выражается формулой*

$$\Omega_{\mathcal{L}}=-\frac{cw}{|\mathcal{L}|^2}\left[\left(\frac{c^2}{r}-\mu\right)\cos\theta-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\left(\frac{c}{r}+\frac{\mu}{c}\right)\sin\theta\right]. \tag{3.5}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (1.13) и (3.3). Тогда

$$\boldsymbol{\nu}\cdot[\mathcal{L}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{P}]=\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\cos\theta+\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{cr}\sin\theta\right]\cdot[\mathcal{L}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{P}]=$$

$$=\frac{\mathbf{r}\cdot\mathcal{L}}{r}\cos\theta+\left[\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\mathcal{L}}{cr}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{cr}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{P}]\right]\sin\theta=$$

$$=\frac{\cos\theta}{r}\left[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{c})-\frac{\mu}{r}r^2\right]+\left[\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{c})}{cr}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{cr}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\frac{\mu}{rc^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{c})]\right]\sin\theta=$$

$$=\frac{\cos\theta}{r}(c^2-\mu r)+\left[-\frac{c^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})}{cr}-\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mu}{crrc^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{c})^2\right]\sin\theta,$$

откуда и следует доказываемая формула.$\Diamond$

Переходя к независимой переменной τ, окончательно найдём систему уравнений, регулярную вблизи притягивающего центра:

$$\begin{cases}\dfrac{dc}{d\tau}=\dfrac{dc}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}=\dfrac{w\sin\theta}{c_0u^3},\\ \dfrac{d^2u}{d\tau^2}+\dfrac{c^2}{c_0^2}u=\dfrac{\mu}{c_0^2}-\dfrac{w}{c_0^2u^2}\cos\theta,\\ \dfrac{d\varphi}{d\tau}=\dfrac{c}{c_0},\\ \dfrac{d\psi}{d\tau}=-\dfrac{cw}{|\mathcal{L}|^2c_0u^2}\left[\dfrac{c_0}{cu}\dfrac{du}{d\tau}(c^2u+\mu)\sin\theta+(c^2u-\mu)\cos\theta\right],\\ \dfrac{d|\mathcal{L}|}{d\tau}=\dfrac{cw}{u^2|\mathcal{L}|}\left(c\cos\theta+\dfrac{c_0}{u}\dfrac{du}{d\tau}\sin\theta\right)\dfrac{du}{d\tau},\end{cases} \tag{3.6}$$

где ψ – угол поворота линии апсид, отсчитываемый от фиксированного направления в плоскости орбиты.

4. Декомпозиция управления

Можно поставить задачу о выборе управления $\mathbf{w} = w\boldsymbol{\nu}$ с целью увеличения отрезка $[u_\alpha, u_\pi]$ (см. формулы (1.3)), что означает раскрутку траектории КА от притягивающего центра, либо с целью уменьшения указанного отрезка, что означает сворачивание орбиты в направлении притягивающего центра и приближение её к круговой.

Исследуем сначала случай, когда возможно независимое управление как направлением вектора $\boldsymbol{\nu}$, так и величиной w.

Потребуем, чтобы вектор управления в любой момент времени движения был перпендикулярен радиус-вектору центра масс КА: $\theta = \pm\pi/2$. Уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{c}{c_0}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{c}{c_0}\right)\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{w}{c_0^2 u^3}, \\ \dfrac{d^2u}{d\tau^2} + \dfrac{c^2}{c_0^2}u = \dfrac{\mu}{c_0^2}, \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{c}{c_0}, \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = -\dfrac{(c^2u+\mu)w}{|\mathcal{L}|^2u^3}\dfrac{du}{d\tau}, \\ \dfrac{d|\mathcal{L}|}{d\tau} = \dfrac{c^2w}{u^2|\mathcal{L}|}\dfrac{du}{d\tau}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где управление w может быть как положительным, так и отрицательным.

В этих уравнениях непосредственному влиянию управления подвержена секторная скорость аппарата, и уже через неё осуществляется управление радиальной составляющей движения. Система имеет дефицит управления по переменной u. При постоянном ($w \equiv 0$) значении параметра c второе уравнение системы (4.1) описывает гармонические колебания относительно положения равновесия

$$u_e(c) = \frac{\mu}{c^2} \tag{4.2}$$

и может быть представлено в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{c_0^2}q, \quad q = u - u_e(c). \tag{4.3}$$

Рассмотрим задачу об оптимизации амплитуды колебаний по переменной u с помощью циклических изменений секторной скорости. Следуя работам [8,9], в уравнениях (4.1) примем величину

$$U(\tau) = \frac{c^2(\tau)}{c_0^2} > 0 \tag{4.4}$$

в качестве управления. В дальнейшем предполагается, что управление не должно приводить к перемене знака c. Поэтому случай $U = 0$ исключается из рассмотрения. Второе уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{\mu}{c_0^2} - Uu. \tag{4.5}$$

Согласно [8,9], максимальное значение амплитуды колебаний достигается при

$$U^* = \begin{cases} \underset{U}{\operatorname{argmax}} \left(\dfrac{\mu}{c_0^2} - Uu \right), & u_\alpha \to u \to u_\pi, \\ \underset{U}{\operatorname{argmin}} \left(\dfrac{\mu}{c_0^2} - Uu \right), & u_\pi \to u \to u_\alpha \end{cases}$$

для любого фиксированного значения u. Здесь, как и ранее, u_α – значение u в апоцентре орбиты, а u_π – значение u в перицентре орбиты. Понятно, что

$$0 < u_\alpha \leq u_\pi \leq u_p, \tag{4.6}$$

где u_p – величина, обратная безопасному радиусу приближения к притягивающему центру. Поскольку правая часть второго уравнения (4.1) линейна по U и $u > 0$, то экстремальным значениям величины U будут соответствовать экстремальные в таком же смысле значения величины w в первом уравнении (4.1).

Пусть никаких специальных ограничений непосредственно на величину U, кроме того, что $U > 0$, не существует, но управление w имеет ограниченные возможности. Для того чтобы выразить это свойство и отделить задачу выбора оптимальной величины U от задачи её реализации, требующей хотя бы элементарного учёта конструкции двигателей, будем считать, что приращение $|\Delta U|$ к уже достигнутому значению U_i при включённом управлении w не может превышать некоторого фиксированного значения

$$|\Delta U| \leq P_i, \tag{4.7}$$

где i – номер полуразмаха колебаний. Решение задачи выбора оптимального значения управления w после нахождения оптимальной функции $\Delta U = \Delta U_{op}$ облегчается при учёте свойств этой функции.

Условимся, что если процедура управления колебаниями начинается от момента достижения перицентра, то всем этапам движения от перицентра соответствуют нечётные номера, а всем этапам движения от апоцентра – чётные.

Обозначим

$$U_m(i) \le U \le U_M(i) = U_i + P_i, \tag{4.8}$$

где

$$0 < U_{inf} \le U_m(i) = \begin{cases} U_i - P_i, & P_i \le U_i - U_{inf}, \\ U_{inf}, & P_i > U_i - U_{inf}, \end{cases} \tag{4.9}$$

а $U_{inf} > 0$ – некоторое минимально допустимое безопасное значение U. Кроме того, обозначим

$$U_{i=2k} = \begin{cases} U_m(i), & u_\pi \to \max, \\ U_M(i), & u_\pi \to \min, \end{cases} \quad U_{i=2k+1} = \begin{cases} U_m(i), & u_\alpha \to \max, \\ U_M(i), & u_\alpha \to \min, \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.10}$$

5. Управление амплитудой по методу качелей

Зададим начальные значения

$$u_0 = u_\pi(i), \quad u_0' = \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad U = U_i, \quad i = 2k+1. \tag{5.1}$$

Здесь U_i соответствует имеющейся на данный момент орбите. На этапе перелёта от перицентра к апоцентру могут решаться следующие задачи для выбора управления U.

Задача 5.1. Обеспечить перелёт, при котором $u_\alpha \to \min$, что будет означать максимальное увеличение радиуса апоцентра (раскрутку траектории). Здесь следует учитывать нижнюю границу неравенства (4.6).

Задача 5.2. Обеспечить перелёт, при котором $u_\alpha \to \max$, что будет означать максимальное уменьшение радиуса апоцентра (сворачивания траектории). Здесь следует учитывать среднюю часть ограничения (4.6).

Для решения задачи 5.1 ($i = 2k+1$) следует, согласно (4.10), принять

$$U = U_M(i) = U(i) + P_i = \text{const}$$

вплоть до достижения апоцентра. При этом секторная скорость окажется постоянной, а уравнения (4.1) предстанут в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\tau} = 0, \\ \dfrac{d^2u}{d\tau^2} + uU_M(i) = \dfrac{\mu}{c_0^2}, \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{U_M(i)}, \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = 0, \\ \dfrac{d|\mathcal{L}|}{d\tau} = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Перейдём во втором уравнении системы (5.2) к независимой переменной φ:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c_0^2 U_M(i)} = \frac{\mu}{c_M^2(i)}, \quad c_M(i) = c_0\sqrt{U_M(i)}.$$

Как уже указывалось, это известное уравнение Клеро-Лапласа. Его решение, удовлетворяющее начальным условиям при $\varphi = \varphi_0 = 0$, имеет вид

$$u = \left(u_\pi(i) - \frac{\mu}{c_M^2(i)}\right)\cos\varphi + \frac{\mu}{c_M^2(i)}, \quad e(i) = \frac{c_M^2(i)}{\mu}u_\pi(i) - 1, \tag{5.3}$$

где $e(i)$ – эксцентриситет переходной орбиты от $u_\pi(i)$ к $u_\alpha(i)$, φ отсчитывается от перицентра орбиты. Значение $u = u_\alpha(i)$, соответствующее апоцентру орбиты на i-м шаге алгоритма раскачивания, получается с помощью формулы

$$u_\alpha(i) = \frac{2\mu}{c_M^2(i)} - u_\pi(i) = \frac{2\mu}{c_0^2 U_M(i)} - u_\pi(i). \tag{5.4}$$

Очевидно, что значение $u_\alpha(i-1)$, которое соответствовало предыдущему шагу алгоритма, выражается формулой

$$u_\alpha(i-1) = \frac{2\mu}{c_0^2 U_i} - u_\pi(i).$$

Следовательно,

$$u_\alpha(i) - u_\alpha(i-1) = \frac{2\mu}{c_0^2 U_M(i)} - \frac{2\mu}{c_0^2 U_i} = -\frac{2\mu}{c_0^2}\frac{P_i}{U_M(i)U_i} < 0, \tag{5.5}$$

что и требовалось получить. Если окажется, что при каком-то значении i $u_\alpha(i) < 0$, то формирование траектории следует прекратить, так как это означает, что траектория перестала быть эллиптической.

Задача 5.2 решается аналогично, но вместо $U_M(i)$ следует выбирать $U_m(i)$. Тогда получим

$$u_\alpha(i) - u_\alpha(i-1) = \frac{2\mu}{c_0^2 U_m(i)} - \frac{2\mu}{c_0^2 U_i} = \frac{2\mu[U_i - U_m(i)]}{c_0^2 U_m(i) U_i} \geq 0. \qquad (5.6)$$

Здесь может оказаться, что $u_\alpha(i) > u_\pi(i)$. Если такое произошло, то процедуру оптимизации следует остановить или продолжить, поменяв смысл обозначений апсид.

Рассмотрим этап перелёта от апоцентра к перицентру. Зададим начальные значения

$$u_0 = u_\alpha(i), \quad u_0' = \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad U = U_i, \quad i = 2k. \qquad (5.7)$$

Ограничения на управление учитываются по-прежнему в виде (4.8). В данном случае могут быть сформулированы следующие задачи.

Задача 5.3. Обеспечить перелёт, при котором $u_\pi \to \max$, что будет означать минимизацию радиуса перицентра (раскрутка траектории, учитывается правая граница (4.6)).

Задача 5.4. Обеспечить перелёт, при котором $u_\pi \to \min$, что будет означать максимальное увеличение радиуса перицентра (сворачивание траектории, учитывается средняя часть (4.6)).

Рассмотрим решение задачи 5.3. В соответствии с (4.10) для неё следует принять $i = 2k$, $U(i) = U_m(i) = U(i-1) - P_i$, и уравнение траектории примет вид

$$u = \left[\frac{\mu}{c_m^2(i)} - u_\alpha(i)\right]\cos\varphi + \frac{\mu}{c_m^2(i)}, \quad e(i) = 1 - \frac{c_m^2(i)}{\mu} u_\alpha(i). \qquad (5.8)$$

Здесь угол φ по-прежнему отсчитывается от направления на перицентр. Найдём значение $u = u_\pi(i)$:

$$u_\pi(i) = \frac{2\mu}{c_m^2(i)} - u_\alpha(i). \qquad (5.9)$$

Из формулы (5.4) получим

$$u_\alpha(i) = \frac{2\mu}{c_M^2(i-1)} - u_\pi(i-1).$$

Поэтому

$$u_\pi(i) - u_\pi(i-1) = \frac{2\mu c_0^2[U_i - U_m(i)]}{c^2(i) c_m^2(i)} \geq 0,$$

т.е. радиус перицентра действительно убывает. Если он оказался меньше предельно допустимого ($u_\alpha(i) > u_p$), то тогда следует положить $u_\pi(i) = u_p$ и найти соответствующую константу площадей с помощью равенства

$$c = \sqrt{\frac{2\mu}{u_p + u_\alpha(i)}}, \tag{5.10}$$

а $U = c^2/c_0^2$ принять в качестве решения задачи 5.3.

Пусть теперь требуется решить задачу 5.4. В соответствии с (4.10) для неё следует принять $i = 2k$, $U(i) = U_M(i) = U_i + P_i$, и уравнение траектории примет вид

$$u = \left[\frac{\mu}{c_M^2(i)} - u_\alpha(i)\right]\cos\varphi + \frac{\mu}{c_M^2(i)}, \quad e(i) = 1 - \frac{c_M^2(i)}{\mu}u_\alpha(i). \tag{5.11}$$

Поэтому

$$u_\pi(i) = \frac{2\mu}{c_M^2(i)} - u_\alpha(i) \tag{5.12}$$

и

$$u_\pi(i) - u_\pi(i-1) = \frac{2\mu c_0^2[U_i - U_M(i)]}{c^2(i)c_M^2(i)} = -\frac{2\mu c_0^2 P_i}{c^2(i)c_M^2(i)} < 0,$$

т.е радиус перицентра возрастает. Однако, может случиться, что на i-м шаге окажется $u_\pi(i) < u_\alpha(i)$. Тогда следует взять

$$U(i) = \frac{\mu}{c_0^2 u_\alpha(i)},$$

при котором будет выполнено $u_\pi(i) = u_\alpha(i)$. По прибытии аппарата в перицентр процедуру модификации орбиты можно будет продолжить в нужном направлении.

Полученный вариант управления предполагает скачкообразное изменение константы площадей в моменты прохождения перицентра либо апоцентра орбиты КА, сохраняя их положение в пространстве. Поэтому направление линии апсид в результате такого управления остается неизменным.

Если мощность двигательной установки недостаточна, чтобы решить задачу формирования орбиты за один раз, то, выбирая в различных комбинациях решение задач 1,2,3 и 4, можно постепенно добиться требуемого улучшения траектории по сравнению с исходной.

6. Учёт специфики двигателей

Процедура метода качелей, применённая в предыдущем разделе, позволяет сравнительно просто получить рецепт решения задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций, содержащих скачки́. Однако возможность реализации такого управления зависит от типа двигателя. Вместе с тем участки постоянных значений управления $U(\tau)$ могут служить ориентиром для оптимизации реальной управляющей функции. Из первого уравнения системы (4.1) получим

$$\frac{c_i(\tau)}{c_0} = \int\limits_{\tau_{0i}}^{\tau} \frac{w}{c_0^2 u^3} d\tau + \frac{c_i}{c_0}. \tag{6.1}$$

6.1. Управляющее ускорение имеет импульсный характер.

Обозначим, как и прежде,

$$I_j = \lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{t_j}^{t_j+\Delta t} w(t, \Delta t) dt$$

величину импульса, приложенного к КА в некоторый момент времени t_j. Тогда с учетом того, что $d\tau = c_0 u^2 dt$, будем иметь

$$\frac{c_i(\tau)}{c_0} = \Delta_j \sigma(\tau - \tau_j) + \frac{c_i}{c_0}, \quad \sigma = \begin{cases} 1, & \tau \geq \tau_j, \\ 0, & \tau < \tau_j, \end{cases} \quad \Delta_j = \frac{I_j}{c_0 u(\tau_j)}, \tag{6.2}$$

где τ_j – значение переменной τ, соответствующее моменту времени t_j. Такое управление реализуется в классе кусочно-постоянных функций и по смыслу наиболее близко к управлению, полученному в предыдущем разделе.

Пусть импульс одиночный. В связи со сказанным в предыдущем разделе, если движение начинается от апоцентра к перицентру, выполнение импульса в начале перехода не вызывает сомнения в его оптимальности, так как на этом участке траектории координата u монотонно возрастает. Однако, при переходе от перицентра к апоцентру координата u монотонно убывает. Поэтому оптимальность приложения импульса в начале такого участка может вызывать сомнение. Рассмотрим этот вариант подробнее. Пусть импульс выполняется в некоторый момент τ_1 после прохождения через перицентр. Тогда получим

$$u = \begin{cases} \left(u_\pi - \dfrac{\mu}{c^2}\right) \cos\left(\dfrac{c}{c_0}\tau\right) + \dfrac{\mu}{c^2}, & 0 \leq \tau < \tau_1, \\ A(\tau_1, c_1) \cos\left[\dfrac{c_1}{c_0}(\tau - \tau_1)\right] + B(\tau_1, c_1) \sin\left[\dfrac{c_1}{c_0}(\tau - \tau_1)\right] + \dfrac{\mu}{c_1^2}, & \tau \geq \tau_1, \end{cases} \tag{6.3}$$

где

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{c}{c_0} + \Delta_1,$$
$$A(\tau_1, c_1) = \left(u_\pi - \frac{\mu}{c^2}\right)\cos\left(\frac{c}{c_0}\tau_1\right) + \frac{\mu}{c^2} - \frac{\mu}{c_1^2} = u^-(\tau_1) - \frac{\mu}{c_1^2}, \qquad (6.4)$$
$$B(\tau_1, c_1) = -\frac{c}{c_1}\left(u_\pi - \frac{\mu}{c^2}\right)\sin\left(\frac{c}{c_0}\tau_1\right) = \frac{c_0}{c_1}\frac{du^-}{d\tau}(\tau_1).$$

При этом

$$u_\alpha(\tau_1, c_1) = \frac{\mu}{c_1^2} - \sqrt{A^2(\tau_1, c_1) + B^2(\tau_1, c_1)}. \qquad (6.5)$$

Заметим, что

$$A(0, c_1) = \left(u_\pi - \frac{\mu}{c_1^2}\right), \quad B(0, c_1) = 0, \quad u_\alpha(0, c_1) = \frac{2\mu}{c_1^2} - u_\pi.$$
$$A\left(\frac{c_0}{c}\pi, c_1\right) = \frac{2\mu}{c^2} - u_\pi - \frac{\mu}{c_1^2}, \quad B\left(\frac{c_0}{c}\pi, c_1\right) = 0, \quad u_\alpha\left(\frac{c_0}{c}\pi, c_1\right) = \frac{2\mu}{c^2} - u_\pi,$$

то есть эффект от приложения импульса в промежутке между перицентром и апоцентром сначала может возрастать, но потом неизбежно ослабляется по мере приближения импульса к апоцентру. Очевидно, что

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau_1} = \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)\frac{u^-(\tau_1)}{\sqrt{A^2(\tau_1, c_1) + B^2(\tau_1, c_1)}}\frac{du^-}{d\tau}(\tau_1),$$
$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial c_1} = -\frac{2u_\alpha}{c_1} - \frac{2u^-(\tau_1)A(\tau_1, c_1) + B^2(\tau_1, c_1)}{c_1\sqrt{A^2(\tau_1, c_1) + B^2(\tau_1, c_1)}}.$$

Далее

$$\frac{du_\alpha}{d\tau_1} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial c_1}\frac{dc_1}{d\tau_1} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau_1} - \left(\frac{c_1 - c}{u}\right)\frac{\partial u_\alpha}{\partial c_1}\frac{du^-}{d\tau_1}.$$

При $u^-(\tau_1) \approx u_\pi$ будем иметь $A(\tau_1, c_1) > 0$, и слагаемые в последней формуле будут иметь разные знаки. Если существует значение τ_1, для которого окажется $du_\alpha/d\tau_1 = 0$, то для определения эффективного управления исключительно радиусом апоцентра такое τ_1 следует рассматривать наряду с моментом прохождения через перицентр как кандидат для момента приложения импульса.

Вместе с тем, как видно из теоремы 2.4 и уравнения (2.10), приложение импульса, перпендикулярного радиусу КА, в точках орбиты, не лежащих на линии апсид, оставляет неизменным направление этой линии только при специальном подборе величины импульса. Наличие ограничения в виде требования сохранять направление линии апсид при манёврах может сделать не эффективным размещение точки приложения импульса вне линии апсид.

Отметим, что простое правило приложения импульса всегда в точках орбиты, расположенных на линии апсид, свободно от указанного недостатка и в любом случае будет вызывать нужное эволюционное изменение орбиты, а в ряде случаев будет глобально оптимальным.

6.2. Удельная тяга двигателя ограничена:

$$w_m \leq w(\tau) \leq w_M. \tag{6.6}$$

Из формулы (6.1) видно, что экстремальным значениям величины $U = U_{extr}$ (см. раздел 5) должны соответствовать такие же по смыслу экстремальные значения функции $w(\tau)$. При этом в задаче о формировании экстремальных значений периценира или апоцентра без дополнительных условий переключение функции $w(\tau)$ с одного экстремального значения на другое должно происходить в моменты прохождения КА линии апсид в соответствии с переключениями ступенчатой функции $U(\tau)$.

При решении задачи о получении точных значений радиусов перицентра или апоцентра следует учесть, что чем меньше значение u, тем эффективность приложения тяги w больше. Поэтому в таком случае целесообразно применить кусочно-постоянные функции управления вида

$$w_{2k} = \begin{cases} w_{extr}, & \tau \geq \tau_1, \\ 0, & \tau_{0i} \leq \tau < \tau_1, \end{cases} \quad w_{2k+1} = \begin{cases} w_{extr}, & \tau_{0i} \leq \tau \leq \tau_1, \\ 0, & \tau > \tau_1, \end{cases} \tag{6.7}$$

где w_{extr} – предельные значения управления w, τ_1 – искомый параметр. Другими словами, если движение происходит в направлении от перицентра к апоцентру, то нулевое управление следует применять в начале траектории, а если движение происходит от апоцентра к перицентру, то нулевое управление следует применять на конечном участке траектории.

В остальных случаях необходимо получить соответствующий экстремум функционала $U_i(\tau)$ по w для любого значения τ во всем интервале управления. В частности, если требуется обеспечить

$$\frac{c_i(\tau)}{c_0} - \frac{c_i}{c_0} = \int\limits_{\tau_{0i}}^{\tau} \frac{w}{c_0^2 u^3} d\tau = \max_{w}, \quad \forall \tau, \tag{6.8}$$

то должно быть $w \equiv w_M$ на всем полуинтервале управления, поскольку всегда $u > 0$.

В том случае, когда

$$\frac{c_i(\tau)}{c_0} - \frac{c_i}{c_0} = \int\limits_{\tau_{0i}}^{\tau} \frac{w}{c_0^2 u^3} d\tau = \min_{w}, \quad \forall \tau, \tag{6.9}$$

следует учитывать ограничение $U_i + U_i(\tau) \geq U_{inf}$. Поэтому

$$w = \begin{cases} w_m, & \int\limits_{\tau_{0i}}^{\tau} \frac{w_m}{c_0^2 u^3} d\tau > \frac{c_{inf}}{c_0} - \frac{c_i}{c_0}, \\ 0, & \int\limits_{\tau_{0i}}^{\tau} \frac{w_m}{c_0^2 u^3} d\tau \leq \frac{c_{inf}}{c_0} - \frac{c_i}{c_0}. \end{cases} \tag{6.10}$$

В случае ограниченной удельной тяги аналитические формулы, приведённые в разделе 5 для оценки радиусов апоцентра и перицентра, уже не будут справедливы, но полученное для данного случая управление будет лучшим из того, что двигатель может сделать в требуемом направлении тяги для решения поставленной задачи.

Дополнительные ограничения могут внести определённую специфику в стратегию выбора функции $w(\tau)$. Пусть, например, дополнительное ограничение связано с требованием обеспечить неподвижность в пространстве линии апсид. Четвертое уравнение системы (4.1) свидетельствует о том, что при сохранении знака функции $w(\tau)$ в окрестности точки пересечения космическим аппаратом линии апсид угловая скорость этой линии меняет знак вместе с $du/d\tau$. Тогда соответствующее включение управления w следует производить не в момент пересечения аппаратом линии апсид, а несколько раньше, в момент τ_1, для которого

$$0 < \left| \frac{\mathbf{r}(\tau_1) \cdot \mathbf{v}(\tau_1)}{r(\tau_1) v(\tau_1)} \right| << 1,$$

когда аппарат, находясь вблизи точки пересечения траектории с линией апсид, ещё не долетел до неё. После включения управления линия апсид начнет поворачиваться в соответствующую выбранному управлению сторону, а после пересечения линии апсид поворот будет происходить в обратном направлении. Выключение управления следует выполнить в момент $\tau_2(\tau_1)$, когда линия апсид вернется в исходное перед маневром положение после пересечения аппаратом линии апсид. На участках траектории, не попадающих в окрестность указанных зон включённого управления, должно быть выполнено $w = 0$. Получается аналог импульсного управления, когда импульс как бы «размазан» на интервале $[\tau_1, \tau_2]$. Заметим, что выбор момента τ_1 определяется тем, что управление не должно оказывать заметного воздействия на радиус точки пересечения с линией апсид, в окрестности которой включается управление. Его действие предназначено для противоположной точки пересечения траектории с линией апсид. Обеспечение точного значения перицентра или апоцентра достигается за счёт приближения к линии апсид или удаления от неё точки включения управляющего момента.

7. Уравнения движения КА с солнечным парусом

В качестве примера применения предложенного метода трансформации траектории рассмотрим движение КА с солнечным парусом в центральном поле тяготения Солнца. Сила светового давления на солнечный парус имеет вид [13]

$$\mathbf{w} = \sigma \frac{|\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}|(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})}{r^4} \boldsymbol{\nu}, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор материальной точки с началом в Солнце, r – его модуль, $\sigma = æS/m$ – характеристика интенсивности светового потока и отражательной способности плоского зеркального паруса, S – площадь паруса, m – масса КА, $æ \approx 9.28 \cdot 10^{-6}$Н/м^2, $\boldsymbol{\nu}$ – нормаль к плоскости солнечного паруса [14]. Здесь не имеет значения направление нормали $\boldsymbol{\nu}$, поскольку правая часть (7.1) не меняется при замене $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$. В дальнейшем предполагается, что $\sigma < \mu$.

Видим, что в рассматриваемом случае

$$w = \sigma \frac{|\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r}|(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})}{r^4}$$

зависит от $\boldsymbol{\nu}$, и управление движением возможно только посредством изменения направления вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Пусть вектор $\boldsymbol{\nu}$ компланарен плоскости орбиты, и угол θ, как и прежде, отсчитывается от вектора $\mathbf{r}$ к вектору $\boldsymbol{\nu}$ в кратчайшем направлении. Тогда система (3.6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{c}{c_0}\right) = \dfrac{\alpha}{c_0^2 u}, \\ \dfrac{d^2 u}{d\tau^2} + \dfrac{c^2}{c_0^2} u = \dfrac{\mu - \beta}{c_0^2}, \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{c}{c_0}. \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = -\dfrac{c}{|\mathcal{L}|^2 c_0 u^2} \left[\dfrac{c_0}{cu}\dfrac{du}{d\tau}(c^2 u + \mu)\alpha + (c^2 u - \mu)\beta\right], \\ \dfrac{d|\mathcal{L}|}{d\tau} = \dfrac{c}{u^2 |\mathcal{L}|}\left(c\alpha + \dfrac{c_0}{u}\dfrac{du}{d\tau}\beta\right)\dfrac{du}{d\tau}, \end{cases} \tag{7.2}$$

где

$$\alpha = \sigma|\cos\theta|\cos\theta\sin\theta, \quad \beta = \sigma|\cos\theta|^3, \quad w = \sigma|\cos\theta|\cos\theta. \tag{7.3}$$

8. Метод качелей для солнечного паруса

Примем, что нормаль к парусу мало отклоняется от направления радиус-вектора $\mathbf{r}$. Угол θ будем считать малой величиной и в правых частях уравнений (7.2) ограничимся членами первого порядка по углу θ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{c}{c_0}\right) = \dfrac{\sigma\theta}{c_0^2 u}, \\ \dfrac{d^2u}{d\tau^2} + \dfrac{c^2}{c_0^2}u = \dfrac{\mu-\sigma}{c_0^2}, \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{c}{c_0}, \\ \dfrac{d\psi}{d\tau} = -\dfrac{c\sigma}{|\mathcal{L}|^2 c_0 u^2}\left[\dfrac{c_0}{cu}\dfrac{du}{d\tau}(c^2u+\mu)\theta + (c^2u-\mu)\right], \\ \dfrac{d|\mathcal{L}|}{d\tau} = \dfrac{c\sigma}{u^2|\mathcal{L}|}\left(c + \dfrac{c_0}{u}\dfrac{du}{d\tau}\theta\right)\dfrac{du}{d\tau}. \end{cases} \tag{8.1}$$

В этих уравнениях непосредственному влиянию управления солнечным парусом подвержена секторная скорость аппарата, и уже через неё осуществляется управление радиальной составляющей движения. Первые три уравнения системы (8.1) аналогичны соответствующим уравнениям системы (4.1) с той лишь разницей, что в первые три уравнения системы (8.1) вместо гравитационной постоянной μ входит модифицированная постоянная $\mu_s = \mu - \sigma$. Поэтому здесь, чтобы получить модификацию траектории, можно воспользоваться формулами раздела 5 и применить метод 6.1 реализации управления, приняв

$$w = \sigma\theta u^2, \quad \mu_s = \mu - \sigma \to \mu. \tag{8.2}$$

Приведём окончательные формулы, описывающие итерационную процедуру метода качелей. Для решения задачи 5.1 следует применить формулы

$$u_\alpha(i) = \frac{2\mu_s}{c_M^2(i)} - u_\pi(i) = \frac{2\mu_s}{c_0^2 U_M(i)} - u_\pi(i), \quad U = U_M, \quad i = 2k+1. \tag{8.3}$$

Решение задачи 5.2 даётся соотношениями

$$u_\alpha(i) = \frac{2\mu_s}{c_m^2(i)} - u_\pi(i) = \frac{2\mu_s}{c_0^2 U_m(i)} - u_\pi(i), \quad U = U_m. \tag{8.4}$$

Для решения задачи 5.3 используем формулы

$$u_\pi(i) = \frac{2\mu_s}{c_m^2(i)} - u_\alpha(i), \quad U = U_m, \quad i = 2k. \tag{8.5}$$

Для решения задачи 5.4 применяем формулы

$$u_\pi(i) = \frac{2\mu_s}{c_M^2(i)} - u_\alpha(i), \quad U = U_M, \quad i = 2k. \tag{8.6}$$

Далее для конкретизации управления формой траектории следует применить методику раздела 6.2. Вместе с тем четвёртое уравнение системы (8.1) показывает, что вращения линии апсид описанным в разделе 6.2 простым способом избежать не удается.

9. Логарифмическая спираль в поле тяготения Солнца

Рассмотрим задачи раскручивания траектории или её сворачивания с помощью управления ориентацией солнечного паруса. Задача раскручивания траектории сводится к последовательному решению оптимальных задач 5.1 и 5.4, и, как следует из формул (8.3) и (8.6), для её решения требуется выдерживать постоянное максимальное значение угла θ. Задача сворачивания траектории сводится к последовательному решению задач 5.2 и 5.3, и, как следует из формул (8.4) и (8.5), для её решения необходимо выдерживать постоянное минимальное значение угла θ. Получающаяся траектория в силу системы уравнений (7.2) будет зависеть от начальных условий. Обозначим

$$\Lambda(\theta) = \frac{\sigma|\cos\theta|^3 - \mu}{\sigma|\cos\theta|\cos\theta\sin\theta}. \tag{9.1}$$

Лемма 9.1. *Если $\Lambda(\theta)$ постоянно и удовлетворяет условию*

$$\Lambda(\theta) \geq 3 \cup \Lambda(\theta) \leq -5, \tag{9.2}$$

причём $\Lambda(\theta)\sin\theta < 0$, то найдутся начальные условия и постоянный параметр λ, для которых логарифмическая спираль $u = u_0 e^{\lambda\varphi}$ будет траекторией системы уравнений (7.2).

Доказательство. Из постоянства $\Lambda(\theta)$ следует постоянство угла θ. Предположим, что λ и угол θ остаются во время движения постоянными, а начальный момент соответствует $\varphi = \tau = 0$ [14]. Тогда $d\varphi/d\tau = c/c_0$ и

$$\frac{dc}{d\varphi} = \frac{\alpha}{cu_0}e^{-\lambda\varphi} \to \frac{c^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} = \frac{\alpha}{\lambda u_0}\left(1 - e^{-\lambda\varphi}\right) \to \frac{c^2}{c_0^2} = \frac{2\alpha}{\lambda u_0 c_0^2}\left(1 - e^{-\lambda\varphi}\right) + 1. \tag{9.3}$$

Далее,

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} = \lambda u_0 e^{\lambda\varphi}\frac{c}{c_0}, \quad \frac{d^2u}{d\tau^2} = \lambda^2 u_0 e^{\lambda\varphi}\frac{c^2}{c_0^2} + \frac{\alpha}{c_0^2}.$$

Второе уравнение (7.2) после подстановки полученных выражений и преобразований принимает вид

$$(\lambda^2+1)\left(\frac{2\alpha}{\lambda u_0 c_0^2}+1\right)u-(\lambda^2+1)\frac{2\alpha}{\lambda c_0^2}+\frac{\alpha}{c_0^2}=\frac{\mu-\beta}{c_0^2}.$$

Это уравнение должно тождественно выполняться. Поэтому коэффициент при u, а также и сумму остальных членов следует по отдельности приравнять нулю:

$$\lambda=-\frac{2\alpha}{u_0c_0^2},\quad \beta-\left(2\lambda+\frac{2}{\lambda}-1\right)\alpha=\mu. \tag{9.4}$$

Условия (9.4) обеспечивают реализуемость спиральной траектории. Процедура вычисления траекторных параметров состоит в следующем. Сначала в диапазоне $-\pi/2<\theta<\pi/2$ с учётом условия (9.2) выбирается некоторое значение угла θ, причём если требуется получить значение $\lambda>0$, то выбирается θ такое, чтобы $\sin\theta<0$, и наоборот, если требуется получить значение $\lambda<0$, то выбирается θ такое, чтобы $\sin\theta>0$. Далее из второго равенства (9.4) находим

$$\Lambda(\theta)=2\lambda+\frac{2}{\lambda}-1, \tag{9.5}$$

откуда видно, что подходящее значение λ существует, если выполнено условие (9.2). Тогда

$$\lambda(\theta)=\frac{1+\Lambda\pm\sqrt{(1+\Lambda)^2-16}}{2}, \tag{9.6}$$

при этом знаки $\Lambda(\theta)$ и $\lambda(\theta)$ совпадают. Как видно из формулы (9.1), если $\sigma<\mu$, то знаки Λ и $\sin\theta$ всегда будут разные, а если $\sigma\geq\mu$, то знаки Λ и $\sin\theta$ будут разными лишь, когда $|\cos\theta|\leq(\mu/\sigma)^{-3}$. При выполнении условия $\Lambda(\theta)\sin\theta<0$ по первой формуле (9.4) нетрудно подобрать подходящие значения u_0 и c_0.$\diamondsuit$

Теорема 9.1. *Пусть $\sigma<\mu$ и $\theta_m\leq\theta\leq\theta_M$, причём $\theta_M>0$, $\theta_m<0$. Тогда если $\Lambda(\theta_M)<-5$, то логарифмическая спираль вида $u=u_0e^{\lambda(\theta_M)\varphi}$ задаёт оптимальную траекторию разгона КА с начальными условиями $u_0c_0^2=-2\alpha(\theta_M)/\lambda(\theta_M)$, а если $\Lambda(\theta_m)>3$, то логарифмическая спираль вида $u=u_0e^{\lambda(\theta_m)\varphi}$ определяет оптимальную сворачивающуюся траекторию с начальными условиями $u_0c_0^2=-2\alpha(\theta_m)/\lambda(\theta_m)$.*

Доказательство. Из решения задач 5.1 и 5.4 видно, что для быстрейшего разгона КА необходимо выбирать $\theta=\theta_M$. Условия доказываемой теоремы говорят о том, что равенства (9.4), (9.6), обеспечивающие решение уравнений движения в виде логарифмической спирали, будут выполнены. Аналогично из решения задач 5.2 и 5.3 следует, что для быстрейшего сворачивания траектории необходимо выбирать $\theta = \theta_m$, а при выполнении условий теоремы оптимальной траекторией будет соответствующая логарифмическая спираль.$\diamondsuit$

Рассмотрим, как меняются характеристики оскулирующей орбиты вдоль логарифмической спирали.

Из последнего соотношения (9.3) видно, что

$$\lim_{\varphi\to\infty} c^2 = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\lambda u_o} + c_0^2, & \lambda > 0, \\ -\dfrac{2\alpha}{\lambda u_0 c_0^2} e^{-\lambda\varphi}, & \lambda < 0, \end{cases}$$

т.е. в случае раскрутки траектории ($\lambda < 0$) секторная скорость экспоненциально возрастает, а если траектория сворачивается ($\lambda > 0$), то секторная скорость стремится к конечному пределу.

Пятое уравнение системы (7.2) приводится к виду

$$\frac{d\mathcal{L}^2}{d\varphi} = \frac{2c_0}{u_0}(\beta + \lambda\alpha)\left[\left(\frac{2\alpha}{\lambda u_0} + 1\right)e^{-\lambda\varphi} - \frac{2\alpha}{\lambda u_0}e^{-2\lambda\varphi}\right],$$

откуда

$$\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}_0^2 = \frac{2c_0}{u_0}(\beta + \lambda\alpha)\left[\left(\frac{2\alpha}{\lambda^2 u_0} + \frac{1}{\lambda}\right)(1 - e^{-\lambda\varphi}) - \frac{\alpha}{\lambda^2 u_0}(1 - e^{-2\lambda\varphi})\right],$$

поэтому

$$\lim_{\varphi\to\infty} \mathcal{L}^2 = \begin{cases} \dfrac{2c_0}{u_0\lambda}(\beta + \lambda\alpha)\left(\dfrac{\alpha}{\lambda u_0} + 1\right) + \mathcal{L}_0^2, & \lambda > 0, \\ \dfrac{2c_0\alpha}{\lambda^2 u^2}(\beta + \lambda\alpha), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Другими словами, когда спираль раскручивается ($\lambda < 0$), квадрат длины вектора Лапласа возрастает обратно пропорционально квадрату величины u, а если траектория сворачивается ($\lambda > 0$), то длина вектора Лапласа стремится к конечному пределу.

При этом, как показывает четвёртое уравнение (7.2), линия апсид оскулирующей траектории будет монотонно вращаться в направлении, соответствующем выбранному значению угла θ. При этом

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\mathcal{L}^2 u^2}[\lambda(c^2 u + \mu)\alpha + (c^2 u - \mu)\beta].$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{\varphi\to\infty} \frac{d\psi}{d\varphi} = \begin{cases} 0, & \lambda > 0, \\ -\dfrac{\lambda^2}{2c_0\alpha}\left[\dfrac{2\alpha}{\lambda c_0^2} + \mu\dfrac{\lambda\alpha - \beta}{\lambda\alpha + \beta}\right], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для $\lambda < 0$ зависимость $\psi(\varphi)$ приближается к линейной с ростом φ.

На рис. 1 показано фото галактики Messier51 [16], сделанное телескопом Хаббл в 2008 г. Видны «рукава», напоминающие логарифмическую спираль и состоящие из разлетающихся звезд, предположительно, под действием светового давления. Это подтверждается некоторым искривлением правого рукава от вероятного светового давления со стороны соседней галактики. На рис. 2 для сравнения показана логарифмическая спираль.

Рис. 1. Галактика «Messier51»

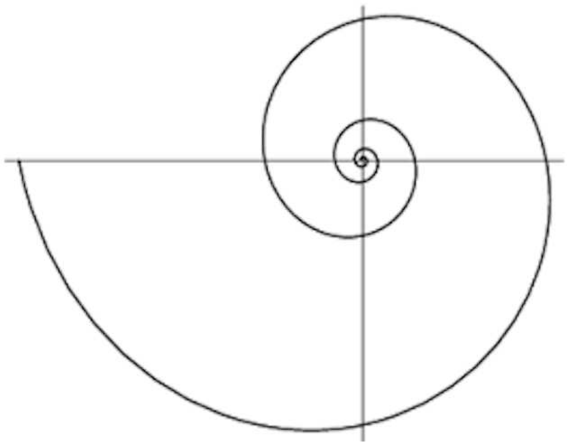

Рис. 2. Логарифмическая спираль

10. Влияние возмущений

Уравнение управляемого движения КА в центральном поле с учётом действия возмущений имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + w\boldsymbol{\nu} + \mathbf{G}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v}), \tag{10.1}$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ – позиционные возмущающие силы, а $\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})$ – диссипативные силы, например, сила сопротивления атмосферы, зависящая от скорости $\mathbf{v}$ спутника.

Будем считать, что орбита КА расположена достаточно глубоко в сфере действия планеты [11], но всё же вне плотной атмосферы, так что

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})\| \ll \frac{\mu}{r^2}.$$

Тогда возмущённое движение будет происходить в окрестности кеплеровой орбиты, и аналог первых трёх уравнений (3.6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{c}{c_0}\right) = \dfrac{w\sin\theta}{c_0^2u^3} + \dfrac{1}{c_0^2u^2}\mathbf{e}_c\cdot\{\mathbf{r}\times[\mathbf{G}(\mathbf{r})+\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})]\}, \\ \dfrac{d^2u}{d\tau^2} + \dfrac{c^2}{c_0^2}u = \dfrac{\mu}{c_0^2} - \dfrac{w}{c_0^2u^2}\cos\theta - \dfrac{1}{c_0^2u}\mathbf{r}\cdot[\mathbf{G}(\mathbf{r})+\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})], \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{c}{c_0}, \end{cases} \tag{10.2}$$

где $\mathbf{e}_c$ – единичный вектор направления вектора $\mathbf{c}$, которое при действии возмущений может изменяться в абсолютном пространстве.

В работе [8] доказано, что наличие диссипации не влияет на стратегию управления при использовании метода качелей, а влияет лишь на процесс протекания движения во времени. Вместе с тем позиционные силы во втором уравнении системы (10.2) не зависят явно от управления U. Следовательно, все выводы относительно структуры управления с целью управления радиусами апоцентра и перицентра, полученные выше для кеплеровского движения, остаются справедливыми и для возмущенного движения. Что касается компенсации влияния возмущений на направление линии апсид в плоскости орбиты, то с этой целью возможно периодическое применение радиальных импульсов (см. лемму 2.1) в районе перицентра или апоцентра, где радиальная составляющая скорости невелика. Для коррекции плоскости орбиты можно воспользоваться теоремой 2.3, выбрав для импульса наиболее удобное положение радиус-вектора КА на орбите.

Заключение

В данной работе исследовано влияние управления на векторные характеристики оскулирующей кеплеровской орбиты спутника в центральном поле тяготения. Найдены необходимые и достаточные условия на управление, обеспечивающие постоянство направления вектора Лапласа или его требуемый поворот в инерциальном пространстве. Предложен метод трансформации уже существующей орбиты КА к орбите с требуемыми значениями перицентра и апоцентра. Для двигателей с раздельным управлением величиной удельной тяги и её направлением предусмотрена возможность сохранить сформированное заранее направление вектора Лапласа. Метод основан на принципе оптимальной подкачки энергии в колебательную механическую систему с дефицитом управления по одной степени свободы. Представленные в работе стратегии управления двигателями с непрерывной и импульсной удельной тягой, а также солнечным парусом свидетельствуют о принципиальной применимости метода как для околопланетного маневрирования, так и для полетов в дальний космос. При этом могут применяться двигатели как большой, так и малой тяги. Если тяга двигателя достаточна, то формирование орбиты может быть закончено за один оборот КА на орбите, а если тяга мала, то для формирования орбиты может потребоваться несколько оборотов. Наличие возмущений не меняет стратегию управления. Предложенный метод прост в применении. На заключительном этапе прецизионного формирования заданной орбиты при действии возмущений может быть применён метод прямой пристрелки, как, например, в работе [6].

Следует отметить, что при движении в центральном поле тяготения без возмущений предложенный в работе метод будет сохранять свою эффективность даже при сколь угодно малых, но не нулевых значениях тяги двигателя. В то же время при наличии возмущений успех при использовании метода качелей, равно как и при применении других методов управления, возможен лишь тогда, когда величина тяги двигателя превосходит возмущающие силы.

Список литературы

1. *Маров М.Я., Хантресс У.Т.* Советские роботы в Солнечной системе. Технологии и открытия. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 612 с. – ISBN 978-5-9221-1741-8.

2. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полёта: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 448 с. – ISBN 5-02-014090-2

3. *Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G.* Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // Earth Space Institute Book Series, Gordon and Breach Publishers, London, 1998. 283 с.

4. *Егоров В.А.* О некоторых задачах полета к Луне // УФН, 1957, LXIII, с. 73-117.

5. *Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.* Универсальное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в солнечной системе // Космические исследования, 2020, том 58, № 4, с. 312-320. DOI: 10.31857/S0023420620040068

6. *Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.* Обобщение формулы Резерфорда и синтез траекторий с гравитационны-

ми маневрами // Известия РАН. Теория и системы управления, ISSN: 0002-3388, 2023, № 3, с. 120-132. DOI: 10.31857/S0002338823030058

7. *Охоцимский Д.Е.* Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космич. исслед., 1964, т. 2, № 6, с. 817-842.

8. *Голубев Ю.Ф.* Оптимизация колебаний механических систем с трением // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, ISSN (PRINT): 2686-9543, 2023, том 512, с. 18-26. DOI: 10.31857/S2686954323600052

9. *Голубев Ю.Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // Теория и системы управления, 2022, № 4, стр. 22-30.

10. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: Гос. изд-во техн.-теоретической литературы, 1952. 280 с.

11. *Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Издание 2-е, дополненное и переработанное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976, 864 с.

12. *Nacozy P.* The Intermediate Anomaly // Celest. Mech. 1977. Vol. 16, No 3. P. 309–313.

13. *Поляхова Е.Н.* Космический аппарат с солнечным парусом. – М.: Наука, 1986, 304 с.

14. *Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф.* Лекции по механике космического полета. Специальный курс. – М.: Издательство Московского университета, 2018, 152 с.

15. https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифмическая спираль. (Последнее посещение 23.02.2025)

16. *NASA, ESA, S. Beckwith (STScI), and The Hubble Heritage Team STScI/AURA).* Commons: Featured picture candidates/Image:Messier51 sRGB.jpg (Последнее посещение 23.02.2025)